Глава 1.1 Волновая функция

Ключевой проблемой квантовой механики является придание физического смысла волновой функции. Именно отсутствие прямой однозначной связи этой основополагающей комплексной характеристики квантового объекта с каким-либо конкретным физическим свойством её материального носителя и порождает перечисленные выше проблемы. Вероятностная интерпретация волновой функции, очевидно, не может быть достаточной уже ввиду комплексности последней. В контексте рассматриваемого подхода, чтобы исключить случайность из описания объективных свойств материи и, следовательно, из определения волновой функции, модуль волновой функции будет интерпретироваться, как пространственная плотность меры некоторого распределённого в пространстве материального носителя [1]. При этом следует перейти к другим единицам измерения модуля волновой функции, а именно положить $\rho = |\Psi|^2$, что лишь изменит нормировку модуля на линейную $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho \, dx = 1$. Эта плотность меры в условиях взаимодействия с описываемым статистически макроскопическим прибором проявляется в форме плотности вероятности.

Что касается комплексного множителя, то он возник в результате попыток математически описать специфическое пространственное распределение актов регистрации микрочастиц[2] в условиях возможности их попадания каждую точку пространства по различным путям[3]. Сам факт возникновения при этом интерференционной картины для отдельной микрочастицы вынудил описывать её не локальными характеристиками, а некоторой пространственной функцией, которая в условиях отсутствия зависимости от направления в пространстве приняла форму скалярной комплексной волны и успешно описала наблюдаемые явления. Уже на этом этапе и было заложено глубокое противоречие, заключающееся в том, что локальный материальный носитель в каждый момент времени порождает некоторую физическую величину, распределённую в пространстве. Более того, в соответствии с интерпретацией интерференционной картины, как плотности вероятности обнаружения квантовой частицы в виде материальной точки, этот носитель должен мгновенно оказываться в любой точке пространства, где наблюдение его зарегистрировало. Рассуждения о том, что для признания необходимости такого скачка нужно знать предыдущее положение частицы (и, следовательно, внести искажения в волновую функцию соответствующим измерением, отчего она уже не «сможет» оказаться в удалённой точке пространства мгновенно), не более чем схоластичная уловка, поскольку само признание существования микрочастицы, как материальной точки, уже предполагает её наличие в какой-либо конкретной точке пространства в заданный момент времени. И для этой констатации никакие измерения не требуются, как они не требуются для определения времени её перемещения в точку регистрации — оно равно нулю (то, что оно меньше времени необходимого свету, чтобы пройти соответствующее расстояние проверено уже экспериментально). Единственной возможностью избежать противоречия с СТО является признание микрочастицы пространственно распределённым объектом – сплошной средой. Знаменитое «расплывание» волнового пакета, представленное де Бройлем, и не позволившее Шрёдингеру последовательно довести до конца, свою реалистическую интерпретацию волновой функции, не может рассматриваться в качестве непреодолимого аргумента против такого представления. Достаточно признать мгновенный характер за редукцией волновой функции (что можно считать подтверждённым экспериментально) и отнести это явление на внутренние свойства микрочастицы (в этом случае нет необходимости соотноситься с СТО в её современном виде вообще).

Посмотрим теперь, какую информацию может дать квантовая эволюция, представляемая традиционной квантовой механикой, для характеристики механического движения носителя волновой функции — сплошной среды квантовой частицы. Первым из фактов, который следует учесть, является существование невырожденных состояний. Под невырожденными, подразумеваются такие, волновая функция которых, соответствует единственному набору физических величин. Таким образом, значения физических характеристик частицы образуют поля. В этом случае и носитель этих величин – сплошная среда, также является полем, то есть должен рассматриваться в качестве единственного (поскольку другой материальный носитель должен отличаться какими-либо физическими свойствами), то есть каждой точке пространства должен сопоставляться единственный материальный носитель поля – индивидуальная точка, а их совокупность рассматриваться в виде материального поля. Далее следует учесть принцип суперпозиции, которые означает, что сплошная среда микрочастицы может формироваться совокупностью материальных полей, индивидуальные частицы которых могут находиться в одних и тех же точках пространства и никак не влиять друг на друга. Такое, принципиальное отличие индивидуальных частиц сплошной среды микрочастицы от аналогичного объекта классической сплошной среды связано с тем обстоятельством, что первые являются неотделимой частью квантовой цельной микрочастицы, и не составляют самостоятельной физической сущности (самостоятельного механического объекта). Они не более, чем

---

[1] Фундаментальная связь между математическим понятием меры и вероятностью легла в основу знаменитой книги А.Н.Колмогорова «Теория вероятностей и математическая статистика.».

