Глава 1.3. Комплексная динамика материального поля.[1]

В данном разделе речь пойдёт о комплексной динамике самого материального поля, в смысле комплексности не волноыой функции, а самого функционала действия, определяющего её. . Если исходить из справедливости фейнмановского представления квантовой механики, то наличие такой динамики с необходимостью следует из существования вещественных пространственных волновых функций отдельного материального поля[2].

Разберёмся с установленным в главе 1 вторым ограничением условий использования предлагаемого подхода к описанию микроскопических явлений, связанным с формализмом континуального интеграла. Классический функционал действия — вещественная величина, что означает комплексный вид пространственного распределения плотности отдельного материального поля. Однако, в некоторых физических ситуациях решение стационарного уравнения Шрёдингера для отдельного материального поля — вещественное (туннельный эффект через прямоугольный потенциальный барьер), что не позволяет определить квантовую динамику исключительно классическим действием на минимальном пути. Зинн-Жюстен», однако, показывает, что математический аппарат континуального интегрирования может быть «формально» использован в подобных задачах, если заменить вещественное время на мнимое. В этом случае отношение к мнимому времени как к формальному математическому объекту не совсем корректно, поскольку оно (время) характеризует конкретную физическую ситуацию, а не является формальной величиной, используемой в сугубо математической процедуре, такой как, например, в случае определения меры интеграла по путям. Строго говоря, термин «мнимое время» не совсем корректен. Действительно, любые волновые функции имеют гармоническую зависимость от времени во всех областях пространства, что соответствует вещественному времени. Аналогичную возможность следует допустить и в отношении к пространственной координаты. При этом скорость (импульс) может иметь, как вещественные, так и мнимые значения, что порождает различные функции Лагранжа. То есть вещественные, по сути, координата и время могут входить в лагранжиан как в вещественном, так и мнимом виде. Это означает, только то, что функции Лагранжа и соответствующие им функционалы действия могут быть различными. Рассмотрим эти возможности, как эмпирическую данность, порождаемую уравнением Шрёдингера, и распространим понятие действия на ситуацию эволюции пространственного распределения материального поля с лагранжианом, содержащим мнимую производную $\dot{x}$[3]. Для этого учтём то обстоятельство, что в материальном поле квантовой частицы индивидуальная частица (индивидуальной точка), строго говоря, не имеет какой-либо иной физической сущности, кроме как элемента материи, формирующего плотность этого поля в данной точке пространства. Иначе говоря, этот элемент материи не имеет какого-либо самостоятельного существования и физически не может быть выделен из материального поля. Физический смысл имеет лишь плотность материи в данной точке пространства, безотностительно к тому, какая именно индивидуальная частица поля находится в ней в данный момент времени. Из этого следует, что, в конечном счёте, физический смысл имеет динамика не отдельной индивидуальной частицы, а материального поля в целом. Всё сказанное фактически означает, что в отличие от классики, динамика рассматриваемого материального поля в своей основе определяется не динамикой (перемещением) его частей, а динамикой всего поля в целом. Другими словами, представление Эйлера является фундаментальным, а описание Лагранжа, представленное в главе 2 — не более чем формальное математическое представление в условиях механического движения индивидуальных частиц материального поля.

Учитывая отсутствтие движения индивидуальных точек[4] под барьером, при туннельном эффекте, время, в общем случае, следует определить иначе, чем величину, характеризующую перемещение материи в пространстве. Это же обстоятельство вынуждает обобщить понятие скорости. Обратим внимание на то, что пространственная зависимость комплексной плотности однозначно определяется полем скорости (импульса), которая, в свою очередь, возникает в результате взаимодействия квантовой частицы с другими физическими объектами (и в нашем случае однозначно задаётся полем потенциальной энергии), и начнём с обобщения именно этого понятия. Сохранив математическое выражение $\dot{x} = dx/dt$, отнесём его к различным индивидуальным точкам, находящимся в различных точка пространства в один и тот же момент классического времени, безотносительно к возможности их перемещения (лагранжева представления). Далее заметим (см. приложение 3), что в случае механического движения одинаковым временным интервалам dt соответствуют индивидуальные объёмы $d\Xi$ одинаковой меры, то есть временная плотность

[1] В данном случае под динамикой понимается любое изменение распределения материального поля пространстве, которое не обязательно свзано с перемещением индивидуальных частиц.

