



Кузьмина София Сергеевна, учитель математики

МБОУ «Бердигестяхская улусная гимназия им.В.В.Филиппова»

Горный улус

Тема: Применение производной при решении заданий ЕГЭ.



Применение производной при решении заданий ЕГЭ

Применение производной



Ситуация	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
Возрастание функции		> 0
Убывание функции		< 0
Максимум функции		
Минимум функции		
Экстремумы функции		$= 0$
Касательная параллельна прямой $y = a$		$= 0$

Прямая $y = 4x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$.
Найдите абсциссу точки касания.



Решение:

Если прямая параллельна касательной к графику функции в какой-то точке (назовем ее x_0), то ее угловой коэффициент (в нашем случае $k = 4$ из уравнения $y = 4x + 11$) равен значению производной функции в точке x_0 :

$$k = f'(x_0) = 4$$

Производная функции

$$f'(x) = (x^2 + 8x + 6)' = 2x + 8.$$

Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы $2x_0 + 8 = 4$,
откуда $x_0 = -2$.

Ответ: -2 .

Прямая $y = 3x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$.

Найдите абсциссу точки касания.



Решение:

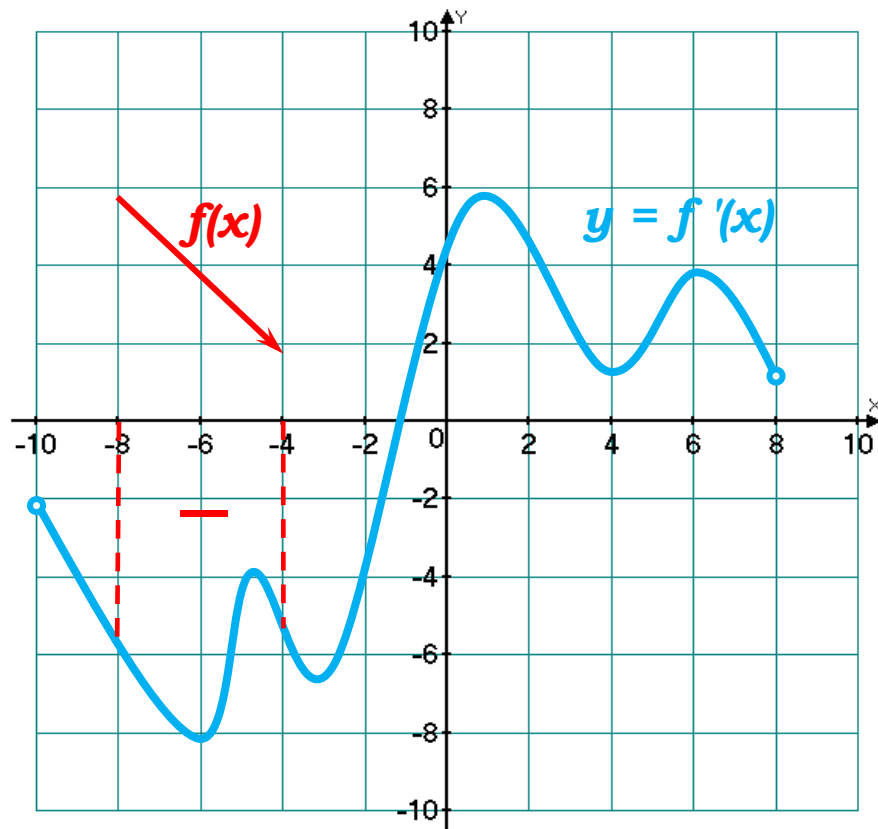
Заметим, что если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент ($k = 3$) должен быть равен производной функции в точке касания, откуда имеем $3x^2 - 6x - 6 = 3$, то есть $3x^2 - 6x - 9 = 0$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: -1 и 3 . Таким образом есть две точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ имеет угловой коэффициент, равный 3 . Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y = 3x + 11$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной.

Значение функции в точке -1 равно $y(-1) = -1 - 3 + 6 + 6 = 8$, а значение в точке 3 равно $y(3) = 27 - 27 - 18 + 6 = -12$. Заметим, что точка с координатами $(-1; 8)$ удовлетворяет уравнению касательной, так как $8 = -3 + 11$. А вот точка $(3; -12)$ уравнению касательной не удовлетворяет, так как $-12 \neq 9 + 11$.

Значит, искомая абсцисса точки касания равна -1 .

Ответ: -1 .

