

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ №15

Семенова Люция Ариановна,
учитель математики МОБУ СОШ №31

За задание по математике
ЕГЭ профильный уровень можно
получить **2 балла**.

Первичный балл	Тестовый балл	Первичный балл	Тестовый балл	Первичный балл	Тестовый балл
1	5	15	72	29	99
2	9	16	74	30	100
3	14	17	76	31	100
4	18	18	78		
5	23	19	80		
6	27	20	82		
7	33	21	84		
8	39	22	86		
9	45	23	88		
10	50	24	90		
11	56	25	92		
12	62	26	94		
13	68	27	96		
14	70	28	98		



ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

На этом уроке вы узнаете -

1. Как между двумя товарами выбрать наиболее выгодный?
2. Что можно выразить с помощью функции?
3. Каким способом можно решать задачи на оптимизацию, не прибегая к параболе?

Оптимизация

С задачами на оптимальный выбор мы сталкиваемся чаще, чем может показаться на первый взгляд. Когда в магазине пытаемся немного сэкономить деньги, когда ищем лучшую модель гаджета по соотношению цена – качество.

При любой покупке нам хочется получить выгоду, и задачи на оптимизацию как раз про это.

ЧИПСЫ В МАГАЗИНЕ

Может показаться, что купить маленькую пачку чипсов выгоднее: она дешевле. Но что если посмотреть на стоимость одного грамма?



«Сыр»

140г

Для маленькой пачки получим
 $140/90=1,56$ рублей за грамм.

А для большой пачки: $225/210= 1,07$
рублей за грамм.



«Сметана и зелень»

225г

Получается, что в большой пачке один грамм чипсов стоит немного дешевле, чем в маленькой. То есть выгоднее купить большую пачку.

Пример 1.

Геннадий владеет двумя цветочными магазинами в городах **A.** и **B.** В магазинах продают одинаковую продукцию, однако магазин в городе **B.** использует более современные технологии. Работники магазина в городе **A.** трудятся t^2 часов в неделю и за эту неделю производят $3t$ единиц продукции. Работники магазина в городе **B.** трудятся t^2 часов в неделю и за эту неделю производят $6t$ единиц продукции.

За каждый час работы **Геннадий** платит сотрудникам **500 рублей**. Но перед сотрудниками стоит важная задача: еженедельно они должны производить **300 единиц** продукции. Какую наименьшую сумму может выплачивать **Геннадий** сотрудникам?

ГЕННАДИЙ



Шаг 1. Вводим переменную и составим таблицу:

Город	А.	Б.
Время работы сотрудников	x^2	y^2
Количество произведенной продукции	$3x$	$6y$
Сумма зарплаты	$500x^2$	$500y^2$

Шаг 2. Пусть S — сумма, которую Геннадий выплачивает сотрудникам. Получаем уравнение:

1. $500x^2 + 500y^2 = S,$
2. $3x + 6y = 300$

$$\begin{cases} 500x^2 + 500y^2 = S \\ 3x + 6y = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 500(x^2 + y^2) = S \\ 3x + 6y = 300 \end{cases}$$

$$y = \frac{300 - 3x}{6} = 50 - 0,5x$$

Шаг 3. Теперь можно подставить значение y в 1 уравнение:

$$\begin{aligned} S &= 500(x^2 + (50 - 0,5x)^2) = \\ &= 500(x^2 + (2500 - 50x + 0,25x^2)) \\ &= 500(1,25x^2 - 50x + 2500) \\ &= 625x^2 - 25000x + 1250000 \end{aligned}$$

$$\text{Шаг 5. } x_b = \frac{-b}{2a} = \frac{25000}{2 \cdot 625} = 20$$

Шаг 6. Вычислим значение y :

$$y = 50 - 0,5x = 50 - 0,5 \cdot 20 = 50 - 10 = 40$$

Шаг 7.

$$S = 500(20^2 + 40^2) = 500(400 + 1600) = 500 \cdot 2000 = 1000000 \text{ руб.}$$

Шаг 4. Заметим, что это парабола с ветвями вверх, поскольку коэффициент перед x^2 положителен. Изобразим ее условный график.



