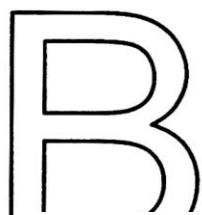


ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ



УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

В.А. Голенков, С.П. Яковлев,
С.А. Головин, С.С. Яковлев,
В.Д. Кухарь

ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Под редакцией
В.А. Голенкова, С.П. Яковлева

Рекомендовано в качестве учебника для бакалавров и магистров,
обучающихся по направлению

150400 «Технологические машины и оборудование».

Регистрационный номер рецензии 341 от 25 мая 2009 г. в соответствии
с приказом Минобрнауки России от 15 января 2007 г. № 10

Москва

Машиностроение
2009
УДК 539.374; 621.983

ББК 34.62я7
Т25

Рецензенты:

кафедра МТ-6 ГОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»,

доктор технических наук, профессор ГОУ ВПО
«Московский государственный технический университет “Станкин”»
Е.Н. Сосенушкин

Т25 Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов /
В.А. Голенков, С.П. Яковлев, С.А. Головин, С.С. Яковлев, В.Д.
Кухарь; под ред. В.А. Голенкова, С.П. Яковлева. – М.: Машиностроение, 2009. – 442 с.: ил.

ISBN 978-5-94275-469-3

Представлены базовые сведения о кристаллографическом и реальном строении металлов. Особое внимание уделено механизмам развития пластической деформации на основе теории дислокаций на микро- и макроскопическом уровнях. Показаны основные закономерности структурообразования при холодной и горячей обработке металлов давлением, а также проявления процессов упрочнения, разупрочнения, ползучести, сверхпластичности в металлах и сплавах.

Изложены вопросы теории напряженного и деформированного состояния металлов, методы анализа силовых и деформационных параметров процессов обработки металлов давлением. Значительное внимание уделено вопросам устойчивости пластического деформирования, рассмотрены принципы теории подобия и размерности применительно к процессам обработки металлов давлением. Приведены примеры решения технологических задач, а также задания для самоконтроля.

Предназначен для бакалавров техники и технологии направления 150400 «Технологические машины и оборудование» и направления 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование», для инженеров и магистров специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением», а также для научных работников и специалистов в области механики пластического формоизменения, обработки металлов давлением и технологии машиностроения. Может быть полезен инженерно-техническим и научным работникам.

УДК 539.374; 621.983
ББК 34.62я7

ISBN 978-5-94275-469-3

© «Издательство Машиностроение», 2009
© В.А. Голенков, С.П. Яковлев, С.А. Головин,
С.С. Яковлев, В.Д. Кухарь, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
Введение.....	10
Принятые обозначения	13
Часть I. Физическая природа деформирования металла	
при обработке давлением	14
Глава 1. Физические основы пластической деформации	14
1.1. Упругая и пластическая деформации.....	14
1.2. Строение металлов	21
1.3. Холодная пластическая деформация.....	37
1.4. Влияние нагрева на структуру и свойства металлов	56
1.5. Виды деформации при обработке металлов давлением.....	67
1.6. Температурно-временные условия деформирования.....	71
Задания для самоконтроля	82
Часть II. Основные соотношения механики деформирования	
металлов при обработке давлением	86
Глава 2. Напряженное состояние	86
2.1. Основные гипотезы	86
2.2. Вектор напряжения. Нормальные и касательные	
напряжения.....	87
2.3. Напряженное состояние в точке	88
2.4. Тензор напряжений. Формулы преобразования	
компонент напряжений при повороте осей	91
2.5. Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений	93
2.6. Круговая диаграмма Мора.....	96
2.7. Характеристика вида напряженного состояния.....	97
2.8. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор	
и девиатор	98
2.9. Инварианты девиатора напряжений.....	98
2.10. Интенсивность напряжений	99
2.11. Дифференциальные уравнения равновесия (движения)	100
2.12. Плоское деформированное и плоское напряженное	
состояния	104
Примеры решения задач	105
Задания для самоконтроля.....	108
Глава 3. Деформированное состояние	110
3.1. Описание движения сплошной среды.	
Переменные Лагранжа и Эйлера.....	110
3.2. Малые деформации. Зависимости между компонентами	

