



Школа математики Гипербола

О МАТЕМАТИКЕ ПРОСТО

Адрес: www.giperbola-school.ru

VK: <https://vk.com/giperbolaschool>

Telegram: <https://t.me/giperbolaschool>

Правильные многоугольники

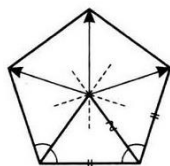
Правильный многоугольник — это такой многоугольник, у которого все стороны и все углы равны. Равносторонний треугольник и квадрат — правильные многоугольники. Если разделить окружность на n равных частей и соединить соседние точки отрезками, то получим правильный многоугольник. Вокруг всякого правильного многоугольника можно описать окружность, в него также можно вписать окружность, и центры этих окружностей совпадают.

Мы научимся строить правильный треугольник, правильный четырехугольник (квадрат) и правильный шестиугольник при помощи циркуля и линейки и выведем формулы, связывающие радиусы вписанной и описанной окружностей с длиной стороны правильного многоугольника.

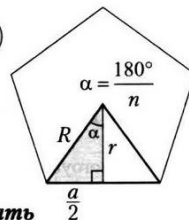
Если число сторон вписанного правильного многоугольника увеличивать, то его периметр будет стремиться к длине окружности, а площадь — к площади круга. Отсюда можно получить формулы длины окружности и площади круга: $C = 2\pi R$ и $S = \pi R^2$.

Вы знаете, что углы измеряются в градусах. Градус, как известно, равен $1/180$ части развернутого угла. Мы познакомимся еще с одной очень важной единицей измерения углов, которая связана с окружностью, — 1 радианом. $1 \text{ рад} = 57^\circ$.

1



2

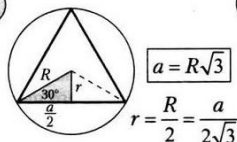


$$\frac{a}{2} = \sin \alpha \quad a = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{a}{2} = \operatorname{tg} \alpha \quad a = 2r \operatorname{tg} \alpha$$

Можно описать, можно вписать

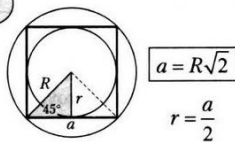
3



$$a = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

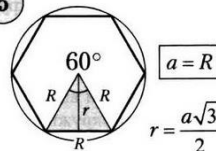
4



$$a = R\sqrt{2}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

5



$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

6

Длина окружности

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{na_1}{na_2} = \frac{2R_1 \sin \alpha}{2R_2 \sin \alpha} = \frac{R_1}{R_2};$$

$$\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2} = \pi \quad \text{Это я знаю}$$

$$C = 2\pi R \quad \text{и помню}$$

$$\quad \text{прекрасно ...}$$

7

Площадь круга

$$S_n = \frac{1}{2} P r$$

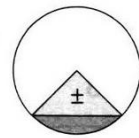
$$S_{\text{круга}} = \frac{1}{2} C R =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

8

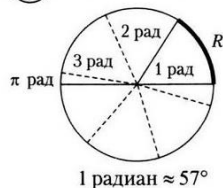
$$\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{круга}}}$$

9



10

Радииан



$$2\pi \text{ рад} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ рад} = 90^\circ \quad \frac{\pi}{3} \text{ рад} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ рад} = 45^\circ \quad \frac{\pi}{6} \text{ рад} = 30^\circ$$

11

π радиан — 180°

A радиан — α°

$$A = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

$$\alpha^\circ = \frac{A \cdot 180^\circ}{\pi}$$

1. Правильный многоугольник. Описанная и вписанная окружности.
2. Формулы, связывающие a и R, r , для правильного многоугольника.
3. Правильный треугольник: a и R, r .
4. Правильный четырехугольник: a и R, r .
5. Правильный шестиугольник: a и R, r .

6. Формула длины окружности. Вывод.
7. Формула площади круга. Вывод.
8. Длина дуги. Площадь сектора.
9. Площадь сегмента.
10. 1 радиан. $\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ радиан.
11. Перевод градусов в радианы и наоборот.

Выражение стороны a через R и r для правильного n -угольника.

Соединим центр правильного многоугольника с двумя соседними вершинами. Получим равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным $360^\circ/n$. Половина его равна $180^\circ/n$, где n — число сторон. Из прямоугольного треугольника находим:

$$1) \quad \frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin \frac{180^\circ}{n}, \text{ откуда } a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$2) \quad \frac{\frac{a}{2}}{r} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \text{ откуда } a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Выражение R и r через сторону a для правильного 3-угольника.

Правильный треугольник. Из закрашенного прямоугольного треугольника

$$\frac{a}{2} = \sin 60^\circ; \quad a = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a = R\sqrt{3}; \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Так как катет, лежащий против}$$

$$\text{угла в } 30^\circ, \text{ равен половине гипотенузы, то } r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Выражение R и r через сторону a для правильного 4-угольника.

Правильный четырехугольник (квадрат). Из закрашенного прямоугольного
треугольника $\frac{a}{R} = \sin 45^\circ$, откуда $a = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $a = R\sqrt{2}$; $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{a}{2}$.

Выражение R и r через сторону a для правильного 6-угольника.

Правильный шестиугольник. Так как центральный угол, который опирается на сторону правильного шестиугольника, равен $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, то равнобедренный треугольник, образованный двумя радиусами R, R и стороной a , является равнобедренным. Отсюда $a = R, r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

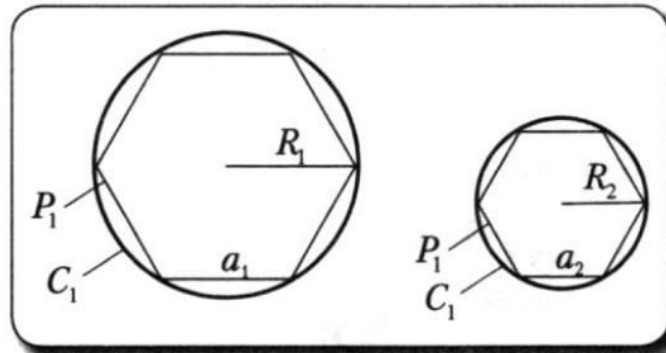
Формула длины окружности. Вывод.

