



Школа математики Гипербола

О МАТЕМАТИКЕ ПРОСТО

Адрес: www.giperbola-school.ru

VK: <https://vk.com/giperbolaschool>

Telegram: <https://t.me/giperbolaschool>

Неравенства

Общие свойства

Из двух чисел a и b справедливо одно из следующих соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Если разность $a - b$ положительна, то $a > b$.

Если разность $a - b$ отрицательна, то $a < b$.

Если разность $a - b$ равна нулю, то $a = b$.

Этому определению можно дать геометрическую иллюстрацию: из двух чисел a и b большим является то, которому на координатной прямой соответствует точка, расположенная правее, и меньшим то, которому соответствует точка, расположенная левее.

Неравенства $a > b$ и $a < b$ называют **строгими**.

Рассматриваются также **нестрогие** неравенства:

- ✓ неравенство $a \geq b$, читают « a больше или равно b », или « a не меньше b »; это неравенство верно, если $a > b$ или $a = b$
- ✓ неравенство $a \leq b$, читают « a меньше или равно b », или « a не больше b »; это неравенство верно, если $a < b$ или $a = b$.

Например, верными являются неравенства $7 \geq 2$, $7 \geq 7$, $5 \leq 6$.

Справедливы следующие **свойства неравенств**:

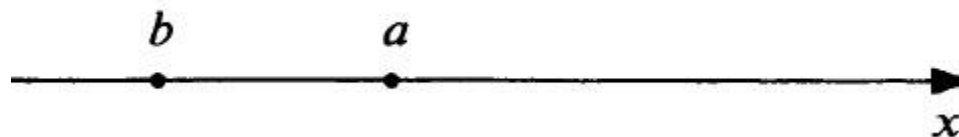
- если $a > b$, то $b < a$;
- если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность неравенства);
- если $a > b$ и c – любое число, то $a + c > b + c$;
- если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$; если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;
- если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;
- если $a > b$ и $c > d$ и a, b, c, d – положительные числа, то $ac > bd$.

Аналогичные неравенства справедливы и для знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Примеры решения задач на неравенства

Пример 1.

На координатной прямой отмечены числа a и b .



Выберите из следующих утверждений верное.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $a - b < 0$; | 2) $a - b < -2$; |
| 3) $a - b > -2$; | 4) $a - b > 2$ |

При выполнении задания используется определение понятий «больше» и «меньше» и свойство транзитивности. Из рисунка видно, что $a > b$.

Отсюда $a - b > 0$. Значит, неравенства 1 и 2 не являются верными.

Рассмотрим неравенство 3. Так как $a - b > 0$ и $0 > -2$, то $a - b > -2$, т. е. это утверждение верно. Убедимся на всякий случай в том, что неравенство под номером 4 не является верным. Действительно, из $a - b > 0$ не следует, что $a - b > 2$, так как, например, при $a=1$, $b=0$ разность $a - b$ равна 1, т. е. меньше 2.

Ответ: 3.

Пример 2.

Известно, что $x > 10$, $y > 20$.

Какие из следующих неравенств верны при любых значениях x и y , удовлетворяющих этому условию:

I. $xy > 200$; II. $xy > 100$; III. $xy > 400$?

1) I и II

2) I и III

3) II и III

4) I, II и III

Все члены двух данных неравенств – положительные числа.

Перемножим почленно эти неравенства, получим $xy > 200$. Итак, неравенство I является верным. Неравенство II следует из неравенства I на основании свойства транзитивности: $xy > 200$, $200 > 100$, значит, $xy > 100$. Неравенство III при некоторых значениях x и y , удовлетворяющих заданному условию, выполняется, а при некоторых нет, например, оно не выполняется при $x = 11$ и $y = 21$.

Ответ: 1.

Пример 3.

Оценим разность $a - b$, если известны границы a и b :

$$10 < a < 11, \quad 4 < b < 5.$$

Неравенства одинакового смысла можно складывать, поэтому заменим разность суммой: $a + (-b)$ и найдём границы числа $-b$: $-4 > -b > -5$, или $-5 < -b < -4$.

Теперь сложим почленно двойные неравенства: $10 < a < 11$ и $-5 < -b < -4$, получим $5 < a - b < 7$.

Пример 4.

Докажем, что если a и b – положительные числа, то $a^2 > b^2$ в том и только в том случае, когда $a > b$.

Воспользуемся алгебраической трактовкой отношения «больше».

Сначала докажем, что если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$. Для этого рассмотрим разность $a^2 - b^2$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Оба множителя в правой части равенства положительны: $a - b > 0$, так как $a > b$; $a + b > 0$, так как a и b – положительные числа. Значит, $a^2 - b^2 > 0$, отсюда следует, что $a^2 > b^2$.