перемещений и деформаций.....	112
3.3. Тензорный характер деформации тела в точке	115
3.4. Условие совместности деформаций	117
3.5. Главные деформации. Инварианты тензора деформаций.....	120
3.6. Круговая диаграмма Мора для деформаций	122
3.7. Разложение тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор	123
3.8. Интенсивность деформаций	124
3.9. Скорость деформации	125
3.10. Тензор конечных деформаций	126
3.11. Логарифмические деформации	127
Примеры решения задач	128
Задания для самоконтроля.....	132
Глава 4. Теория пластичности	134
4.1. Зависимости между деформациями и напряжениями для упругого изотропного тела	134
4.2. Условие текучести (пластичности).....	136
4.3. Поведение материала за пределом текучести	142
4.4. Деформационная теория пластичности	145
4.5. Теория пластического течения.....	149
4.6. Ассоциированный закон течения	151
4.7. Сопротивление металла деформированию при холодной обработке давлением. Кривые истинных напряжений.....	152
4.8. Сопротивление металла деформированию при высоких температурах	159
4.9. Феноменологический критерий разрушения при пластической деформации	160
4.10. Теория пластичности ортотропного материала	167
Примеры решения задач	184
Задания для самоконтроля.....	191
Глава 5. Внешнее трение при обработке металлов давлением	194
5.1. Особенности пластического трения	194
5.2. Факторы, влияющие на величину сил контактного трения....	197
5.3. Законы трения. Граничные условия	199
5.4. Принцип наименьшего сопротивления.....	202
5.5. Неравномерность деформаций и дополнительные напряжения.....	204
Задания для самоконтроля.....	207

Часть III. Теоретические методы анализа процессов	
обработки металлов давлением	208
Глава 6. Различные подходы к исследованию пластического	
формоизменения. Общее представление о методах анализа	208
6.1. Метод осредненных напряжений.....	211
Примеры решения задач	221
Задания для самоконтроля.....	227
6.2. Приближенный метод совместного решения	
дифференциальных уравнений равновесия с условием	
текучности.....	228
Задания для самоконтроля.....	232
6.3. Метод сопротивления материалов пластическим	
деформациям	233
Задания для самоконтроля.....	238
6.4. Метод линий скольжения (характеристик).....	238
Примеры решения задач	278
Задания для самоконтроля.....	283
6.5. Метод баланса работ (мощности).....	284
Задания для самоконтроля.....	292
6.6. Экстремальные принципы жесткопластического тела.	
Верхние и нижние оценки силы деформирования	292
Примеры использования МКЭ для анализа процессов	
обработки давлением.....	321
Примеры использования метода верхних оценок сил	
в процессах обработки металлов давлением	327
Задания для самоконтроля	334
Глава 7. Медленное изотермическое деформирование	
при кратковременной ползучести	336
7.1. Уравнения механического состояния изотропного	
материала. Связь скоростей деформации ползучести	
с напряжениями.....	337
7.2. Определяющие соотношения для анизотропного	
материала.....	341
7.3. Феноменологические модели разрушения.....	342
7.4. Свободное деформирование длинной листовой	
заготовки из анизотропного материала	346
Задания для самоконтроля.....	352

Часть IV. Основы экспериментальных исследований	
обработки металлов давлением	354
Глава 8. Теоретические основы экспериментальных исследований пластического формоизменения	354
8.1. Теория подобия и моделирование процессов обработки металлов давлением	354
8.2. Теория размерностей.....	373
Задания для самоконтроля.....	378
Глава 9. Экспериментальные методы исследования деформированного и напряженного состояния	380
9.1. Метод делительных сеток.....	380
9.2. Метод визиопластичности.....	395
9.3. Метод измерения твердости.....	397
Задания для самоконтроля.....	401
Глава 10. Устойчивость процессов пластического формоизменения.....	402
10.1. Локализация деформаций (шейкообразование) в процессах пластического деформирования листовых материалов.....	403
10.2. Складкообразование в процессах пластического формоизменения листового материала	418
10.3. Устойчивость пластины и стержня	421
10.4. Устойчивость цилиндрической заготовки.....	428
10.5. Устойчивость заготовки при формовке сферических деталей без фланца	432
Задания для самоконтроля.....	436
Литература	438

