

Тема 2

Обыкновенные дроби

Простые и составные числа

Разложение на простые множители. НОД

Вы. Назови несколько чисел, которые делятся только на один и само на себя.

Ученик. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т.д.

Вы. Как называем такие числа?

Ученик. Простыми.

Вы. Назови несколько чисел, которые делятся на один, само на себя и еще на какое-то число.

Ученик. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 и т.д.

Вы. Как называем такие числа?

Ученик. Составными.

Вы. Что означает понятие «представить данное число в виде произведения из нескольких множителей? Приведи пример.

Ученик. Это означает, что при перемножении этих множителей, получаем данное число. Например, представим число 8 в виде произведения двух множителей, т. е. $8 = 2 \cdot 4$.

Вы.

$$\begin{array}{c} \text{произведение} \\ \uparrow \\ \text{То есть: } 8 = \overbrace{2 \cdot 4} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{множитель множитель} \end{array}$$

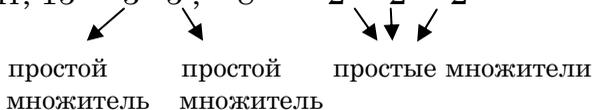
Тогда что означает понятие «представить

данное число в виде произведения простых множителей?»

Например: 15; 8.

Ученик. Это то же самое, только эти множители должны быть простыми числами.

Значит, $15 = 3 \cdot 5$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$



Вы. Какое число можно представить в виде произведения из простых множителей?

Ученик. Любое составное число.

Вы. Что означает «разложить на простые множители»?

Ученик. Разложить на простые множители – это значит с помощью деления на простые числа данное число представить в виде произведения из простых множителей.

Вы. Например, число 36 разложить на простые множители:

36		2	36 : 2 = 18	36 = 2 · 2 · 3 · 3
18		2	18 : 2 = 9	
9		3	9 : 3 = 3	
3		3	3 : 3 = 1	
1				

А какие простые числа надо запоминать?

Ученик. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Вы. А где можно найти остальные простые числа?

Ученик. В таблице простых чисел.

Вы. Какие числа делятся на 2?

Ученик. Все четные числа.

Вы. Какие числа мы называем четными, а какие нечетными?

Ученик. Если в конце числа стоит цифра 0, 2, 4, 6, 8, то это число четное, а в остальных случаях нечетное.

Вы. Как устно разделить на 2? Например: 216.

Ученик. Разделить на 2 – это означает найти половину данного числа, по-другому деление выполняем в подобных случаях с помощью сложения. Например:

216 пополам	↘	216	2
108 пополам	↘	108	2
54 пополам	↘	54	2
	↘	27	?
		?	?
		?	?
		1	



На деление с помощью уголка (на 2) у ученика уходит много времени, а это приводит к усталости и к вычислительным ошибкам. А такой способ позволяет ученику экономить время, а также не допускать различные ошибки при делении уголком.

Вы. Какие числа делятся на 3?

Ученик. Если сумма цифр, входящих в это число делится на 3, то это число делится на 3.

Например: $2 \quad 0 \quad 7$

↙	↓	↘		
2	+	0	+	7 = 9.

9 делится на 3, следовательно 207 делится

на 3.

Вы. А какие числа делятся на 5?

Ученик. Все числа, которые заканчиваются на «0», на «5».

Вы. Если данное число не делится на 2, не делится на 3, не делится на 5, то на какое простое число мы должны делить?

Ученик. На 7, если на 7 не делится, то на 11 и т.д.

Вы. Разложи на простые множители:

а) 328; б) 221; в) 140; г) 465; д) 343; е) 1859.

Ученик.

а) 328	2	$328 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 41$
164	2	
82	2	
41	41	
1		...

Самостоятельная работа

1. Разложить на простые множители:

а) 96; б) 111; в) 320; г) 625.

2. Представьте числа в виде произведения из простых множителей:

а) 69; б) 396; в) 570; г) 462.

⇒ Если вы убедились в том, что ваш ученик разлагает на простые множители без ошибок, тогда переходите к теме НОД (наибольший общий делитель).

Вы. Перечисли все делители чисел 12 и 18.

Ученик. Делители 12:
1; 2; 3; 4; 6; 12.

Делители 18:
1; 2; 3; 6; 9; 18.

Вы. Какие делители являются общими делителями чисел 12 и 18?

Ученик. 1; 2; 3; 6.

Вы. Какой из них самый большой?

Ученик. 6.

Вы. Как можно называть этот делитель, т.е. 6?

Ученик. Самый большой общий делитель чисел 12 и 18.

Вы. Т.е., наибольший общий делитель чисел 12 и 18, сокращенно НОД (12 и 18) = 6.

Итак, что такое НОД данных чисел?

Ученик. НОД – это есть самое большое натуральное число, на которое делится каждое данное число.

