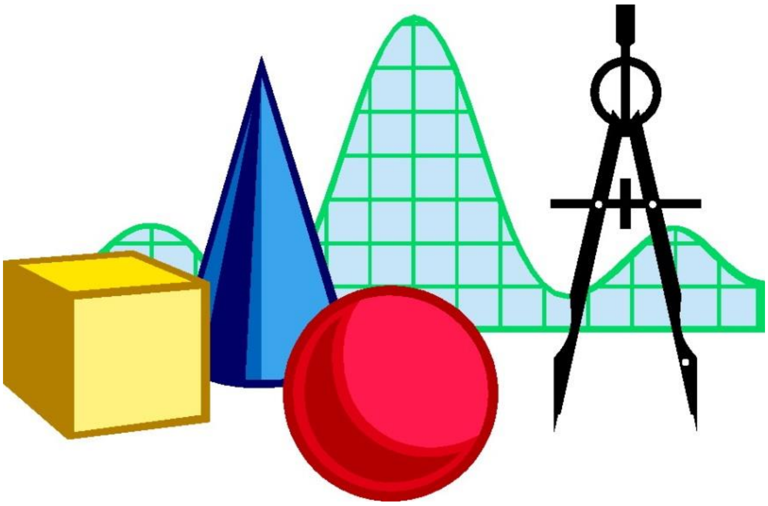
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Осташевская средняя общеобразовательная школа

Урок по математике 5 - 6 классы
на тему:
«Элементы геометрии»



Наименование учебного предмета: Математика

Уровень, ступень образования: Основная школа, 5-6 классы

Ф.И.О. учителя, составившего разработку данного урока Шорникова Светлана Павловна

Квалификационная категория Первая

Элементы геометрии

При введении и изучении отрицательных чисел удобно использовать координатную прямую, на которой они изображаются симметрично положительным числам. Поэтому, перед тем как перейти к изучению отрицательных чисел, целесообразно поговорить с учениками о центральной симметрии.

В задачах, номера которых не имеют обозначений, школьники не должны испытывать затруднений.

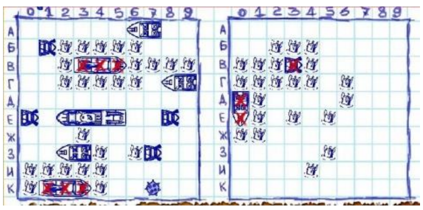
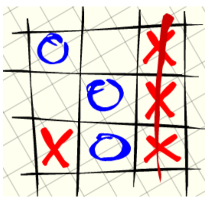
Значком «°» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с небольшими сложностями.

Задачи, которые полезно обсудить с учениками, имеют обозначение «•».

А «*» обозначены самые трудные задачи.

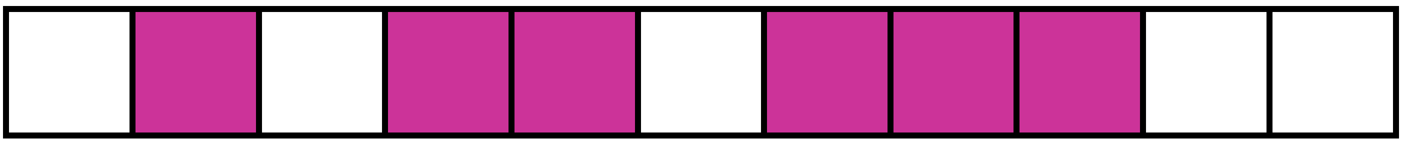
Центральная симметрия

Летом, когда на улице была плохая погода, Саша и Петя иногда играли дома. Оставшиеся пустыми страницы прошлогодних тетрадей по математике оказались хорошей площадкой для игр, таких как «Морской бой» и «Крестики-нолики».


и


А некоторые игры Саша с Петей придумывали сами. Вот одна из них.

1. В изображенной на рисунке строке, длина которой равна 11 клеткам, игроки по очереди закрашивают одну, две или три соседних клетки. Выигрывает тот из игроков, кто закрасит последнюю клетку.

