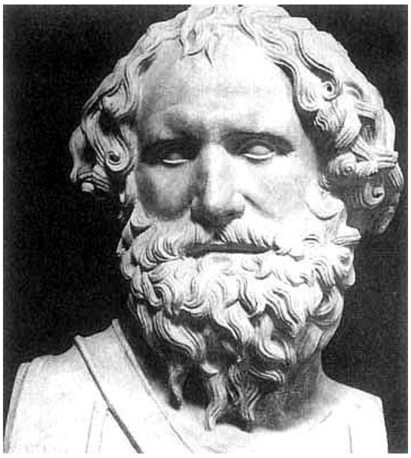
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Осташевская средняя общеобразовательная школа

Урок по математике для 7 класса
«Турнир Архимеда.
Математическая регата»



Наименование учебного предмета:	Алгебра, геометрия
Уровень, ступень образования:	Основная школа, 7 класс
Ф.И.О. учителя, составившего разработку данного урока	Шорникова Светлана Павловна
Квалификационная категория	Первая

Турнир Архимеда. Математическая регата.

Условия задач

Первый тур.
(10 минут; каждая задача 6 баллов)

1.1. Положительные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 = b^2 + a$. Верно ли, что $a = b$?

1.2. В треугольнике ABC проведены высоты AP и CN, которые пересекаются в точке H, лежащей внутри треугольника. Может ли угол AHC оказаться острым?

1.3. У трех членов жюри спросили: «Сколько команд будет участвовать в математической регате?» Один сказал: «Меньше семидесяти двух». Другой: «Меньше семидесяти одной», — а третий: «Меньше семидесяти трех». Сколько команд участвовало в регате, если правы были в точности двое членов жюри?

Второй тур.
(15минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. Аналогичную операцию проделали еще три раза. В результате на прямой оказалось ровно 65 точек. Сколько точек было на прямой первоначально?

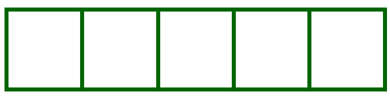
2.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и CK, пересекающиеся в точке O. Может ли угол AOC оказаться острым?

2.3. Существует ли такое натуральное число, что сумма его цифр больше суммы цифр его квадрата?

Третий тур.
(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

3.1. Говядина без костей стоит 90 рублей за килограмм, говядина с костями — 78 рублей за килограмм, а кости без говядины — 15 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

3.2. Покажите, как разрезать прямоугольник 1*5 на пять частей и сложить их них квадрат.



3.3. Дан бесконечный ряд чисел:

2, 6, 12, 20, 30, 42...

Укажите закономерность и найдите число, стоящее на 2003-м месте.

Четвертый тур.

(20 минут; каждая задача – 8 баллов)

4.1. Если идти вниз по движущемуся эскалатору, то на спуск потратишь 1 минуту. Если увеличить собственную скорость в два раза, то спустишься за 45 секунд. За какое время можно спуститься стоя на этом эскалаторе неподвижно?

4.2. Даны точки A, B, C и D так, что отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Отрезок AE на 1 см короче, чем отрезок AB, AE = DC, AD = BE, ∠ADC = ∠DEC. Найдите длину EC.

4.3. Шахматный турнир проводился по круговой системе (каждый участник должен сыграть с каждым из остальных по одной партии). Два участника, Вася и Петя, сыграв одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Успели ли они сыграть между собой, если всего в турнире было сыграно 23 партии?

Ответы, решения и комментарии

Первый тур.

1.1. Ответ: неверно, например, a = 0,2, b = 0,8.

Для того, чтобы найти a и b, для которых верно данное равенство, преобразуем его:

$$a^2 – b^2 = a – b \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = a - b \Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0.$$

Следовательно, данное равенство верно, если a = b или a + b = 1. Таким образом, достаточно указать пару различных положительных a и b, для которых a + b = 1.

1.2. Ответ: нет, не может.

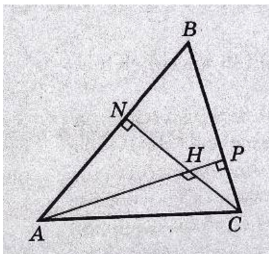


Рис. 1

Пусть ABC - данный треугольник, AP и CN - его высоты (рис. 1).