Наименьшее значение достигается в вершине параболы. Найдем ее.

АГЛАЯ

Аглая является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Аглая платит рабочему 500 рублей. Аглае нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

АГЛАЯ

Завод	№1	№2
Время работы сотрудников	x^2	y^2
Количество произведенной продукции	$2x$	$5y$
Сумма зарплаты	$500x^2$	$500y^2$

Григорий

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Шаг 1. Вводим переменную и составим таблицу:

Завод	№1	№2
Время работы сотрудников	x^2	y^2
Количество произведенной продукции	$3x$	$4y$
Сумма зарплаты	$500x^2$	$500y^2$

Шаг 2. Пусть a — наибольшее количество единиц товара. Получаем уравнение:

1. $500x^2 + 500y^2 = 5000000$,
2. $3x + 4y = a$

Шаг 2.

$$\begin{cases} 500x^2 + 500y^2 = 500 \\ 3x + 4y = a \end{cases} \quad \begin{cases} 500(x^2 + y^2) = 500000 \\ 3x + 4y = a \end{cases} \quad /500 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10000 \\ 3x + 4y = a \end{cases}$$

Шаг 3. Теперь можно подставить значение y в 1 уравнение:

$$y = \frac{a - 3x}{4}$$

$$x^2 + \left(\frac{a - 3x}{4}\right)^2 = 10000$$
$$x^2 + (0,25a - 0,75x)^2 = 10000$$

$$x^2 + 0,0625a^2 - 0,375ax + 0,5625x^2 = 10000$$

$$1,5625x^2 - 0,375ax + 0,0625a^2 - 10000 = 0$$

Шаг 5. Находим дискриминант. Уравнение имеет решение, если дискриминант уравнения $D \geq 0$.

$$D = 0,140625a^2 - 4 * 1,5625 * (0,0625a^2 - 10000)$$
$$= 0,140625a^2 - 0,390625a^2 + 62500 = -0,25a^2 + 62500 \geq 0$$

$$-0,25a^2 + 62500 \geq 0$$

$$-0,25a^2 \geq -62500$$

$$a^2 \leq \frac{62500}{0,25}$$

$$a^2 < 250000$$

Ответ: 500

Геннадий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Геннадий платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Геннадий готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Геннадий

Завод	№1	№2
Время работы сотрудников	x^2	y^2
Количество произведенной продукции	x	y
Сумма зарплаты	$250x^2$	$200y^2$

Алгоритм решения задач на оптимизацию

Шаг 1. Выделить значение, которое необходимо найти, и выразить его с помощью переменной.

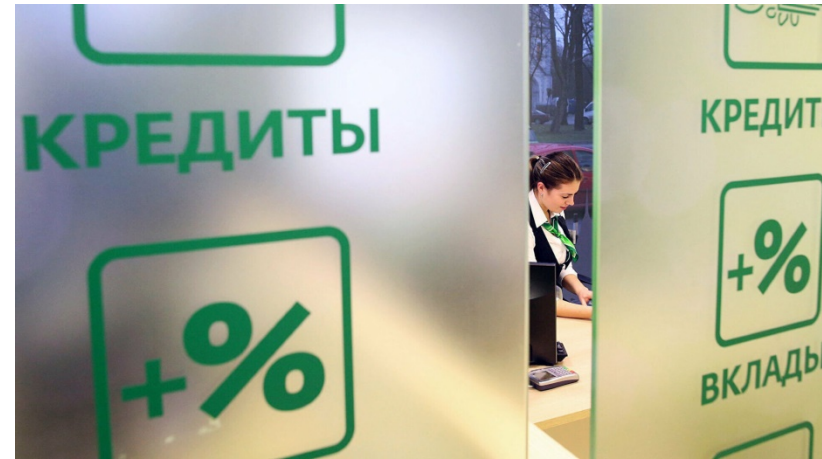
Шаг 2. Выразить неизвестные значения через другую переменную. Составить уравнение.

