

«Математика и проектирование»

Математические знания древних египтян



Выполнила проект:

Кручинина Мария Павловна

ученица 8 класса

МОУ Осташевская СОШ

Руководитель: Шорникова Светлана Павловна

*Кто хочет ограничиться
настоящим без знания прошлого,
тот никогда его не поймёт.*

Г.В. Лейбниц

Цель данной работы:

- 1)познакомиться с египетской системой счисления;
- 2)показать, что создание достаточно совершенных форм записи чисел и правил арифметических действий, обширные геометрические знания, сложившиеся на основе решения задач практического содержания, являются основой современной математики;
- 3)развивать интерес к математике как к предмету на основе знакомства с историческим материалом;
- 4)расширять кругозор учащихся, стимулировать их познавательную активность и творчество.

Материал проекта может быть использован на уроках математики, информатики, алгебры, геометрии и истории.

Во внеклассной деятельности эта информация интересна и полезна при проведении школьных туров предметных олимпиад и интеллектуальных конкурсов.

В данной работе рассматриваются достижения в области нумерологии, арифметики, геометрии Древнего Египта.

Подробно излагается материал о вычислительных методах, разъясняется решение задач «методом кучи», «правилом ложного положения».

Представляет интерес историческая информация о древних папирусах.

Присутствует раздел, посвящённый системам счисления.

Убедительно доказывается ошибка в формуле вычисления площади четырёхугольника.

Рассматривается аналогия между версией вывода значения числа π и содержанием древнеегипетского папируса.

Приводятся примеры задач.

В работе представлен лаконично изложенный, проиллюстрированный материал, интересный для чтения и изучения.

На мой взгляд, работа интересна тем, что через призму исторических фактов и археологических находок, раскрываются секреты счета древних египтян, вычислительные методы решения задач, достижения египетских геометров, приводятся примеры виртуозного практического использования математических основ древними цивилизациями, обобщается и систематизируется информация о папирусах и таинстве развития науки, архитектуры и живописи.

Математические расчеты и компьютерное моделирование позволило подтвердить гипотезу об аналогии между версией вывода значения числа π и содержанием древнеегипетского папируса. В разделе Арифметика представлены задачи из папируса и определены их темы в современных разделах математики, доказывающие неординарность ученых того времени.

Мне хотелось доказать, что экспериментальная и практическая направленность научных открытий древних египтян навсегда обеспечила привлекательность математических папирусов и истории Древнего Египта.

Содержание

- ▶ Введение
- ▶ Система записи чисел
- ▶ Математические знания древних египтян
- ▶ Методы вычислений
- ▶ Успехи египетских геометров
- ▶ Ошибка в формуле площади четырёхугольника
- ▶ Версия появления первого приближённого числа π
- ▶ Арифметика
- ▶ Заключение
- ▶ О проекте
- ▶ Литература

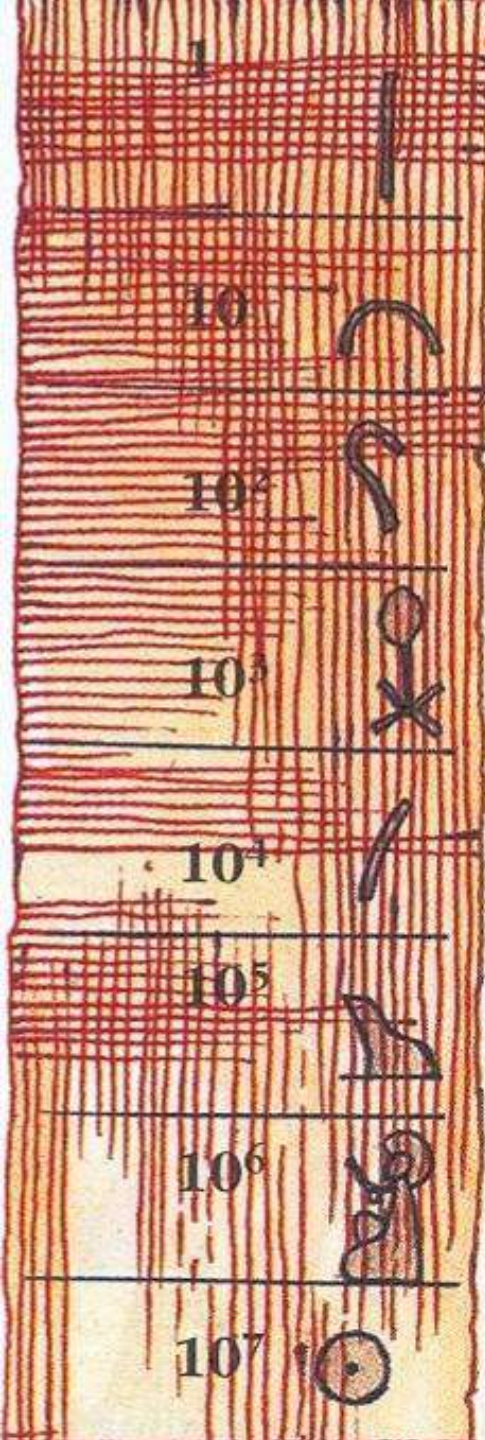


Введение

В старых книгах по арифметике, кроме четырех основных действий, упоминается и пятое – *нумерология*. Нумерология (счисление) была одной из первых проблем, с которой столкнулись люди при построении арифметики. Ведь чтобы работать с числами, надо прежде научиться называть их и записывать. Недаром ведь говорят: «**Без названия нету знания**». Процесс возникновения и развития различных систем счисления был долгим и сложным. Каждая цивилизация разрабатывала и использовала ту форму счета и записи чисел, которая была достаточно приспособлена к решению стоящих перед ней задач. Мы расскажем, как в Египте развивалась математика и впервые были написаны книги об арифметике.