[2] Здесь идёт речь именно об отдельных материальных полях, а не о стационарных квантовых состояниях, возникающих при финитном движении. В последнем случае вещественные пространственные волновые функцияи являются результатом суперпозиции двух встречных полей с одинаковой энергией.

[3] Здесь употребляется термин эволюция, а не движение поля, поскольку последнее представляет собой лишь один из способов формирования распределения материи квантовой частицы в пространстве.

[4] Под индивидуальной точкой понимается элемент материи — носитель комплексной плотности, который перемещается вместе с постоянной фазой волны в случае наличия механического движения (при вещественном действии). Отсутствие движения предполагает покой индивидуальных точек.

материи постоянна. Грубо говоря, объёмы пространства, которые индивидуальные частицы проходят за одинаковые промежутки времени в условиях механического движения, содержат вещество поля одинаковой меры (одинаковые по мере индивидуальные объёмы). Если принять это свойство переменной времени в качестве основного и распространить его на ситуацию отсутствия механического перемещения поля, то она становится «переменной меры материи»[5]. Итак, определим время, в общем случае, как переменную материального поля равные малые интервалы которой содержат индивидуальные объёма равной меры. Тогда поле $\dot{x}$ однозначно определяет пространственное распределение плотности вещества, а переменная времени, определяет расстояние в пространстве, на котором плотность изменяется заданным образом. Интерпретируем время и производную $\dot{x}$ именно так, как при наличии, так и в отсутствии механического движения материального поля.

По нашему определению индивидуальной частицы пространственная экспоненциальная часть её комплексной плотности остаётся постоянной. Тогда, исходя из вида волновой функции, можно заключить, что существует две физические ситуации, в которых это возможно: разобранное в предыдущей главе, перемещение индивидуальных точек во времени, соответствующее вещественной фазе $\phi(x)$ и состояние их покоя, в котором функция $\phi(x)$ принимает мнимые значения. Действительно, мнимая пространственная фаза формирует вещественную пространственную часть волновой функции, что соответствует стоячей волне комплексной плотности материального поля (это волна специфическая, поскольку не является результатом суперпозиции встречный волн). А это, в свою очередь, означает, что индивидуальные точки – носители волновой функции – сохраняют своё положение в пространстве.

Одновременное наличие вещественной и мнимой экспонент в решениях стационарного уравнения Шрёдингера для областей с переменной потенциальной энергией указывает на возможность одновременного существования двух значений импульса материального поля, что предполагает наличие двух законов формирования импульсов в результате взаимодействия системы с окружающей средой. Эти законы непосредственно не соответствуют вещественному или мнимому импульсу и, следовательно, движению или покою материального поля. Они определяются значением энергии материального поля, которое в однозначно определяет поле $\dot{x}$ в соответствии с принципом наименьшего укороченнного действия (принципом Мопертюи). В одномерном случае необходимость варьирования отсутствует вообще и поля $\dot{x}$ могут быть получены из условий

$$\frac{m\dot{x}^2(x)}{2} + V(x) = \begin{cases} E, \\ 0. \end{cases}$$

Отсюда для поля скоростей имеем

$$\dot{x}(x) = \begin{cases} \frac{2}{m}\sqrt{E - V(x)} & \text{при } E \neq 0, \\ \frac{2}{m}\sqrt{-V(x)} & \text{при } E = 0. \end{cases}$$

Поскольку как время, так и координата могут входить в закон распределения скорости в вещественном или мнимом виде, знаки кинетической, потенциальной и полной энергии могут иметь как отрицательные, так и положительные знаки.

