

Глава 2.5. Необратимая эволюция открытых квантовых систем.

Вернёмся к динамике системы взаимодействующих квантовых частиц во внешнем постоянном потенциальном поле¹. Традиционные методы нахождения точного спектра энергии и тем более точной волновой функции такой системы не могут быть реализованы, даже численно, уже для небольшого (порядка десятка) числа частиц. С другой стороны, многочастичные квантовые задачи представляют значительный интерес (сверхпроводимость, квантовая химия...). Проблема традиционного подхода состоит в чрезвычайной громоздкости решения уравнения Шрёдингера (или вариационной задачи) для большого числа частиц. Предлагаемый подход позволяет принципиально изменить ситуацию. В его основе лежат 2 существенных предположения

А) Квантовая частица - совокупность материальных полей. Поскольку иного вида частица быть не может, то в любой момент времени её вещество распределяется между материальными полями. Образовать материальное поле из индивидуальных частиц частицы k с энергией E_k , состоящей из кинетической энергии $T(\xi_{k,\varepsilon_k}, t)$, потенциальной энергии в классическом внешнем поле $V(\xi_{k,E_k}, t)$ и энергии взаимодействия $U\left(\xi_{k,E_k}, \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \Phi_l(x, t)\right)$, где $\Phi_l(x, t)$ — волновая функция l -той квантовой частицы, не представляется

возможным, поскольку наличие энергии взаимодействия нарушает условие «сплошности» поля. Поэтому слагаемое энергии взаимодействия в выражении для полной энергии индивидуальной точки должно быть исключено из рассмотрения пространственного распределения поля скоростей того или иного материального поля². Другими словами, мы формируем материальные поля из индивидуальных частиц, значения энергии которых в данный момент времени одинаковы. В соответствии с этой энергией формируется пространственная структура материального поля. Непрерывное изменение энергии индивидуальных точек в результате взаимодействия означает непрерывное обновление «вещества» в материальных полях вследствие «прихода» и «ухода» индивидуальных частиц в поле с заданной энергией. При таком подходе, несмотря на различие скорости изменения состава поля в различных точках пространства, ввиду принципиальной неразличимости индивидуальных точек и неизменной конфигурации материальных полей, энергию взаимодействия следует определять для каждого поля в целом, а не отдельных индивидуальных частиц³.

Б) Стационарные состояния во внешнем классическом потенциальном поле могут быть определены непосредственно, исходя из интегрального закона квантовой эволюции, выведенного в части 1, на основе представления квантового интеграла по путям в виде функционала от единственного пути. Соответствующие выражения имеют вид

$$\psi_{k,\varepsilon_k}(x) = \frac{\dot{x}_{k,\varepsilon_k}^M(0)}{\dot{x}_{k,\varepsilon_k}^M(x)} \psi_{k,\varepsilon_k}(0) \exp\left(i\left(\frac{\varepsilon_k}{\hbar} + \frac{2\pi}{T_{k,\varepsilon_k}^M}\right) \int_0^x \frac{1}{\dot{x}_{k,\varepsilon_k}^M(\eta)} d\eta\right) \exp\frac{2\pi i}{T_{k,\varepsilon_k}^R} \int_0^x \frac{1}{\dot{x}_{k,\varepsilon_k}^R(\eta)} d\eta. \quad (1)$$

где k — номер квантовой частицы; ε_k — энергия рассматриваемого материального поля; верхний индекс M относится к механическому движению материального поля, R — к динамике его «покоя» (см. главу 1.3, первой части).

Дальнейший ход рассуждений включает в себя полный отказ от использования уравнения Шрёдингера для описания состояний частиц системы. Дело в том, что уравнение Шрёдингера для системы взаимодействующих частиц оперирует с волновой функцией системы, как элементом пространства, образованного тензорным произведением гильбертовых пространств квантовых частиц, составляющих замкнутую систему. При подстановке в уравнение она не может быть факторизована по волновым функциям квантовых частиц в отдельности⁴. Действительно, волновая функция замкнутой системы, например, состоящей из двух, взаимодействующих частиц $\Psi_t(x, q)$, может быть представлена вектором состояния

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} |x^m\rangle \otimes |q_2^n\rangle,$$

¹Условие постоянства поля не накладывает никаких ограничений, поскольку поля скоростей и соответствующие пространственные распределения материальных полей (пространственные волновые функции невырожденных стационарных состояний), формируются мгновенно, что является внутренним свойством квантовых частиц, по сути, свойством эфира (для этого индивидуальным частицам поля нет необходимости куда-либо перемещаться).