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

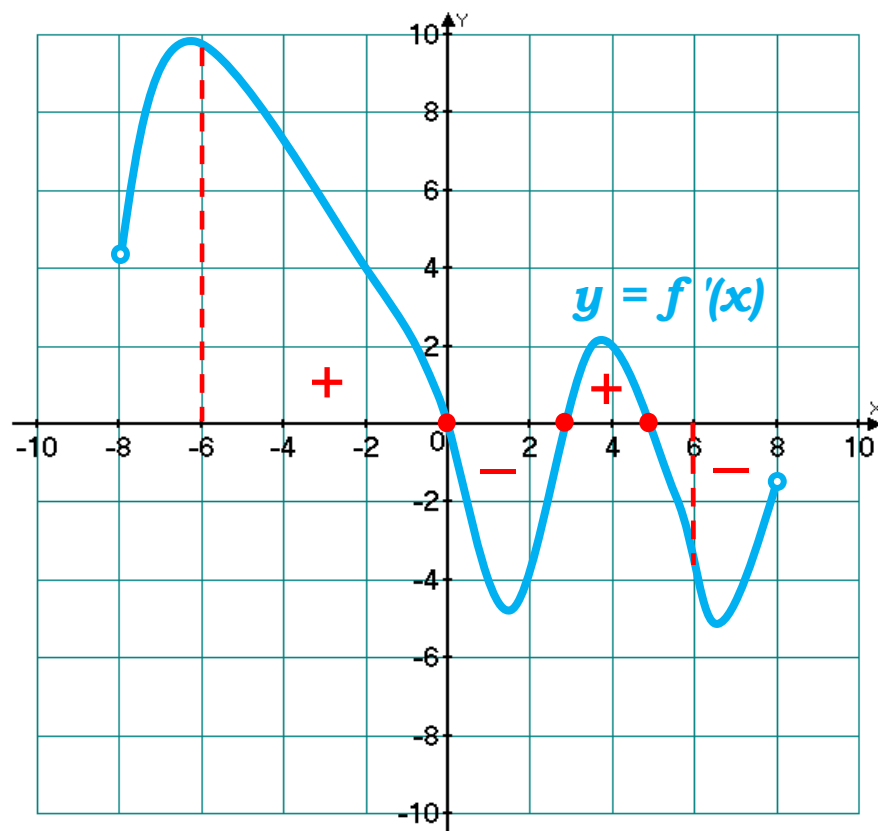


Решение:

Заметим, что на отрезке $[-8; -4]$ производная функции отрицательна, значит, сама функция убывает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает на правом конце отрезка, то есть в точке -4 .

Ответ: -4 .

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 6]$.



Решение:

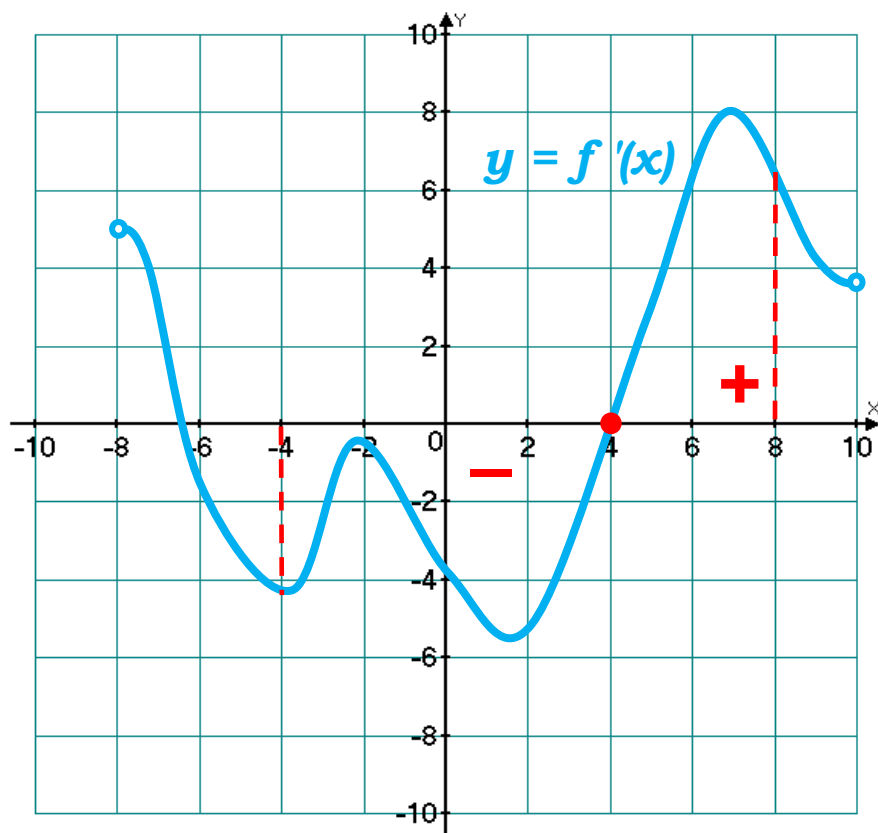
В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует.

