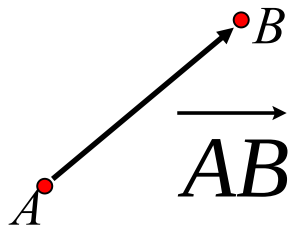
Векторы в пространстве

Выполнили: Девахина Д.П., Иванова П.М.
Учитель: Шорникова С.П.

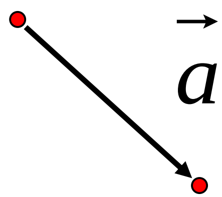
Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) *–*

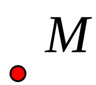
отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



$\overrightarrow{AB}$



$\vec{a}$



$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

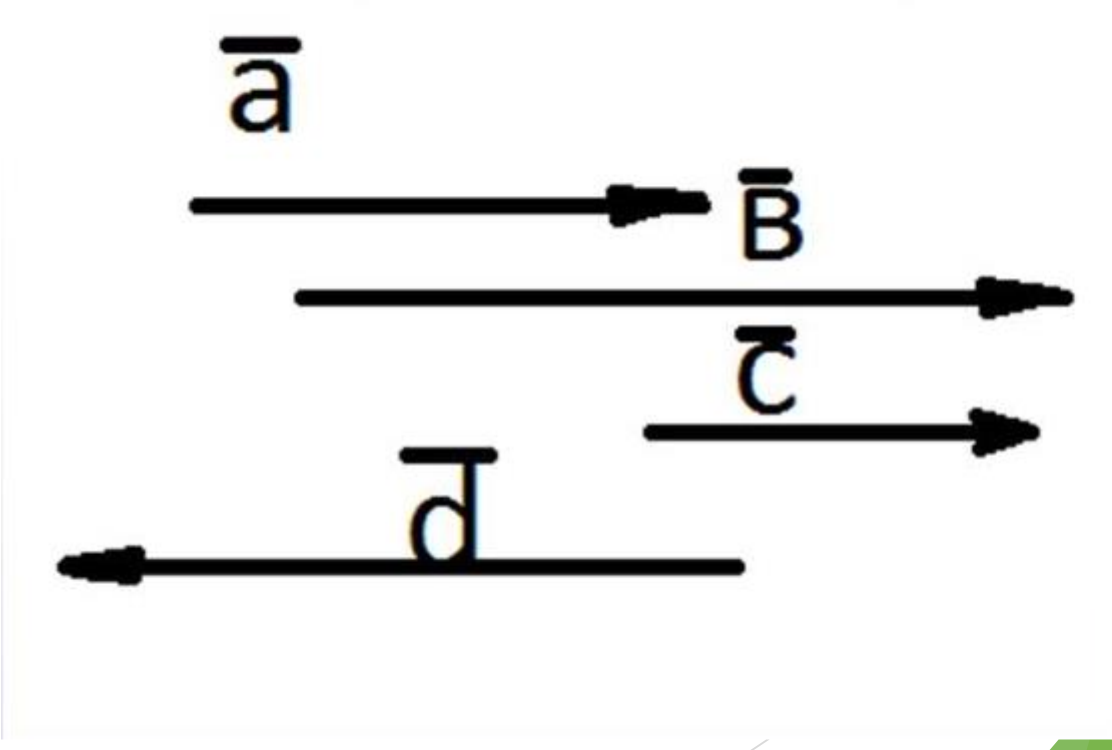
Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ *– длина отрезка AB.*

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB \qquad \left|\vec{0}\right| = 0$

Коллинеарные векторы

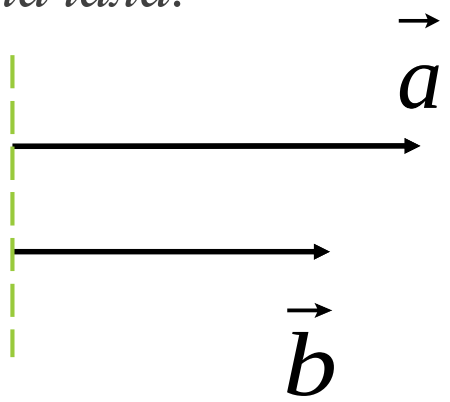
Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными****,*
если они лежат на одной

прямой или параллельных прямых.