Шаг 3. Составить функцию $y = f(x)$ — это математическая модель.

Шаг 4. Исследовать полученную функцию.

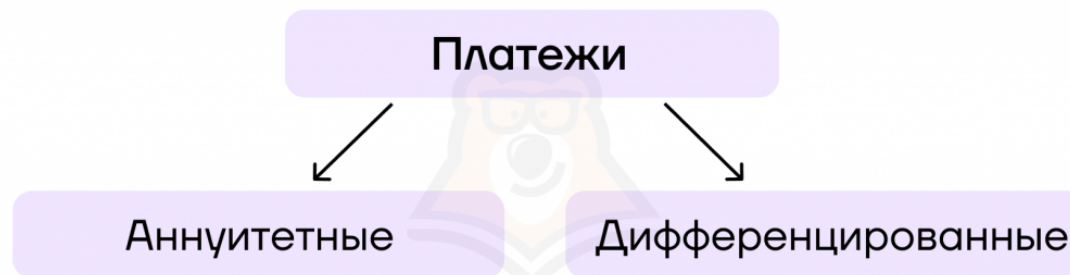
ВКЛАДЫ И КРЕДИТЫ

Финансовые задачи на каждый день



Кредит

основные схемы погашения кредита



Аннуитетные платежи

Аннуитетные платежи встречаются достаточно часто.

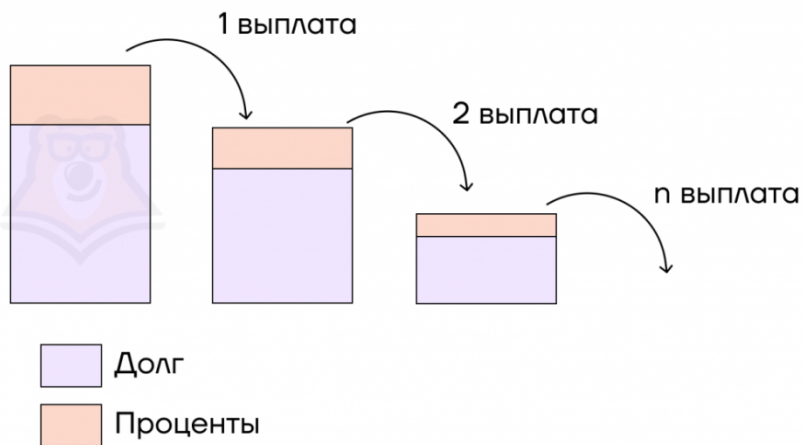
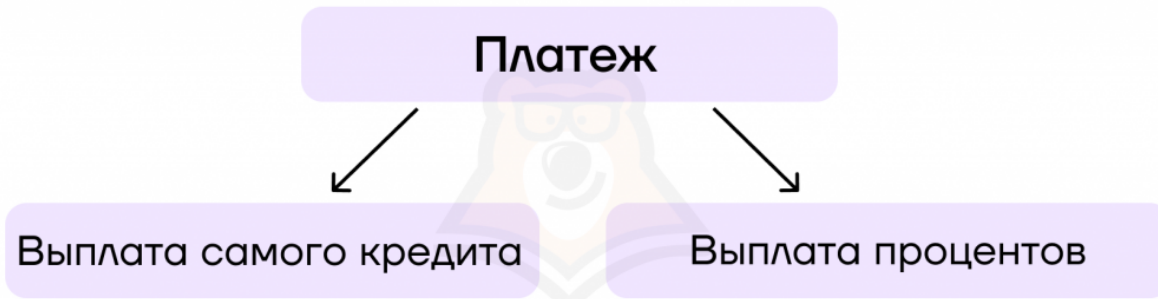
В чем заключается их основная роль?