Теперь докажем обратное утверждение: если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$:
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$

Из того что $a^2 > b^2$, следует, что $a^2 - b^2 > 0$, значит, произведение в правой части положительно. Так как $a + b > 0$, то второй множитель $a - b$ также положителен, т. е. $a - b > 0$. Следовательно, **$a > b$** .

Решение неравенств первой степени

Неравенства с одной переменной решают почти так же, как и уравнения. Значение переменной, при подстановке которой в неравенство получается верное числовое неравенство, называется **решением неравенства**.

Решить неравенство – это значит найти все его решения или показать, что их нет.

Неравенства, у которых множества решений совпадают, называют **равносильными**.

При решении неравенств пользуются следующими **правилами**, которые позволяют заменять одно неравенство другим, ему равносильным:

- члены неравенства можно переносить из одной его части в другую с противоположным знаком;
- обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же положительное число;
- обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же отрицательное число и заменять при этом знак неравенства на противоположный.

Рассмотрим неравенство **$3x(x+2) - 20 > 6x+7$** .

Заменим его более простым равносильным ему неравенством:

$$3x^2 + 6x - 20 > 6x + 7,$$

$$3x^2 + 6x - 20 - 6x - 7 > 0,$$

$$3x^2 - 27 > 0,$$

$$x^2 - 9 > 0.$$



Неравенства первой степени – это неравенства вида $ax + b > 0$ или $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, где $a \neq 0$.

Например, неравенства $2x - 3 > 0$; $0,3x + 1,2 > 0$; $5 - 10x \leq 0$ являются неравенствами первой степени.

Пример 1:

$$5 - 10x \leq 0 \quad | *(-1)$$

При умножении неравенства на отрицательное число необходимо заменить знак неравенства на противоположный.

$$10x - 5 \geq 0$$

$$10x \geq 5,$$

$$x \geq 0,5.$$

$$[0,5; +\infty).$$

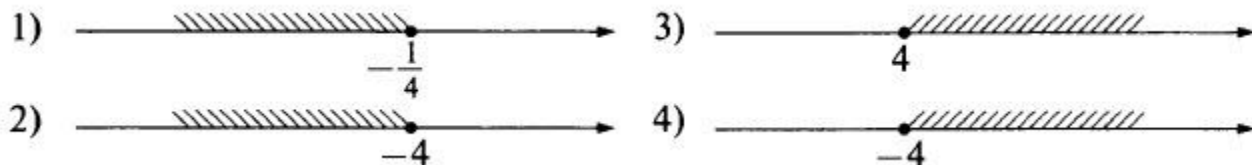
На координатной прямой множество решений этого неравенства можно показать так:



Множеством решений неравенства первой степени всегда является **числовой луч** – или с принадлежащим ему началом, как в данном случае, или с не принадлежащим (в случае строгого неравенства).

Пример 2.

Определим, в каком случае на координатной прямой изображено множество решений неравенства $19 - 7x > 20 - 3(x - 5)$.



Самая правильная стратегия поиска ответа на вопрос состоит в том, чтобы просто решить неравенство.

$$19 - 7x > 20 - 3(x - 5),$$

$$19 - 7x > 20 - 3x + 15,$$

$$-4x > 16,$$

$$4x < -16,$$

$$x < -4.$$

Ответ: 2.

Пример 3:

$$\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} \leq 3 - \frac{1-x}{2} \quad | *6 - \text{умножим на общий знаменатель;}$$

$$\frac{(2x-7) \cdot 6}{6} + \frac{(7x-2) \cdot 6}{3} \leq 3 \cdot 6 - \frac{(1-x) \cdot 6}{2},$$

$$(2x-7) + (7x-2) \cdot 2 \leq 18 - (1-x) \cdot 3.$$

После преобразований получим: $x \leq 2$.

Ответ: $x \leq 2$.

Решение систем неравенств первой степени

Когда требуется найти множество значений переменной, удовлетворяющих одновременно двум или нескольким неравенствам, говорят, что надо **решить систему неравенств**.

Общий приём решения системы неравенств состоит в следующем:

- сначала решаем каждое неравенство отдельно;
- затем находим множество их общих решений.

При нахождении множества общих решений целесообразно пользоваться координатной прямой как опорным образом – это позволит во многих случаях избежать ошибок.

