**Тирский Александр Сергеевич., учитель математики РГ «Эврика» г Олекминска**

# Интегрирование рациональных функций

## Понятие о рациональных функциях

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

где n – натуральное число, $a_i$ - постоянные коэффициенты, называется **<u>многочленом</u>** или **<u>целой рациональной функцией</u>**. Число n называется **<u>степенью многочлена.</u>**

Корнем многочлена называется такое значение переменной $x = x_0$, при котором многочлен обращается в нуль, т.е. $P_n(x_0) = 0$.

**Теорема 1**

Если $x_1$ есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен без остатка делится на $x - x_1$, т.е.

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x) \qquad (2)$$

Где $P_{n-1}(x)$ - многочлен степени n-1.

**Теорема 2**

Всякий многочлен n-ой степени имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

**Теорема 3**

Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

**Теорема 4**

Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Известно, что **каждый многочлен с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на линейные и квадратические множители вида:** x-a и $x^2+px+q$, где p и q - действительные коэффициенты, причем квадратические множители не имеют действительных корней и, следовательно, не разложимы на линейные множители.

Продемонстрируем на примерах разложения многочленов на множители:

1) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

2) $x^3-16x=x(x^2-16)=x(x-4)(x+4)$

3) $x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9=x^3(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)=(x^2-6x+9)(x^3-1)=(x-3)^2(x-1)(x^2+x+1)$

**<u>Дробно – рациональной функцией</u>** или **<u>рациональной дробью</u>** называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е.

$f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя. В противном случае дробь называется неправильной.

Следует заметить, **что всякую неправильную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена L(x) и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$,** т.е.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где R(x) - остаток от деления, а L(x) - целая часть.

Будем теперь рассматривать правильные рациональные дроби определенного типа.

Правильные рациональные дроби вида:

1) $\dfrac{A}{x-a}$ 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

где $A, a, M, N, p, q$ - действительные числа, **называются простейшими рациональными дробями I,II,III,IV типов.**

**Замечание:** Предполагается, что для дробей III,IV многочлен, стоящий в знаменателе, не имеет действительных корней.

**Теорема 5**

Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители:

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_1)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^{s_m}$$

можно представить и притом единственным образом, в виде следующей суммы простейших дробей: $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} +}$

$$\boldsymbol{\frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} +}$$

$$\boldsymbol{\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} +}$$

$$\boldsymbol{+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}} \qquad \textbf{(3)}$$

Поясним формулировку теоремы на примерах

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3}$

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+2} + \dfrac{Mx+N}{(x^2+x+2)^2}$

Для нахождения неопределенных коэффициентов в правой части разложения, можно применить метод  сравнивания коэффициентов. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (3.1.3)  приведем к общему знаменателю Q(x); в результате получим тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \qquad (4)$$

   где S(x) – многочлен с неопределенными  коэффициентами.

2. так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители $P(x) \equiv S(x)$.
3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x  (по теореме 3.1.4) в обеих частях тождества (4), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты.

Рассмотрим пример демонстрирующий методику применения описанного выше метода.

**Пример.**

Представить дробь $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших дробей

*Решение:*

Согласно теореме (5) имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

Т.е. $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

Отсюда следует:

$$2x^2-3x-3 \equiv (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + (5A-C)$$

Приравнивая коэффициенты при $x^2, x^1, x^0$, получаем:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ -3 = -2A - B + C \\ -3 = 5A - C \end{cases}$$

Решая систему, находим ее решение: $\begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \\ C = -2 \end{cases}$

Следовательно, получаем:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}$$

**<u>Интегрирование простейших рациональных дробей</u>**

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k} + C$

3) Рассмотрим интеграл $\int \frac{Ax+B}{x^2 + px + q} dx$, в числителе подынтегральной функции которого стоит линейный двучлен, а в знаменателе квадратный трехчлен, не имеющий корней. Интегралы такого типа вычисляются путем выделения полного квадрата в знаменателе подынтегральной функции.

$x^2 + px + q = (x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4}) + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 + a^2$,где $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем замену $x + \frac{p}{2} = t$, тогда $x = t - \frac{p}{2}, dx = dt$. Подставляя это в исходный и интеграл, получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt = \int \frac{At-\frac{Ap}{2}+B}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{2}A\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + (B-\frac{Ap}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C$$

**Примеры:**

Найти интегралы

1. $\int \frac{(3x+2)dx}{x^2+4x+5}$

*Решение:*

$$\int \frac{(3x+2)dx}{x^2+4x+5} = \left\{\begin{matrix} x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \\ x+2=t, x=t-2, dx=dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{3(t-2)+2}{t^2+1}dt = \int \frac{3t-2}{t^2+1}dt =$$

$$= 3\int \frac{tdt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+10)}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 2arctgt + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| - 2arctg(x+2) + C = \ln\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - 2arctg(x+2) + C$$