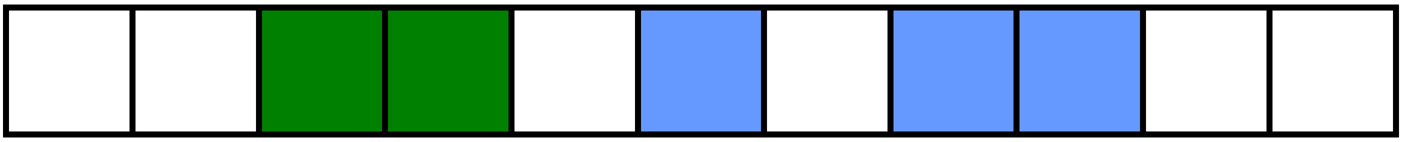


1) Сыграйте в эту игру два раза со своим соседом по парте. Пусть первый раз начнет сидящий слева, а второй раз – справа.

2) Кто, по вашему мнению, имеет больше шансов выиграть: тот, чей ход первый, или тот, кто ходит вторым?

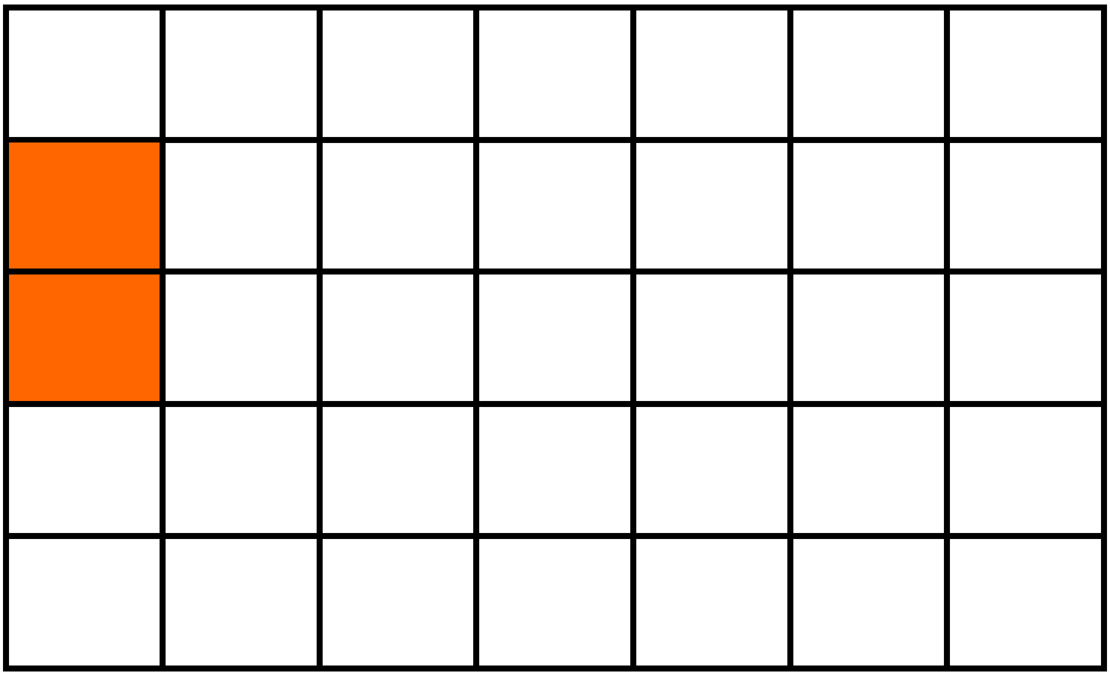
Комментарий. Ответ на второй вопрос требует создания правильной *стратегии* игры – плана, который приведет к победе.

Саша придумал следующую стратегию: первым ходом закрасить центральную клетку, а затем как бы повторять ходы Пети, но с другой стороны от середины строки. Так, например, если Петя закрашивает две левые клетки, то нужно закрасить две правые, то есть закрашивать клетки, которые находятся на таком же расстоянии от центральной клетки, что и закрашенные Петей, но с противоположной от нее стороны.



2. Сыграйте два раза по Сашиной стратегии.