Сонаправленные векторы

Сонаправленные векторы - *векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.*

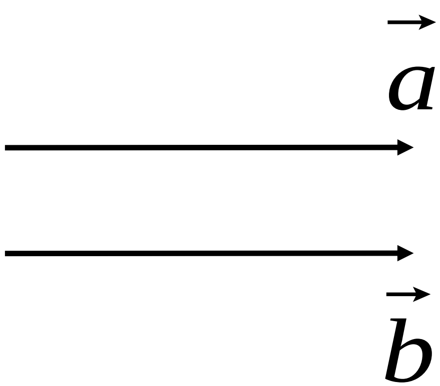


$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

Нулевой вектор *считается сонаправленным с любым вектором.*

Равные векторы

Равные векторы *- сонаправленные векторы, длины которых равны.*

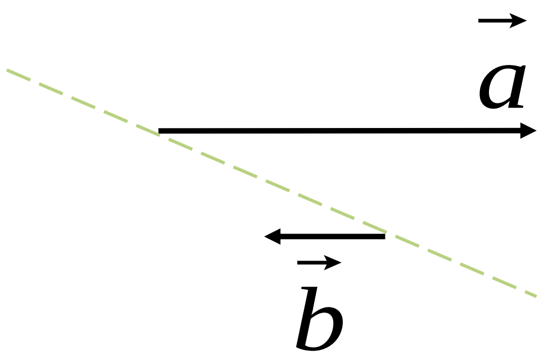


$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Противоположно направленные векторы

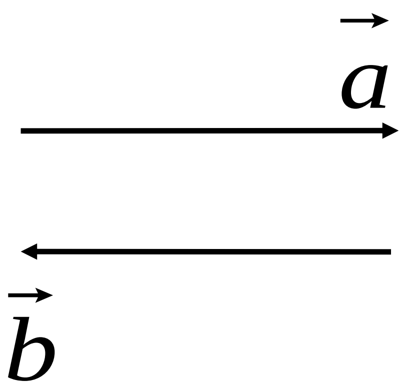
Противоположно направленные векторы – *векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.*



$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

Противоположные векторы

Противоположные векторы *– противоположно направленные векторы, длины которых равны.*



$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

Вектором, противоположным нулевому,

считается нулевой вектор.

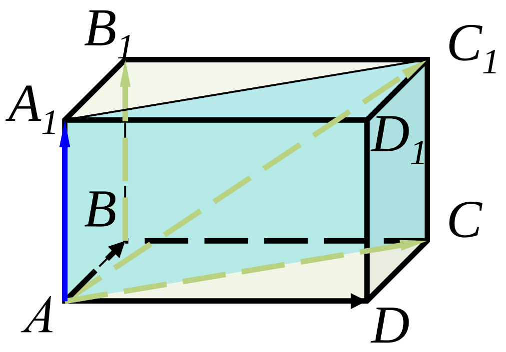
Признак коллинеарности

Если существует такое число $\mathbf{k}$ *при котором выполняется равенство* $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{k}\vec{\mathbf{b}}$ *и при том вектор* $\vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, *то векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *коллинеарны.*

Определение компланарных векторов

***Компланарные векторы** – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

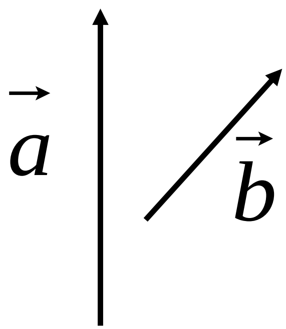
Пример:

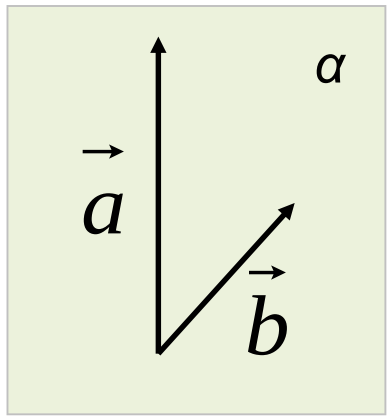


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ – *компланарны, т.к.*
$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, *а векторы* $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.