СИСТЕМА ЗАПИСИ ЧИСЕЛ



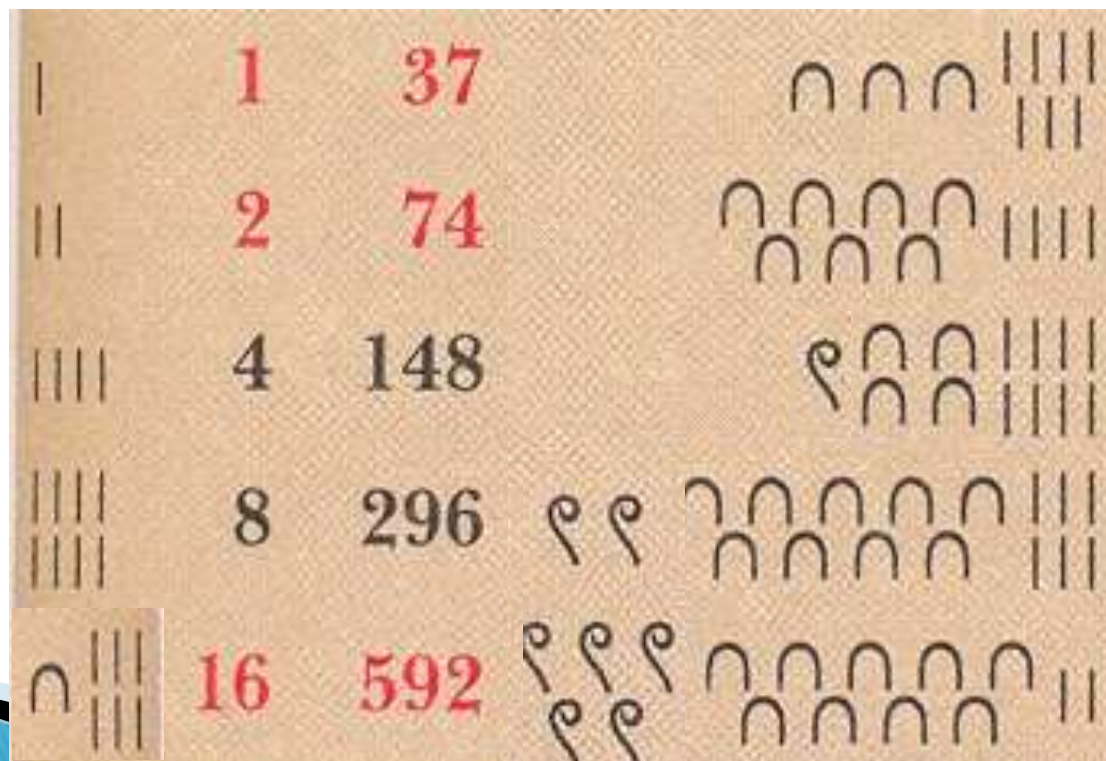
- ▶ Система записи чисел появилась 3200 лет до н.э.
- ▶ Древнеегипетская письменность основана на иероглифах.
- ▶ Числа египтяне высекали на стенах надгробных камер и на свитках папируса.



- ▶ Египтяне пользовались непозиционной десятичной системой, в которой числа от 1 до 9 обозначались соответствующим числом вертикальных чёрточек, а для последовательных степеней числа 10 вводились индивидуальные символы.



- ▶ Египтяне писали справа налево и младшие разряды числа записывались первыми, так что в конечном счёте порядок цифр соответствовал нашему.



► Появление папируса и иератического письма.

1–9	1 4 4 4 7 4 4 4 4
10–90	1 2 3 4 5 6 7 8 9
100–900	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1,000–9,000	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Иератические знаки для обозначения цифр

- В иератическом письме уже есть отдельные обозначения для цифр 1–9 и сокращённые значки для разных десятков. Особые значки обозначали дроби вида $1/n$.

Египетские числа

Иероглифы Иератические Демотические

1	⋮	⋮	⋮
2	⋮⋮	⋮⋮	ϣ
3	⋮⋮⋮	⋮⋮⋮	ϩ
4	⋮⋮⋮⋮	ϥ	ϥ:ϥ
5	⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮	ϥ⋮
6	⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮	ϥ⋮⋮
7	⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮
8	⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮
9	⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮
10	ϥ	ϥ⋮	ϥ⋮
11	ϥ⋮	ϥ⋮⋮	ϥ⋮⋮
15	ϥ⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮
20	ϥ⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮
30	ϥ⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮
40	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮
50	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮
60	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮
70	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮
80	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮
90	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮	ϥ⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮⋮

