Глава 1.6. Макроскопическая система.

Идея описать макроскопическое тело волновой функцией координат всех его частиц, и получить при этом точку в конфигурационном пространстве, несостоятельна по своей сути — для этого необходимо, чтобы волновые функции всех его частиц стали δ-функциями. Но для представления макроскопического тела в виде совокупности материальных точек этого и не требуется. Действительно, «внутри» каждого макроскопического тела каждая квантовая частица представляет собой локализованную в той или иной степени сплошную среду, пространственное распределение которой определяется волновой функцией.

Попытка, каким то образом, локализовать квантовый объект и превратить его в классический за счёт какой-либо квантовой динамики также не представляется перспективной уже потому, что «туз — он и в Африке туз» и, следовательно, от внешней динамики не зависит. Более того, учитывая, что макроскопическим объектом может являться и идеальный газ, можно заключить, что и внутренняя динамика не имеет отношения к формированию классической системы. Таким образом, приходится заключить, что макроскопические свойства механических систем порождаются их кинематикой. Иначе говоря, первым обстоятельством, которое нужно учитывать при выяснении причины возникновения классических свойств механических систем, является то, что при этом анализе *из динамических квантовых постулатов любого вида потенциальную энергию можно исключить.*

Второе обстоятельство непосредственно следует из того факта, что положение материальной точки в пространстве совпадает с положением центра масс тела, образом которого эта математическая абстракция является. Откуда следует, что *при переходе к макроскопическому телу локализовываться в пространстве должна волновая функция центра масс.*

Квазиклассическое приближение рассматривает предельный переход от квантового движения к классическому через условия совпадения положений волнового пакета с точками соответствующего классического пути. Аналогичный подход реализует Р. Фейнман при переходе к единственному классическому пути в своём интеграле. И в том и другом случае вопрос о пространственной локализации самого волнового пакета не рассматривается вообще.

В рассматриваемой теории путь индивидуальной точки материального поля — единственный всегда и никакого перехода к $\hbar \to 0$ для этого не требуется. Поэтому необходимо решить только задачу пространственной локализации центра масс системы при увеличении числа частиц в ней. Чтобы сделать это, выразим координаты всех частиц системы в волновой функции через координаты её центра масс $X^C = \sum_{i=1}^{N} (m_i x_i)/M$ (где $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ — масса всей системы; N — число частиц) и координаты частиц x_i^r относительно него (рассматриваем одномерное движение)

$$x_i = X^C + x_i^r.$$

Обобщим закон одномерной эволюции квантовой частицы (см. главу 1)

$$\Psi_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\Big(x - (x_0 + s^m(x_0, t, t_0)\Big) \exp\frac{i}{\hbar} S[x^m(t), x_0, t_0] \Psi_{t_0}(x_0) dx_0$$

на систему, состоящую из N частиц

$$\Psi_t(x_1, x_2 ... x_N) = \int \cdots \int \Psi_{t_0}(x_{1,0}, x_{2,0} ... x_{N,0}) \prod_{i=1}^{N} \Big[dx_{i,0} \delta\Big(x_i - \big(x_{i,0} + s_i^{min}(x_{i,0}, t, t_0)\big)\Big) \exp\frac{i}{\hbar} S_i^{min}(x_i, t)\Big].$$

Переход к относительным координатам и координатам центра масс преобразует дельта-функцию в последнем выражении к виду

$$\delta\Big(x_i - \big(x_{i,0} + s_i^{min}(x_{i,0}, t, t_0)\big)\Big) \to \delta\Big(x_i^r - \big(x_{i,0} + s_i^{r,min}(x_{i,0}^r, t, t_0)\big)\Big) \delta\Big(X^C - \big(X_0^C + s^{C,min}(x^C(, t, t_0)\big)\Big).$$

Минимальное действие $\sum_{i=1}^{N} S_i^{min}(x_i, t)$ также выразим через новые координаты

$$\sum_{i=1}^{N} S_i(x_i, t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i{}^2 - V_i(x_i)\Big) dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{1}{2} m_i \big(\dot{X}^C + \dot{x}_i^r\big)^2 - V_i(X^C + x_i^r)\Big) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \big(\dot{x}_i^r\big)^2 + \frac{1}{2} M \big(\dot{X}^C\big)^2 + 2\dot{X}^C \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^r - \sum_{i=1}^{N} V_i(X^C) - \sum_{i=1}^{N} V_i(x_i^r) \Big] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big[\sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{1}{2} m_i \big(\dot{x}_i^r\big)^2 - V_i(x_i^r)\Big] + \frac{1}{2} M \big(\dot{X}^C\big)^2 - V^C(X^C) \Big] dt,$$