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из главных задач современной промышленности является повышение эффективности производства, качества, надежности и долговечности изделий. Эту задачу можно решить путем использования прогрессивных технологических процессов, в частности обработки металлов давлением (ОМД). Научной базой ОМД является теория обработки металлов давлением (ТОМД).

Первый учебник по ТОМД был написан в 1947 г. С.И. Губкиным. Этот учебник, как и другие, написанные П.Г. Кирилловым, В.С. Смирновым, Н.П. Громовым, Н.А. Чиченовым, А.Б. Кудриным, П.И. Полухиным, имел металлургическую направленность. Между тем ряд ученых (Е.П. Унксов, А.Д. Томленов, И.Я. Тарновский, М.В. Сторожев, Е.А. Попов и др.) внесли значительный вклад в ТОМД применительно к машиностроению. Данное обстоятельство позволило создать учебник по ТОМД для машиностроительных специальностей. Вышло четыре его издания.

Однако следует заметить, что студенты с большим трудом усваивают содержание этой дисциплины, что связано с ее насыщенностью фактическим материалом, сложностью привлеченного математического аппарата, абстрактностью феноменологического подхода и практическим отсутствием содержательного пояснения для чего этот материал, как им пользоваться, что он позволяет установить при анализе процессов обработки металлов давлением. В то же время усвоение ТОМД в значительной мере определяет уровень подготовки специалиста.

За прошедшие годы были разработаны новые технологические процессы ОМД, для изготовления деталей ответственного назначения стали использоваться высокопрочные, малопластичные металлы и сплавы, изменились требования к качеству получаемых изделий: их прочности, точности, чистоте поверхности. Возникла необходимость повышать пластичность материала путем изменения схемы напряженного и деформированного состояния, степени и скорости деформации, температуры обработки.

Современная наука значительно продвинулась в установлении механизмов пластической деформации, определении зависимости структуры, механических и физических свойств металлов от степени деформации, а также зависимости сопротивления деформации и пластичности металлов от их химического состава, температуры. Получила дальнейшее развитие теория изотермической штамповки в

режиме ползучести и сверхпластичности, обработки давлением анизотропных материалов.

Все большее внимание уделяется в последнее время вопросам потери устойчивости – локализации деформации (шейкообразованию) и складкообразованию в процессах пластического деформирования листового материала.

Дальнейшее развитие получили последние достижения в вопросах исследования физики и механики пластической деформации, основанные на теории пластичности и ползучести.

При обработке металлов давлением не только изменяется форма штампуемой заготовки, но и формируются механические свойства. Нужно уметь рассчитать силовые режимы операции, необходимую мощность деформации, оценить нагрузки на инструмент, выбрать оборудование, установить оптимальные технологические режимы обработки (степень и скорость деформирования, температуру обработки, предельные возможности деформирования, геометрию инструмента). При этом нужно получить требуемые механические свойства заготовки, выявить в очаге деформации области повышенной опасности разрушения, обеспечить требуемые условия эксплуатации деталей. И будущие специалисты должны уметь решать эти вопросы.

При подготовке учебника был проведен тщательный отбор накопленного материала, исключены второстепенные вопросы. Принцип написания – от известного к неизвестному, от простого к сложному. Авторы стремились представить ТОМД как стройную науку, имеющую свою логику, а также старались подчеркнуть тесную связь теории с практикой и указать пути использования теоретических знаний для совершенствования технологии в ОМД.

Учебник написан с учетом многолетнего опыта преподавания курса «Теория обработки металлов давлением» в МГТУ им. Н.Э. Баумана, Тульском государственном университете и Орловском государственном техническом университете.