Теорема. Длина окружности $C = 2\pi R$.

Доказательство. Рассмотрим ДВА правильных вписанных многоугольника с одинаковым числом сторон n . При увеличении числа сторон их периметры P_1 и P_2 будут стремиться к длинам окружностей, т. е. к C_1 и C_2 . Поэтому

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{n \cdot a_1}{n \cdot a_2} = \frac{2R_1 \sin \frac{\alpha}{2}}{2R_2 \sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ откуда } \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}.$$

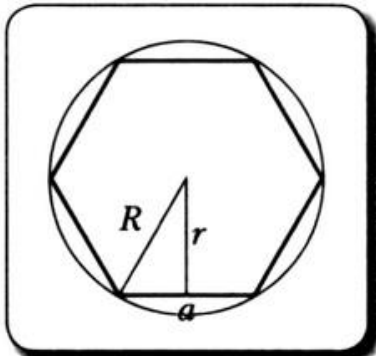
Мы получили, что отношение длины окружности C к ее диаметру $2R$ есть величина постоянная для всех окружностей. Это отношение обозначается буквой π («пи» — первая буква древнегреческого слова «периметрон» — окружность). Так как для любой окружности $C/2R = \pi$, то длина окружности $C = 2\pi R$.



По числу букв в словах фразы «Это я знаю и помню прекрасно, но многие цифры мне лишни, напрасны» можно воспроизвести 12 первых знаков числа π : $\pi = 3,14159265358\dots$

Формула площади круга. Вывод. Теорема.

$$\text{Площадь круга } S = \pi R^2.$$



Доказательство. Рассмотрим ОДИН вписанный правильный многоугольник. Его площадь $S_n = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}ar + \dots + \frac{1}{2}ar = \frac{1}{2}Pr$, где P — периметр, r — радиус вписанной окружности. При увеличении числа сторон площадь правильного многоугольника будет стремиться к площади описанного круга, его периметр P — к длине C описанной окружности, т. е. к $2\pi R$, а радиус r — к радиусу R . Тогда $S_{\text{круга}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Длина дуги и площадь сектора.

Длина дуги и площадь сектора пропорциональны градусной мере дуги или центрального угла сектора:

$$\text{а) } \frac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}, l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}; \text{ б) } \frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}, S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}; \text{ в) } \frac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2}, S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} l_{\text{дуги}} \cdot R.$$

Формулы длины дуги и площади сектора не нужно запоминать — они находятся из логически понятной пропорции:

- а) длина дуги составляет от длины окружности такую же часть, какую составляет ее градусная мера от 360° ;
- б) площадь сектора составляет от площади круга такую же часть, какую составляет его центральный угол (его дуга) от 360° .

Площадь сегмента.

Площадь сегмента равна площади сектора минус или плюс площадь равнобедренного треугольника, образованного радиусами этого сектора. Минус — если центральный угол сектора меньше 180° , и плюс — если больше 180° . Если центральный угол равен 180° , то этот сегмент — полукруг, и его площадь равна $\pi R^2/2$.

Радианная мера угла.

Радианом называется центральный угол, опирающийся на дугу окружности, равную 1 радиусу.

Так как длина окружности $C = 2\pi R$, то в окружности укладывается 2π радиусов ($\approx 6,28$ радиуса), а в полуокружности — π радиусов ($\approx 3,14$ радиуса).

$$2\pi \text{ радиан} = 360^\circ. \Rightarrow \pi \text{ радиан} = 180^\circ. \Rightarrow 1 \text{ радиан} = 180^\circ/\pi \approx 57^\circ$$

При расчетах слово «радиан» не пишут: $\pi/2 = 90^\circ$, $\pi/3 = 60^\circ$, $\pi/4 = 45^\circ$, $\pi/6 = 30^\circ$.

Перевод градусной меры угла в радианную и наоборот.

Из пропорции $\frac{\pi \text{ радиан} - 180^\circ}{A \text{ радиан} - \alpha^\circ}$ находим:

а) величину угла в радианах: $A = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ};$

б) величину угла в градусах: $\alpha^\circ = \frac{A \cdot 180^\circ}{\pi}.$

1. Вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. Центры этих окружностей совпадают.

2. Из прямоугольного треугольника с острым углом $\frac{180^\circ}{n}$, где n — число сторон многоугольника, нахо-

$$\text{дим } \frac{a}{R} = \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad \frac{a}{r} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

3. В правильном треугольнике: $a = R\sqrt{3}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

4. В правильном четырехугольнике: $a = R\sqrt{2}$, $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{a}{2}$.

5. В правильном шестиугольнике: $a = R$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

6. Длина окружности $C = 2\pi R$, или $C = \pi D$.

7. Площадь круга $S = \pi R^2$, или $S = \frac{\pi D^2}{4}$.

8. Длина дуги, содержащая α° , находится из пропорции $\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$.

9. Площадь сектора с центральным углом α° находится из пропорции $\frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$.

10. 1 радиан — это центральный угол, который опирается на дугу, равную по длине 1 радиусу.

11. 2π радиан $= 360^\circ$, π радиан $= 180^\circ$, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

12. Перевод градусной меры угла в радианную и наоборот осуществляется при помощи пропорции

π радиан	—	180°
A радиан	—	α°