Приложение 2. Материальное поле.

Пусть в момент времени $t = 0$ множество индивидуальных частиц сплошной среды микрочастицы находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек пространства[1], то есть представляет собой в этом смысле материальное поле. Предположим, что частицы движутся в соответствии с законами классической механики Ньютона. Выясним условия, при которых это взаимно однозначное соответствие сохраняется во времени, то есть в процессе такого движения в поле не образуются «пустоты» и ни в одной точке пространства одновременно не оказывается более одной индивидуальной частицы. Предположим, что поля потенциальной энергия $V(x)$ (здесь и далее, где не оговорено особо, будет рассматриваться только одномерное движение) и скоростей $v(x)$ - стационарные. Выберем две произвольные индивидуальные частицы 1 и 2 и пусть $x_2(t_0) > x_1(t_0)$ (см. рисунок). В произвольный момент времени t они займут положения

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} v_1(\tau)d\tau,$$

$$x_2(t) = x_2(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} v_2(\tau)d\tau.$$

где τ – временная переменная (классическое время); $v_1(\tau)$, $v_2(\tau)$ – скорости индивидуальных точек 1 и 2, соответственно. Расстояние между этими точками в произвольный момент времени t определится выражением

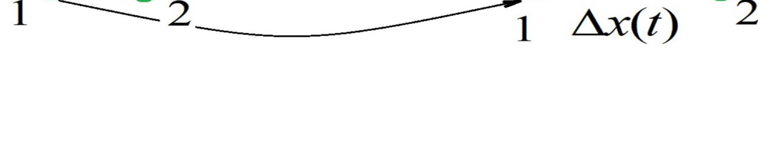
$$\Delta x = \Delta x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(v_2(\tau) - v_1(\tau)\Big)\, d\tau =$$

$$= \Delta x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left(v_2(t_0) - v_1(t_0) + \frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{\tau} \Big(F_2(\theta) - F_1(\theta)\Big)\, d\theta\right) d\tau,$$

где через θ обозначена переменная интегрирования по времени; $F_1(\theta)$, $F_2(\theta)$ – обычная ньютоновская сила, действующая на индивидуальную частицу. Здесь предполагается (см. обоснование в основном разделе), что масса каждой индивидуальной точки совпадает с массой микрочастицы, поэтому бесконечного ускорения не возникает. Тогда чтобы оставаться материальным полем со временем сплошная среда должна формироваться частицами, движущимися в соответствии с условием

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \Delta x(t) = 0. \tag{1}$$

Положим расстояние $\Delta\xi$ между индивидуальными точкам в любой момент времени достаточно малым, чтобы пренебречь изменением силы, действующей на индивидуальные частицы (это возможно только в случае непрерывного поля сил). Обозначим через ε временной интервал $\frac{\Delta x}{v(x)}$, а через η – пространственую переменную интегрирования. Индивидуальные точки, ограничивающие интервал движутся по путям, имеющим общую часть (синяя стрелка на рисунке). Поскольку поле скоростей стационарно, то



время движения по этому общему пути у них одинаковое, а поскольку общее время в пути также одно и то же, то временной интервал ε не зависит от времени. Тогда

[1] Везде, где не оговорено особо, под пространством понимается ньютоновское пространство.

$$
\frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{\tau} F_1(\theta)d\tau \approx \frac{1}{m}\biggl(\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{\tau} F_1(\theta)d\theta + \varepsilon F_1(t_0)\biggr) =
$$

$$
= \frac{1}{m}\biggl(\int\limits_{x_2(t_0)}^{x_1(\tau)} \frac{F(\eta)}{v_1(\eta)}\, d\eta + \frac{\Delta x_0}{v_1(t_0)} F\bigl(x_1(t_0)\bigr)\biggr)
$$

и

$$
\frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{\tau} F_2(\theta)d\tau \approx \frac{1}{m}\biggl(\int\limits_{t_0}^{\tau-\varepsilon} F_2(\theta)d\theta + \varepsilon F_2(\tau)\biggr) =
$$

$$
= \frac{1}{m}\biggl(\int\limits_{x_2(t_0)}^{x_1(\tau)} \frac{F(\eta)}{v_2(\eta)} d\eta + \frac{\Delta x_0}{v_1(t_0)} F\bigl(x_2(\tau)\bigr)\biggr).
$$

Подставим эти выражения в формулу для интервала Δx, получим

$$
\Delta x = \Biggl(1 + \frac{1}{m v_1(t_0)} \int\limits_{t_0}^{t} \biggl(F(x)\Big|_{x=x_2(\tau)} - F(x)\Big|_{x=x_1(t_0)}\biggr) d\tau\Biggr)\Delta x_0 +
$$

$$
+ \int\limits_{t_0}^{t}\Biggl(v_2(t_0) - v_1(t_0) + \frac{1}{m}\int\limits_{x_2(t_0)}^{x(\xi_1,\tau)} \Bigl(\frac{F(\eta)}{v_2(\eta)} - \frac{F(\eta)}{v_1(\eta)}\Bigr) d\eta\Biggr) d\tau,
$$

Учитывая конечность силового поля, полагаем, что первое слагаемое в последнем выражением стремится к нулю при $\Delta x_0 \to 0$. Для удовлетрворения условия (1), необходимо, чтобы

$$
\lim_{\Delta x_0 \to 0}\Bigl(\bigl(v_2(t_0) - v_1(t_0)\bigr) = 0,
$$

то есть поле скоростей было непрерывно, а также чтобы

$$
v(\xi_1, \eta) \equiv v(\xi_2, \eta),
$$

то есть, оно было стационарно. Последнее тождество будет выполняться, если

$$
v_2(\tau) = v_1(\tau + \varepsilon) = v_1(\tau) + \frac{F}{m}\frac{\Delta x(\tau)}{v_1(\tau)}.
$$

Переходя к представлению Эйлера, и учитывая, что $F = -dV(x)/dx$, где $V(x)$ — поле потенциальной энергии, при $\Delta x \to 0$, в результате получим

$$
\Bigl(mv\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x}\Bigr)dx = \frac{\partial E}{\partial x}dx = 0,
$$

где E — полная энергия индивидуальной точки. Это означает, что все индивидуальные точки материальных полей имеют одинаковую механическую энергию.