Авторы выражают глубокую благодарность и признательность рецензентам – кафедре «Технологии обработки давлением» (МТ-6) МГТУ им. Н.Э. Баумана, руководимой членом-корреспондентом Российской академии наук, д-ром техн. наук, проф. А.М. Дмитриевым,

д-ру техн. наук, проф. Е.Н. Сосенушкину, заведующему кафедрой «Системы пластического деформирования» МГТУ «Станкин», а

также канд. техн. наук, проф. Н.Ф. Шпунькину, заведующему кафедрой «Кузовостроение и обработка металлов давлением» МГТУ «МАМИ», и д-ру техн. наук, проф. Ю.Г. Калпину.

Учебник предназначен для бакалавров, инженеров и магистров при подготовке их по направлениям, связанным с ОМД машиностроительных специальностей. Он может быть полезен для металлургических специальностей.

Рекомендуются следующие материалы для изучения:

при подготовке бакалавров: глава 1 – разделы 1.1 – 1.5; глава 2; глава 3 – разделы 3.2 – 3.11; глава 4 – разделы 4.1 – 4.8; глава 5; глава 6; глава 9;

при подготовке инженеров (специалистов): глава 1 – раздел 1.6; глава 2 – раздел 2.4; глава 3 – разделы 3.1, 3.11; глава 4 – раздел 4.9; глава 6 – разделы 6.4, 6.6; глава 8; глава 9 – разделы 9.2, 9.3;

при подготовке магистров: глава 1 – раздел 1.6; глава 3 – разделы 3.1, 3.3, 3.10, 3.11; глава 4 – разделы 4.3, 4.9, 4.10; глава 6 – разделы 6.4, 6.6; глава 7; глава 8; глава 9; глава 10.

Изложенные в учебнике материалы отвечают требованиям стандартов третьего поколения по указанным направлениям, специальности и уровням подготовки.

ВВЕДЕНИЕ

Теория обработки металлов давлением – прикладная инженерная дисциплина, разрабатывающая общие основы рационального построения и анализа технологии процессов обработки металлов давлением. Основной базой для теории обработки металлов давлением (ТОМД) является наука о пластической деформации металлов, которая развивается в трех направлениях: физическом, физико-химическом и механико-математическом.

Физическое направление ТОМД теоретически и экспериментально рассматривает механизм пластической деформации с учетом анизотропии механических свойств материала заготовки, обусловленной кристаллическим строением металлов. При этом исследуется влияние на процесс пластической деформации температуры, скорости и степени деформации, напряженного состояния, внешнего трения.

Физико-химическое направление изучает связь химического состава и фазового состояния металла с процессом пластической деформации. Химический состав и фазовое состояние оказывает большое влияние на пластичность и сопротивление деформации. В процессе пластической деформации тела изменяются структура и фазовый состав, а также происходят химические превращения.

Механико-математическое направление разрабатывает вопросы напряженного и деформированного состояния, величины и распределение напряжений и деформаций в пластически деформированном теле, анализируются условие перехода материала тела в пластическое состояние и его разрушение. Изучаются силовые режимы, энергетические затраты на пластическую деформацию. Рассматриваются вопросы формирования механических свойств обрабатываемой заготовки. Основой этого направления является теория упругости, пластичности и ползучести.

Значительный вклад в развитие физики и физико-химии пластической деформации внесли отечественные ученые В.Д. Кузнецов, Н.С. Курнаков, Н.Н. Давиденко, А.А. Бочвар, С.И. Губкин.

В области механики пластической деформации ведущая роль принадлежит российским ученым С.А. Христиановичу, А.Ю. Ишлинскому, А.А. Ильюшину, В.В. Соколову, Л.М. Качанову и др.

В развитии теории обработки давлением можно выделить четыре характерных периода. Первый период (1915 – 1945 гг.) – становление ТОМД как самостоятельной дисциплины. Были решены простейшие задачи на основе общих уравнений теории пластичности по определению силы наиболее распространенных операций ОМД (С.И. Губкин, Г. Закс, Э. Зибель, Н.С. Петров, Л. Прандтль, Е.П. Унксов, А.И. Целиков).

