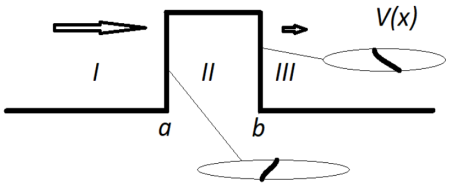
Приложение 5. Примеры.

Рассмотрим две задачи, которые могут быть представлены в одномерном случае: туннельный эффект через прямоугольный потенциальный барьер и гармонический осциллятор.

1. *Прямоугольный потенциальный барьер.* Пусть материальное поле, движущееся слева-направо, имеет энергию $E < V_{max}$ (см. рисунок). Потенциальная энергия в области I постоянна и равна нулю. В



соответствии с общим выражением (см. главу 3)

$$\dot{x}(x) = \begin{cases} \frac{2}{m}\sqrt{E - V(x)} & \text{при } E \neq 0, \\ \frac{2}{m}\sqrt{-V(x)} & \text{при } E = 0, \end{cases}$$

для полей $\dot{x}(x)$ вещественного и мнимого времени имеем

$$\dot{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m}E} & \text{при } E \neq 0, \\ 0 & \text{при } E = 0. \end{cases}$$

Подставив эти значения в общее выражение

$$\Psi(x,t) = \frac{\dot{x}^m(0)}{\dot{x}^m(x)}\Psi_0(0)\exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T^m}\right)\int\limits_0^x \frac{1}{\dot{x}^m(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}t\right)\exp i\left(\frac{2\pi}{T^r}\int\limits_0^x \frac{1}{\dot{x}^r(\eta)}d\eta\right), \tag{1}$$

для волновой функции материального поля в области I получим

$$\Psi(x,t) = \rho(0)\exp i\phi(0)\exp i\left(\left(\frac{m\dot{x}^2}{2\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right)\int\limits_0^x \frac{1}{v(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}t\right) =$$
$$= \psi(0)\exp i\left(\frac{2E}{\hbar\dot{x}_0}x - \frac{E}{\hbar}t\right) = \psi(a)\exp\frac{i}{\hbar}\left(\sqrt{2mE}x - Et\right).$$

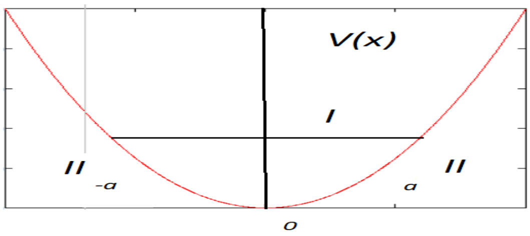
«Вертикальная стенка» потенциальной энергии — приближение, описывающее пренебрежимо малое действие по отношению к изменению потенциальной энергии на каком-либо промежутке пространства Δx, то есть $S_{1,2} << (V_2 - V_1)\Delta x$. Это означает пренебрежимо малое изменеие волновой функции как по амплитуде, так и по фазовому множителю. при значительном изменении потенциальной энергии. Поскольку в рассматриваемом случае $dV/dx = const$ во всех трёх областях, $\dot{x}(x) \equiv 0$ для мнимого времени в каждой из них. Что касается мнимой скорости, то она возникает для вещественного времени в области барьера при $E < V$. То есть под барьером (в области II) фаза волновой функции чисто мнимая, движения не происходит (что явно констатируется парадоксом Хартмана во всех его вариациях). Исключая в (1) конвективную часть волновой функции, в этой области имеем

$$\Psi(x,t) = \psi(a)\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V-E)}(x-a)\right)\exp\frac{i}{\hbar}\left(-Et\right).$$

Таким образом, динамика волновой функции под прямоугольным барьером реализуется при мнимом значении скорости под барьером, но в рамках динамики материального поля с отличной от нуля энергией, следовательно, вещественным временем. В области III волновая функция находится аналогично области I и здесь не рассматривается.

2. *Гармонический осциллятор.*

Пусть в области I (см. рис) энергия гармонического осциллятора $E > V$. Тогда в этой области имеем



$$\dot{x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} & \text{при } E \neq 0, \\ \sqrt{-\frac{2}{m}V(x)} & \text{при } E = 0. \end{cases}$$

При этом, $x \ni Re$, $t \ni Re$ для $E \neq 0$ и $x \ni Re, t \ni Im$ для $E = 0$.