²Эта энергия должна учитываться при определении полной энергии системы взаимодействующих частиц, которая равна сумме энергий материальных полей (с учётом меры вещества в этих полях) и энергии взаимодействия между этими полями.

³Формально это означает влияние взаимодействия частиц исключительно на коэффициенты разложения по энергии (другие разложения по полным ортонормированным наборам состояний абстрактного гильбертова пространства рассматриваться не будут в связи с отсутствием, в общем случае, их непосредственной однозначной связи с физическим состоянием материального носителя).

⁴Формально это не позволяет сделать часть гамильтониана, ответственная за описание взаимодействия и зависящая от координат различных квантовых частиц.

где $|x^m\rangle$ и $|q_2^n\rangle$ — координатные базисные векторы для гильбертовых пространств частиц. Аналогичное выражение можно записать для энергетических базисных векторов⁵

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{pq}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) |\varepsilon_1^p\rangle \otimes |\varepsilon_2^q\rangle, \quad (2)$$

Энергия взаимодействия в уравнении Шрёдингера записывается в виде функции координат обеих частиц, что связывает пространственные распределения квантовых частиц в единую волновую функцию, которая не может быть факторизована. Несмотря на то, что пространственные конфигурации полей не зависят от наличия взаимодействия, последнее приводит к тому, что функции $c_{pq}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, t)$ нельзя представить в виде произведений $a_p(\varepsilon_1, t)b_q(\varepsilon_2, t)$ и, следовательно, подставить в уравнение Шрёдингера волновую функцию системы в виде $\Psi_t(x, q) = \Psi_t(x)\Phi_t(q)$. Иначе говоря, уравнение Шрёдингера не позволяет получить функции $a_p(\varepsilon_1, t)$ и $b_q(\varepsilon_2, t)$ по отдельности. Формальной причиной этого является представление взаимодействия в виде функции координат частиц. Однако, предположение о совокупности материальных полей, как способе существования квантовых частиц, предполагает соответствующее представление энергии взаимодействия — взаимодействие между этими полями, как цельными объектами. Чтобы применить такое представление, отказавшись от использования уравнения Шрёдингера, представим волновую функцию системы в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) &= \int \cdots \int \prod_{k=1}^N \left[a_k^{min}(\varepsilon_k, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_k t\right) \psi_k^{\varepsilon_k}(x_k) d\varepsilon_k \right] = \\ &= \prod_{k=1}^N \int_0^{\infty} \left[a_k^{min}(\varepsilon_k, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_k t\right) \psi_k^{\varepsilon_k}(x_k) \right] d\varepsilon_k = \prod_{k=1}^N \Psi^{red}(x, t). \end{aligned}$$

Для двух взаимодействующих частиц имеем

$$\Psi(x, q, t) = \Psi^{red}(x, t)\Psi^{red}(q, t).$$

Индекс «red» указывает на то, что волновая функция данного вида не является решением уравнения Шрёдингера, что в частности проявляется в зависимостях коэффициентов разложения от времени, возникающих вследствие изменения энергии частиц при взаимодействии⁶. Таким образом, задача определения квантовой динамики системы сводится к нахождению динамики коэффициентов разложения, способом не связанным с использованием уравнения Шрёдингера⁷.