Вы. НОД любых двух или более чисел можно ли найти с помощью подбора, как НОД(12 и 18)?

Ученик. Если данные числа небольшие, то можно, а если большие, тогда трудно.

Например: НОД (4 и 6) = 2.

НОД (10 и 15) = 5 и т.д.

НОД (260 и 1950) – не знаю, как его найти.

Вы. НОД (260 и 1950). Тогда разложи на простые множители каждое число.

Ученик.

260		5	1950		5
52		2	390		5
26		2	78		2
13		13	39		3
1			13		13
260 =		5 · 2 · 2 · 13.	1		

1950 = 5 · 5 · 2 · 3 · 13.

Вы. Назови общие множители чисел 260 и 1950.

Ученик. 5; 2; 13.

Вы. $260 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$; $1950 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$.
А теперь, подчеркни общие множители этих чисел в их разложении.

Ученик. $260 = \underline{5} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{13}$; $1950 = \underline{5} \cdot 5 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{13}$.

Вы. Выбирай любое разложение этих чисел и составляй произведение из тех множителей, которые подчеркивал.

Ученик. $5 \cdot 2 \cdot 13$

Вы. Найдем значение произведения.

Ученик. $5 \cdot 2 \cdot 13 = 130$.

Вы. Таким образом мы определили число 130 есть наибольший общий делитель чисел 260 и 1950, т.е. НОД (260 и 1950) = 130.
Итак, правило: чтобы найти НОД двух или более чисел, надо:

1. Разложить каждое число на простые множители;
2. Найти и подчеркнуть общие множители в разложении каждого числа;
3. Взять разложение любого числа и составить произведение из тех множителей, которые подчеркивал;
4. Найти значение произведения.

Задание для закрепления материала

Найдите НОД:

- | | | |
|---------------|-------------------|------------------|
| а) 16 и 24; | г) 195 и 169; | ж) 95, 57 и 266. |
| б) 72 и 48; | д) 343 и 847; | |
| в) 120 и 297; | е) 60, 126 и 111; | |

Вы. Как мы называем такое свойство дроби?

Ученик. Основное свойство дроби.

Вы. Итак, **основное свойство дроби:**
Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то значение дроби не изменится т.е. получится равная ей дробь.

Например:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{4}{8}, \text{ т.е. } \frac{2}{4} = \frac{4}{8},$$

$$\frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

А как называют действие деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, не равное нулю?

Ученик. Сокращением дроби.

Вы. $\frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{\cancel{2}_2} = \frac{1}{2}$ — это означает, что

мы сократили дробь $\frac{2}{4}$, по-другому, числитель и знаменатель этой дроби устно разделили на 2. Сократи дробь: $\frac{12}{18}$.

Ученик. $\frac{12^6}{18^9} = \frac{6}{9}$.

Вы. Нельзя ли сократить эту дробь еще?

Ученик. На 3 еще можно. То есть $\frac{12^6}{18_9} = \frac{6^2}{9_3} = \frac{2}{3}$.

Вы. Можно ли еще разделить числитель и знаменатель этой дроби на одно и то же число, не равное нулю, чтобы получилось целое число в числителе и в знаменателе?

Ученик. Да, можно, только на 1.

Т.е. $\frac{12^6}{18_9} = \frac{6^2}{9_3} = \frac{2^2}{3_3} = \frac{2}{3}$ – сокращение дроби

закончилось.

Вы. Значит, когда заканчивается сокращение дроби?

Ученик. Сокращение дроби заканчивается тогда, когда числитель и знаменатель делятся только на 1, т.е. НОД (числитель и знаменатель) = 1.

Вы. Как называют числа, которые НОД = 1?

Ученик. Взаимно простыми числами. Значит, дробь несократима, если числитель и знаменатель взаимно простые числа.

Вы. Сократи дробь: $\frac{48}{96}$.

Ученик. $\frac{48^{24}}{96_{48}} = \frac{24^{12}}{48_{24}} = \frac{12^6}{24_{12}} = \frac{6^3}{12_6} = \frac{3^1}{6_2} = \frac{1}{2}$ – 1-я запись.

Вы. А теперь, найдем НОД числителя и знаменателя, потом числитель и знаменатель дели на их НОД и делай вывод.

<i>Ученик.</i>	48 2	96 2	$48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3}$
	24 2	48 2	$96 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3}$
	12 2	24 2	НОД (48 и 96) =
	6 2	12 2	= $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$
	3 3	6 2	$\frac{48^1}{96_3} = \frac{1}{2}$ – 2-я запись
	1	3 3	
		1	

Ответ один и тот же.

Вы. Какая запись короче?

Ученик. 2-я запись.

Вы. Итак, с помощью чего можно сократить дробь?

Ученик. С помощью НОД.

Вы. Сократи дробь с помощью НОД:

а) $\frac{45}{225}$; б) $\frac{96}{144}$; в) $\frac{27}{111}$; г) $\frac{240}{456}$.