В области II $x \ni Im$, Тогда $t \ni Im$ для $E \neq 0$ и $t \ni Re$ для $E = 0$. При этом, полная энергия входит в выражение для поля $\dot{x}(x)$ с отрицательным знаком и мы имеем

$$\dot{x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m}(V(x) - E)} & \text{при } E \neq 0, \\ \sqrt{-\frac{2}{m}V(x)} & \text{при } E = 0, \end{cases}$$

где $E = const = m\omega_0^2 a^2/2 = mv_0^2/2$ — полная энергия гармонического осциллятора; $V(x) = m\omega_0^2 x^2/2$ — потенциальная энергия осциллятора с положением равновесия в начале координат; ω_0, a, v_0 — соотвественно собственная частота, амплитуда колебаний и скорость в начале координат гармонического осциллятора. В результате для гармонического осциллятора в области I получим

$$\dot{x}(x) = \begin{cases} \dot{x}_0\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} & \text{при } E \neq 0, \\ i\omega_0 x & \text{при } E = 0. \end{cases}$$

В области II поля $\dot{x}(x)$ определятся выражениями.

$$\dot{x}(x) = \begin{cases} \dot{x}_0\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} & \text{при } E \neq 0, \\ i\omega_0 x & \text{при } E = 0, \end{cases}$$

Условие квантования (см. главу 4)

$$\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T_0}\right)\int_a^b \frac{1}{v(x)}dx = \pi k,$$

запишется в виде

$$\left(\frac{E}{\hbar\omega_0} + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta = \pi k.$$

где ω_0 — собственная циклическая частота колебаний осциллятора; $\eta = x/a$. Или

$$E = \hbar\omega_0\Big(\frac{1}{2} + n\Big), \tag{2}$$

где $n = k - 1$. Подстановка выражений для полей $\dot{x}$ квантового осциллятора, а также условия квантования (2), в выражение для волновой функции финитного движения (см.главу.3)

$$\psi(x)=\frac{v_0}{v(x)}\rho_0\Bigg(\exp i\Bigg(\phi^+(a)+\frac{E}{\hbar}\int\limits_{-a}^{x}\frac{1}{v(x)}dx+\frac{2\pi}{T_0}\int\limits_{-a}^{x}\frac{dx}{v(x)}\Bigg)+$$

$$+\exp i\Bigg(\phi^-(b)+\frac{E}{\hbar}\int\limits_{b}^{x}\frac{1}{v(x)}dx+\frac{2\pi}{T_0}\int\limits_{b}^{x}\frac{dx}{v(x)}\Bigg)\Bigg)\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int\limits_{0}^{x}\sqrt{2mV}dx\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E\tau\right),$$

даёт

$$\Psi_\tau(x)=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\eta^2}}\Bigg(\exp i\Bigg(\phi^+(-1)+\Big(n+1\Big)\int\limits_{-1}^{0}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}+\Big(n+1\Big)\int\limits_{0}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\Bigg)+$$

$$+\exp i\Bigg(\phi^-(1)+\Big(n+1\text{‘}\Big)\int\limits_{1}^{0}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}-\Big(n+1\text{‘}\Big)\int\limits_{0}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\Bigg)\Bigg)\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E\tau\right)=$$

$$=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\eta^2}}\exp i\frac{\pi}{2}n\Bigg(\exp i\Big(n+1\Big)\arcsin\eta+\exp i\pi n\exp\Big(-i\Big(n+1\Big)\arcsin\eta\Big)\Bigg)\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E\tau\right)=$$

$$=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\eta^2}}i^n\Bigg(\Big(\sqrt{1-\eta^2}+i\eta\Big)^{n+1}+(-1)^n\Big(\sqrt{1-\eta^2}-i\eta\Big)^{n+1}\Bigg)\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E\tau\right).$$

Для области II ситуация аналогична. Переход к переменной x с учётом зависимости амплитуды a от энергии позволяет выразить функцию $\Psi_\tau(x)$ через полиномы Эрмита и волновая функция осциллятора примет вид

$$\Psi_\tau(x)=C(n)\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E\tau\right),$$

где $C(n)$ — нормировочная постоянная.