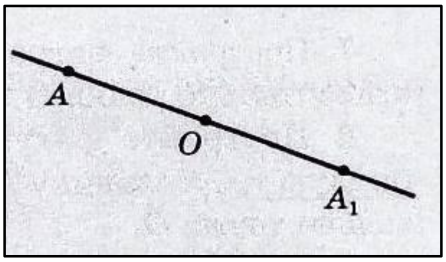
3. Сыграйте друг с другом в более сложную игру с прямоугольником 5×7 клеток, в котором можно закрашивать одноклеточные квадратики, двух- и трехклеточные прямоугольники. Придумайте свою стратегию игры и проверьте ее, сыграв со своим соседом по парте.



Комментарий. Вероятно, в вашем плане тоже нужно сначала закрасить центральную клетку, а затем «повторять» ходы соперника по другую сторону от центральной клетки.

В геометрии для таких действий есть специальное название.

Пусть в плоскости выбрана точка O.



1. Возьмем какую-нибудь точку A и проведем прямую AO.

2. Отложим на этой прямой от точки O отрезок OA_1, равный отрезку AO, но по другую сторону от точки O.

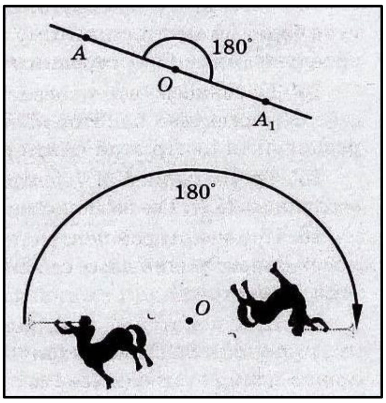
Точки A и A_1 называют ***симметричными*** относительно точки O, которую называют ***центром симметрии***. Слово «симметрия», как и многие другие математические термины, пришло к нам из Древней Греции, где оно означало «соразмерность».

Сашина стратегия игры заключалась в том, чтобы закрашивать клетки центрально симметричные тем клеткам, которые закрасил Петя. Поскольку нельзя закрасить клетку, симметричную центральной клетке прямоугольника. Саша первым своим ходом как бы выводил ее из игры.

4˙. Придумайте стратегию закрашивания 10-клеточного прямоугольника. Первый или второй играющий выигрывает при правильной стратегии? Как в этой игре «захватить» центр симметрии?

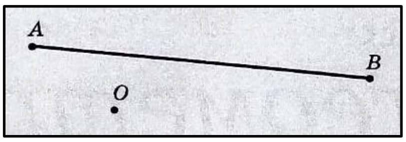
5˙. Кто, первый или второй играющий, должен выиграть при закрашивании прямоугольника:

1) 6×9; 2) 6×8 клеток?



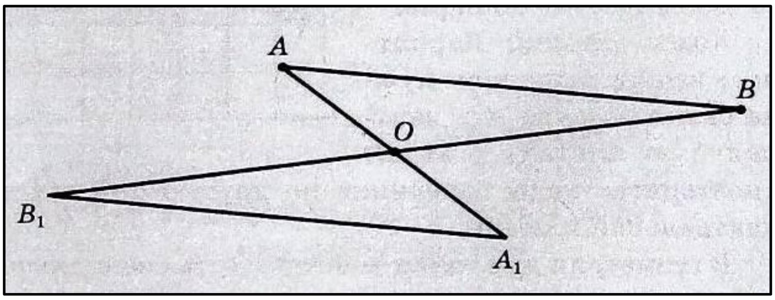
Точку O – центр симметрии – можно рассматривать как вершину развернутого угла AOA_1. Как вы знаете, величина развернутого угла равна 180°, а значит, точку A_1 можно получить, повернув точку A на 180° вокруг точки O.

Если же повернуть на 180° вокруг центра все точки какой-нибудь фигуры, то получится фигура, центрально симметричная исходной.



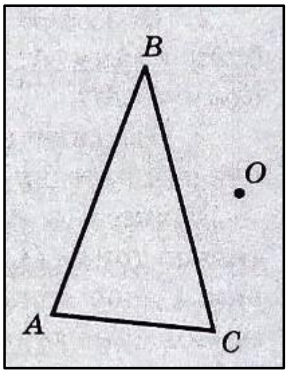
6. Скопируйте рисунок и постройте фигуру, симметричную отрезку AB относительно точки O.