Этапы
развития
системы
обозначения
египетских
чисел



$$= \frac{1}{12}$$

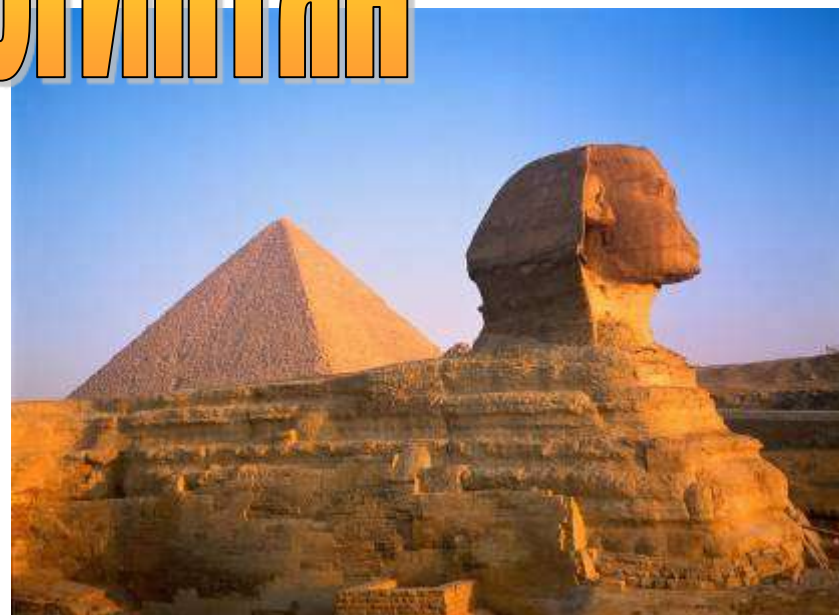
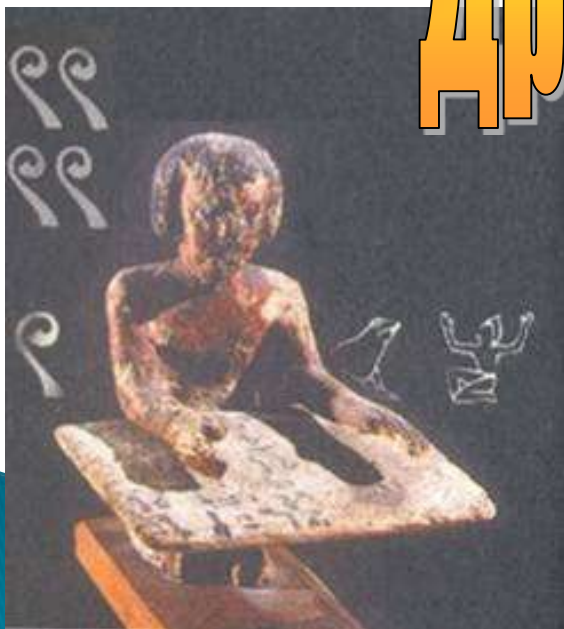
$$= \frac{1}{237}$$

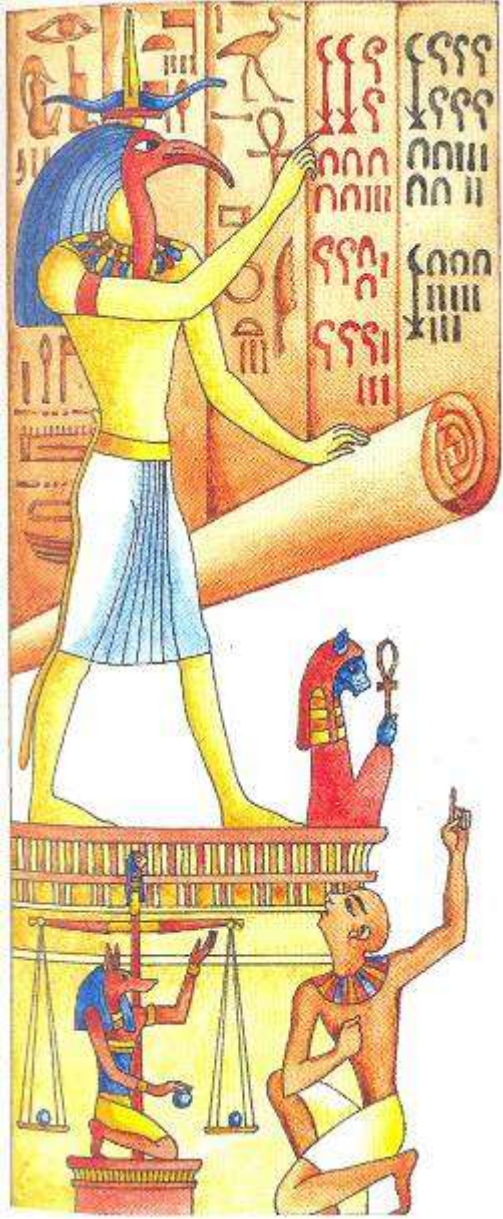
- ▶ Для каждого из чисел от 1 до 9 и для каждого из первых девяти квадратных чисел 10, 100 и т.д. использовался специальный опознавательный символ. Дроби записывались в виде суммы дробей с числителем, равным единице. С такими дробями египтяне производили все четыре арифметические операции, но процедура таких вычислений оставалась очень громоздкой



Математические знания

древних египтян





Древние египтяне были замечательными инженерами. В Египте насчитывается около 80 пирамид, расположенных неровной полосой на западном берегу Нила. Еще в древности говорили: *«Всё боится времени, но само время боится пирамид»*. Строили они и другие здания – дворцы, храмы, лабиринты и т. д. На кораблях из папируса совершали далекие путешествия.



Египтяне использовали математику, чтобы вычислять вес тел, площади посевов, объёмы водохранилищ, размеры податей и количество камней, требуемое для возведения сооружений.

Главной областью применения математики была астрономия, точнее расчеты, связанные с календарем. Календарь использовался для определения дат религиозных праздников и предсказания ежегодных разливов Нила.

Кроме замечательных построек до нас дошли многие записи и даже рукописи, сделанные древними египтянами.



Некоторые из них высечены на камне, а большая часть написана чернилами на папирусе – плотной бумаге, которую египтяне делали из тростника.

Некоторые из египетских рукописей специально посвящены математике.