Видно, что таких точек принадлежащих отрезку $[-6; 6]$ три. При этом в каждой точке производная меняет знак либо с «+» на «-», либо с «-» на «+».

Ответ: 3.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4; 8)$.

№5

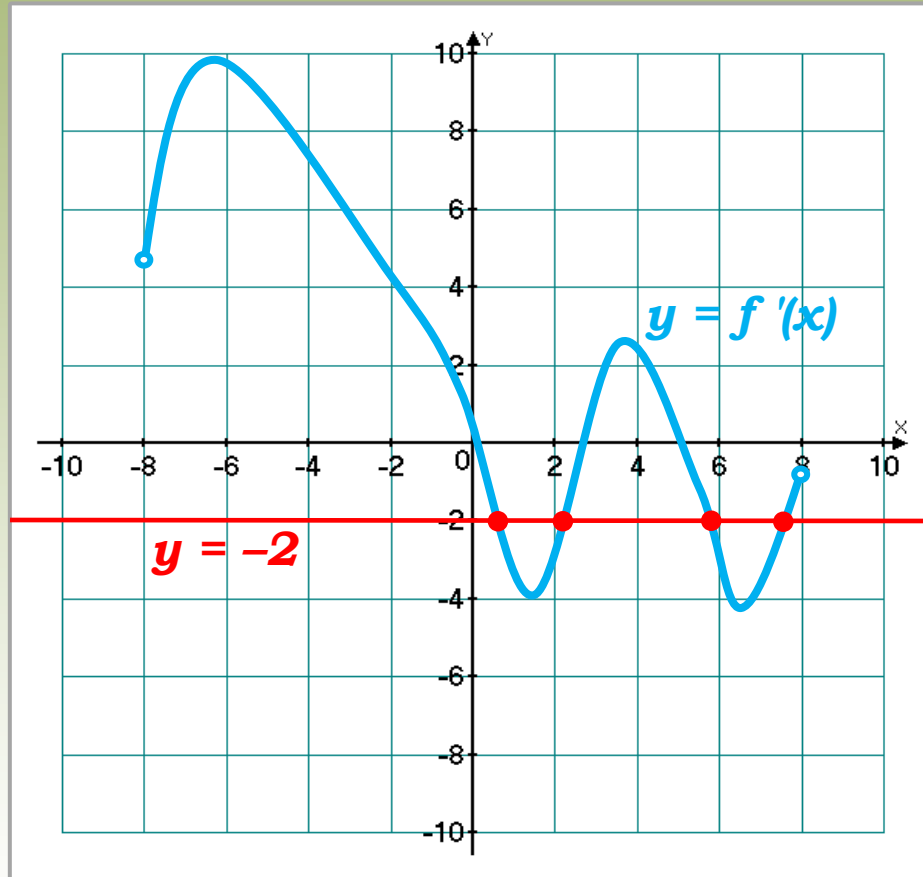


Решение:

Заметим, что на интервале $(-4; 8)$ производная в точке $x_0 = 4$ обращается в 0 и при переходе через эту точку меняет знак производной с « $-$ » на « $+$ », точка 4 и есть искомая точка экстремума функции на заданном интервале.

Ответ: 4.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 2$ или совпадает с ней.