Ученик. а) $\frac{45}{225}$. $45 = \dots$ $225 = \dots$ 45 | 225 |

НОД (45 и 225) = ... $\frac{45}{225} = \frac{?}{?}$.



Как правило, часто ученики допускают ошибки или не сокращают дробь до конца, когда в числителе и знаменателе двузначные, трехзначные и т.д. числа. Причина таких ошибок?

Ученик устно находит НОД и устно делит числитель и знаменатель на это число. Ему лень разложить числа на простые множители и находить НОД письменно, а также разделить уголком на найденный НОД числитель и знаменатель дроби. По его словам, на эти вычисления уходит много времени.

Как устранить эти ошибки?

1. Надо убедить ребенка в том, что такие дроби всегда надо сокращать через НОД, если даже уйдет много времени, зато риск, будет минимальным.

2. Если ребенку лень разделить уголком числитель и знаменатель на найденный НОД, тогда предложите ему нижеприведенный способ.

Вы. $\frac{252}{5670}$. Разложи на простые множители

числитель и знаменатель и оставь НОД в виде произведения из множителей.

<i>Ученик.</i>	252	2	5670	5	252 = <u>2</u> · 2 · <u>3</u> · <u>3</u> · <u>7</u>
	126	2	1134	2	– числитель
	63	3	567	3	5670 =
	21	3	189	3	= 5 · <u>2</u> · <u>3</u> · <u>3</u> · 3 · 3 · <u>7</u>
	7	7	63	3	– знаменатель
	1		21	3	НОД (252 и 5670) =
			7	7	= 2 · 3 · 3 · 7
			1		

Вы. А теперь смотри на разложение числителя и знаменателя и зачеркивай те множители, которые есть в НОД-е.

Ученик. НОД (252 и 5670) = 2 · 3 · 3 · 7.

252 = ~~2~~ · 2 · ~~3~~ · ~~3~~ · ~~7~~ – числитель.

5670 = 5 · ~~2~~ · ~~3~~ · ~~3~~ · 3 · 3 · ~~7~~ – знаменатель.

Вы. Что осталось от числителя и от знаменателя?

Ученик. От числителя осталось 2, а от знаменателя

осталось 5 · 3 · 3 = 45. Значит, $\frac{252^2}{5670_{45}} = \frac{2}{45}$.

Вы. Таким образом мы 252 и 5670 разделили на 2 · 3 · 3 · 7 = 126.

Далее...

Вы. Когда делимое делится на делитель без

остатка?

Ученик. Если делимое содержит множитель, который равен делителю.

Вы. $\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3}$. Тогда назови делители числителя и

знаменателя дробного выражения.

Ученик. Числитель ($2 \cdot 3$) делится на 2 и на 3, т.к. он содержит множители 2 и 3; знаменатель ($7 \cdot 3$) делится на 7 и на 3, т.к. он содержит множители 7 и 3.

Вы. Назови общий делитель числителя и знаменателя дробного выражения.

Ученик. 3.

Вы. Тогда на какое число можно сократить это дробное выражение?

Ученик. На 3. То есть $\frac{2 \cdot \cancel{3}}{7 \cdot \cancel{3}_1} = \frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{2}{7}$

Вы. а) $\frac{2+3}{7 \cdot 3}$; б) $\frac{2 \cdot 3}{7+3}$; в) $\frac{2+3}{7+3}$; г) $\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3}$.

В каком случае можно сразу сократить дробное выражение?

Ученик. Только в случае «г». А в остальных случаях нельзя.

Вы. Почему?

Ученик. а) $\frac{2+3}{7 \cdot 3}$. $(2+3)$ – сумма из слагаемых, $(7 \cdot 3)$

– произведение из множителей, следовательно нельзя говорить об общих множителях и об общих делителях. Поэтому нельзя сократить.

б) $\frac{2 \cdot 3}{7 + 3} \cdot (2 \cdot 3)$ – произведение из

множителей, $(7 + 3)$ – сумма из слагаемых, следовательно нельзя говорить об общих множителях и об общих делителях. Поэтому нельзя сократить.

в) $\frac{2 + 3}{7 + 3} \cdot (2 + 3)$ – сумма из слагаемых, $(7 + 3)$

– сумма из слагаемых, следовательно нельзя говорить об общих множителях и об общих делителях. Поэтому нельзя сократить.

г) $\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} \cdot (2 \cdot 3)$ – произведение из

множителей, $(7 \cdot 3)$ – произведение из множителей, следовательно можно говорить об общих множителях и об общих делителях. Поэтому можно сократить.

Вы. Какой же вывод?

Ученик. Сократить можно дробное выражение в том случае, если числитель и знаменатель этого выражения представлены в виде произведения, т.е. имеют общий множитель.