Математические папирусы, раскрывающие тайну древнеегипетского счёта

Египетский
математический
кожаный
свиток

Московский
папирус

Деревянная
табличка
Ахмима

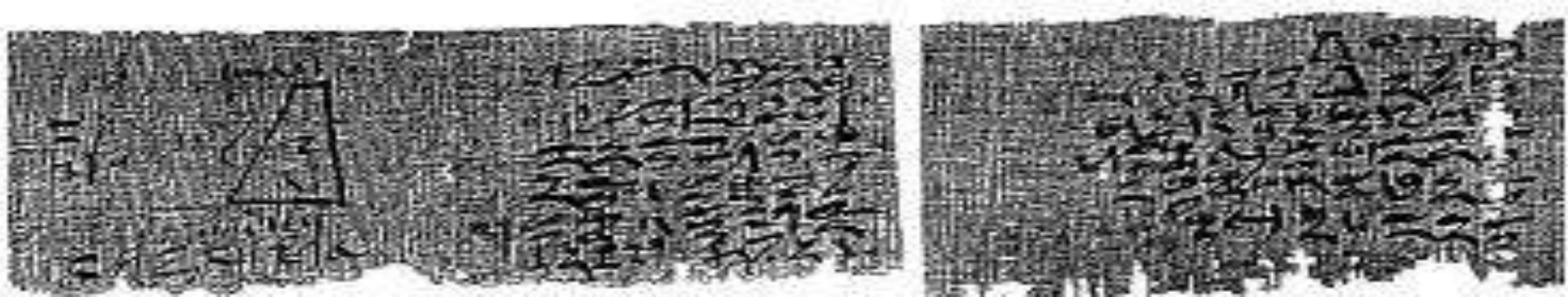
Папирус
Ринда
(Ахмеса)

- ▶ Математические сведения, излагаемые в папирусах, появились около 3500 лет до н.э.



Московский папирус

Московский математический папирус, или математический папирус Голенищева, является одним из древнейших известных современности математических текстов. Он был составлен 1850 лет до н.э., следовательно, превосходит по древности другой знаменитый древнеегипетский текст, написанный лет на двести – триста позднее, папирус Ринда (Ахмеса).



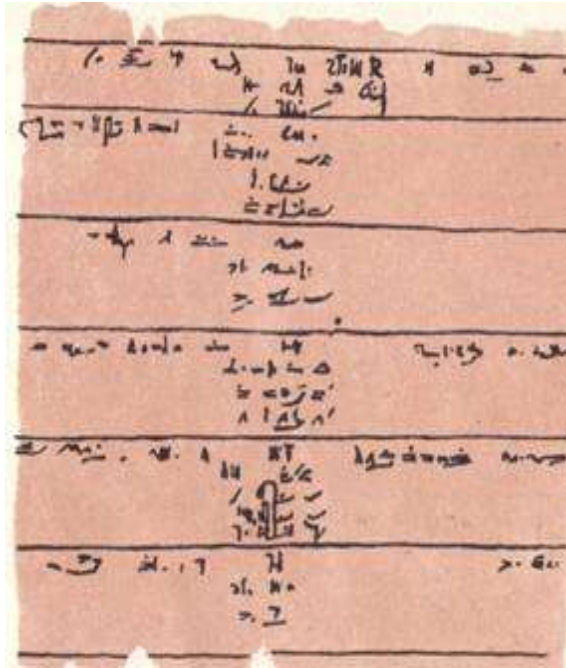
- ▶ Первым владельцем этого папируса был один из основателей русской египтологии Владимир Семёнович Голенищев. Ныне папирус находится в Москве – в музее изобразительных искусств имени А.С.Пушкина.
- ▶ Свиток длиной 5,44 м и шириной 8 см включает 25 задач.
- ▶ Большинство задач Московского математического папируса посвящены практическим проблемам, связанным с применением геометрии.



Папирус Ринда (Ахмеса)



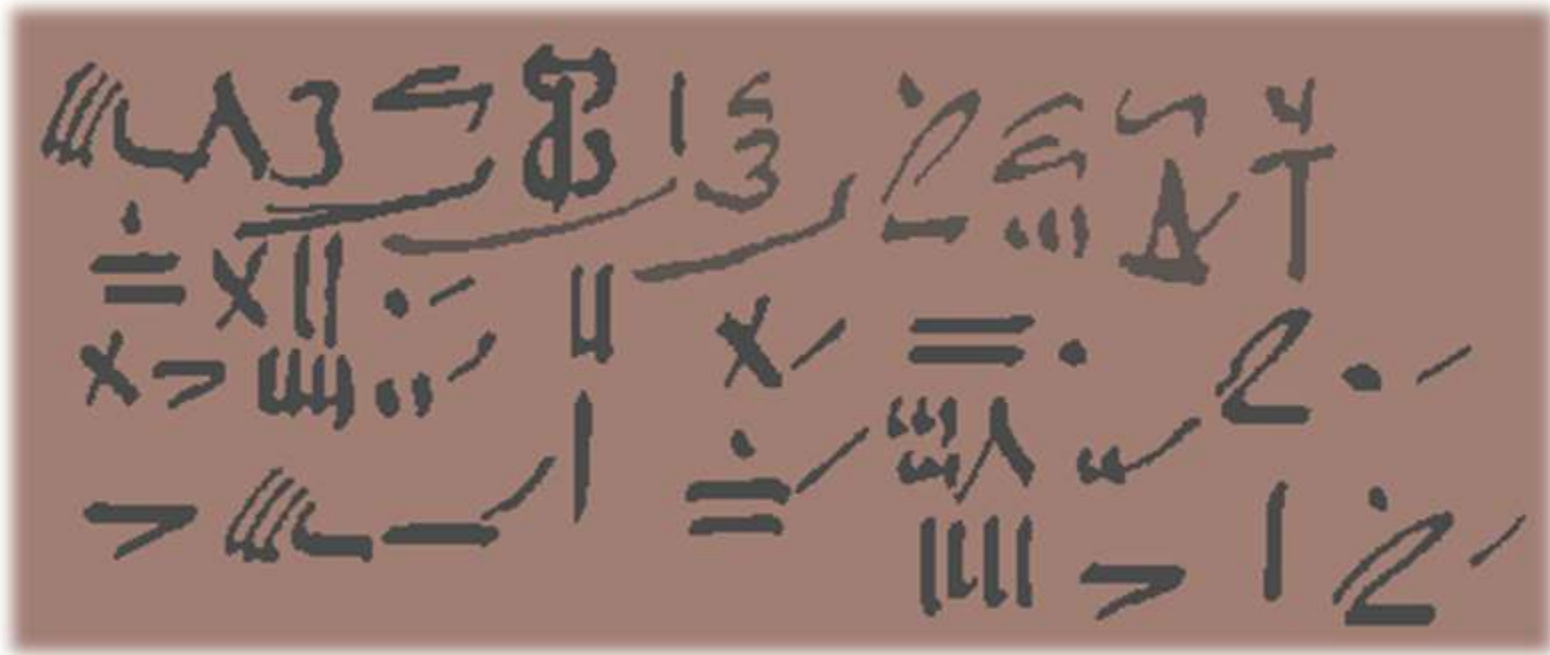
- ▶ Назван так по имени первого владельца.
- ▶ Он был найден в 1858 году, расшифрован и издан в 1870 году.
- ▶ Рукопись представляет собой узкую (33 см) и длинную (5,25 м) полоску папируса, содержащую решения 84 задач на различные вычисления, которые могут понадобиться на практике.