Так как угол AHC - внешний для треугольника CHP, то ∠AHC > ∠HPC = 90°. Следовательно, угол AHC - тупой.

Комментарий. Заметим, что если не требовать, чтобы точка пересечения высот лежала внутри треугольника, то ответ будет положительным. Действительно, пусть AHC — данный треугольник, тогда точка B является точкой пересечения его высот AH и CP. В четырехугольнике BPHN углы BPH и BNH — прямые, угол NHP — тупой. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то угол ABC — острый.

1.3. Ответ: 71.

Второе утверждение не может быть верно, так как в этом случае верны и два других утверждения, что противоречит условию. Следовательно, верными являются первое и третье утверждения, а второе — неверно. То есть, данное число меньше 72 и не меньше 71. Единственное число, удовлетворяющее данным условиям — 71.

Второй тур.

2.1. Ответ: 5 точек.

Способ I. Заметим, что если даны n точек, то после выполнения указанной операции появится еще n - 1 точка, а всего точек станет 2n - 1. Тогда количество точек перед проведением последней операции можно найти из уравнения 2n - 1 = 65, откуда n = 33. Далее, поступая аналогично, получим уравнения:

1) 2n - 1 = 33, откуда n = 17;

2) 2n - 1 = 17, откуда n = 9;

3) 2n - 1 = 9, откуда n — 5.

Способ II. Пусть x - первоначальное количество точек, тогда после проведения указанной операции в первый раз точек станет 2x - 1, а после повторения операции точек будет (2x - 1) + (2x - 2) = 4x - 3. Аналогично, в следующий раз точек станет

$$(4x - 3) + (4x - 4) = 8x - 7,$$

а в итоге окажется

(8x - 7) + (8x - 8) = 16л: - 15 точек.

Решая уравнение 16л: - 15 = 65 получим, что x = 5.

2.2. Ответ: нет, не может.

Способ I. Пусть ABC - данный треугольник, AM и CK - его биссектрисы (рис. 2).

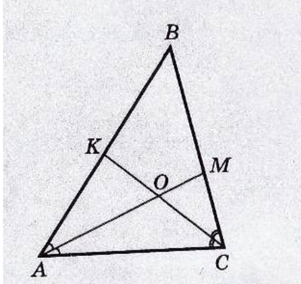


Рис. 2

Пусть $\angle AOC$ — острый, то есть $\angle AOC < 90°$, тогда, рассмотрев сумму углов треугольника AOC, получим, что

$$\angle OAC + \angle OCA > 90°.$$

Следовательно,

$$\angle BAC + \angle BCA > 180°,$$

что невозможно, так как это углы треугольника ABC.

Способ II. Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда вычислим угол AOC:

$\angle BAC + \angle BCA = 180° - \beta$;

$\angle OAC + \angle OCA = 90° - 0{,}5\beta$;

$\angle AOC = 90° + 0{,}5\beta > 90°$, то есть $\angle AOC$ — тупой.

2.3. Ответ: да, существует.

Заметим, что при возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 8 или на 9, последняя цифра уменьшается. Наименьшее число, удовлетворяющее условию- 39. Приведем еще несколько вариантов: 48, 49, 79.

Третий тур.

3.1. Ответ: 160 грамм.

Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в ней - $(1 – x)$ кг. Таким образом, стоимость костей составляет $15x$ рублей, а стоимость говядины — $90(1 – x)$ рублей. Исходя из условия, составим уравнение: $15x + 90(1- x) = 78$. Решив уравнение, получим, что $x = 0{,}16$.

3.2. Смотри, например, рис. 3, а и б соответственно.

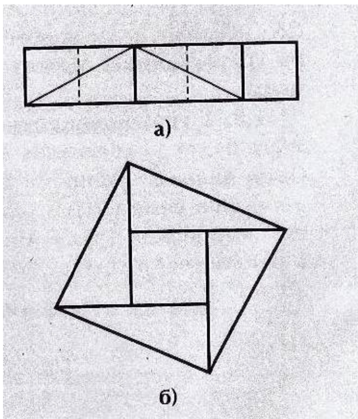


Рис. 3

3.3. Ответ: 4 014 012.