Второй период (1945 – 1960 гг.) – развитие общих приближенных методов решения задач, связанных с определением сил деформации, нагрузок на инструмент и конечного формоизменения. Были разработаны инженерный метод анализа процессов ОМД (С.И. Губкин,

Г. Закс, Э. Зибель, И.М. Павлов, Е.А. Попов, В.С. Смирнов, М.В. Сторожев, Е.П. Унксов), метод линий скольжения (Г. Генки, Х. Гейрингер, В. Прагер, И.П. Ренне, В.В. Соколовский, А.Д. Томленов, Р. Хилл, Л.А. Шофман), энергетический метод (О.А. Ганаго, В. Джонсон, В.Л. Колмогоров, А.А. Поздеев, И.Я. Тарновский, Э. Томсен), метод сопротивления металлов пластическим деформациям (Г.А. Смирнов-Аляев), визиопластический (Ю.Н. Алексеев, Э. Томсен).

Третий период (1960 – 1975 гг.) – развитие методов теоретического анализа процессов ОМД численными методами с применением ЭВМ. В этот период, во-первых, благодаря достижениям вычислительной техники, а также физики металлов, металловедения, физико-химической механики металлов произошло значительное сближение теоретического (феноменологического) и физического подходов, создались предпосылки для построения и анализа моделей процессов ОМД, более полно учитывающих реальные условия деформации, и решения новых задач по предельному формоизменению. Во-вторых, усилиями ведущих ученых в нашей стране были созданы научные школы, в частности: московская (А.А. Ильюшин, Н.Н. Малинин, Е.А. Попов, М.В. Сторожев, А.Д. Томленов, Е.П. Унксов, Л.А. Шофман, В.Т. Мещерин, И.А. Норицын), ленинградская (В.С. Смирнов, Г.А. Смирнов-Аляев), уральская (О.А. Ганаго, В.Л. Колмогоров,

А.А. Поздеев, А.А. Богатов, И.Я. Тарновский), минская (Е.М. Макушок, В.П. Северденко, В.М. Сегал), тульская (И.П. Ренне, Л.А. Толоконников, С.П. Яковлев), харьковская (Ю.Н. Алексеев, Е.Ф. Шарапов, В.А. Евстратов), ростовская (А.З. Журавлев), орловская (В.А. Голенков).

Четвертый период (с 1975 г.) – разработка экспериментально-аналитических методов и окончательное объединение феноменологического и физического подходов. В этот период заслуживают внимания работы Г.Д. Деся, Е.И. Исаченкова, А.Н. Леванова, В.Л. Кол-могорова, П.И. Полухина, Г.Я. Гуна, А.М. Галкина, Г.А. Смирнова-Аляева, В.И. Уральского, Н.А. Чиченова, А.Б. Кудрина. В них теоретический подход базируется на данных эксперимента, их статистическом анализе, использовании новых представлений о контактном трении и разрушении материала, роли температуры, скорости и механической схемы деформации.

Значительный вклад в развитие теории обработки металлов давлением внесли зарубежные ученые: Дж. Александер, Дж. Бишоп, П. Бриджмен, В. Бэкофен, О. Гофман, В. Джонсон, Г. Закс, Ш. Кобаяши, Х. Кудо, А. Надаи, Х. Пью, Э. Томсен, Р. Хилл, К. Янг и другие. Многие их труды переведены на русский язык.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