- ▶ Большая часть задач папируса Ахмеса относится к арифметике: задачи на арифметические действия, на пропорциональное деление и т.д. При этом сгруппированы они не по математическому содержанию, а по тому, о чем идет в них речь.
- ▶ Задачи папируса Ахмеса относятся к действию с дробями, определению площади треугольника, прямоугольника, трапеции и круга (последняя принимается равной площади квадрата со стороной $\frac{8}{9}$ диаметра), объёма прямоугольного параллелепипеда и цилиндра.



Задачи на пропорциональное деление, определёние соотношения между количеством зерна и получением из него хлеба или кружек пива, на различие в сортах зерна.



- ▶ Одна часть папируса Ахмеса хранится в Британском музее, в Лондоне, а другая – в Нью-Йорке.



МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ



Сложение и вычитание

- ▶ Все правила счёта древних египтян основывались на умении складывать и вычитать, удваивать числа и дополнять дроби до единицы.



- ▶ Со сложением и вычитанием у египтян особых затруднений не было. Египетскому писцу, чтобы сложить $\begin{array}{c} \text{||||} \\ \text{||} \end{array}$ и $\begin{array}{c} \text{|||} \\ \text{||} \end{array}$ (32 и 23)

достаточно было аккуратно перерисовать столько раз знак \cap , сколько он встречается в обеих записях, а потом сделать то же самое со знаком $|$.

$\begin{array}{c} \text{|||||} \\ \text{|||} \end{array} \begin{array}{c} \text{|||} \\ \text{||} \end{array}$

Получилась запись, из которой видно, что ответом служит число **75**.



- ▶ Ну а если знаков \cap или $|$ получилось больше девяти, надо было заменить десяток этих знаков одним знаком высшего разряда.

Умножение и деление

- ▶ Умножение и деление происходило при помощи особой операции – многократного удвоения чисел.

Любопытно, что похожий способ умножения применялся через несколько тысяч лет русскими крестьянами.

▶ Например, если надо умножить число **34** на **5**, то поступали так: умножали **34** сначала на **2**, потом еще раз на **2**. Записывали столбиками (конечно, в своих обозначениях чисел):

1	34
2	68
4	136

▶ Так как $5=4+1$, то для получения ответа оставалось сложить числа, стоящие в правом столбике против цифр **1** и **4**.

$$136+34=170$$

▶ Таким образом можно было умножить число **34** на **7**:

$$34 \cdot 7 = 34 \cdot (4+2+1) = 136 + 68 + 34 = 238$$

Дробь

Египетская дробь — в математике сумма нескольких дробей вида (так называемых *аликвотных* дробей). Другими словами, каждая дробь суммы имеет числитель, равный единице, и знаменатель, представляющий собой положительное целое число.

$$\frac{1}{n}$$

У египтян были специальные обозначения для дробей $1/3$ и $2/3$, не совпадавшие с обозначениями для других дробей.

Египетская дробь представляет собой

положительное рациональное число вида a/b .

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Можно показать, что каждое положительное рациональное число может быть представлено в виде египетской дроби. Сумма такого типа использовалась математиками как определение для дробей, начиная со времён древнего Египта до средневековья.

$$= \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{237}$$

Складывать такие дроби было неудобно. Ведь в оба слагаемых могут входить одинаковые доли, и тогда при сложении появится дробь вида

$$\frac{2}{n}$$

А таких дробей египтяне не допускали.

Поэтому папирус Ахмеса начинается с таблицы, в которой все дроби такого вида от $\frac{2}{5}$ до $\frac{2}{99}$ записывали в виде сумм долей. С помощью такой таблицы выполняли и деление чисел.

Так делили
5 на 21:

$$\begin{aligned} \frac{5}{21} &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{21} + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42} \right) + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42} \right) = \\ &= \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42} = \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} \end{aligned}$$

В современной математике вместо египетских дробей используются простые и десятичные дроби, однако египетские дроби продолжают изучаться в теории чисел и истории древней математики.