Заметим, что разность между вторым и первым числом: $4 = 2 \cdot 2$, между третьим и вторым числом: $6 = 2 \cdot 3$, между четвертым и третьим $8 = 2 \cdot 4$ и так далее, то есть разность между соседними числами увеличивается на 2. Следовательно, разность между 2003-м и 2002-м числом будет равна $2 \cdot 2003$. Таким образом, 2003-е число отличается от первого на:

$$S = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot 2003.$$

Значит, 2003-е число равно:

$$\begin{aligned} 2 + S &= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \\ &+ 2 \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot 2003 = \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2003) = \\ &= 2 \cdot (1 + 2003) \cdot 1002 = \\ &= 2003 \cdot 2004 = 4\,014\,012. \end{aligned}$$

Четвертый тур.

4.1. Ответ: 1,5 минуты.

Способ I. Так как $60 : 45 = \frac{4}{3}$, то во втором случае за минуту можно было бы пройти $\frac{4}{3}$ эскалатора, то есть на $\frac{1}{3}$ эскалатора больше, чем в первом случае. Это происходит за счет увеличения скорости человека в 2 раза. Следовательно, собственная скорость человека равна $\frac{1}{3}$ неподвижного эскалатора в минуту. Так как в первом случае можно спуститься за одну минуту, то скорость движения эскалатора - $\frac{2}{3}$ неподвижного эскалатора в минуту. Значит, искомое время спуска равно $1 : \frac{2}{3} = 1{,}5$ (минуты).

Способ II. Пусть L метров - длина эскалатора, x метров в секунду - собственная скорость человека, y метров в секунду - скорость эскалатора. Тогда скорость спуска в первом случае составит (x + y) м/с, а во втором случае - (2x + y) м/с. Исходя из условия, составим систему уравнений: $\begin{cases} (x+y)\cdot 60 = L, \\ (2x+y)\cdot 45 = L. \end{cases}$

Решить ее можно, например, так:

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{60} \\ 2x + y = \frac{1}{45} L \end{cases} L, \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{180} L, \\ y = \frac{1}{90} L. \end{cases}$$

Искомое время спуска: $\frac{L}{y} = 90$ (секунд).

4.2. Ответ: EC = 1 см.

Так как

AD = BE, CD = AE,

∠ADC = ∠DEC = ∠BEA

(вертикальные углы), то (рис. 4)

ΔADC = ΔBEA.

Из равенства этих треугольников следует, что AC = AB, тогда EC = AC - AE = AB - AE = 1 см (по условию).

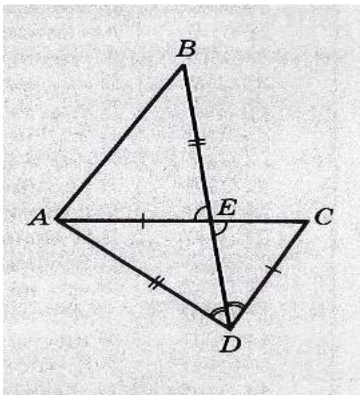


Рис. 4

4.3. Ответ: нет, не успели.

Заметим, что если в турнире n участников, то по круговой системе должно быть сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партий. партий. Поэтому, если число участников было 7, то сыгранных партий должно быть 21, если участников

8, то сыгранных партий - 28, а если участников 9, то сыгранных партий - 36. Так как всего было сыграно больше 21 партии, то количество участников больше семи, а так как было сыграно менее 28 партий, то количество участников, закончивших турнир, меньше восьми, а всего участников - меньше десяти.

Таким образом, первоначально в турнире могло участвовать либо 8, либо 9 шахматистов. В первом случае не сыграно 28 - 23 = 5 партий, а во втором 36 - 23 = 13 партий, то есть в обоих случаях остались несыгранными нечетное количество партий.

Если предположить, что Вася и Петя успели сыграть между собой, то количество несыгранных партий должно оказаться четным (поровну у Васи и у Пети).