Комментарий. Понятно, что фигура, симметричная отрезку AB, - это отрезок. Но тогда нам достаточно знать, где расположены концы этого отрезка, то есть достаточно построить точки, симметричные точкам A и B относительно точки O.



7. Постройте фигуру, симметричную прямой AB относительно точки O, не лежащей на этой прямой.

8. Постройте фигуру, симметричную треугольнику ABC, относительно точки O.



9. 1) Начертите треугольник KMN.

2) Постройте фигуру, симметричную этому треугольнику относительно точки M.

3) Постройте фигуру, симметричную треугольнику KMN относительно точки E – середины стороны MN.

10. 1) Начертите угол ABC и подумайте, какая фигура будет симметрична этому углу относительно точки B.

2) Постройте эту фигуру. Как называются получившиеся фигуры?

3) Постройте фигуру, симметричную углу ABC относительно точки M, лежащей на биссектрисе этого угла.

11°. Начертите окружность с центром в точке O. Какая фигура будет симметрична этой окружности относительно точке P, лежащей на окружности? Постройте фигуру.

12. Постройте фигуру, симметричную квадрату $ABCD$ относительно одной из его вершин.

13°. Начертите прямоугольник $ABCD$. Какая фигура будет симметрична этому прямоугольнику относительно точки O – середины его диагонали AC?

14˙. Оказалось, что отрезок AB симметричен сам себе относительно некоторой точки. Определите, где расположен центр этой симметрии.

15˙. Треугольник KMN центрально симметричен треугольнику AKN. Где расположен центр этой симметрии?

16. При некоторой центральной симметрии окружность симметрична сама себе. Где расположен центр этой симметрии?

17. При некоторой центральной симметрии прямоугольник $ABCD$ симметричен сам себе. Где расположен центр этой симметрии?

18. Сроится фигура, симметричная прямой *AB* относительно точки *O*. Может ли полученная при этом прямая оказаться той же самой прямой *AB*? Где в этом случае должна располагаться точка *O*?

Фигуры, симметричные сами себе относительно некоторого центра, называются центрально симметричными.

20. *(Устно)* 1) Как изменится координата точки *A*(5), если она передвинется:

а) на две единицы влево;

б) на три единицы вправо?

2) Координата точки *B*(3) увеличилась на 7. Куда передвинулась точка? Назовите ее новую координату.

3) Координата точки *C*(14) уменьшилась на 10. Куда передвинулась точка? Назовите ее новую координату.

Контрольные вопросы и задания

1. Любые ли две точки можно считать центрально симметричными друг другу? Если ответ утвердительный, то где находится центр симметрии?

2. Как вы понимаете утверждение: «Прямоугольник имеет центр симметрии»?

3. Начертите треугольник *ABC* и постройте треугольник, симметричный треугольнику *ABC* относительно середины стороны *BC*.

Приведем несколько нестандартных задач на симметрию на координатной прямой.

Точка *M* находится на координатной прямой между точками:

а) 2 и 3; б) –2 и 3; в) – 3 и 2; г) – 2 и 2.

Между каким точками должна находиться точка M_1, симметричная точке *M* относительно начала отсчета?

Фигура, состоящая из отрезка *AB* длиной 2 см и симметричного ему отрезка, является отрезком, длина которого:

а) 4 см; б) 2 см; в)˙ 3 см.

Сделайте рисунок и отметьте на нем центр симметрии.

Отрезок координатной прямой, длиной пять единиц, образован двумя симметричными друг другу относительно начала координат отрезками *AB* и A_1B_1, длиной по три единицы. Определите координаты точек *A, B*, A_1 и B_1.

Параллельность прямых

1. Как называют прямые, имеющие общую точку? Могут ли две прямые иметь две общие точки?