Задача из папируса Ахмеса

Разделить 7 хлебов между 8 людьми.

- ▶ Если резать каждый хлеб на 8 частей, придется провести 49 разрезов.
- ▶ По-египетски эта задача решалась так: дробь $7/8$ записывали в виде долей

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

- ▶ Значит, каждому человеку надо дать полхлеба, четверть хлеба и восьмушку хлеба; поэтому четыре хлеба разрезали пополам, два хлеба – на 4 части и один хлеб – на 8 долей, после чего каждому давали его часть.


$$= \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{237}$$

«Метод кучи»

Египетские математики умели брать корень и возводить в степень, были знакомы с арифметической и геометрической прогрессией.

В древнем Египте про то, что неизвестные числа можно обозначать буквами, а потом работать с ними как с неизвестными величинами, и не подозревали.

Однако египтяне придумали метод решения таких задач, который называли **«методом кучи»** (по-египетски – «аха»).

Задача.

Летела стая гусей, а навстречу им еще гусь. Гусь говорит: «Здравствуйте, сто гусей». А ему отвечают: «Нас не сто гусей, а меньше. Если бы нас было столько, да ещё столько, да ещё полстолько, да ещё четверть столько, да ты, гусь, вот тогда нас было бы сто гусей». Сколько гусей было в стае?





Решение.

Египетский писец Ахмес сказал бы: «Считай с четырех». Это значило: «Считай, что в стае было четыре гуся». Тогда простой подсчет показывает, что столько, да ещё столько, да ещё полстолько, да ещё четверть столько дают $4+4+2+1=11$ гусей, а нужно получить не **11**, а **99** гусей ($100-1$). Так как $99:11=9$, то надо взятое вначале число **4** умножить на **9**.

Тогда получится правильный ответ **36**.

Поскольку вначале делается неправильное предположение, что число гусей равнялось четырем, этот способ называется теперь **«Правилом ложного положения»**.





Успехи египетских геометров

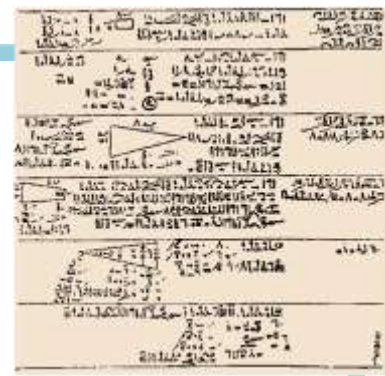


Геометрия зародилась в Древнем Египте до 1700 до н.э.

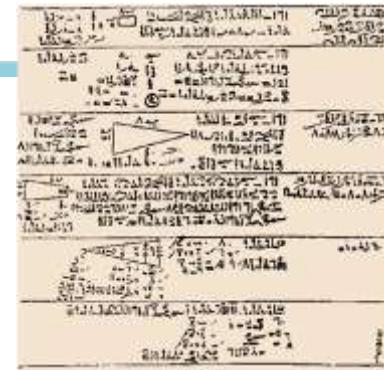
В области геометрии египтяне знали точные формулы для площади прямоугольника, треугольника и трапеции. Площадь произвольного четырёхугольника со сторонами a , b , c , d вычислялась приближённо как

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

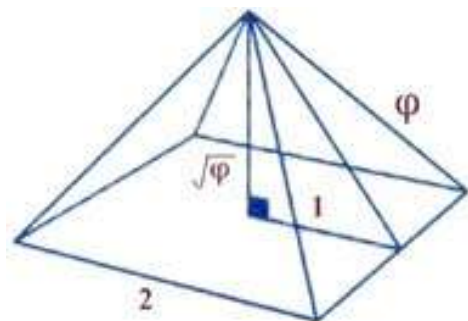
Эта грубая формула даёт приемлемую точность, если фигура близка к прямоугольнику.



Площадь круга вычислялась, исходя из предположения, что $\pi = 3,1605$ (погрешность менее 1%).



Первыми в истории определяли площадь кривой поверхности (полушария или боковой поверхности полуцилиндра). Ещё одна ошибка содержится в Акмимском папирусе: автор считает, что если радиус круга A есть среднее арифметическое радиусов двух других кругов B и C , то и площадь круга A есть среднее арифметическое площадей кругов B и C .



Пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют,

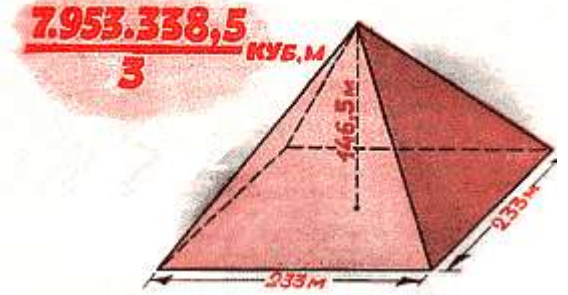
что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании.

Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.



Египтяне знали точные формулы для объёма параллелепипеда и других цилиндрических тел, пирамиды и усечённой пирамиды.