Каждый месяц (или год) сумма выплат одинаковая.

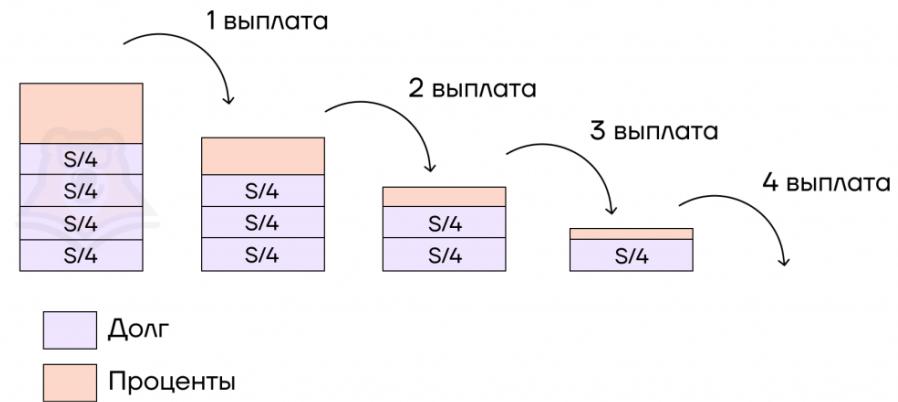
Аннуитетные платежи — такая система выплат, при которых кредит выплачивается раз в год равными платежами.

Дифференцированные платежи —
такая система выплат, при которой
сумма долга уменьшается равномерно.





**Аннуитетные
платежи**

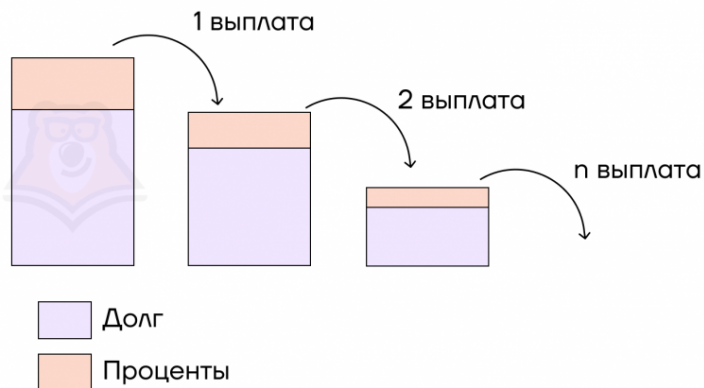


**Дифференцированные
платежи**

Аннуитетные платежи

Ключевые слова:

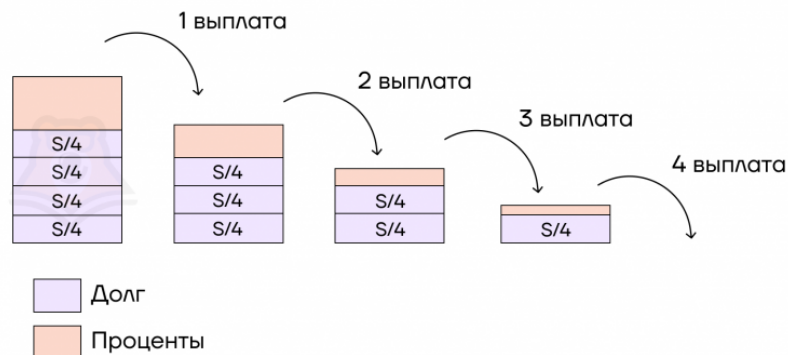
- ❖ выплаты равны между собой;
- ❖ выплаты фиксированные;
- ❖ сам долг уменьшается неравномерно.