2). $\int \frac{(2x-1)dx}{2x^2+3x+5}$

Решение:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{2x^2+3x+5} = \left\{\begin{matrix} 2x^2+3x+5=2(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2})=2\left((x+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}\right) \\ x+\frac{3}{4}=t, x=t-\frac{3}{4}, dx=dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{2(t-\frac{3}{4})-1}{2(t^2+\frac{31}{16})}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t-\frac{5}{2}}{t^2+\frac{31}{16}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+\frac{31}{16}} - \frac{5}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{31}{16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{31}{16}\right| - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right| - \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}arctg\frac{4(x+\frac{3}{4})}{\sqrt{31}} + C = \ln\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}} - \frac{5\sqrt{31}}{31}arctg\frac{4x+3}{\sqrt{31}} + C$$

**4.** $\int \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$, где знаменатель не имеет действительных

корней.

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$, сводится к сумме двух

интегралов:

$$M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \qquad a^2=q-\frac{p^2}{4}$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{a^2}(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n})=$$
$$=\frac{1}{a^2}\left(J_{n-1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right)(3.2.5) \qquad (5)$$

К последнему интегралу применяем интегрирование по частям. Положим

$$\left\{\begin{aligned}&u=t,du=dt\\&dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n},v=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\end{aligned}\right\}$$

Тогда $\displaystyle\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}=$
$$=\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}\cdot J_{n-1}$$

Подставляя найденный интеграл в равенство (5) получаем:

$$J_n=\frac{1}{a^2}\left(J_{n-1}-\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(1-n)}J_{n-1}\right),$$

Т.е.

$$J_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

Полученная формула позволяет найти интеграл $J_n$ для любого натурального числа $n \geq 2$.

**Рассмотрим пример.**

Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$

*Решение:*

Здесь a=1, n=3. Так как $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C$, то

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C.$$

## интегрирование рациональных дробей (ПРАКТИКА)

Рассмотренный в предыдущих пунктах материал позволяет сформулировать общее правило интегрирования рациональных дробей.

1. если дробь неправильная, то ее необходимо представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложив знаменатель правильной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Рассмотрим несколько примеров:

**Вычислить интегралы**

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$

*Решение:*

Выпишем отдельно подынтегральную функцию, и

разложим знаменатель дроби  на линейные множители:

$x^2+3x-10=0$

$x=2$ Следовательно, $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$

$x=-5$

Теперь разложим функцию  на простейшие дроби:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$$

Теперь определяем неизвестные коэффициенты методом их сравнивания.

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)},$$

$2x+3=A(x+5)+B(x-2)$

$2x+3=Ax+5A+Bx-2B$

$2x+3=(A+B)x+(5A-2B)$

Теперь составляем систему  уравнений для  нахождения  коэффициентов А и В

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-2B=3 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \end{array}\right.$$

Таким образом, получаем:

$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}$ Интегрируя, получаем

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+5}=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C=$$

$$=\ln|(x-2)(x-5)|+C=\ln\left|x^2+3x-10\right|+C$$

2) $\int \frac{3x^2 - 2x - 4}{(x-1)(x^2-4)} dx$

*Решение:*

Заметим, что данная дробь правильная. Выпишем отдельно подынтегральную функцию и разложим знаменатель дроби на линейные множители:

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Теперь разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2 - 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

Приводя к общему знаменателю справа, получаем:

$$\frac{3x^2 - 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A(x-2)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

$$3x^2 - 2x - 4 = A(x^2 - 4) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 - 3x + 2)$$

$$3x^2 - 2x - 4 = Ax^2 - 4A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx^2 - 3Cx + 2C$$

$$3x^2 - 2x - 4 = (A + B + C)x^2 + (B - 3C)x + 4A - 2B + 2C$$

Составляем систему для определения коэффициентов, на основании теоремы о равенстве многочленов

$$\begin{cases} A + B + C = 3 \\ B - 3C = -2 \\ 4A - 2B + 2C = -4 \end{cases}$$

Решая систему получаем: $\left[\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{array}\right.$. Таким образом, получаем разложение

$$\frac{3x^2 - 2x - 4}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

Интегрируя получаем:

$$\int \frac{3x^2 - 2x - 4}{(x-1)(x^2-4)} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x+2| + C = \ln\left|(x-1)(x^2-4)\right| + C$$

Замечание: В дальнейших примерах подробное пояснение опустим, т.к. оно такое же как и в первых двух.