Пусть мы имеем правильную усечённую пирамиду со стороной нижнего основания t , верхнего b и высотой h ; тогда объём вычислялся по оригинальной, но точной формуле:

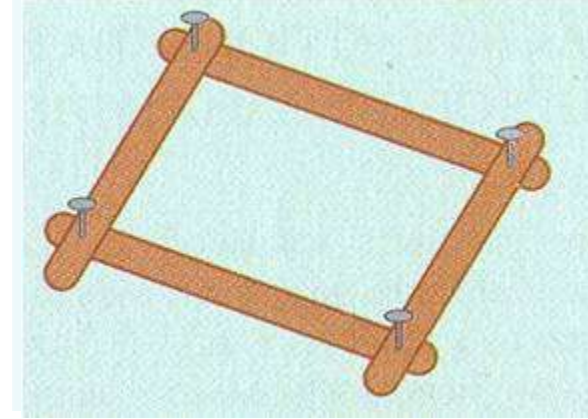


$$V = \frac{h \cdot (t^2 + bt + b^2)}{3}$$

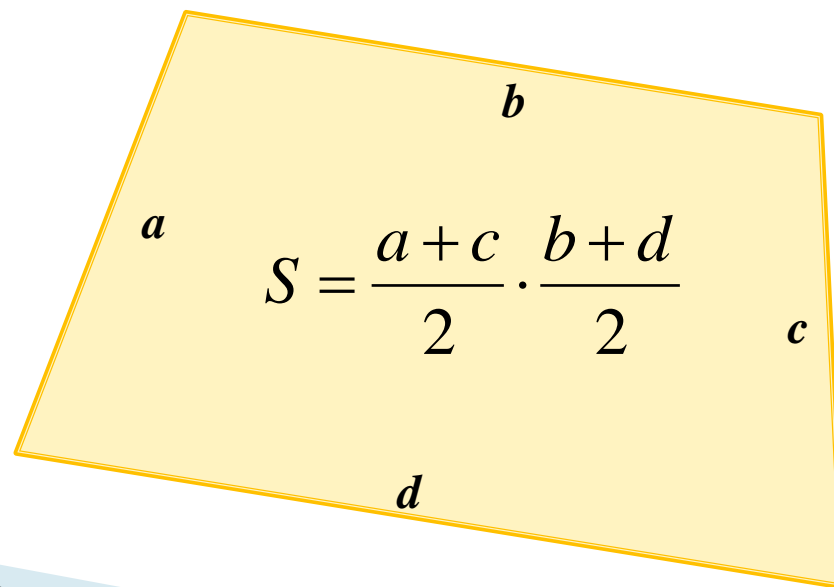
О более раннем ходе развития математики в Египте нет никаких сведений. О более позднем, вплоть до эпохи эллинизма, тоже. К сожалению, египтяне писали на папирусе, который сохранялся плохо, потому наши знания о математике Египта малы. Вероятно, она была развита лучше, чем можно представить, исходя из дошедших до нас документов – не зря ведь греческие математики учились у египтян. После воцарения Птолемеев начинается чрезвычайно плодотворный синтез египетской и греческой культур.

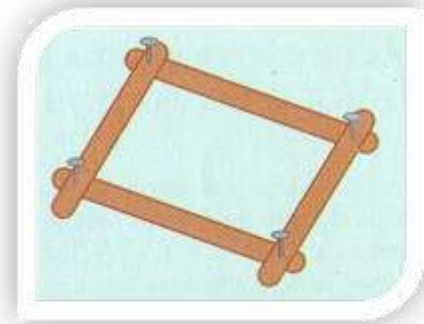


Ошибки в формуле площади четырёхугольника



- ▶ В папирусе Ринда приводится такое правило для вычисления площади четырёхугольника: полусумму длин двух противоположных сторон четырёхугольника умножить на полусумму длин двух других сторон.



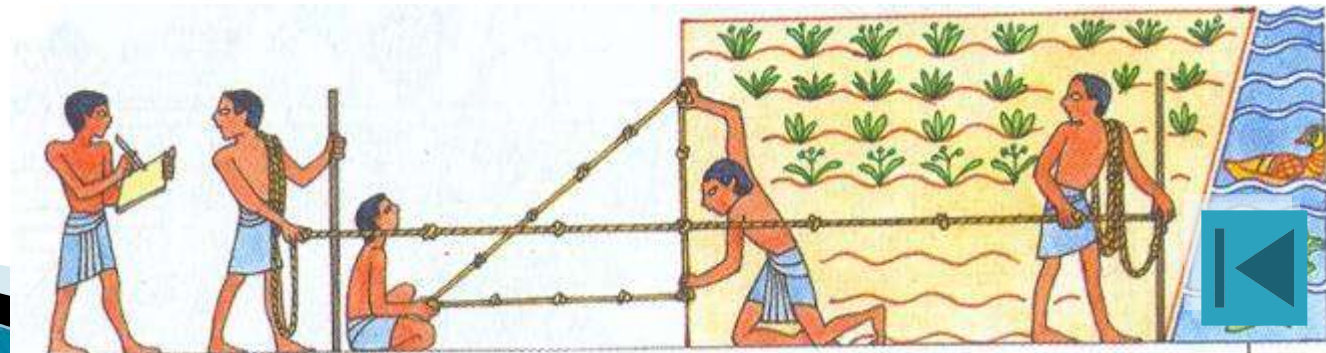


▶ **Но это правило неверно!**

Даже для параллелограмма оно не даёт истинного значения площади. Ведь если изготовить шарнирный прямоугольник, а потом сжать его так, чтобы он превратился в параллелограмм общего вида, то длины сторон не изменятся, а площадь уменьшится. Вообще для любого четырёхугольника со сторонами a , b , c , d имеет место неравенство:

$$S \leq \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}$$

- ▶ В равенство оно превращается только для прямоугольника. Иначе говоря, египетское правило справедливо (и то неточно, а лишь приближенно), когда четырёхугольник мало отличается от прямоугольника. По-видимому, именно такую форму имело большинство земельных участков египтян, и для них ошибка, заключённая в этом правиле, была незначительна.

