

Глава 1.2. Квантовая эволюция в представлении Лагранжа.

Мера множества индивидуальных точек индивидуального объёма, определённая описанным выше образом (см. главу 1), при движении по закону

$$\Psi_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - (x_0 + s^m(x_0, t, t_0))\right) \exp \frac{i}{\hbar} S[x^m(\tau)] \Psi_{t_0}(x_0) dx_0, \quad (1)$$

в общем случае (при неоднородном поле скоростей) не сохраняется. Но мера вещества в индивидуальном объёме сохраняться должна. Последнее возможно если неоднородна в пространстве плотность меры вещества в индивидуальных частицах¹. Пусть объём пространства Δx_{Ξ} , занимаемых частицами индивидуального объёма Ξ достаточно мал, чтобы положить модуль волновой функции $\rho_{\Delta x_{\Xi}}$ в его пределах одинаковым в любой момент времени. Тогда мера вещества в этом объёме пространства

$$M(\Delta x_{\Xi}(t)) = \int_{\Delta x_{\Xi}(t_0)} \delta\left(x - (x_0 + s^m(x_0, t))\right) \rho_0 dx_0 = \rho_t \Delta x_{\Xi}(t),$$

Но мера вещества в индивидуальном объёме сохраняется, то есть

$$M(\Delta x_{\Xi}(t)) = M(\Delta x_{\Xi}(t_0)) = \rho(t_0) \Delta x_{\Xi}(t_0) = \rho(t) \Delta x_{\Xi}(t),$$

откуда получим

$$\rho(t) = \frac{\Delta x_{\Xi}(t_0)}{\Delta x_{\Xi}(t)} \rho(t_0) = \frac{v(t_0)}{v(t)} \rho(t_0). \quad (2)$$

Полученная таким образом из принципа сохранения меры вещества индивидуального объёма и закона его движения плотность меры является атрибутом индивидуальной точки и представляется модулем её комплексной плотности.

Аналогично плотности меры, фазовый множитель индивидуальной частицы представляет собой плотность фазы индивидуального объёма, то есть предел отношения приращения фазы в пространстве индивидуального объёма к величине этого объёма при стремлении последнего к нулю. Однако, в отличие от меры, изменение фазы в индивидуальном объёме зависит от его скорости и, следовательно, от положения этого объёма в пространстве. Форма ядра интегрального оператора эволюции в уравнении (1) и вид пространственно-временной зависимости фазового множителя позволяет установить (см. приложение 3), что в этом случае фазовые множители индивидуальных частиц не зависят от времени и определить их пространственное распределение в любой момент времени. То есть уравнение для комплексной плотности материального поля (нерелятивистский закон квантовой эволюции в представлении Лагранжа) запишется в виде

$$\Psi(\xi, t) = \Psi(\xi, 0) \frac{v(\xi, 0)}{v(\xi, t)} = \frac{v(\xi, 0)}{v(\xi, t)} \rho(\xi, 0) \exp i\phi(\xi, 0). \quad (3)$$

Начальные значения плотностей меры индивидуальных частиц определяются полем скоростей и нормировкой волновой функции². Начальные фазы индивидуальных частиц связаны между собой выражением для действия (см. приложение 3), записанного в виде функции координаты для момента времени $t = 0$. При этом сохраняется произвол выбора точки отсчёта фазы, что не имеет значения в виду её временной зависимости и произвольного выбора начала отсчета времени.

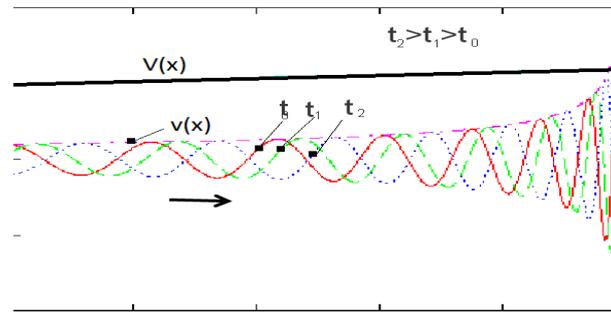
Таким образом, начальные значения плотности меры и фазы индивидуальных точек определяются волновой функцией начального состояния, то есть эйлеровым представлением состояния материального поля. В приложении 3 в общем виде выводится вид этого состояния и, на основе закона стационарного движения материального поля (3), определяется выражение для волновой функции в любой произвольный момент времени. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{v_0}{v(x)} \rho_0 \exp i\phi_0 \exp i \left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T} \right) \int_0^x \frac{1}{v(\eta)} d\eta - \frac{E}{\hbar} \tau \right) = \\ &= \frac{v_0}{v(x)} \Psi_0(0) \exp i \left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T} \right) \int_0^x \frac{1}{v(\eta)} d\eta - \frac{E}{\hbar} \tau \right) \end{aligned} \quad (4)$$

¹Физический смысл этой величины отличается от классического и будет рассмотрен ниже.

²Выбор нормировки волновой функции, хоть и содержит элемент произвола при решении конкретных задач, но в конечном счёте определяется выбором единичной меры, исходя из физических соображений. В качестве такого выбора целесообразно сохранить единичную меру квадрата модуля волновой функции, которая, как будет показано ниже, определяет интенсивность воздействия на измерительный прибор

Это выражение представляет бегущую волну самого общего вида: с переменной амплитудой и длиной волны (на рисунке показана вещественная часть волновой функции; $V(x)$ — поле потенциальной энергии; $v(x)$ — поле скоростей.) .



Для однородного поля скоростей это выражения приобретает вид обычной бегущей волны

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_0(0) \exp i \left(\left(\frac{E}{\hbar v(0)} + \frac{\omega}{v(0)} \right) \int_0^x d\eta - \frac{E}{\hbar} \tau \right) = \\ &= \Psi_0(0) \exp i \left(\frac{2E}{\hbar v(0)} x - \frac{E}{\hbar} t \right) = \Psi_0(0) \exp i \left(m v(0) x - \frac{E}{\hbar} \tau \right). \end{aligned}$$

Выражение (4) для бегущей волны в общем виде имеет одну существенную особенность, заключающуюся в том, что в точках пространства, где $v(x) = 0$ волновая функция обращается в бесконечность. Это обстоятельство связано с тем, что при прохождении волной областей с переменной потенциальной энергией неизбежно возникает отражённая волна, а это значит, что состояние квантовой частицы определяется суперпозицией комплексных плотностей вещества двух материальных полей, Пространственное распределение этой суперпозиции и определяет каждое из стационарных состояний квантовой частицы. Строго говоря, в областях пространства с переменным потенциалом не существует «одиночных» волн (4), как и порождающих их материальных полей; квантовые стационарные состояния в неоднородных потенциальных полях порождаются двумя материальными полями, движущимися во встречных направлениях. Причина этого, состоит в том, что изменение плотности множеств индивидуальных частиц, необходимое для сохранения материи в индивидуальном объёме, не может возникнуть вследствие классического «уплотнения» вещества в этом объёме, а реализуется исключительно благодаря обмену материи с отражённой волной, которая является неотделимой частью одной квантовой частицы (см. в приложении 4).

Весьма любопытен тот факт, что непосредственно сама волновая функция в таком виде, а не дифференциальное уравнение для неё может быть выбрана в качестве постулата квантовой эволюции. Влияние внешних условий на состояние квантовой частицы полностью выражается через изменение поля скоростей.