3) $\int \frac{x+2}{(x+3)^2}dx$

*Решение:*

$$\frac{x+2}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$\frac{x+2}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}, \qquad x+2 = Ax+3A+B$$

Составляем систему:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A + B = 2 \end{cases}$$

Решая систему, получаем,

$$\left[\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array}\right.$$

Таким образом, получаем разложение:

$$\frac{x+2}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}$$

Интегрируя, получаем,

$$\int \frac{x+2}{(x+3)^2}dx = \int \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{dx}{(x+3)^2} = \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2} =$$
$$= \ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + C$$

4) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

*Решение:*

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Приводя к общему знаменателю справа, получаем

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$1=Ax^2+A+Bx^2+Cx$

$1=(A+B)x^2+Cx+A$

Составляем систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \left[\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{array}\right.$$

Таким образом, получаем разложение:

$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ Интегрируя, получаем

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C=$$

$$=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$$

5) $\int\frac{dx}{x^4-1}$

Решение:

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

Теперь разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Приводя к общему знаменателю справа, получаем

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}$$

$1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+Cx^3+Dx^2-Cx-D$

$1=Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D$

$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D$

Составляем систему:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases} \qquad \left[ \begin{array}{l} A=\dfrac{1}{4}, C=0 \\ B=-\dfrac{1}{4}, D=-\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Таким образом, получаем разложение:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}arctgx+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C$$

6) $\int\frac{dx}{x^3-1}$

*Решение:*

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Приводя к общему знаменателю справа, получаем

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$1=Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C$$

$$1=(A+B)x^2+(A+C-B)x+A-C$$

Теперь составляем систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+C-B=0 \\ A-C=1 \end{cases} \left[ \begin{array}{l} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{1}{3} \\ C=-\dfrac{2}{3} \end{array} \right.$$

Таким образом, получаем разложение

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

Вычислим отдельно каждый из получившихся интегралов:

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+C$$

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\left\{\begin{matrix} x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \\ x+\frac{1}{2}=t, x=t-\frac{1}{2}, dx=dt \end{matrix}\right\}=\int\frac{t-\frac{1}{2}+2}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=$$

$$=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+$$

$$+\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Подставляя, окончательно получаем

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}-\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

7) $\int\frac{x^3dx}{x^2+4x+8}$

Решение:

Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому выделим сначала целую часть дроби, поделив числитель на знаменатель. В результате получим:

$$\frac{x^3}{x^2+4x+8}=x-4+\frac{8x+32}{x^2+4x+8}$$

Интегрируя. получаем:

$$\int \frac{x^3}{x^2+4x+8}dx = \int\left(x-4+\frac{8x+32}{x^2+4x+8}\right)dx = \int (x-4)dx + 8\int \frac{x+4}{x^2+4x+8}dx$$

Вычислим отдельно каждый интеграл:

$$\int (x-4)dx = \frac{x^2}{2} - 4x + C$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+4x+8}dx = \begin{Bmatrix} x^2+4x+8=(x+2)^2+4 \\ x+2=t, x=t-2, dx=dt \end{Bmatrix} = \int \frac{t-2+4}{t^2+4}dt = \int \frac{t+2}{t^2+4}dt = \int \frac{tdt}{t^2+4} + 2\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right| + arctgt + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right| + arctg\frac{x+2}{2} + C$$

Таким образом, подставляя получаем,

$$\int \frac{x^3dx}{x^2+4x+8} = \frac{x^2}{2} - 4x + 4\ln\left|x^2+4x+8\right| + 8arctg\frac{x+2}{2} + C$$

Замечание:

Рассмотрим интеграл $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ , где знаменатель подынтегральной функции разлагается на линейные множители. Данный интеграл «внешне похож» на интеграл от простейшей дроби третьего типа, однако он таковым не является в силу разложимости знаменателя. По идее для вычисления интеграла необходимо разложить функцию на простейшие дроби и вычислять интеграл как в примере 1. Но если знаменатель функции имеет иррациональные корни, то решение получается достаточно трудоемким. В таких случаях интеграл можно вычислить как интеграл от простейшей дроби третьего типа, т.е выделив в знаменателе дроби полный квадрат. Приведем пример.

8. $\int \frac{5x+1}{x^2+2x-1}dx$

Решение:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+2x-1}dx = \left\{ \begin{matrix} x^2+2x-1=(x+1)^2-2 \\ x+1=t, x=t-1, dx=dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{5(t-1)+1}{t^2-2}dt =$$

$$= \int \frac{5t-4}{t^2-2}dt = 5\int \frac{tdt}{t^2-2} - 4\int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{5}{2}\ln\left|t^2-2\right| - 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|x^2+2x-1\right| - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

Итак, из вышерассмотренной теории и разобранных примеров, следует, что *неопределенный интеграл от любой рациональной и дробно-рациональной функции всегда существует( на интервалах, в которых знаменатель дроби отличен от 0) и выражается через конечное число элементарных функций, а, именно, он является алгебраической суммой, членами которой могут быть лишь многочлены, рациональные дроби, натуральные логарифмы и арктангенсы.*