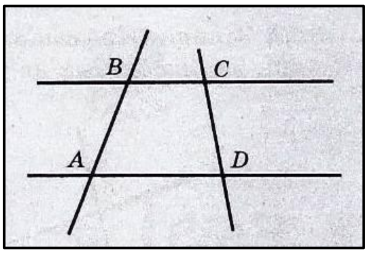
Комментарий. Через две точки проходит единственная прямая, поэтому две прямые не могут иметь более, чем одну точку. Прямые, имеющие общую точку, называются *пересекающимися.*

2. На рисунке изображены четыре прямые. Пересекаются ли прямые:

а) *AB* и *CD*;

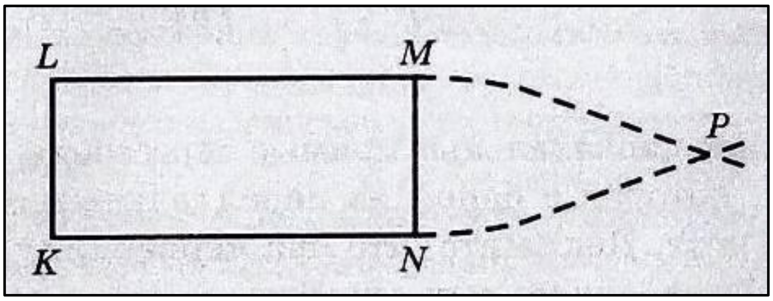
б) *AD* и *BC*?

Комментарий. Чтобы получить точку пересечения прямых *AB* и *CD*, изображенные части этих прямых придется продолжить за границы рисунка. Но даже без дополнительных построений видно, что точка пересечения этих прямых находится сверху от рисунка.



Попробуем теперь определить, с какой стороны от рисунка находится точка пересечения прямых *BC* и *AD*. Возможно ли, чтобы две прямые, лежащие в плоскости, не имели общей точки?

Для ответа на последний вопрос возьмем прямоугольник *KLMN* и предположим, что прямые *KN* и *LM* пересекаются в некоторой точке *P*.



3. Посмотрите на треугольник *KLP*. Что вам не нравится в этом треугольнике? Может ли треугольник иметь два прямых угла?

Комментарий. Сумма углов любого треугольника равна 180°, а в треугольнике *KLP* сумма углов оказалась больше 180°. Мы пришли к противоречию, значит предположение о пересечении прямых *KN* и *LM* неверно. Значит, у прямых *KN* и *LM* нет общей точки.

Две прямые, лежащие в плоскости и не имеющие общей точки, называют параллельными (от греческого слова ***параллелос*** – идущие рядом).

Для обозначения параллельности используют специальный символ «∥».

Запись *KN* ∥ *LM* означает, что прямая *KN* ***параллельна*** прямой *LN*.

Представление о параллельных прямых дают, например, железнодорожные рельсы, особенно на прямолинейном участке пути.

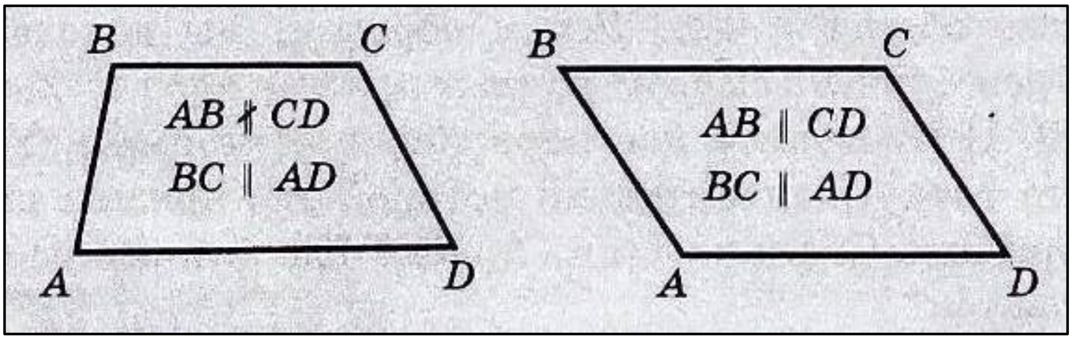
Факт существования параллельных прямых не приблизил нас к ответу на вопрос о точке пересечения прямых *BC* и *AD* (№115). Заметь, что ***невозможно установить параллельность прямых на глаз.*** Так, например, если смотреть вдоль заведомо параллельных рельсов – кажется, что где-то вдали они сходятся.

Таким образом, мы не можем ответить на поставленный в задаче **2** вопрос, то есть прямые *BC* и *AD* могут или быть, или не быть параллельными.