$\vec{a} \in \alpha$

$\vec{b} \in \alpha$

$\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– компланарны*

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *– компланарны*

если

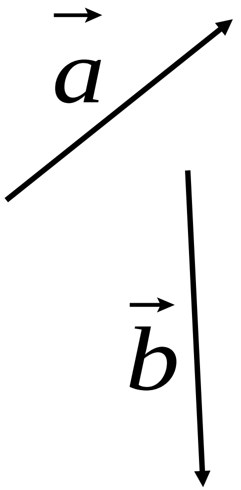
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

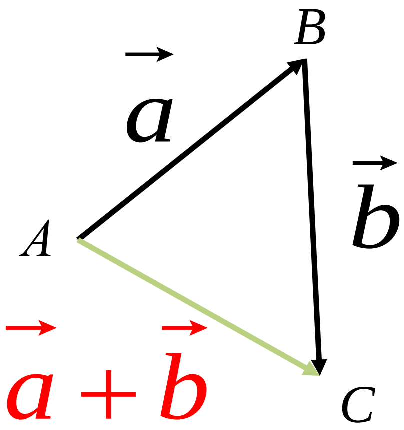
$\vec{a} = k\vec{b}$

Правило треугольника

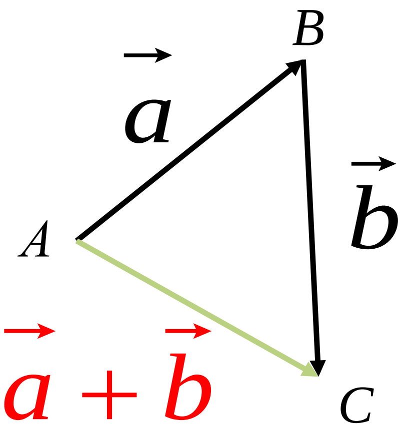
Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор* $\overrightarrow{AB}$*, равный* $\vec{a}$
2. *от точки B отложить вектор* $\overrightarrow{BC}$*, равный* $\vec{b}$
3. *вектор* $\overrightarrow{AC}$ *называется суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$





Правило треугольника



Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$ *справедливы равенства* :

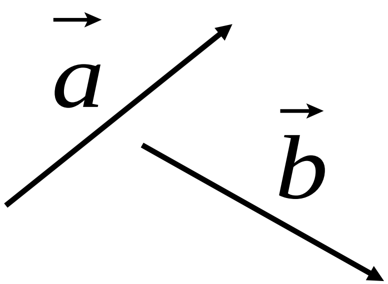
$$\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{a}}$$ *переместительный закон*

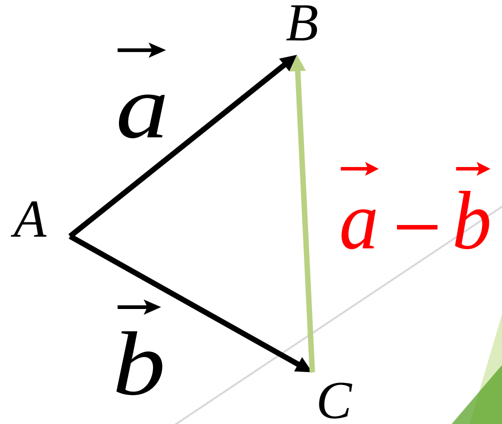
$$\left(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right)+\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\left(\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}\right)$$ *сочетательный закон*

Вычитание векторов

Для вычитания одного вектора из другого необходимо:

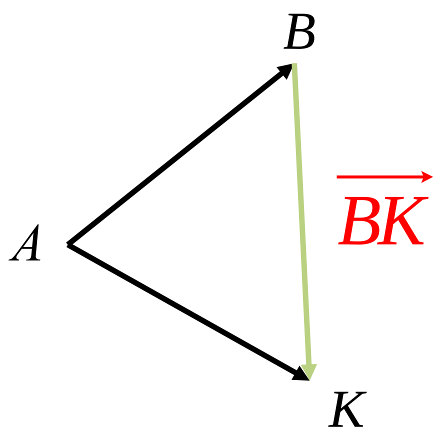
1. *отложить от какой – нибудь точки* A *вектор* $\overrightarrow{AB}$, *равный* $\vec{a}$
2. *от этой же точки* A *отложить вектор* $\overrightarrow{AC}$, *равный* $\vec{b}$
3. *вектор* $\overrightarrow{CB}$ *называется разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$





Правило трех точек

Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.