Отметим ещё одно важное обстоятельство, касающееся начала отсчёта потенциальной энергии, при вычислении поля импульса. Воспользуемся выражением для координат индивидуальных частиц, соответствующих минимальному действию на малом промежутке времени (см. приложение 1).

$$x_{k-1}^m = x_k + \frac{1}{2m}\frac{\partial V}{\partial x}\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\varepsilon} = \frac{1}{2m}\frac{\partial V}{\partial x}\varepsilon.$$

Равные интервалы времени ε задают индивидуальные объёмы равной меры Тогда, если под Δx понимать приращение свободной переменной координаты, а не интервал пути, то величина $\dot{x}$ распределяет «куски» материального поля равной меры по пространству, «проектируя» их на соответствующие (в общем случае различные) объёмы пространства, посредством произведения на $\dot{x}$. Тогда $1/\dot{x} \approx \varepsilon/\Delta x = \rho(x)$ задаёт относительную пространственную плотность вещества, которая в соответствии с минимумом действия равна

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{\Delta x}{\varepsilon} = \frac{1}{2m}\frac{\partial V}{\partial x}\varepsilon.$$

Это означает, что при $\partial V(x)/\partial x \equiv 0$ поле $\dot{x}(x) \equiv 0$ и отсчёт потенциальной энергии при определении поля $\dot{x}$ следует вести от точки x_0, начальной для поля скорости рассматриваемого вида.

Таким образом, определив поля $\dot{x}$ с помощью выражений для укороченного действия, волновая функция материального поля может быть получена как произведение волновых функций вида

[5]Её не следует путать с переменной Лагранжа, которую часто называют материальной переменной, и которая идентифицирует индивидуальные точки сплошной среды посредством задания их координат в некоторый фиксированный момент времени. Чтобы избежать такой путаницы оба этих термина в настоящей работе использоваться не будут

$$\Psi(x,t) = \frac{v_0}{v(x)}\rho_0 \exp i\phi_0 \exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right)\int\limits_0^x \frac{1}{v(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}\tau\right) =$$

$$= \frac{v_0}{v(x)}\Psi_0(0) \exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right)\int\limits_0^x \frac{1}{v(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}\tau\right),$$

записанных для мнимой и вещественной производной $\dot{x}$. При этом, из выражений для вещественных экспоненциальных множителей (содержащих мнимую $\dot{x}$), необходимо исключить слагаемое $\big(E/\hbar\big)\int\limits_0^x \big(1/v(\eta)\big)d\eta$, соответствующее конвективной производной, поскольку движение в этом случае отсутствует и, следовательно, субстанциональная производная плотности фазы равна локальной. Амплитудный множитель при этом формирует поле $\dot{x}$ соответствующее движению материального поля, то есть поле скорости. Таким образом, волновая функция материального поля в общем случае имеет вид

$$\Psi(x,t) = \frac{\dot{x}^m(0)}{\dot{x}^m(x)}\Psi_0(0) \exp i\left(\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T^m}\right)\int\limits_0^x \frac{1}{\dot{x}^m(\eta)}d\eta - \frac{E}{\hbar}t\right) \exp i\left(\frac{2\pi}{T^r}\int\limits_0^x \frac{1}{\dot{x}^r(\eta)}d\eta\right),$$

где индекс m относится к движению материального поля, индекс r — к покою. Величина $T^r = \lambda^r/\dot{x}(0) = 2\pi\hbar/\big(p^r(0)\dot{x}^r(0)\big)$. В результате оказывается, что для нахождения волновых функций состояний частицы нет необходимости решать какие-либо дифференциальные или интегральные уравнения ни по отношению к волновой функции, ни по отношению к производной $\dot{x}$. Волновая функция просто «строится» посредством постановки полей $\dot{x}^m$ и $\dot{x}^r$ в последнее выражение. Примеры построения волновых функций для квантовой частицы, туннелирующей через прямоугольный потенциальный барьер, а также для гармонического квантового осциллятора приведены в приложении 5.