E – модуль упругости I рода (Юнга);
 G – модуль упругости II рода (сдвига);
 \bar{K} – объемный модуль упругости;
 ν – коэффициент Пуассона;
 $\sigma_{0,2}, \sigma_T$ – условный и истинный предел текучести;
 σ_g – временное сопротивление разрыву;
 \bar{p}_v – вектор полного напряжения;
 X_v, Y_v, Z_v – составляющие вектора полного напряжения на оси координат x, y, z .
 σ_i, T – интенсивность нормальных и касательных напряжений;
 σ_v, τ_v – нормальное и касательное напряжения;
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – компоненты тензора напряжений;
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные компоненты напряжений;
 x_i, η_j – Эйлера и Лагранжевы координаты;
 s_{ij} – компоненты девиатора напряжений;
 u_x, u_y, u_z – проекции перемещения на направление осей координат;
 $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – относительные линейные и угловые деформации;
 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – проекции изменения отрезка волокна ρ ;
 ρ – размер волокна;
 $e_1, e_2, e_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – линейные и угловые главные деформации;
 Γ, e_i – интенсивности сдвиговых и линейных деформаций;
 $\dot{e}_x, \dot{e}_y, \dot{e}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}$ – компоненты линейных и угловых скоростей и деформаций;
 $\dot{\Gamma} = \dot{H}$ и \dot{e}_i – интенсивности скоростей сдвиговых и линейных деформаций;
 $D_{\bar{e}}, D_{\sigma}$ – девиаторы деформаций и напряжений;
 $A_p (A_q)$ – работа пластической деформации;
 A_g – работа внешних сил;
 N_g, N_q – мощности внешних и внутренних сил;

Остальные обозначения указаны в тексте.

$\delta, \bar{\psi}, e$ – относительное удлинение, относительное сужение площади поперечного сечения образца, логарифмическая деформация;
 F, G, H, L, M, N – параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии;
 $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}, \tau_{sxy}, \tau_{syx}, \tau_{syz}$ – величины сопротивления материала пластическому деформированию при растяжении и сдвиге по отношению к главным осям анизотропии x, y, z ;
 R_{β} – коэффициент анизотропии, который представляет собой отношение логарифмических деформаций по ширине и толщине образца, вырезанного под углом β к направлению прокатки при испытании его на растяжение;
 e_{inp}, A_{np} – интенсивность деформации и удельная работа при разрушении;
 Ψ_p – степень использования запаса пластичности;
 Ω – повреждаемость материала;
 $\sigma_{s\beta}$ – сопротивление материала пластическому деформированию в различных направлениях β по отношению к направлению прокатки;
 τ_{sxz} – сопротивление материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к осям x и z ;
 C – характеристика анизотропии тела в условиях плоской деформации;
 μ – коэффициент трения в законе Амонтона – Кулона;
 v_i, v'_i – действительное и кинематически возможное поле скоростей;
 \mathcal{E}_q, N_q – полная энергия и мощность деформированного тела;
 α_1 – параметр штрафа;
 λ_p – множители Лагранжа;
 α_2 – коэффициент в условии пластичности сжимаемости материала;
 q – удельная сила деформирования;
 p^*, q^*, N^* – верхние оценки силы, удельной силы, мощности.

Часть I. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАВЛЕНИЕМ

Глава 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

1.1. Упругая и пластическая деформации

Основным объектом при обработке металлов давлением являются металлические *твердые* тела. Металлы и сплавы на их основе широко используются для изготовления всевозможных изделий – массивных конструкций и сооружений, крупных или же миниатюрных деталей и узлов машин и механизмов. Эти материалы способны устойчиво сохранять свою форму и размеры, а также противодействовать внешним условиям, стремящимся вызвать их изменения. Однако такими же признаками формально могут обладать «замороженные» жидкости с высокой вязкостью, получаемые в результате охлаждения до низких температур (стекло, эбонит, смола), или аморфные металлические твердые тела. Поэтому по упругим свойствам твердым следует считать такое состояние вещества, для которого модуль сдвига отличен от нуля (у жидкости он имеет нулевое значение). Твердое состояние характеризуется тем, что возникновение необратимой (пластической) деформации требует достижения некоторого порогового (критического) напряжения; в случае аморфного или же «замороженного» жидкого состояния критическое напряжение необратимой деформации равно нулю.