[2] Здесь и далее речь идёт только о частицах обладающих массой.

[3] Термин путь употребляется для обозначения совокупности точек пространства, занимаемых движущейся точкой материи, в соответствии с уравнениями движения $x(t), y(t), z(t)$ (Для упрощения математического описания в основном будут использоваться одномерные пути $x(t)$.

элемент описания неразделимого материального поля, тогда как классическая индивидуальная частица это отдельный механический объект, образующий некоторую совокупность объектов, описываемую как классическая сплошная среда[4]. Отметим, что в качестве элемента описания материального поля, будут равноправно использоваться понятия индивидуальная частица и индивидуальная точка, поскольку понятие индивидуальной частицы будет подразумевать бесконечно малый по размеру элемент материального поля, который в пределе превращается в индивидуальную точку. Это тем более оправдано, так как ввиду цельности всего материального поля микрочастицы индивидуальный объём вообще не обладает собственными инерционными свойствами, а динамика движения каждого элемента материального поля определяются массой всей микрочастицы в целом (на это, в частности, указывает закон квантовой эволюции как в дифференциальном, так и в интегральном виде, а именно: изменение волновой функции в каждой точке пространства зависит от массы всего квантового объекта). Спецификой невырожденного квантового состояния является отсутствие зависимости энергии от координат пространства. То есть, механические энергии всех индивидуальных частиц материального поля равны (см. приложение 2). Это обстоятельство позволяет значительно упростить анализ механического движения материального поля, исходя из квантовой эволюции волновой функции, как его характеристики.

В основу такого анализа положим интегральное уравнение квантовой эволюции с ядром в виде интеграла по путям[5], поскольку оно оперирует терминами изменения значений волновой функции в пространстве и времени, что позволяет более просто достичь желаемого результата. При этом следует иметь в виду, что представление квантовой эволюции в виде интеграла по путям не вполне является пространственно-временным. Действительно, это не более, чем предсталение ядра интегрального оператора эволюции состояния в **гильбертовом пространстве**, выраженное через переменные координаты и времени. Именно такой подход реализуется как в знаменитой монографии Р. Фейнман, А. Хибс. «Квантовая механика и интегралы по траекториям», так и математически более корректном изложении в книге Ж.Зинн-Жюстен. «Континуальный интеграл в квантовой механике»

Интегральное волновое уравнение имеет вид

$$\Psi_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{t,t_0}(x, x_0)\Psi_{t_0}(x_0)\, dx_0, \tag{1}$$

Ядро интегрального оператора в (1) $K_{t,t_0}(x, x_0)$ определяет изменение волновой функции от момента времени t_0 до t и записывается в виде интеграла по путям[6]

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]\right)[dx(\tau)], \tag{2}$$

Здесь и далее, классическая переменная времени будет обозначаться τ, а буквой t будут обозначаться либо фиксированные моменты времени, либо переменные, определяемые тем или иным образом классическим временем (мнимое время...). Пусть $\Psi_t(x)$ — невырожденная волновая функция. Тогда, если сохранять приверженность гипотезе существования материального носителя волновой функции – материального поля, её значение в начальный момент времени в некоторой точке пространства является характеристикой соответстсвующей индивидуальной точки. Это значит, что в любой последующий момент времени значение волновой функции должно изменяться в зависимости от движения именно этой индивидуальной точки, то есть определяться единственным путём. Учитывая безусловную справедливость уравнений традиционной квантовой эволюции, этот путь однозначно должен определяться континуальным интегралом, который, как несложно убедиться, ознакомившись с приложением 1[7], принимает форму функции координат и времени начального и конечного положения индивидуальной частицы, причём вид этой функции однозначно определяется действием на единственном пути, соответствующем минимальному действию $x^m(\tau)$ (в дальнейшем будет использоваться несколько «жаргонный», но более короткий термин «минимальный путь»). Записанная таким образом амплитуда (2) примет вид

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta\big(x(t) - x^m(t)\big) \exp\frac{i}{\hbar}S[x^m(\tau)],$$

где $\delta\big(x(t) - x^m(t)\big)$ — δ функция Дирака.

[4]Понятие материального поля вводить в этом случае не требуются, так как бесконечные напряжения отталкивания, возникающие при сближении индивидуальных частиц, исключают любую возможность формирования сплолшной среды иначе как в виде материального поля.

[5]Такое представление (пусть, как будет показано ниже, и не вполне) эквивалентно дифференциальному уравнению Шрёдингера, и совпадает с последним в части описания эволюции состояний, связанных с механическим движением материального носителя и описываемых комплексными пространственными волновыми функциями.