Если же $BC \parallel AD$, то у четырехугольника *ABCD* две стороны параллельны, а две - другие нет. Такие четырехугольники называют ***трапециями***.

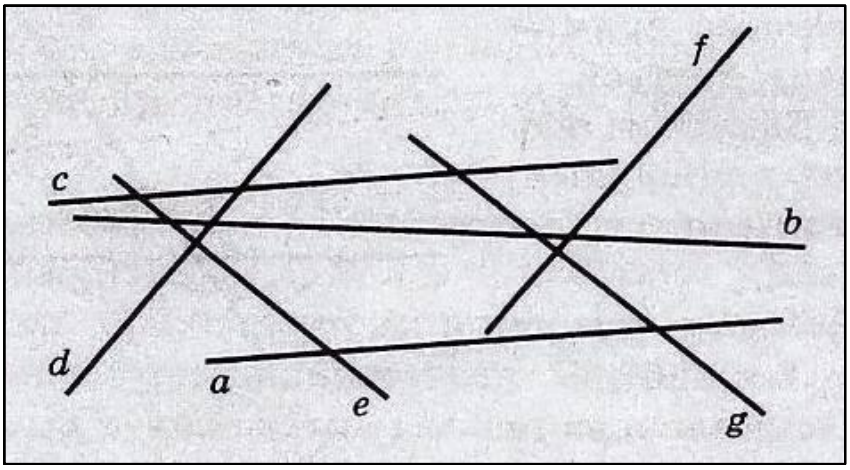
Если же параллельны обе пары противоположных сторон четырехугольника, то такой четырехугольник называют ***параллелограммом***.

Трапеция **Параллелограмм**



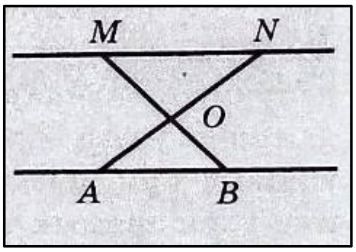
4. Объясните, почему для обозначения параллельности выбран значок $\parallel$ и что означает запись $AB \parallel CD$?

5. Используя значок параллельности прямых, запишите, какие пары прямых на следующем рисунке выглядят параллельными.

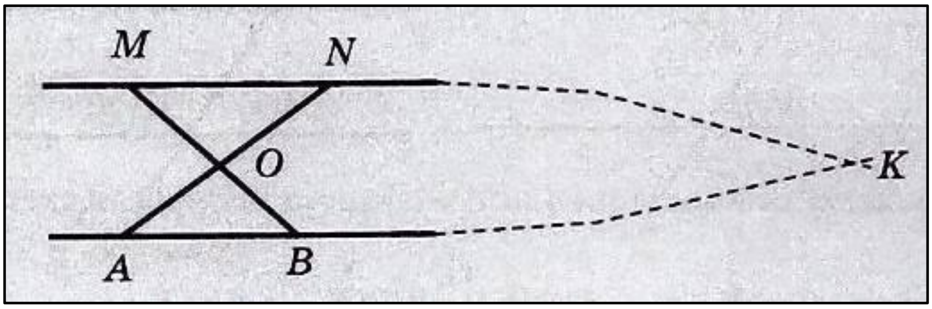


6. Найдите отрезки параллельных прямых среди предметов окружающей обстановки.

7•. Прямые *AB* и *MN*, изображенные на рисунке, симметричны относительно точки *O*. Подумайте, могут ли эти прямые пересекаться? Объясните свой ответ. В случае затруднений, ответьте на вопросы следующего задания.



Подсказка. Предположите, что прямые *AB* и *MN* пересекаются. Обозначьте точку пересечения этих прямых буквой *K* и ответьте на вопросы.

