

## Глава 1.5. Трёхмерное пространство.

Переход к описанию эволюции волновой функции в трёхмерном пространстве, также как и в случае применения формализма интеграла по путям, осуществляется простой заменой одной переменной (в данном случае  $x$ ) трёхмерным радиус вектором  $\mathbf{r}$ . Волновая функция в произвольный момент времени в этом случае определяется выражением

$$\Psi_t(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{t,t_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \Psi_{t_0}(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0,$$

а ядро интегрального оператора  $K_{t,t_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  — интегралом по путям

$$K_{t,t_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{r}(\tau)]\right) [d\mathbf{r}(\tau)].$$

Тогда, действуя по схеме аналогичной представлению ядра одномерной эволюции, в виде кратного интеграла (см. Приложение 1), для каждого момента времени вместо одного интеграла по координате  $x$  мы будем иметь три по координатам  $x, y, z$ . все эти интегралы имеют одинаковую форму, и в пределе, как легко убедиться, амплитуда перехода запишется в виде

$$K_{t,t_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}^m(t_0)) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E[\mathbf{r}^m(\tau)]\right).$$

Волновая функция при этом будет иметь вид

$$\Psi_t(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}^m(\mathbf{r}_0, t, t_0))) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E[\mathbf{r}^m(\tau)]\right) \Psi_{t_0}(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0.$$

Определим модуль комплексной плотности индивидуальной точки для её части, соответствующей её движению<sup>1</sup>. Мера вещества в индивидуальном объёме как и ранее сохраняется, то есть

$$M(\Delta\Xi) = \rho_0 \Delta V_{\Xi}(0) = \rho_t \Delta V_{\Xi}(t),$$

Откуда для прямоугольной системы координат получим

$$\rho_t = \frac{\Delta V_{\Xi}(0)}{\Delta V_{\Xi}(t)} \rho_0 = \frac{\Delta x_{\Xi}(0) \Delta y_{\Xi}(0) \Delta z_{\Xi}(0)}{\Delta x_{\Xi}(t) \Delta y_{\Xi}(t) \Delta z_{\Xi}(t)} \rho_0 = \frac{v_x(0) v_y(0) v_z(0)}{v_x(t) v_y(t) v_z(t)} \rho_0.$$

И, с учётом стационарного движения, для соответствующего модуля волновой функции, имеем

$$\rho(x, y, z) = \frac{v_x(0) v_y(0) v_z(0)}{v_x(x) v_y(y) v_z(z)} \rho(0, 0).$$

Выражение для поля фазового множителя в трёхмерном случае находится аналогично одномерному. Зависящая от энергии его часть, определяется равенством нулю субстанциональной производной

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) - \frac{E}{\hbar} = 0.$$

Откуда для соответствующей части фазы имеем

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{E}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{r})} d\mathbf{r}.$$

Нетрудно убедиться, что пространственная зависимость начальной фазы будет иметь аналогичный вид

$$\phi(\mathbf{r}, 0) = \frac{2\pi}{T} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{r})} d\mathbf{r}.$$

В результате трёхмерная волновая функция материального поля запишется в виде

<sup>1</sup>Здесь имеется в виду, что фаза — вещественная, а мнимая часть фазы и, соответствующий ей амплитудный множитель формирует модуль комплексной плотности поля в состоянии покоя.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{v_x(0)v_y(0)v_z(0)}{v_x(x)v_y(y)v_z(z)} \rho(0, 0) \Psi_0(0) \exp i \left( \left( \frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T} \right) \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{r})} d\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar} t \right).$$

При построении волновой функции квантовой частицы «целиком» (как суперпозиции материальных полей) для сохранения вещества сплошной среды в областях неоднородной потенциальной энергии следует учитывать, рассмотренную в приложении 4, генерацию встречных полей. В трёхмерном случае отражение происходит во всех направлениях в пространстве, в которых потенциальная энергия неоднородна.