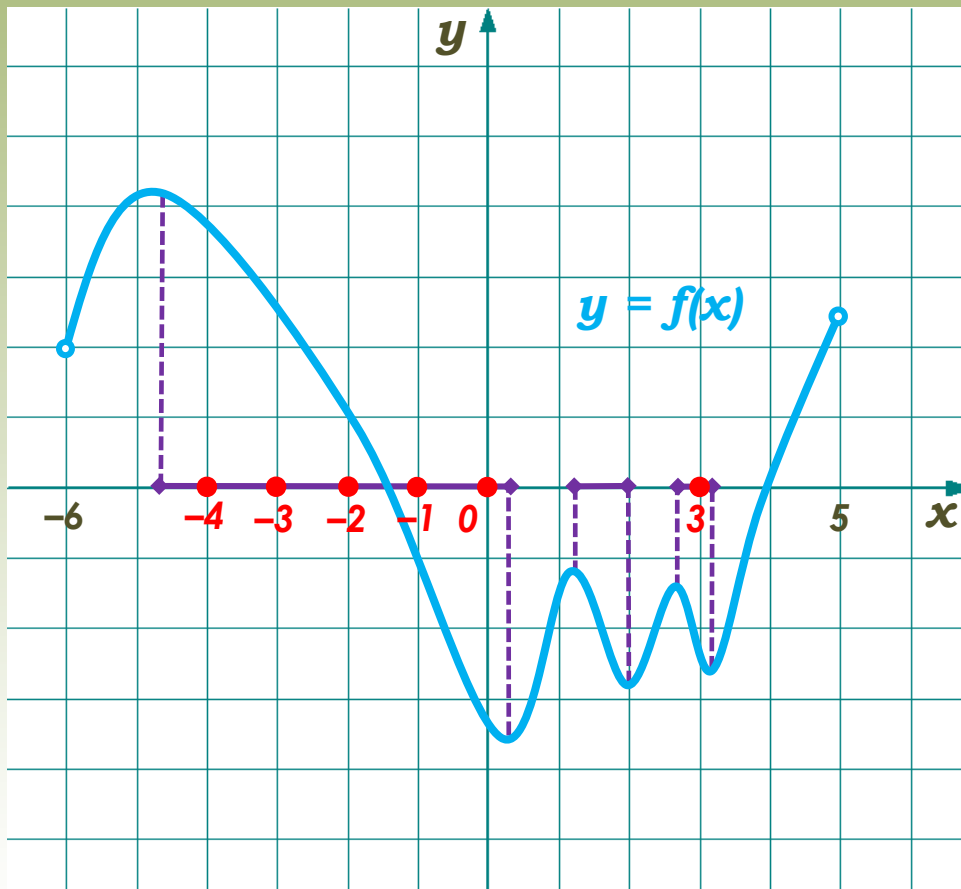


Ответ: 4.

Решение:

Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 2$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент $k = -2$, а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции $f'(x) = -2$. Для этого на графике производной проведем прямую $y = -2$, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. Таких точек 4.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ: 6.

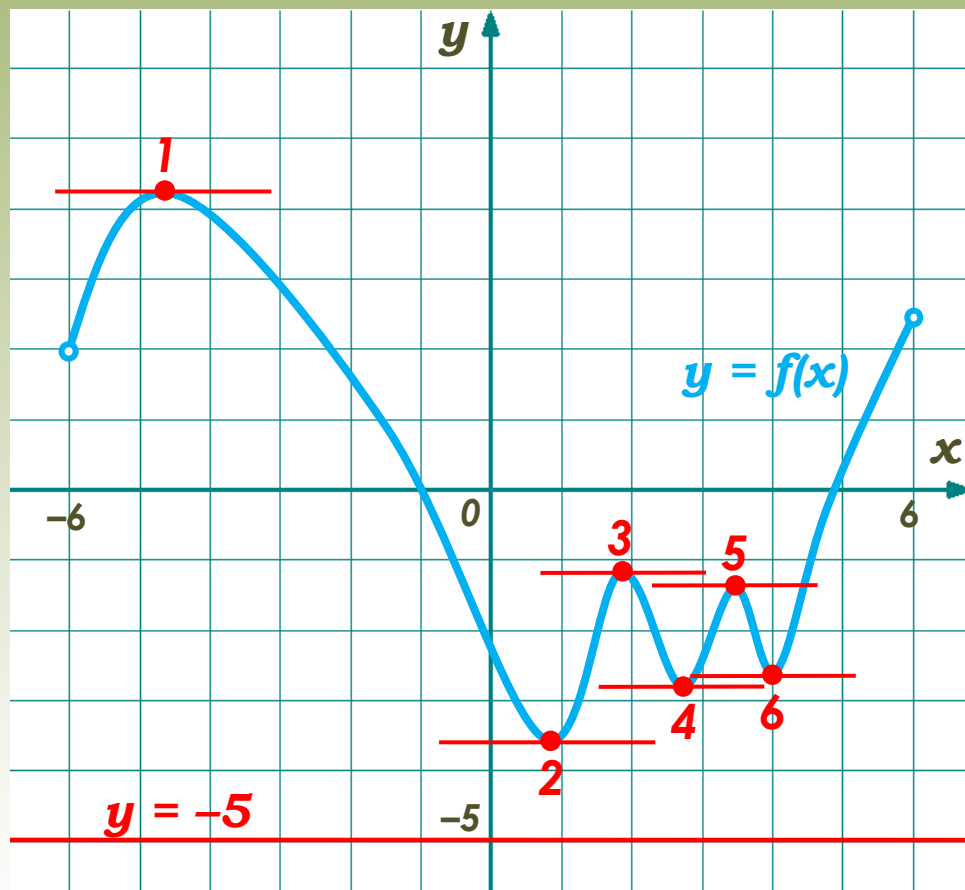
Решение:

Заметим, что производная функции отрицательна, если сама функция $f(x)$ убывает, а значит, необходимо найти количество целых точек, входящих в промежутки убывания функции.