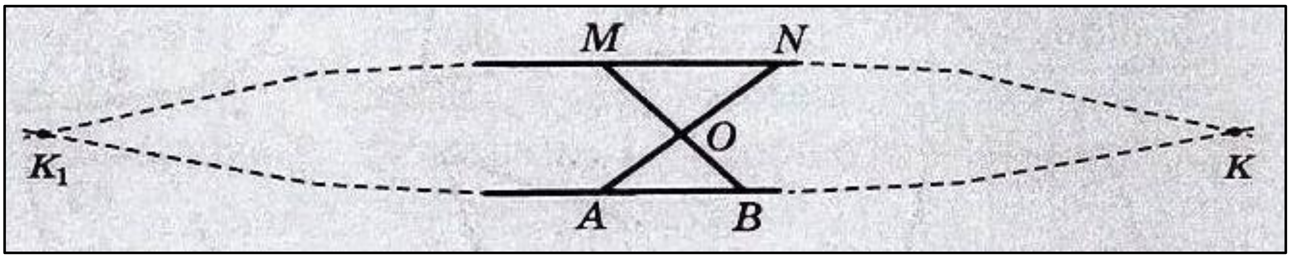


а) Как расположена точка, симметричная точке *K*, по отношению к прямым *AB* и *MN*?

б) Сколько прямых можно провести через две различные точки?

в) Верно ли предположение о пересечении прямых *AB* и *MN*?

Комментарий. Пусть K_1 – точка, симметричная точке *K*. Все точки, симметричные точкам прямой *AB*, лежат на прямой *MN*. Значит, точка K_1 лежит на прямой *MN*. Рассуждая аналогично, получаем, что точка K_1 лежит на прямой *AB*, откуда следует, что прямые *AB* и *MN* пересекаются в точке K_1.



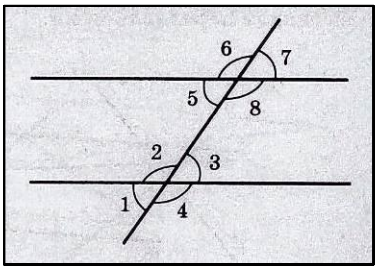
Но тогда оказывается, что через две точки – *K* и K_1 – проходят две различные прямые *AB* и *MN*, чего быть не может.

Предположение, что прямые *AB* и *MN* пересекаются, привело нас к противоречию. Значит, неверно само это предположение, то есть прямые *AB* и *MN* не имеют общих точек. Таким образом, мы доказали, что ***центрально симметричные прямые параллельны.***

8. 1) Проведите две параллельные прямые. Укажите точку, относительно которой эти прямые симметричны. Сколько таких точек? Где они все располагаются?

2) Проведите две параллельные прямые, пересеченные третьей прямой. Укажите центр симметрии этой конфигурации – точку, относительно которой данной конфигурация симметрична сама себе.

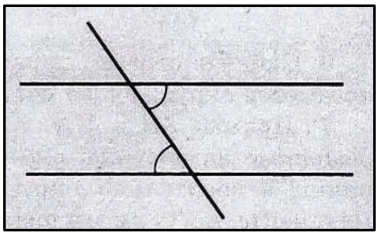
9. На рисунке две параллельные прямые пересечены третьей.



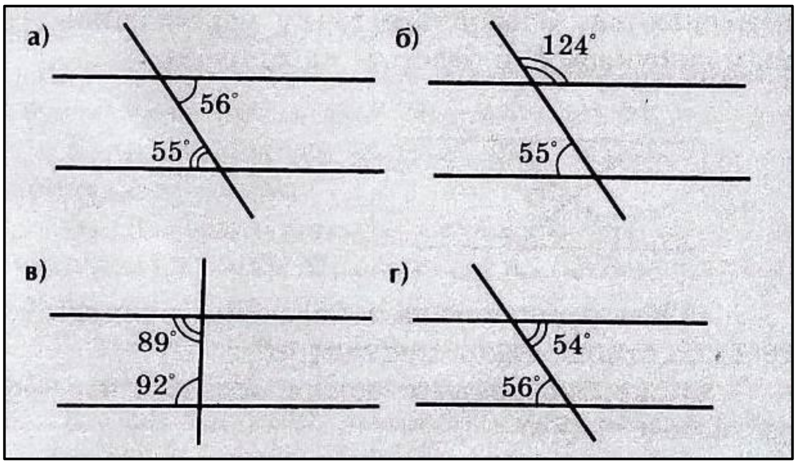
1) Какие (из обозначенных цифрами) углы равны между собой?

2) Чему равна сумма ∠2 и ∠5?

Последняя задача позволяет чисто геометрически указывать на рисунке параллельность прямых, отмечая, например, что ***накрест лежащие углы***, образующиеся при пересечении двух прямых третьей, равны.