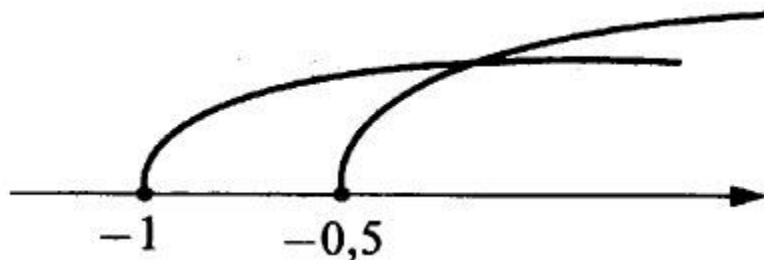
Пример 1:

$$\begin{cases} x - 1 < 7x + 2, \\ 11x + 13 > x + 3. \end{cases}$$

Решив первое неравенство, получим, что $x > -0,5$, решив второе неравенство, получим, что $x > -1$.

$$\begin{cases} x > -0,5 \\ x > -1 \end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множество решений каждого неравенства.



Из рисунка видно, что общей частью этих двух лучей служит множество чисел, больших $-0,5$.

Ответ: $(-0,5; +\infty)$.

Пример 2:

Найдём множество решений двойного неравенства $-2 < 4 - 3x < 10$.

Решить двойное неравенство $-2 < 4 - 3x < 10$ – это то же самое, что решить систему неравенств.

$$\begin{cases} 4 - 3x > -2, \\ 4 - 3x < 10. \end{cases}$$

Можно вести запись решения и с помощью двойных неравенств.

$$-2 < 4 - 3x < 10$$

$$-2 - 4 < -3x < 10 - 4$$

$$-6 < -3x < 6$$

$$6 > 3x > -6$$

$$-6 < 3x < 6$$

$$-2 < x < 2.$$

Ответ: $(-2; 2)$.

Пример 3.

Решим задачу: «Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13 см, а его периметр больше 44 см. Какую длину может иметь основание треугольника?»

Для решения составим по условию задачи систему неравенств, используя неравенство треугольника.

Пусть длина основания треугольника равна x см. Тогда периметр треугольника равен $(x + 26)$ см и в соответствии с условием $x + 26 > 44$.

Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон. Поэтому можно составить ещё два неравенства, которым должны удовлетворять искомые величины: $x < 26$; $13 < x + 13$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + 26 > 44, \\ x < 26, \\ 13 < x + 13. \end{cases}$$

Решив её, получим, что $18 < x < 26$.

Ответ: (18; 26).

Квадратные неравенства

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$, называют квадратным неравенством.

Примечание к определению: вместо знака $>$ могут стоять и другие знаки неравенства: $<$, $\geq$, $\leq$.

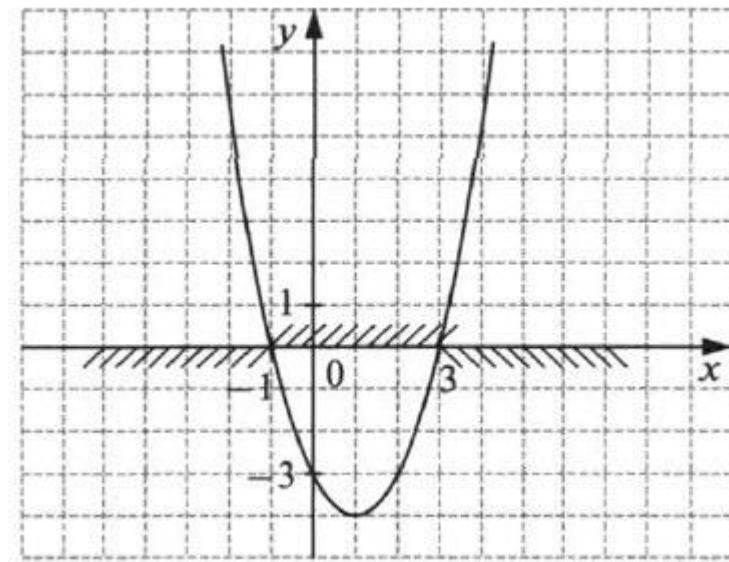
Множество решений квадратного неравенства легко найти, используя **график функции $y = ax^2 + bx + c$** .

При **решении квадратных неравенств** можно ограничиться схематическим рисунком, показывающим положение графика относительно оси x , так как координаты вершины в данном вопросе значения не имеют; можно также не изображать ось y .

Если требуется решить квадратное неравенство с отрицательным коэффициентом a , то всегда целесообразно перейти к равносильному неравенству с положительным первым коэффициентом, умножив обе части неравенства на -1 . Например, вместо неравенства $5 + 4x - x^2 \leq 0$ решать неравенство $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

На рисунке изображён график функции $y = x^2 - 2x - 3$.

График пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -1 и 3 , т. е. при $x = -1$ и $x = 3$ значения функции $y = x^2 - 2x - 3$ равны нулю.



При $-1 < x < 3$ график расположен ниже оси x , т. е. значения функции на этом промежутке отрицательны. Иными словами, множеством решений неравенства $y < 0$ является промежуток $-1 < x < 3$.

