Приложение 3. Пространственное распределение фазы.

В соответствии с классическим понятием минимального действия, материальная точка, перемещаясь на расстояние dx, изменяет свою фазу вследствие этого перемещения на величину

$$\frac{1}{\hbar}\big(p(x)dx - Edt\big) = \frac{1}{\hbar}\left(p(x) - \frac{E}{\dot{x}}\right)dx$$

где производная $\dot{x} = dx/dt$ в данном случае имеет физический смысл скорости механического движения этой материальной точки. Рассмотрим множество индивидуальных точек Ξ, непрерывно заполняющих малый пространственный объём Δx в заданный момент времени (под малым понимается объём в котором скорости индивидуальных точек можно считать одинаковыми). Поскольку временная часть действия одинакова для всех точек объёма, то разность фаз между крайними его точками, находящимися на расстоянии Δx, в любой момент времени t определяеся выражением

$$\frac{1}{\hbar}p(t)\Delta x,$$

а пространственная плотность фазы в точках этого объёма (приращение фазы на точке пространства)

$$\phi_{\Delta x} = \frac{1}{\hbar}p(t).$$

Индивидуальные точки одного и того же множества Ξ в процессе движения занимают различные объёмы пространства Δx_Ξ, то есть в фиксированном объёме пространства Δx, содержащемся в индивидуальном объёме и перемещающемся вместе с ним, содержтся вещество (множество индивидуальных точек) различной меры. Соотношение этих мер в различные моменты времени определяется выражением

$$\frac{M_{\Delta x}(t)}{M_{\Delta x}(0)} = \frac{\rho_\Xi(t)\Delta x}{\rho_\Xi(0)\Delta x} = \frac{\rho_\Xi(t)}{\rho_\Xi(0)},$$

где $M_{\Delta x}(0)$, $M_{\Delta x}(t)$ — меры множества точек пространства в объёме Δx соответственно в моменты времени $t = 0$ и t. Приращение фазы на индивидуальной точке $\xi \in \Xi$ определим как

$$\phi(t) = \frac{1}{\hbar}p_\Xi(t)\frac{M_{\Delta x}(t)}{M_{\Delta x}(0)} = \frac{1}{\hbar}p_\Xi(t)\frac{\rho_\Xi(t)}{\rho_\Xi(0)},$$

где $\rho_\Xi(t)$, $\rho_\Xi(0)$ плотности меры вещества в индивидуальном объёме $_\Xi$ в моменты времени t и 0, соответственно. Поскольку в нерелятивистских квантовых процессах мера вещества в любом индивидуальном объёме сохраняется, то

$$M_\Xi(t) = M_\Xi(0) \Rightarrow \rho_\Xi(t)\Delta x_\Xi(t) = \rho_\Xi(0)\Delta\xi_\Xi \Rightarrow \rho_\Xi(t)v_\Xi(t)\Delta t_\Xi = \rho_\Xi(0)v_\Xi(0)\Delta t_\Xi \Rightarrow \frac{\rho_\Xi(t)}{\rho_\Xi(t)} = \frac{v_\Xi(0)}{v_\Xi(t)},$$

где $v_\Xi(0) = v(\xi_\Xi, 0)$, $v_\Xi(t) = v(\xi_\Xi, t)$ скорости точек индивидуального объёма Ξ при $t = 0$ и t; Δt_Ξ — временной интервал, определяющий множество индивидуальных точек Ξ (в отличии от индивидуального объёма он определяется только произвольным, в рамках предположения о постоянстве скорости индивидуальных точек объёма Ξ, выбором и не зависит от времени). Принимая во внимание, что вещество в индивидуальном объёме сохраняется в любой момент времени, запишем

$$\phi_\Xi(t) = \frac{1}{\hbar}p(t)\frac{v_\Xi(0)}{v_\Xi(t)}.$$

Окончательно для приращения фазы на индивидуальной точке получим

$$\phi(\xi, t) = \frac{p(\xi, 0)}{\hbar}.$$

Последняя величина может рассматриваться в качестве атрибута индивидуальной точки. Определим её как фазу индивидуальной точки, которая переносится в пространстве вместе со своими носителями — индивидуальными частицами. Таким образом, фазы индивидуальных точек остаются неизменными в процессе их перемещения в пространстве и равными их начальным значениям $p(\xi, 0)/\hbar$. В начальный момент времени различные точки находятся в различных точках пространства и в общем имеют различные значения фазового множителя. Эти значения индивидуальные точки сохраняеют в процессе своего движения, то есть поле фаз индивидуальных точек смещается целиком вместе с перемещением этих точек. При неравномерном движении во внешнем силовом поле распределение фазы в пространстве деформируется соотвествующим образом. Чтобы описать эту деформацию, необходимо перейти к представлению Эйлера.