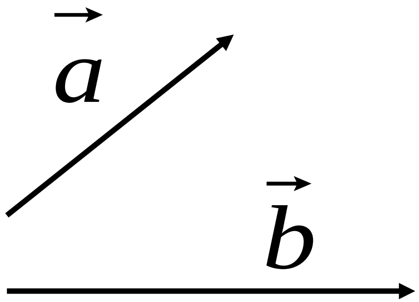


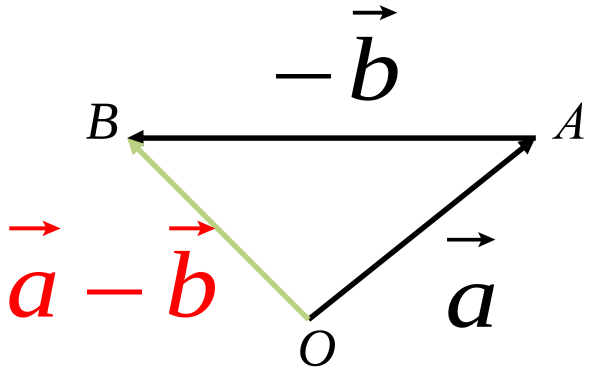
$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$

Сложение с противоположным вектором

Разность векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *можно представить как сумму вектора* $\vec{a}$ *и вектора, противоположного вектору* $\vec{b}$.

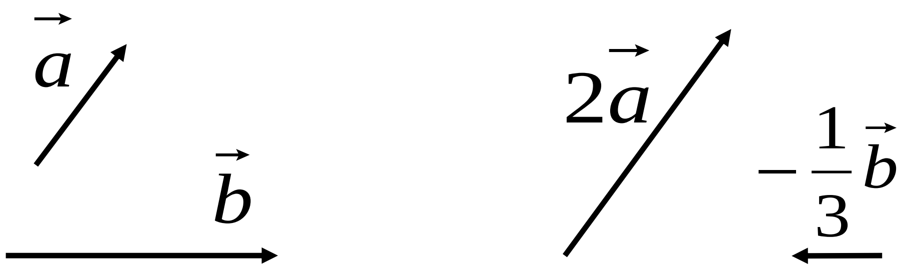
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$





Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ *на число* k *называется такой вектор* $\vec{b}$, *длина которого равна* $|k| \cdot |\vec{a}|$, *при чем векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены при* $k \geq 0$ *и противоположно направлены при* $k < 0$.



Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

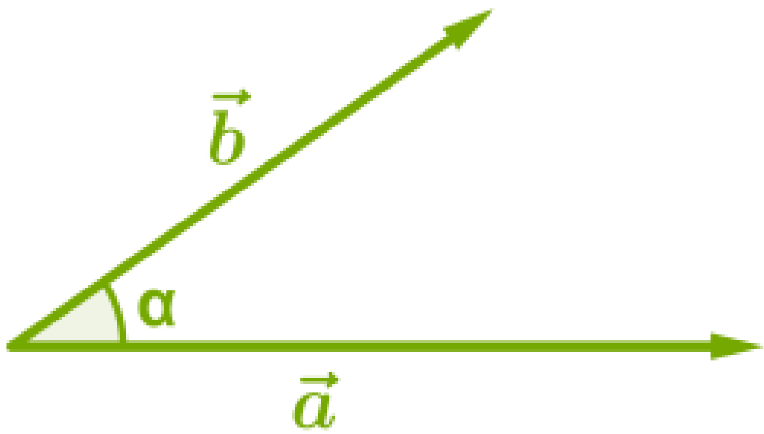
Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Задачи.

- 1. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=2$, $\measuredangle\alpha=30°$. Определи скалярное произведение данных векторов.



- 2. Определи скалярное произведение векторов $\vec{a}\{-1;-4;-7\}$ и $\vec{b}\{1;2;-1\}$.