Таких точек 6:

$x = -4, x = -3, x = -2,$
 $x = -1, x = 0, x = 3.$

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -5$.



Ответ: 6.

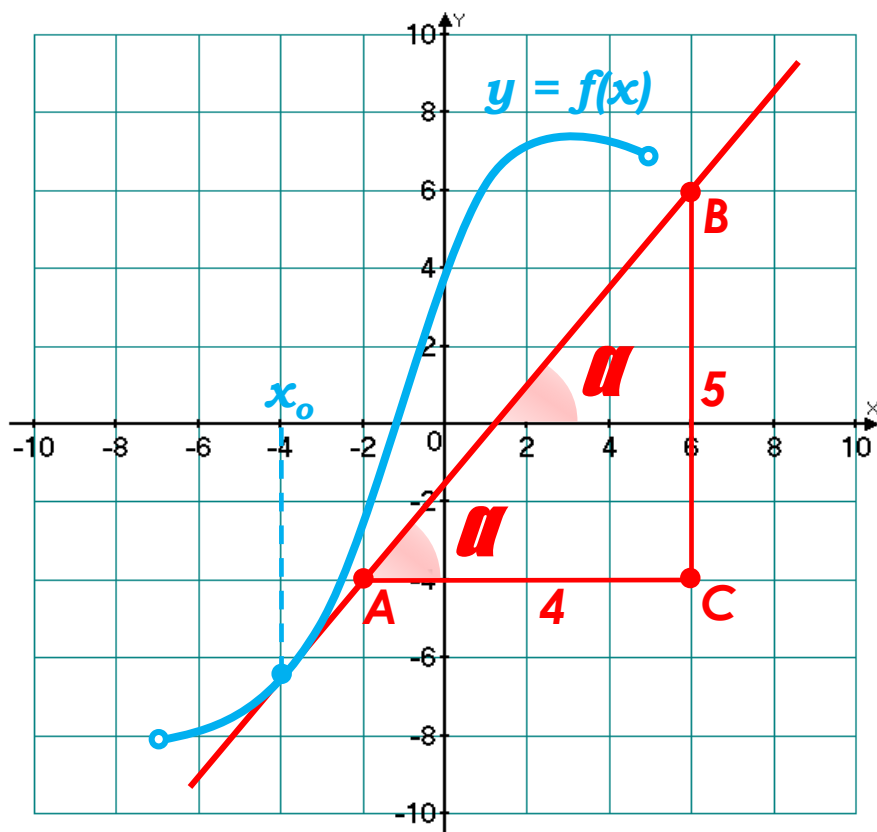
Решение:

Прямая $y = -5$ горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, угловой коэффициент в искомых точках $k = f'(x) = 0$.

В нашем случае – это точки экстремума. Таких точек 6.

На рисунке изображен график $y = f(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

№9



Ответ: 1,25.

Решение:

Значение производной функции $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

В нашем случае $k > 0$, так как α – острый угол ($\operatorname{tg} \alpha > 0$).

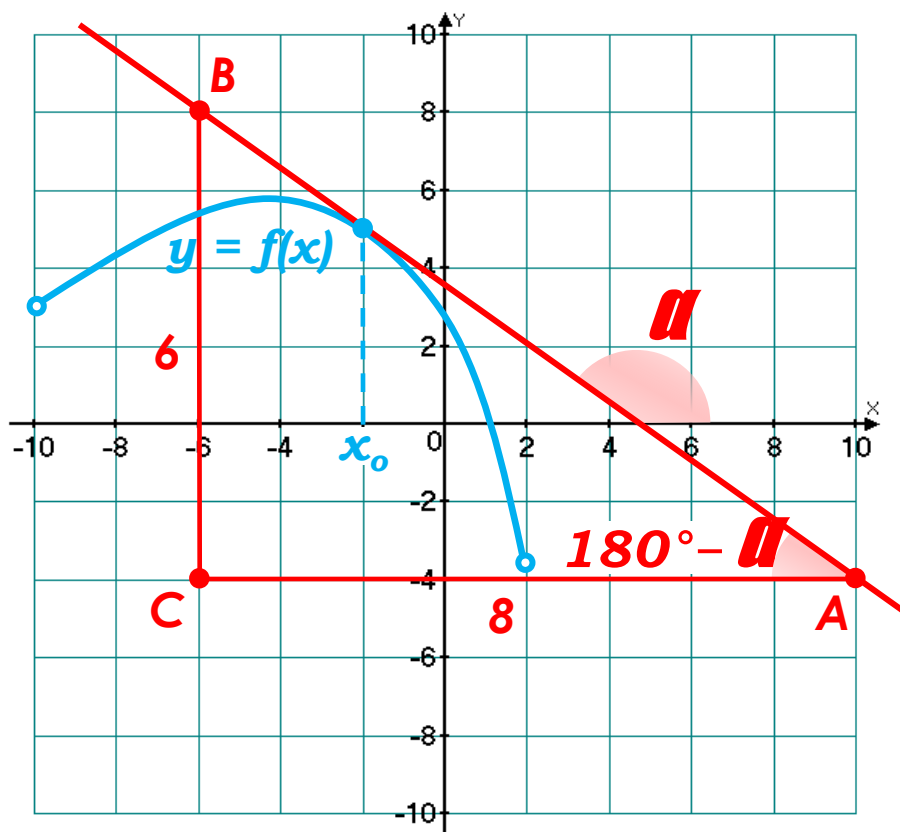
Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа.