Дифференцированные платежи

Ключевые слова:

- ❖ платежи разные;
- ❖ каждый платеж меньше предыдущего;
- ❖ долг уменьшается на одну и ту же величину.



СРАВНЕНИЕ	Аннуитетные платежи	Дифференцированные платежи
Выплаты	Выплаты равны между собой	Выплаты со временем уменьшаются
Как уменьшается долг	Неравномерно	Равномерно
Из чего складывается выплата	Начисленные на остаток проценты и часть от долга. В первое время выплачиваются в основном проценты, а долг лишь малой частью. Со временем в основном будет выплачиваться долг.	Начисленные на остаток проценты и часть от долга. Долг выплачивается равными частями.
График выплат	 <p data-bbox="724 1285 1168 1306">Начало выплат Конец выплат</p> <ul data-bbox="772 1320 1120 1392" style="list-style-type: none"> Выплата самого кредита Выплата процентов 	 <p data-bbox="1342 1285 1748 1306">Начало выплат Конец выплат</p> <ul data-bbox="1371 1313 1719 1378" style="list-style-type: none"> Выплата самого кредита Выплата процентов

Правильно составленная **таблица** поможет решить экономическую задачу.

Что обычно включается в таблицу:

- ✓ остаток на начало периода,
- ✓ начисленный процент,
- ✓ выплата,
- ✓ остаток после выплаты.

Месяц	Долг без %	Долг с %	Выплата	Остаток
Январь				
Февраль				
Март				

Составление уравнений:

“Долг с %” — “Выплата” = “Остаток”

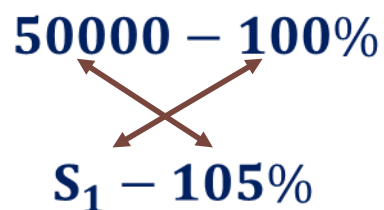
“Долг с %” — “Остаток” = “Выплата”

“Остаток” + “Выплата” = “Долг с %”

В начале года некоторую сумму денег S вложили в банк на $r\%$ годовых. Определите сумму вклада через один год, если $S=50000$ рублей, а проценты $r=5\%$.

а) Вклад увеличился на $100 + 5 = 105\%$.

Найдем 105% :



$$S_1 = 50000 * \frac{105}{100} = 50000 * 1,05 = 52500 \text{ руб.}$$

Увеличили на 15% :

$$S_1 = 50000 * 1,15$$

Увеличили на 20% :

$$S_1 = 50000 * 1,2$$

Увеличили на 37% :

$$S_1 = 50000 * 1,37$$

Повышающий коэффициент

$$k = 1 + 0,01r$$

Погашение кредита



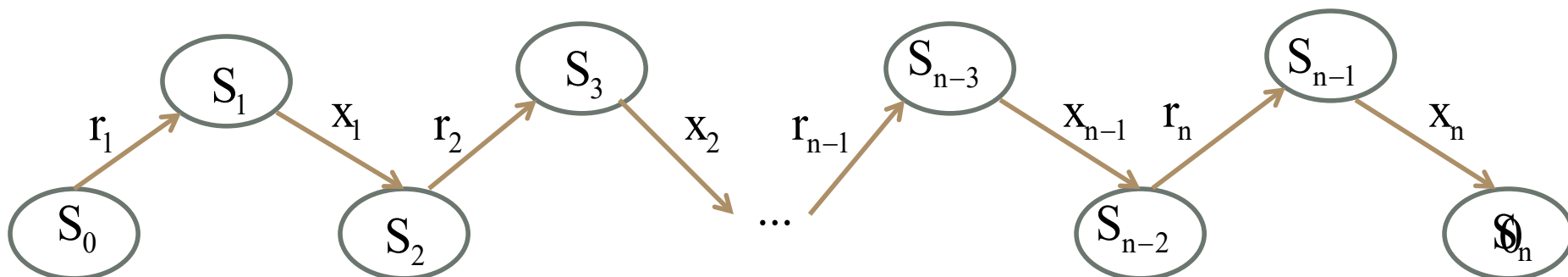
27.04.2019	7024.16	8502.54	15526.64	753012.29
27.05.2019	7024.16	8702.44	15526.64	745572.80
27.06.2019	6824.20	8343.19	15526.64	738911.33
27.07.2019	7183.45	8535.88	15526.64	725063.0
27.08.2019	6990.76	8452.76	15526.64	717879.5
27.09.2019	7073.88	8098.69	15526.64	710888.
27.10.2019	7427.95	8280.33	15526.64	703814
27.11.2019	7246.31	7929.84	15526.64	69638
27.12.2019	7596.80	8084.56	15526.64	68914
27.01.2020	7442.08	7993.45	15526.64	6815
27.02.2020	7533.19	7394.18	15526.64	674
27.03.2020	8132.46	7807.69	15526.64	666
27.04.2020	7718.95	7467.25	15526.64	65
27.05.2020	8059.39	7620.50	15526.64	6