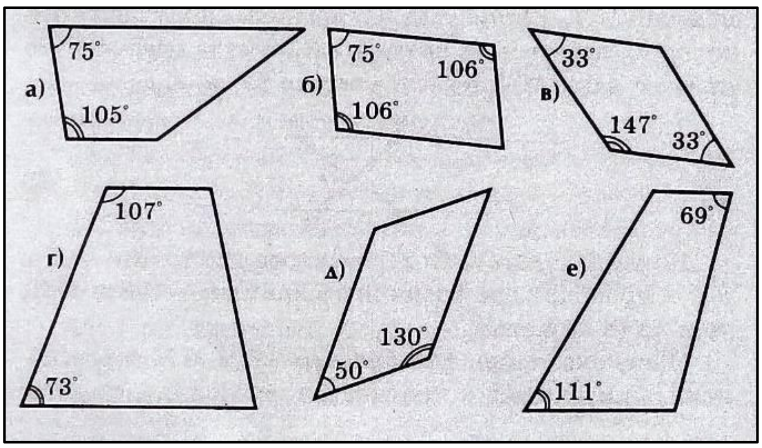
10. Слева или справа от рисунка пересекаются прямые (углы измерены в градусах)?



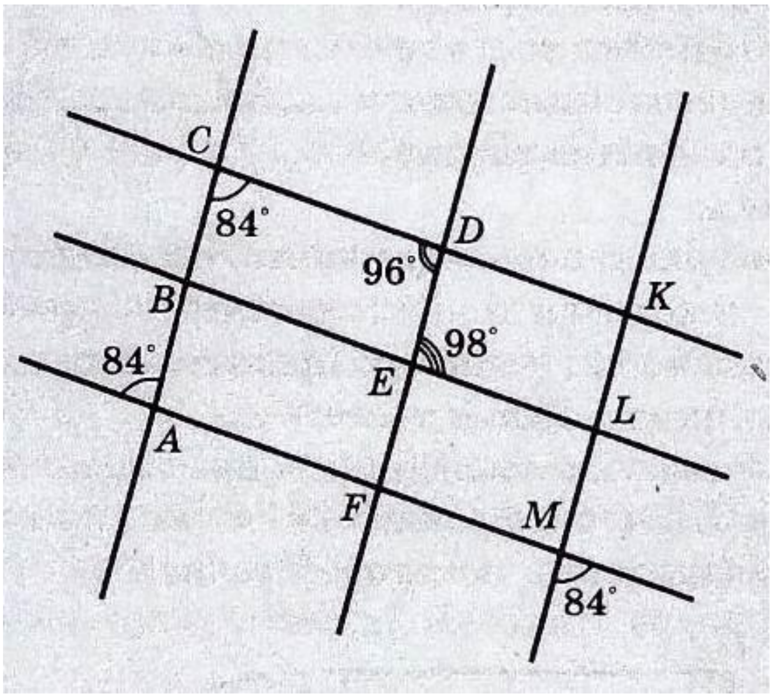
11. Какие четырехугольники, изображенные на рисунке, являются:

а) трапецией; б) параллелограммом;

в) не являются ни трапецией, ни параллелограммом?



12. Запишите названия параллелограммов и трапеций, изображенных на рисунке.



13°. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой, которая с одной из параллельных прямых образует прямой угол. Докажите, что она перпендикулярна к второй из параллельных прямых.

14*. Подумайте, может ли при центральной симметрии какой-нибудь треугольник оказаться симметричным сам себе?

Комментарий. Предположим, что есть такой треугольник. Заметим, во-первых, что ни одна из его сторон не может быть симметрична другой стороне, поскольку симметричные прямые параллельны, а стороны треугольника – нет. Значит, если треугольник симметричен сам себе, то каждая из его сторон должна быть симметрична сама себе. Но центром симметрии стороны является ее середина. Центр симметрии этого треугольника, таким образом, должен располагаться одновременно в серединах всех трех его сторон, что, понятно, невозможно. Значит, наше предположение о существовании симметричного самому себе треугольника оказалось неверным, то есть при центральной симметрии не существует ни одного треугольника, симметричного самому себе.