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.

$$\operatorname{tg} \alpha = BC : AC = 5 : 4 = 1,25$$

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

№10



Решение:

Значение производной функции $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

В нашем случае $k < 0$, так как α – тупой угол ($\operatorname{tg} \alpha < 0$).

Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа.

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.

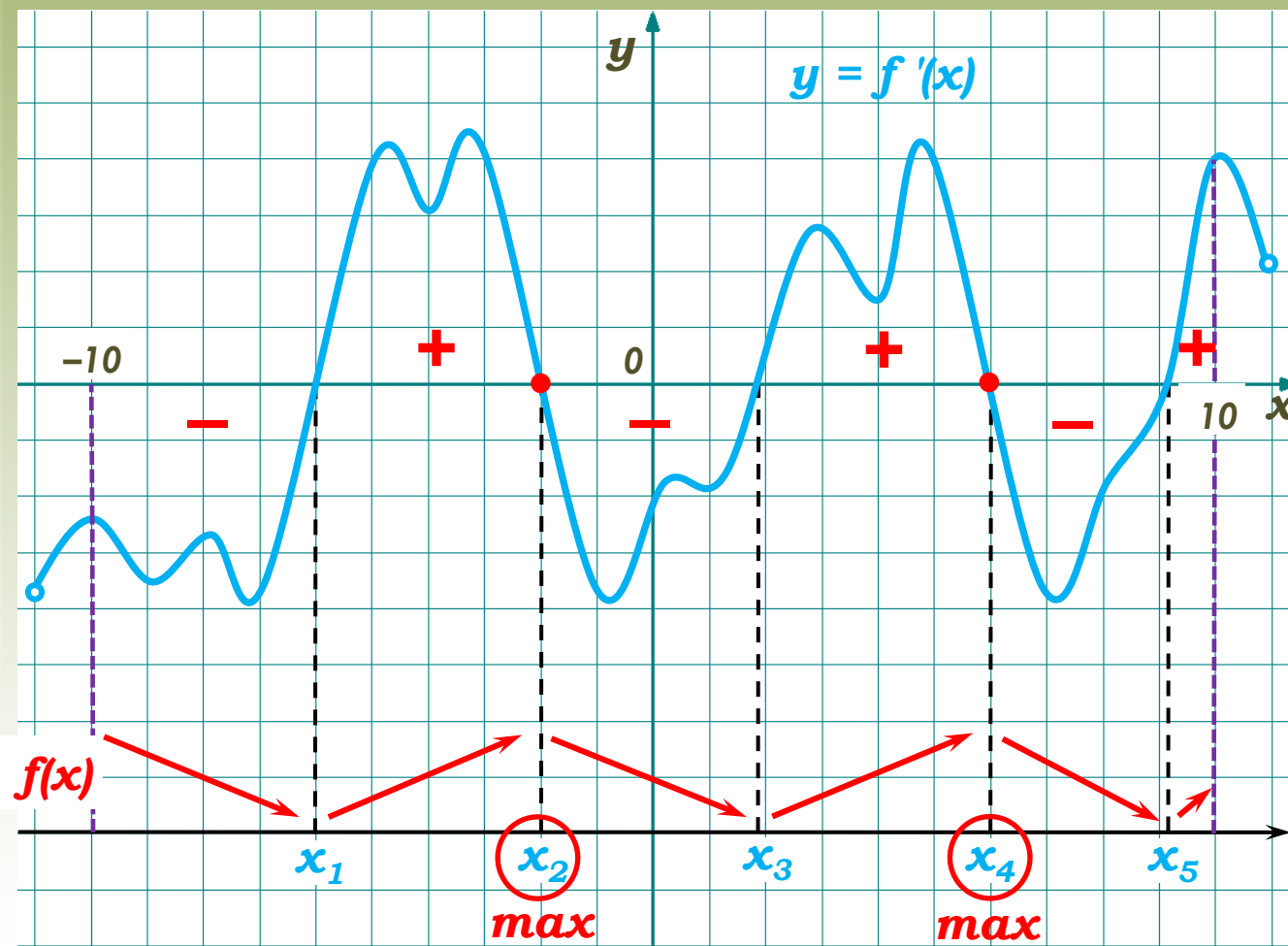
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = BC : AC = 6 : 8 = 0,75$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -0,75$$

Ответ: $-0,75$.