Представим коэффициенты в (2) разложения для замкнутой системы из двух взаимодействующих частиц в виде

$$c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, t) = a(\varepsilon_1, t)b(\varepsilon_2, t).$$

Чтобы найти временные зависимости $a(\varepsilon_a, t)$ и $b(\varepsilon_b, t)$, воспользуемся простым физическим соображением, основанным на законе сохранения вещества частицы. Исходя из физического смысла волновой функции (см. главу 1.1 первой части), модуль $|a(\varepsilon)|$ представляет собой плотность меры вещества частицы в материальном поле с заданной энергией или, формально, плотность вещества в пространстве энергии квантовой частицы. Тогда, следуя закону сохранения вещества частиц в нерелятивистских квантовых процессах, следует записать уравнение непрерывности. Запишем его в представлении Эйлера

$$\frac{\partial |a_k|}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (|a_k| \dot{\varepsilon}_k) = 0.$$

В этом выражении величина $\dot{\varepsilon}_k$ — скорость изменения энергии вещества материального поля частицы k с энергией ε_k в пространстве энергии. Чтобы определить эту величину воспользуемся следующими простыми соображениями. Первое из них состоит в том, что изменение энергии происходит исключительно вследствие взаимодействия между частицами. В традиционной квантовой механике это взаимодействие формализуется в виде энергии взаимодействия в гамильтониане, как функция координат частиц. В представлении материальных полей это означает, что каждая индивидуальная частица любого материального

⁵ Физической основой такой возможности является свойство квантовых частиц представлять собой совокупности материальных полей.

⁶ Принципиально важным является то обстоятельство, что зависимости коэффициентов разложения по энергии друг от друга, могут быть заменены их зависимостями от времени. Эти зависимости являются результатом силового взаимодействия материальных полей и однозначно определяют волновые функции отдельных частиц системы в любой момент времени. Зависимости коэффициентов разложения от времени, в конечном счёте, задаёт динамика взаимодействия, определяемая классическим принципом наименьшего действия, и пространственными распределениями материальных полей.

⁷ При этом пространственные волновые функции материальных полей сохраняют точно такой же вид, как и в отсутствии взаимодействия(1).

поля участвует в парных взаимодействиях со всеми индивидуальными частицами всех материальных полей других частиц. Результатом этих взаимодействий является изменение её энергии (при этом следует учитывать плотность меры). Для индивидуальной точки квантовой частицы k (имеющей энергию $\epsilon_k = \varepsilon_k$), находящейся в точке x_k в момент времени t , скорость изменения энергии будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t}\right)^\Sigma(\varepsilon_k, x_k) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_0^\infty |a_k(\varepsilon_k)| \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t}(\varepsilon_k, \varepsilon_l, x_k, x_l) |\psi_{\varepsilon_l}(x_l)| dx_l \right] d\varepsilon_l.$$

Второе соображение обусловлено тем, что индивидуальные точки полей не являются самостоятельными физическими объектами, то есть поля являются цельными объектами. Тогда, чтобы найти скорость изменения энергии материального поля, необходимо усреднить соответствующие величины по всем его индивидуальным частицам. В результате имеем

$$\dot{\epsilon}_k(\varepsilon_k) = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t}\right)^\Sigma(\varepsilon_k, x_k) |\psi_{\varepsilon_k}(x_k)| dx_k.$$

Таким образом, задача сводится к классической динамике парного взаимодействия двух индивидуальных точек материальных полей, взаимодействующих квантовых частиц, которая, в соответствии с принципом наименьшего действия, описывается системой уравнений

$$m_k \frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial V_k(x_k)}{\partial x_k} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{\partial U_{kl}(x_k, x_l)}{\partial x_k}.$$

Для искомой величины имеем

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t}(x_k, x_l) = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{\partial U(x_k, x_l)}{\partial x_k} \dot{x}_k(x_k).$$

Определим величину скорости передачи энергии $\Gamma_{kl}(\varepsilon_k, \varepsilon_l)$ от материального поля ε_l частицы l материальному полю ε_k частицы k , как

$$\Gamma_{kl}(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(-\frac{\partial U(x_k, x_l)}{\partial x_k} \dot{x}_k(x_k, \varepsilon_k) \right) |\psi_{l, \varepsilon_l}(x_l)| |\psi_{k, \varepsilon_k}(x_k)| dx_l dx_k.$$

С учётом динамики фазы материальных полей, представленной в главе 2.2, динамика системы произвольного числа взаимодействующих квантовых частиц однозначно и детерминированно описывается системой.