Упругая деформация. Упругая деформация является начальной стадией любого процесса деформирования, во многом определяющей ход последующего пластического течения материала. Характеристиками материалов в упругой области нагружения являются *упругие константы* (для монокристаллов) и *модули упругости* – коэффициенты пропорциональности между напряжением и деформацией в законе Гука для соответствующего напряженного

состояния. Они отражают сопротивление металла упругому деформированию.

Природа *истинных* значений модуля упругости определяется силами межатомного взаимодействия атомов в кристаллической решетке, поэтому модуль упругости оказывается температурно-зависимой характеристикой. При чисто упругой деформации в поле внешних напряжений атомы незначительно смещаются от своего равновесного положения и после снятия нагрузки возвращаются в исходное состояние.

Коэффициентами пропорциональности, связывающими напряжение и деформации, являются: E – модуль Юнга при одноосном растяжении; G – модуль сдвига; \bar{K} – объемный модуль упругости.

Характеристики упругости (константы материала) связаны между собой соотношениями Ляме (ν – коэффициент Пуассона):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \bar{K} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.1)$$

Пластическая деформация. Пластической деформацией называют необратимую деформацию материала, которая сохраняется после снятия нагрузки. Остаточная деформация может проявляться на микроуровне за счет движения дислокаций, на мезоуровне – за счет перестройки и разворота фрагментов дислокационной структуры и на макроуровне в виде остаточного формоизменения.

В основу *физической механики* деформируемого твердого тела положена концепция структурных уровней деформации твердых тел¹. Ее суть составляют следующие положения:

1. Деформируемое твердое тело есть многоуровневая система, в которой пластическое течение самосогласованно развивается как

¹ Панин В.Е. Основы физической мезомеханики // Физ. мезомеханика. 1998. I. – С. 5 – 22.

последовательная эволюция потери сдвиговой устойчивости на различных масштабных уровнях: микро, мезо и макро (рис. 1.1).

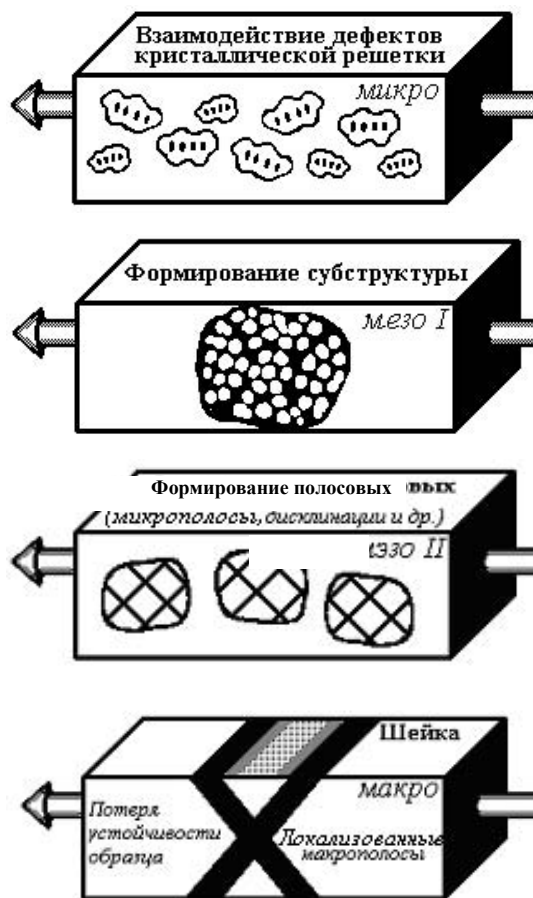


Рис. 1.1. Схема масштабных уровней потери сдвиговой устойчивости в деформируемом твердом теле: *a* – микро; *б* – мезо I; *в* – мезо II; *г* – макро (В.Е. Панин)

2. Носителями пластического течения на мезоуровне являются трехмерные структурные элементы (субзерна, ячейки дислокационной субструктуры, частицы второй фазы, поры и др.), движение которых характеризуется схемой «сдвиг+поворот».

Закономерности пластического течения связаны с фрагментацией деформируемого материала.