На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ – функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 10]$.

№11



Решение:

В точке экстремума производная функции равна 0 либо *не существует*.

Видно, что таких точек принадлежащих отрезку $[-10; 10]$ пять.

В точках x_2 и x_4 производная меняет знак с «+» на «-» – это точки максимума.

Ответ: 2.

Прямая $y = 4x - 4$ является касательной к графику функции $ax^2 + 34x + 11$. Найдите a .



№12

Решение:

Производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой.

Откуда, если за x_0 принять абсциссу точки касания, имеем: $2ax_0 + 34 = 4$. То есть $ax_0 = -15$.

Найдем значение исходной функции в точке касания:

$$ax_0^2 + 34x_0 + 11 = -15x_0 + 34x_0 + 11 = 19x_0 + 11.$$

Так как прямая $y = 4x - 4$ – касательная, имеем:

$$19x_0 + 11 = 4x_0 - 4, \text{ откуда } x_0 = -1.$$

А значит $a = 15$.

Ответ: 15.

Прямая $y = -4x - 5$ является касательной к графику функции $9x^2 + bx + 20$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.



Решение.

Если x_0 – абсцисса точки касания, то $18x_0 + b = -4$, откуда $b = -4 - 18x_0$.

Аналогично задаче №12 найдем x_0 :

$$9x_0^2 + (-4 - 18x_0)x_0 + 20 = -4x_0 - 5,$$

$$9x_0^2 - 4x_0 - 18x_0^2 + 20 + 4x_0 + 5 = 0,$$

$$-9x_0^2 + 25 = 0,$$

$$x_0^2 = 25/9.$$

Откуда $x_0 = 5/3$ или $x_0 = -5/3$.

Условию задачи соответствует только положительный корень, значит $x_0 = 5/3$, следовательно $b = -4 - 18 \cdot 5/3$, имеем $b = -34$.

Ответ: -34 .

Прямая $y = 2x - 6$ является касательной к графику функции $x^2 + 12x + c$. Найдите c .



№14

Решение.

Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания x_0 и приравняем значение производной функции в точке x_0 угловому коэффициенту касательной.

$2x_0 + 12 = 2$, откуда $x_0 = -5$.

Значение исходной функции в точке -5 равно:

$25 - 60 + c = c - 35$, значит $c - 35 = 2 \cdot (-5) - 6$,
откуда $c = 19$.

Ответ: 19.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0,5t^2 - 2t - 6$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.



№15

Решение.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_0 , прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = x(t)$, равна значению производной функции x при $t = t_0$,

искомая скорость будет равна

$$x'(t) = 0,5 \cdot 2t - 2 = t - 2,$$

$$x'(6) = 6 - 2 = 4 \text{ м/с.}$$

Ответ: 4.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0,5t^2 - 2t - 22$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?

Решение.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_0 , прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = x(t)$, равна значению производной функции x при $t = t_0$, искомая скорость будет равна