$$\begin{cases} \frac{\partial |a_k|}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (|a_k| \dot{\epsilon}_k) = 0, \\ \dot{\epsilon}_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_0^\infty \Gamma_{kl}(\varepsilon_k, \varepsilon_l) |a_l(\varepsilon_l)| d\varepsilon_l, \\ \varphi_k(\varepsilon, t) = \varphi_k(\theta_k(\varepsilon_k, t_0)) - \frac{1}{\hbar} \int_0^{\varepsilon_k} \frac{\dot{\epsilon}_k(\theta_k(\varepsilon_k, t_0))}{\dot{\epsilon}_k(\theta_k(\varepsilon_k, t))} (t - t_0) d\varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что эта динамика нелокальна в физическом пространстве, что определяется природой её объектов — материальных полей. Приведённые волновые функции содержат полную информацию о частицах: по своему физическому смыслу они ничем не отличаются от «обычных» волновых функций частиц⁸, поэтому в дальнейшем этот термин использоваться не будет.

Важным отличием от системы классических частиц является возможность сохранения состояний квантовых частиц при наличии взаимодействия между ними⁹. Действительно, при постоянном поле потенциальной энергии $V(x_k)$, равенство нулю производных по времени от модулей коэффициентов разложения

⁸Тем не менее с математической точки зрения отличия существенны: ввиду изменения энергии частиц, приведённые волновые функции не являются решениями одночастичных уравнений Шрёдингера; эволюция приведённых волновых функций неунитарна. Более того, как будет показано ниже она зависит от предыстории взаимодействия частиц системы, что означает её необратимость во времени.

⁹Несмотря на наличие некоторой аналогии, в данном случае речь идёт о сохранении динамических состояний частиц, а не о статистическом термодинамическом состоянии

по полям, то есть сохранение состояния частицы, не требует равенства нулю скорости изменения значений энергии индивидуальных частиц в каждом из полей взаимодействующих частиц (последнее означало бы отсутствие взаимодействия). Запишем комплексную функцию $a(\varepsilon, t)$ в виде произведения вещественного модуля на комплексный фазовый множитель

$$a(\varepsilon, t) = c(\varepsilon, t) \exp i\varphi(\varepsilon, t).$$

Принимая во внимание вещественность функций c_k , $\dot{\varepsilon}_k$ и φ_k , получим два вещественных уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial c_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (c_k \dot{\varepsilon}_k) = 0, \\ \varphi_k(\varepsilon, t) = \varphi_k(\theta_k(\varepsilon_k, t_0)) - \frac{1}{\hbar} \int_0^{\varepsilon_k} \frac{\dot{\varepsilon}_k(\theta_k(\varepsilon_k, t_0))}{\dot{\varepsilon}_k(\theta_k(\varepsilon_k, t))} (t - t_0) d\varepsilon. \end{cases}$$

Для стационарного распределения вещества частицы по материальным полям $\partial c_k / \partial t = 0$ и $\dot{\varepsilon}_k(\theta_k(\varepsilon_k, t)) = \dot{\varepsilon}_k(\theta_k(\varepsilon_k, t_0))$ получим

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (c_k \dot{\varepsilon}_k) = 0, \\ \varphi_k(\varepsilon, t) = \varphi_k(\varepsilon_k, t_0) - \frac{1}{\hbar} \varepsilon_k (t - t_0). \end{cases} \quad (4)$$

Второе уравнение системы даёт для фаз приведённых волновых функций при стационарной динамике движения квантовых частиц выражены, идентичные фазам обычных стационарных состояний в отсутствии взаимодействия. Наличие взаимодействия проявляется в конкретном произведении виде функций $c_k \dot{\varepsilon}_k$, который в данном случае однозначно связан с определёнными условиями стационарности, а не произвольными начальными условиями для частицы, как замкнутой системы. Определим эти функции из первого уравнения системы (4)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (c_k(\varepsilon_k) \dot{\varepsilon}_k(\varepsilon_k)) = 0,$$

или

$$c_k(\varepsilon_k) \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_0^{\infty} \Gamma_{kl}(\varepsilon_k, \varepsilon_l) c_l(\varepsilon_l) d\varepsilon_l \right) = C_k.$$