где $V^C(X^C) = \sum_{i=1}^{N} V_i(X^C)$ — сумма потенциальных энергий всех частиц системы, если бы они находились в её центре масс (то есть потенциальная энергия классической материальной точки). То обстоятельство, что амплитуда перехода (и дельта функция и комплексная экспонента) представляется а виде произведения амплитуды, зависящей только от координаты центра масс, и амплитуды — функции относительных координат, позволяют представить волновую функцию системы в виде

$$\Psi_t(x_1, x_2...x_N) = \Psi_t(x_1^r, x_2^r...x_N^r)\Psi_t(X^C).$$

Её эволюция запишется как

$$\Psi_t(x_1^r, x_2^r...x_N^r)\Psi_t(X^C) = \int \cdots \int \Psi_{t_0}(x_{0,1}^r, x_{0,2}^r...x_{0,N}^r) \prod_{i=1}^{N} \Big[\delta\Big(x_i^r - \big(x_{i,0} + s_i^{r,min}(x_{i,0}^r, t, t_0)\big) \exp \frac{i}{\hbar} S_i^r \, dx_{0,i}\Big] \times$$

$$\times \int \left[\delta\Big(X^C - \big(X_0^C + s^{C,min}(X_0^C(t,t_0)\big) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{1}{2}M\big(\dot{X}^{C,min}\big)^2 - V^C(X^{C,min})\right)dt\right)\right]\Psi_t(X_0^C)dX_0^C.$$

Рассмотрим теперь эволюцию волновой функции центра масс. Перейдём к мнимой переменной времени $t = -i\tau$.

$$\Psi_\tau(X^C) = \int \left[\delta\Big(X^C - \big(X_0^C + s^{C,min}(X_0^C(\tau,\tau_0)\big) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^{E,min}(X_0,\tau_0,\tau)\right)\right]\Psi_t(X_0^C)dX_0^C, \tag{1}$$

где $S^{E,min}(X_0,\tau_0,\tau)$ — минимальное эвклидово действие на путях, имеющих начала в точке x_0 в момент времени τ_0 и заканчивающихся в момент времени τ (конечная координата минимального пути при заданной энергии однозначно определяется начальной координатой, начальным и конечным моментами времени)

$$S^{E,min}(X_0,\tau_0,\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau}\left[\frac{1}{2}M\big(\dot{X}^{C,min}\big)^2 + V^C(X^{C,min})\right]d\tau.$$

Выберем в области начальных координат, где начальная волновая функция центра масс отлична от нуля, такую точку $X_0^{C,MIN}$, для которой действие на минимальном пути наименьшее по отношению ко всем другим начальным положениям центра масс в этой области, и перепишем выражение (1) в виде

$$\Psi_\tau(X^C) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S^{E,min}(X_0^{C,MIN},\tau_0,\tau)\right)\times$$

$$\times \int \left[\delta\Big(\Delta X^C - \big(\Delta X_0^C + s^{C,min}(\Delta X_0^C(\tau,\tau_0)\big) \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\Delta S^{E,min}(\Delta X_0,\tau_0,\tau)\right)\right]\Psi_t(X_0^C)d(\Delta X_0^C),$$

где

$$\Delta X_0^C = X_0^C - X_0^{C,MIN}.$$

$$\Delta S^{E,min}(\Delta X_0,\tau_0,\tau) = S^{E,min}(X_0,\tau_0,\tau) - S^{E,min}(X_0^{C,MIN},\tau_0,\tau)$$

Переходя к макроскопическому телу, положим $N \to \infty \Rightarrow M \to \infty$, откуда для любого конечного промежутка времени и $\Delta X_0^C \neq 0$, имеем $\Delta S^{E,min}(x_0,\tau_0,\tau)/\hbar \to \infty$. Тогда вклад в последний интеграл определяется единственной начальной координатой $X_0^{C,MIN}$, для которой $\Delta X_0^C = 0$. Таким образом закон квантовой эволюции в предлагаемом виде при переходе к макроскопическому масштабу приводит к локализации центра масс системы. а также устанавливает принцип наименьшего действия в качестве его динамического закона. Это означает полное соответствие микроскопического и классического описания механических систем. То есть динамика микрообъектов однозначно определяет классическую динамику.

В конце главы отметим, что попытка найти принципиальное отличие волновой функции макроскопического тела, как функции переменных всех составляющих его квантовых частиц от аналогичной волновой функции квантовой системы (состоящей из небольшого числа частиц) заведомо бесперспективна, уже хотя бы потому, что квантовые процессы сохраняются и макроскопическом теле, что влечёт за собой наличие суперпозиции состояний макроскопического тела. Речь может идти, только о превращении в дельта-функцию волновой функции центра масс (то есть исчезновение суперпозиции координатных состояний центра масс) при увеличении числа частиц системы, которая во всём остальном сохраняет свои квантовые свойства. Это свойство макроскопических тел является следствием чисто квантовой кинематики и не имеет никакого отношения к динамическим процессам, в том числе и приводящим к квантовому скачку при измерении.