[6]Интеграл по путям берётся в своей наиболее корректной математической форме континуального интнеграла, представленной в монографии Ж.Зинн-Жюстена (см. список основной литературы).

[7]Здесь и далее, чтобы не загромождать изложение основной мысли все вспомоготельные математические выкладки и их физические обоснования будуть выесены в приложения.

Тот факт, что квантовый интеграл по путям берётся в общем виде, на первый взгляд, обескураживает и кажется невероятным. Особенно удивительно, что огромное число исследователей, работавших (и работающих) с этим математическим объектом, включая учёных внёсших решающий вклад в его формирование в современном виде, таких как Р.Фейнман и Ж.Зинн Жюстен, этого не сделали. Единственной причиной, которая может это объяснить — a'priori заданное представление о квантовом движении, как о «случайном блуждании» квантовой частицы, аналогичном дрейфу броуновской частицы во внешнем силовом поле. Это представление устанавливает неверную, по сути, аналогию между квантовым интегралом по путям, порождаемым детерминистической квантовой эволюцией, и интегралом Винера, в основе которого лежит стохастическое перемещение броуновской частицы. Это перемещение описывается последовательными вероятностями обнаружения в областях пространства в соответствии с формулой Эйнштейна-Смолуховского (М.Кац «Вероятность и смежные вопросы в физике»). Несмотря на аналогичную математическую структуру кратного интеграла для броуновского дрейфа, есть существенное отличие, а именно: броуновское движение заведомо предполагает существование возможных различных путей перемещения частицы из начальной в конечную точку пространства, а интеграл Эйнштейна-Смолуховского «выделяет» группы этих путей с помощью интегрирования по ограниченным диапазонам координат для каждого из кратных интегралов. Таким образом, броуновский интеграл определяет условную вероятность перемещения частицы. Переход от условной вероятности к полной формально достигается заменой конечных пределов на бесконечные в кратном интеграле. Пределы интегрирования в квантовом кратной интеграле всегда бесконечные, что отражает невозможность фиксации промежуточных координат квантовой частицы, поскольку последняя предполагает процесс редукции и полную трансформацию волновой функции. Именно интегрирование в бесконечных пределах и превращает интеграл по путям в цепочку гауссовых интегралов, что позволяет его взять в общем виде. Интегрирование по всем путям лишает, какого-либо физического смыла само понятие множества путей. С математической же точки зрения целесообразно вовсе отказаться от этого понятия и представить квантовую амплитуду перехода в виде функции координат пространства и времени, которая тождественно равна значениям цепочки кратных интегралов для различных моментов времени[8]. Тогда предельный переход к бесконечно малому временному интервалу позволит определить единственный путь, который можно рассматривать как реальный путь индивидуальной частицы материального поля. Соответствующая процедура приводится в приложении 1.

В результате этой процедуры реализуется переход к описанию движения материального поля методом Лагранжа, а именно, вместо интегрального волнового уравнения, определяющего временную зависимость волновой функции как цельного математического объекта, возникает простая формула для зависимости от времени волновой функции, как характеристики индивидуальной частицы (см. соответствующее примечание в приложении 1)

$$\Psi_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\Big(x - (x_0 + s^m(x_0, t, t_0)\Big) \exp \frac{i}{\hbar} S[x^m(\tau)] \Psi_{t_0}(x_0) dx_0.$$

где $S[x^m(\tau)]$ — обычное механическое действие на пути $x^m(\tau)$, который определяется принципом наименьшего действия

$$\delta S[x(\tau)] = 0,$$

Этот переход к лагранжеву описанию, однако, реализован в рамках двух существенных предположений

—в качестве носителя волновой функции рассматривалось материальное поле;

— основой вывода является оператор эволюции, построенный на формализме континуального интеграла по путям, что, как будет показано ниже, накладывает некоторые ограничения на физические условия, в которых этот формализм уместен.[9].

«Уберём» сначала первое из ограничений. Для этого рассмотрим условие, при котором материальное поле сохраняется с течением времени, то есть в нём не возникает разрывов и в пространстве отсутствуют точки, в которых одновременно находится более одной индивидуальной частицы. В отличие от классических сплошных сред, где эта проблема решается благодаря наличию напряжений, в нашем случае, когда напряжения отсутствуют, требование сохранения материального поля налагает ограничения на свойства его индивидуальных частиц. Как показано в приложении 2 консервативные материальные поля образуются индивидуальными частицами, имеющими одинаковую энергию. Этот факт, однако, никак ограничивает возможность использования материальных полей при описании явлений квантовой механики, поскольку согласно постулатам последней любое состояние может быть представлено в виде суперпозиции стационарных состояний. Последнее обстоятельство определяется наблюдаемостью квантовых состояний[10]. Строго

[8]Эта возможность обеспечивается теоремой о среднем.