Перепишем последнее выражение для системы из двух взаимодействующих частиц a и b

$$\begin{cases} |a(\varepsilon_a)| \int_0^{\infty} \Gamma_{ab}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) |b(\varepsilon_b)| d\varepsilon_b = C_a, \\ |b(\varepsilon_b)| \int_0^{\infty} \Gamma_{ba}(\varepsilon_b, \varepsilon_a) |a(\varepsilon_a)| d\varepsilon_a = C_b, \\ \int_0^{\infty} d\varepsilon_b \int_0^{\infty} \Gamma_{ab}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) |b(\varepsilon_b)| d\varepsilon_b = - \int_0^{\infty} d\varepsilon_b \int_0^{\infty} \Gamma_{ba}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) |a(\varepsilon_a)| d\varepsilon_a, \\ \Gamma_{ab}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial U(x, q)}{\partial x} \dot{x}(x, \varepsilon_a) \right) |\phi_{\varepsilon_b}(q)| |\psi_{\varepsilon_a}(x)| dq dx, \\ \Gamma_{ba}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial U(x, q)}{\partial q} \dot{q}(q, \varepsilon_b) \right) |\phi_{\varepsilon_b}(q)| |\psi_{\varepsilon_a}(x)| dq dx. \end{cases} \quad (5)$$

Постоянные $c_1(0)$ и $c_2(0)$ определяются из условий

$$\int_0^{\infty} a \varepsilon_a = E_a, \quad \int_0^{\infty} b \varepsilon_b d\varepsilon_b = E_b$$

Рассмотрим теперь систему двух взаимодействующих частиц при финитном движении. Как было показано в главе 1.4, квантование является результатом интерференции встречных материальных полей квантовых частиц в физическом пространстве. При финитном движении мы имеем две совокупности

материальных полей в пространстве энергии, отличающихся только направлением движения в этом пространстве $\varepsilon^+ = -\varepsilon^-$ (индексы соответствуют направлениям движения материальных полей в физическом пространстве). Поскольку уравнения (4) идентичны для них, то волновые функции этих совокупностей встречных волн будут отличаться лишь знаками пространственных частей действий в выражениях для волновых функций материальных полей). Квантование энергии имеет место для каждой из частиц в отдельности и является результатом «гашения» соответствующих встречных волн (приведённых волновых функций материальных полей) в результате их интерференции, для всех значений энергии, кроме определённых. Обозначим эти значения E_n для первой частицы и E_m — для второй. Поскольку динамика материальных полей в пространстве энергии не меняется, то система (4) сохраняет неизменный вид, а выражения (5) для дискретных функций $a(\varepsilon_a)$ $b(\varepsilon_b)$ можно переписать как

$$\left\{ \begin{array}{l} |a_n| \sum_m \Gamma_{nm} |b_m| = C_a, \\ |b_n| \sum_m \Gamma_{mn} |a_n| = C_b, \\ \sum_n \sum_m \Gamma_{nm} |b_m| = - \sum_n \sum_m \Gamma_{mn} |a_n|, \\ \Gamma_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial U(x, q)}{\partial x} \dot{x}_n(x) \right) |\phi_m(q)| |\psi_n(x)| dq dx, \\ \Gamma_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial U(x, q)}{\partial q} \dot{q}_m(q) \right) |\phi_m(q)| |\psi_n(x)| dq dx. \end{array} \right. \quad (6)$$

Динамика отдельных квантовых частиц (6) не соответствует принципу детального равновесия, что является следствием необратимости во времени динамики (3). Причиной этого обстоятельства уже для системы, состоящей из двух квантовых частиц, является зависимость динамики не только от текущего состояния (приведённой волновой функции) выбранной частицы, но и от состояния второй, а последнее является результатом предыстории взаимодействия. Таким образом, квантовая эволюция обратима только для замкнутых квантовых систем, каковой, с учётом нелокальности распределения материи в пространстве, возможно, является только вся вселенная¹⁰. Таким образом, так называемая «стрела времени» возникает на динамическом уровне, вследствие необратимости уравнений квантовой динамики открытых квантовых систем.

¹⁰ Даже при этом остаётся вопрос о замкнутости всей вселенной, поскольку сознание, не являющееся объектом физики, может оказывать влияние на физические объекты.