Запишем фазовый множитель комплексной плотности индивидуальных точек в представлении Эйлера — как функцию независимых переменных координаты и времени. Для этого используем тот факт, что фазовый множитель комплексной плотности индивидуальной точки не зависит от времени и, следовательно, временная и пространственные части его приращения в процессе движения индивидуальной точки, определяемые действием на минимальном пути, компенсируют друг друга. Формально, в дифференциальном виде, это означает равенство нулю материальной (субстанциональной) производной фазового множителя комплексной плотности по времени

$$\frac{d}{dt}\exp i\phi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\exp i\phi(x,t) + v(x)\frac{\partial}{\partial x}\exp i\phi(x,t) = 0.$$

Фазу $\phi(x,t)$ в соответстсии с формой минимального действия запишем в виде суммы функций координат пространства и времени

$$\phi(x,t) = \phi(x) + \phi(t) + \phi(\xi).$$

Поле начальной фазы $\phi(\xi)$ исчезает при взятии субстанциональной производной, поскольку последняя, по определению, оставляет материальную координату неизменной. Однако это поле необходимо добавить в виде $\phi_0(x)$ в окончательное выражение для фазы волновой функции материального поля.

Временная часть действия в нашем стационарном случае одинакова для всех индивидуальных частиц и равна $-Et$. Тогда из равенства нулю субстанциональной производной фазы индивидуальной частицы ξ следует

$$v(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x) - \frac{E}{\hbar} = 0.$$

откуда, принимая за начало отсчёта пространственной части фазы точку $x = 0$, имеем

$$\phi(x) = \frac{E}{\hbar}\int\limits_0^x \frac{1}{v(\eta)}d\eta.$$

Найдём начальное пространственное распределение фазы, как поле действия в начальный момент времени Приращение фазы на одномерном объёме пространства dx равно приращению фаз на индивидуальных точках заполняющих этот объём (в силу доказанного выше эти приращения следует положить одинаковыми). В условиях стационарного поля скоростей относительная плотность индивидуальных точек объёма dx стационарна и равна

$$\frac{\rho(x)}{\rho(0)} = \frac{v(0)}{v(x)}.$$

Приращение фазы на бесконечно малом пространственном объёме dx следует определить как

$$d\phi(x) = d\phi(0)\frac{\rho(x)}{\rho(0)} = d\phi(0)\frac{v(0)}{v(x)} = \frac{p(0)}{\hbar}\frac{v(0)}{v(x)}\,dx.$$

Тогда фаза индивидуальной точки, находящейся в произвольной точке пространства в момент времени $t = 0$ определиться выражением

$$\phi(x,0) = \int\limits_0^x d\phi(x) = v(0)\frac{p(0)}{\hbar}\int\limits_0^x \frac{d\eta}{v(\eta)} + \phi(0,0).$$

Введём обозначение

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p(0)},$$

откуда, принимая во внимание, что $\phi(0,0) = 0$, можно записать

$$\phi(x,0) = \frac{2\pi v(0)}{\lambda}\int\limits_0^x \frac{d\eta}{v(\eta)} = \frac{2\pi}{T}\int\limits_0^x \frac{d\eta}{v(\eta)}.$$

Величина λ является формальной и равна минимальному расстоянию, на котором индивидуальная частица, имеющая импульс $p(0)$, изменяет фазу на 2π [1]. Величина T — время необходимое для перемещения индивидуальной частицы со скоростью p_0 на расстояние λ. Это время не связано с временной частью действия и периодом колебаний волновой функции.

В результате волновая функция материального поля при стационарном движении определится выражением

[1] λ приобретает реальный физический смысл длины волны де Бройля при постоянной скорости движения.

$$\Psi_t(\xi) = \frac{v\bigl(\xi,0\bigr)}{v\bigl(\xi,t\bigr)}\rho(0,0)\exp i\phi(0,0)\exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar}\int\limits_{\xi}^{x(\xi,t)}\frac{1}{v(\eta)}d\eta + \frac{2\pi}{T}\int\limits_{0}^{\xi}\frac{1}{v(\eta)}d\eta\right) - \frac{E}{\hbar}t\right) =$$

$$= \frac{v\bigl(\xi,0\bigr)}{v\bigl(\xi,t\bigr)}\Psi_0(x_0)\exp i\left(\frac{E}{\hbar}\int\limits_{\xi}^{x(\xi,t)}\frac{1}{v(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}t\right)$$

Переходя к представлению Эйлера, получим

$$\Psi(x,t) = \frac{v_0}{v(x)}\rho_0\exp i\phi_0\exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right)\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{v(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}t\right) =$$

$$= \frac{v(0)}{v(x)}\Psi_0(0)\exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right)\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{v(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}t\right).$$