[9]Вопреки распространённому мнению фейнмановское интегральное волновое уравнение в части описания унитарной эволюции квантовых объектов без дополнительных предположений не вполне эвивалентно уравнению Шрёдингера (в частности, оно непосредственно неприменимо к описанию туннельного эффекта)

[10]Динамические условия наблюдаемости будут рассматриваться во второй части, содержащей описание открытых квантовых систем, в том числе и процесс измерения, специфический для квантовых объектов

говоря, наблюдаемость квантовых состояний предполагает в качестве носителей волновых функций невырожденных стационарных состояний материальные поля, суперпозиция которых и формирует сплошную среду квантовых объектов. Это обстоятельство учётом динамического закона эволюции в лагранжевом представлении позволяет придать волновой функции точный физический смысл.

Борновская интерпретация квадрата модуля волновой функции во-первых не позволяет интерпретировать фазовый множитель и, во вторых, относится к описанию в терминах эйлеровского формализма[11]. Но главное это попытка придать фундаментальной физической характеристике вероятностный смысл, что противоречит всей остальной физической картине мира. Тем не менее, тот факт, что квадрат модуля волновой функции проявляется в измерительном процессе, как плотность вероятности, неоспорим. При этом, элемент случайности вносится измерительным процессом, в котором участвует макроскопический прибор с огромным числом неконтролируемых степеней свободы. Модуль волновой функции формирует меру в пространстве событий, которая и проявляется в виде вероятности при взаимодействии с прибором (основа такого подхода к вероятности изложена в книге А.Н.Колмогорова «Теория вероятностей и математическая статистика.».). То обстоятельство, что вероятность определяется квадратом, а не просто модулем волновой функции обусловлен исключительно неудачным выбором единицы измерения волновой функции ($\left[1/\sqrt{V}\right]$, где V— объём пространства) и не лишает возможности рассматривать модуль волновой функции, как пространственную плотность меры (то есть в единицах $\left[1/V\right]$), задающую распределение материи в пространстве (различие в этом случае состоит только в нормировке). Подобная идея высказывалась ещё Шрёдингером, однако, не получила развития ввиду уже упомянутого выше расплывания волнового пакета при том, что частица регистрируется как локальный объект. В настоящее время, когда мгновенный характер редукции волновой функции доказан экспериментально, нет никаких оснований для отказа от такой интерпретации. Более того, чтобы не впасть в противоречие с СТО, именно такая интерпретация и необходима, поскольку позволяет отнести процесс редукции к внутренним процессам в квантовых частицах (сплошных средах). Теперь, чтобы связать пространственную плотность меры с материальным носителем рассмотрим в качестве такового материальное поле. В приложении 2 показано, что для того, чтобы сплошная среда обладала свойствами материального поля, сохраняющимися во времени, необходимо, чтобы её индивидуальные частицы имели одинаковую механическую энергию. В этом случае в каждой точке пространства в любой момент времени будет находиться единственная индивидуальная частица среды. Тогда пространственная мера может быть отнесена к множеству индивидуальных частиц, непрерывно занимающих заданный объём пространства, то есть к индивидуальному объёму. Иначе говоря, мы можем заменить традиционное интегрирование по пространственной координате на интегрирование по индивидуальным точкам сплошной среды (материальным координатам) и, тем самым сопоставить пространственной мере меру множества индивидуальных частиц, занимающих соответствующий объём пространства. Таким образом модуль волновой функции как атрибут индивидуальной частицы интерпретируестя, как плотность меры этой частицы. Сама же волновая функция, как физическая величина представляет собой произведение плотности меры на комплексный множитель — относительную величину, определяющую результат сложения плотностей различных индивидуальных частиц, находящихся в одной точке пространства [12]. В дальнейшем эту характеристику индивидуальной частицы будем называть комплексной плотностью, сохраняя привычное обозначение Ψ[13].

[11]Представление Эйлера сопоставляет волновую функцию, как физическую величину, точкам пространства (где находятся материальные носители всех физических свойств материального поля - индивидуальные точки) которые сами по себе физическими свойствами не обладают и, тем самым, вводится дополнительный «посредник», существенно усложняющий связь между физической величиной и соответствующим свойством её материального носителя.

[12]Наличие множителя, определяющего правило суперпозиции материальных полей, принципиально отличает сплошную среду квантовой частицы от классической, что связано с возможностью нахождения в одной и той же точке пространства двух и более индивидуальных точек.

[13]Размерность этой величины в данном исследовании будет $\left[1/V\right]$.