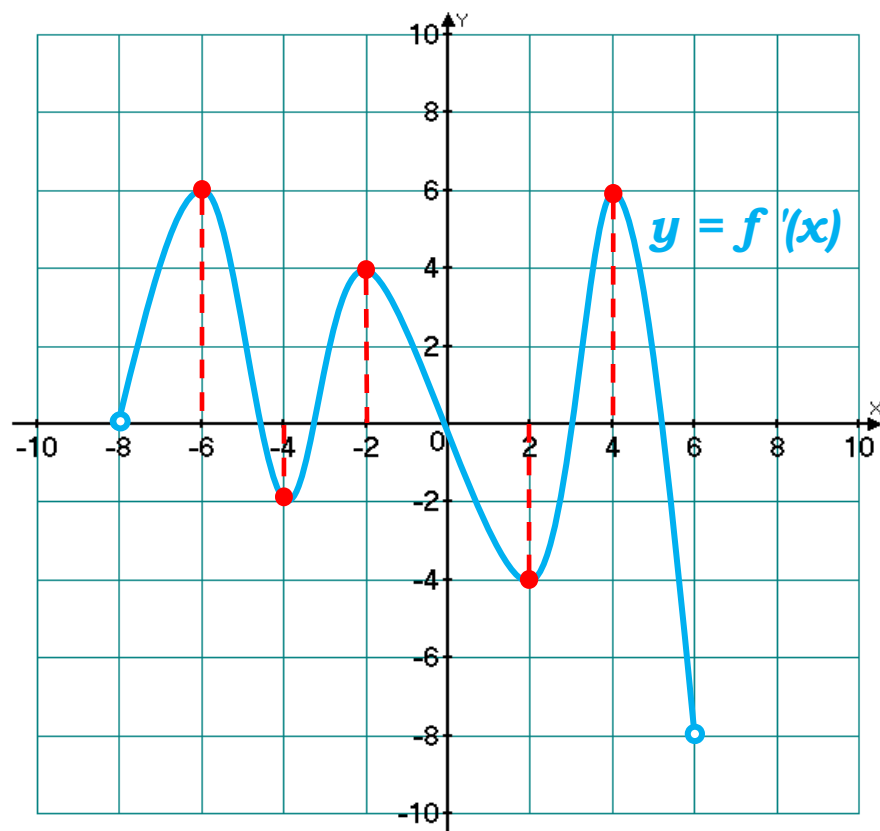
$$x'(t_0) = 0,5 \cdot 2t_0 - 2 = t_0 - 2,$$

Т.к. по условию, $x'(t_0) = 4$, то $t_0 - 2 = 4$, откуда $t_0 = 4 + 2 = 6$ м/с.

Ответ: 6.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 6)$.
Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

№17



Решение:

Точки экстремума – это точки минимума и максимума.

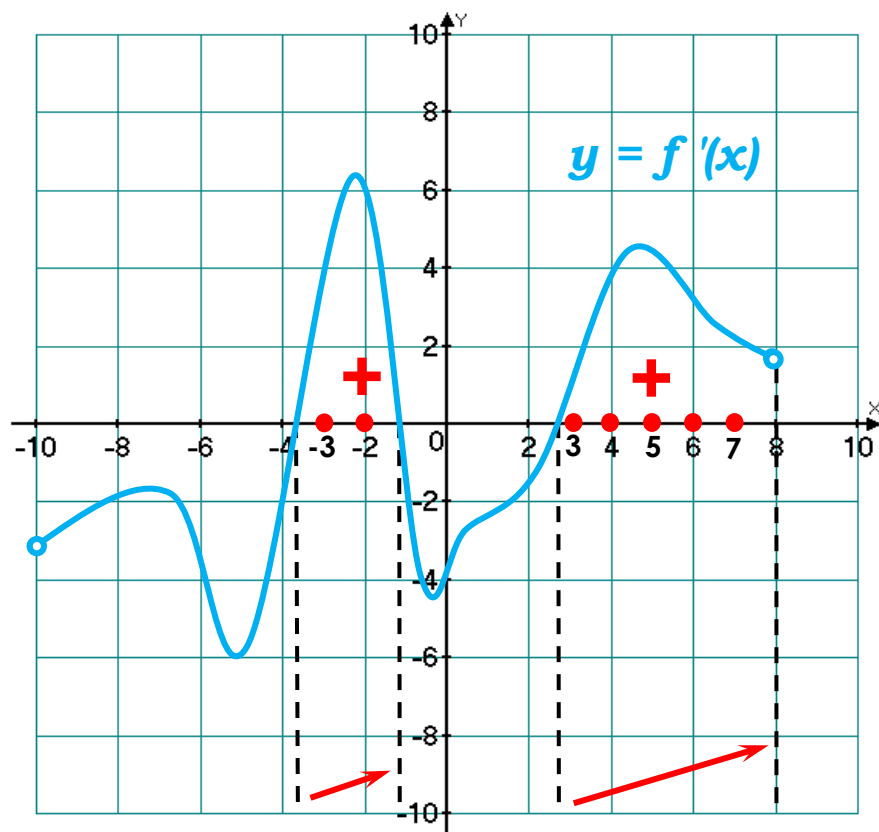
Видно, что таких точек принадлежащих промежутку $(-8; 6)$ пять.

Найдем сумму их абсцисс:

$$-6 + (-4) + (-2) + 2 + 4 = 6.$$

Ответ: 6.

На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ – функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$.
Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Ответ: 20.

Решение:

Заметим, что функция $f(x)$ возрастает, если производная функции положительна; а значит, необходимо найти сумму целых точек, входящих в промежутки возрастания функции.

Таких точек 7:

$x = -3, x = -2, x = 3,$
 $x = 4, x = 5, x = 6, x = 7.$

Их сумма:

$$-3 + (-2) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 20$$