25 января 2023 года **Алексей** собирается взять в банке **S** рублей в кредит под **r%** в месяц. Условия банка, для выплаты кредита, следующая:

- ✓ **1 числа** каждого следующего месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на **r%**),
- ✓ затем **Алексей**, до **25 числа** этого месяца переводит в банк определённую сумму ежемесячного платежа.
- ✓ Условия банка действуют до тех пор пока кредит не будет погашен полностью.

Нарисуйте схему выплаты кредита **Алексея**.

Сумма кредита - S **Процент за период - r** **Платеж - x**



$$S_n = 0$$

$$r = ?$$

Кредит

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

“Долг без %” — “Долг с %” = “Выплата” **Найти наибольшее значение r - ?**

Заполняем таблицу:

Условие: $S < 1,2$ млн. руб.

Месяц	Долг на 1-е число	Выплата	Долг на 15-е число
Январь			1
Февраль	k	$k - 0,6$	0,6
Март	0,6 k	0,6 $k - 0,4$	0,4
Апрель	0,4 k	0,4 $k - 0,3$	0,3
Май	0,3 k	0,3 $k - 0,2$	0,2
Июнь	0,2 k	0,2 $k - 0,1$	0,1
Июль	0,1 k	0,1 k	0

Повышающий коэффициент

$$1 + \frac{r}{100} = k$$

Найдем общую сумму S выплат:

$$S = (k - 0,6) + (0,6k - 0,4) + (0,4k - 0,3) + (0,3k - 0,2) + (0,2k - 0,1) + 0,1k = \\ = k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = 2,6k - 1,6$$

По условию:

$$2,6k - 1,6 < 1,2$$

$$2,6k < 2,8$$

$$k < \frac{2,8}{2,6} \quad k < \frac{14}{13}$$

Значит,

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13}$$

$$\frac{r}{100} < \frac{1}{13}$$

$$r < \frac{100}{13}$$

$$r < \textcircled{7} \frac{9}{13}$$

Ответ: $r=7$

Кредит

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг(в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Найти наибольшее значение S - ?

Заполняем таблицу:

Условие: $S < 50$ млн. руб.

Год	Долг в январе с %	Выплата	Долг в июле без %
2020			S
2021	$1,25S$	$0,45S$	$0,8S$
2022	S	$0,4S$	$0,6S$
2023	$0,75S$	$0,35S$	$0,4S$
2024	$0,5S$	$0,5S$	0

“Долг без %” — “Долг с %” = “Выплата”

Найдем общую сумму S выплат:

$$S = 0,45S + 0,4S + 0,35S + 0,5S = 1,7S$$

По условию:

$$1,7S < 50$$

$$S < \frac{50}{1,7} \quad S < \frac{500}{17}$$

Значит,

$$S < 29\frac{7}{17}$$

Ответ: $S=29$

Спасибо за внимание!!!