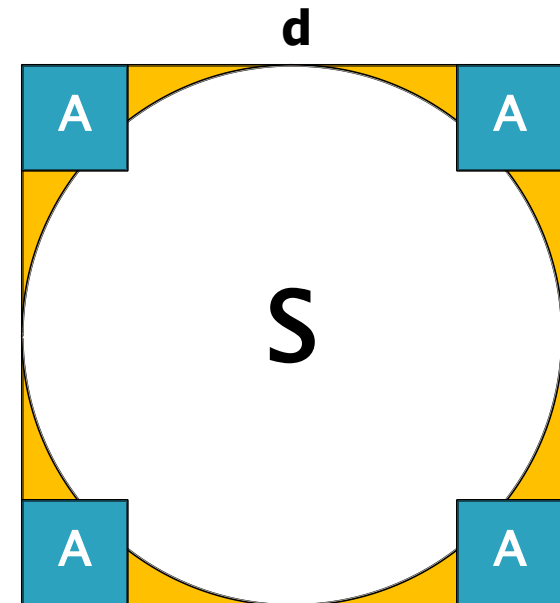


Версия появления
первого приближённого
числа π

Гипотеза математика А.Е. Раика

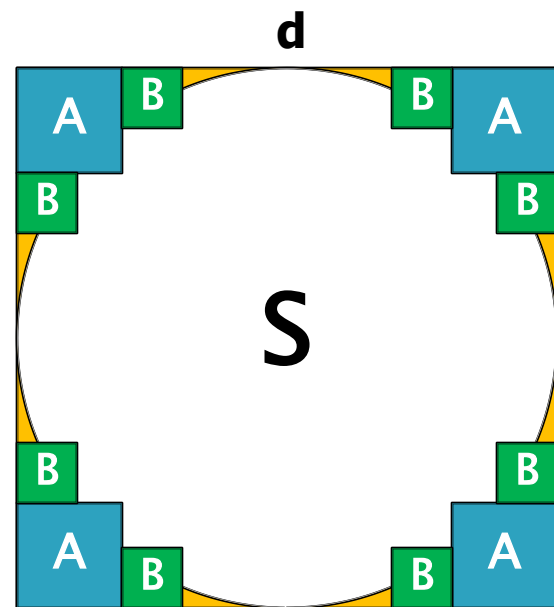
- ▶ В первом приближении площадь круга S равна разности между площадью квадрата со стороной d и суммарной площадью четырёх малых квадратов A со стороной $\frac{1}{6}d$:

$$S \approx d^2 - 4\left(\frac{1}{6}d\right) = d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}d^2 .$$



- ▶ Далее из полученной площади нужно вычесть площадь восьми квадратов В со стороной $\frac{1}{9}d$, и тогда площадь круга будет приближённо равна следующему выражению:

$$S = \left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 - 8\left(\frac{1}{9}d\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9}d^2 =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 d^2$$



- ▶ В пользу изложенной здесь гипотенузы свидетельствуют аналогичные вычисления одной из задач Московского папируса, где предполагается сосчитать

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

В Древнем Египте для вычисления площади круга использовалось правило $S = (8d/9)^2$, что соответствует значению $\pi = 4 \cdot (8/9)^2 \approx 3,1605$. Ошибка при этом составляет менее 1 %.



Архитектура



▶ Арифметика того времени была наукой экспериментальной. Вначале был накоплен опыт на ста задачах, потом метод проверен ещё на двухстах, только убедившись, что он работает, делали вывод: он верен. Разумеется, египтянам счёт был нужен не сам по себе. С его помощью они решали различные задачи, возникавшие у них в хозяйственных и военных делах. Мы расскажем про арифметические задачи, которые тогда решали.

«Папирус Ахмеса»

Задачи

- 1.** Приходит пастух с 70 быками. Его спрашивают:
- Сколько приводишь ты из своего многочисленного стада?
- Пастух отвечает:
- Я привожу две трети от трети скота. Сочти, сколько быков в стаде.

Умножение и деление обыкновенных дробей

2. Некто взял из сокровищницы $1/13$. Из того, что осталось, другой взял $1/17$. Оставил в сокровищнице 192. Мы хотим узнать, сколько было в сокровищнице первоначально?

Умножение и деление обыкновенных дробей

3. В доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый колос дает 7 растений, на каждом растении вырастает 7 мер зерна. Сколько всех вместе?

**Геометрическая
прогрессия**

19607



Заключение

Многие исследователи отмечают достаточно низкий уровень теоретической математики в древнем Египте. Нет попытки доказательства. Задачи и решения, приведенные в папирусах, сформированы чисто рецептурно, без каких бы то ни было объяснений. Египтяне имели дело только с простейшими типами квадратных уравнений, арифметической и геометрической прогрессиями. Египетская математика не располагала общими методами; весь свод математических знаний представлял собой скопление эмпирических формул и правил.



О проекте

Я изучаю Древний Египет уже два года.

Благодаря вашему проекту, я поняла, что история Древнего Египта без рассмотрения развития математики «однобока».

Рассвет египетского искусства, строительства и архитектуры, земледелия и производства подкреплялся не только большим трудолюбием и целеустремлённостью египтян, но и кропотливым изучением математики, сбором общих правил и формул, проверенных на практике и передаваемых из поколения в поколение.



Литература



- ▶ Хрестоматия по истории Древнего Востока. М., 1997:
- ▶ Виленкин Н.Я. О вычислении объёма усечённой пирамиды в Древнем Египте. Историко-математические исследования, вып. 28, 1990г.
- ▶ Депман И.Я. Виленкин И.Я. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1999г.