При $x < -1$ и $x > 3$ график расположен выше оси x , т. е. значения функции положительны. Иными словами, неравенство $x^2 - 2x - 3 > 0$ выполняется при $x < -1$ и $x > 3$.

Пример 1.

$$x^2 - x - 6 > 0.$$

Выясним, пересекает ли график функции $y = x^2 - x - 6$ ось x .

Для этого решим уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. Его корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

Следовательно, **парабола** (график функции) пересекает ось x в точках с абсциссами **-2** и **3**, её ветви направлены **вверх**, т.к. коэффициент при x^2 - положительный.

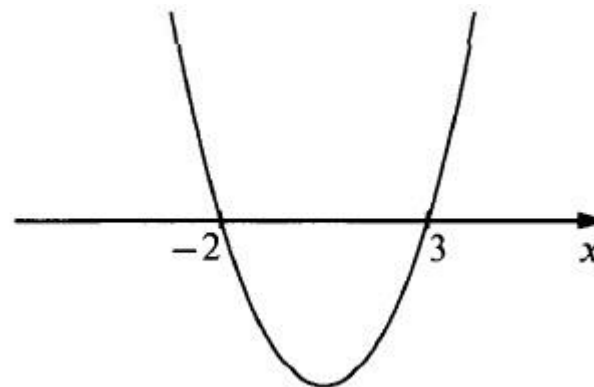
Из рисунка видно, что парабола расположена выше оси x при $x < -2$ и $x > 3$.

Объединение этих промежутков и составляет множество решений неравенства $x^2 - x - 6 > 0$.

Ответ можно записать по-разному:

1) $x < -2$; $x > 3$;

2) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.



Пример 2.

$$x(3 - 2x) > 2.$$

Раскроем скобки и перенесём все слагаемые в левую часть:

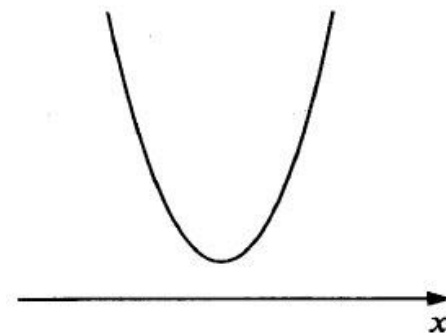
$$-2x^2 + 3x - 2 > 0 \quad | *(-1)$$

$$2x^2 - 3x + 2 < 0.$$

Выясним, пересекает ли **парабола** ось x .

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 < 0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трёхчлен не имеет корней и парабола не пересекает ось x .

При всех значениях x парабола расположена выше оси x , это означает, что нет таких значений x , при которых функция $y = 2x^2 - 3x + 2$ принимает отрицательные значения, значит, неравенство $2x^2 - 3x + 2 < 0$ решений не имеет.



Ответ можно записать по-разному:

1) неравенство решений не имеет;

2) $\emptyset$.

Пример 3.

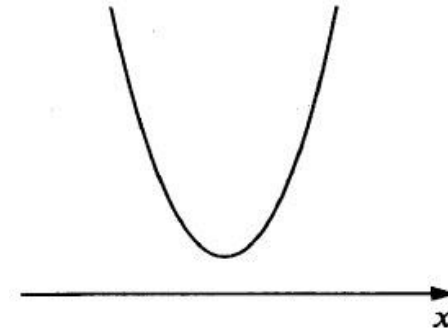
$$-2x^2 + 3x - 2 < 0 \quad | *(-1)$$

$$2x^2 - 3x + 2 > 0.$$

В этом случае любое число является решением неравенства, так как при всех значениях x функция $y = 2x^2 - 3x + 2$ принимает положительные значения.

Ответ можно записать по-разному:

- 1) x – любое число;
- 2) $(-\infty; +\infty)$.



Если неравенство нестрогое, то не надо забывать включить в множество решений значения переменной, при которых квадратный трёхчлен обращается в нуль.

Пример 4.

Найти область определения выражения: $\frac{\sqrt{-4 + 8x - 3x^2}}{x^2 - 1}$

Область определения выражения задаётся условиями:

$$\begin{cases} -4 + 8x - 3x^2 \geq 0, \\ x^2 - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Решив каждое из неравенств. получим:

$$\begin{aligned} 1) & -4 + 8x - 3x^2 \geq 0; \quad 3x^2 - 8x + 4 \leq 0; \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 2; \quad x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]; \\ 2) & x^2 - 1 \neq 0; \quad x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Из рисунка видно, что множеством решений системы неравенств является промежуток от $\frac{2}{3}$ до 2 (включая эти числа) без числа 1.

Ответ можно записать по-разному:

$$1) \frac{2}{3} \leq x < 1; \quad 1 < x \leq 2;$$

$$2) \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; 2];$$

$$3) \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x \leq 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