3. Разрушение есть завершающая стадия фрагментации твердого тела, когда она локализуется на макромасштабном уровне.

4. Механизмы пластического течения и соответствующие стадии кривой «нап-

ряжение – деформация» подчиняются закону подобия (принцип масштабной инвариантности).

Механические эффекты и характеристики пластической деформации. Условные и истинные диаграммы деформации при растяжении, сжатии, изгибе и кручении являются основными источниками получения сведений о прочностных и пластических свойствах металлических материалов (рис. 1.2).

На условных диаграммах деформации нагрузку P относят к начальной площади поперечного сечения образца F_0 , а соответствующие условные напряжения определяют как $\sigma = P/F_0$. К

основным характеристикам прочности относят предел пропорциональности $\sigma_{п.ц}$, предел упругости σ_y , условный $\sigma_{0,2}$ или истинный σ_T предел текучести и временное сопротивление разрыву (или условный предел прочности) σ_σ . При кручении эти характеристики выражаются не через нормальные, а через касательные напряжения $\tau_{\max} = M_{кр}/W$ ($M_{кр}$ – крутящий момент, W – момент сопротивления).



Рис. 1.2. Общий вид условной $\sigma - \varepsilon$ и истинной $S - e$ диаграмм деформации для низкоуглеродистой стали

Для описания деформированного состояния используются такие понятия, как относительная линейная деформация ε , сдвиговая деформация γ , относительное изменение объема $\Delta V/V_0$, относительные поперечные деформации ε' и ε'' . Коэффициент Пуассона $\nu = -(\varepsilon'/\varepsilon)$ определяет отношение поперечной деформации к продольной, взятое с обратным знаком (для металлов $\nu \cong 0,3$). Сдвиговая деформация γ связана с относительным изменением углов элементарных объемов тела (куба) между направлениями, которые были параллельными до деформации. Относительный сдвиг равен тангенсу угла сдвига или самому углу γ при малых деформациях, измеренному в радианах. При *простом сдвиге* расстояние между перемещающимися плоскостями остается постоянным, т.е. отсутствует сжатие или удлинение куба, при *чистом*

сдвиге может возникнуть симметричное смещение граней, соответственно сдвиговая деформация составляет $1/2\gamma$.

При описании процессов формоизменения элементарных объемов используются также понятия поверхностной и объемной деформации, характеризующие изменения площади (участка поверхности) или всего объема. Упругая деформация вызывает обратимое изменение объема: при всестороннем сжатии давлением 1000 МПа стали – 0,6 %, меди – 1,3 %.

За пределами упругой области при нагружении понятие модуля упругости теряет смысл и используется понятие *коэффициента упрочнения* $d\sigma/de$ для каждой стадии нагружения. Относительные деформации $\varepsilon(\gamma)$ и относительные напряжения $\sigma(\tau)$ характеризуют процесс нагружения на стадии равномерного удлинения образца. Начиная с некоторого момента деформация локализуется на узком участке длины образца (утонение, шейка), вызывая значительную неоднородность деформации по длине образца. Поэтому при определении *истинной деформации* e учитывается не начальная длина образца, а переменная – увеличивающаяся в процессе деформации:

$$e = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0}. \quad (1.2)$$

В отличие от условной только истинная деформация отражает физическую природу процесса деформирования и прежде всего при значительных степенях деформации ($>10\%$). *Принцип аддитивности деформаций* (суммарная деформация равна сумме деформаций на промежуточных этапах деформирования) выполняется только для истинных деформаций. Широкое использование σ_e в качестве характеристики прочности обусловлено в большей мере простотой ее определения при механических испытаниях, а не ее информационной ценностью как критерия разрушения материала.

Истинное напряжение $S = P/F_k$ – это нагрузка, отнесенная к поперечному сечению образца в заданный момент нагружения. За точкой b истинное сопротивление деформации S продолжает расти, а *диаграмма истинных напряжений* $S - e$ отражает напряжение *истинного сопротивления разрыву* $S = P_k/F_k$ – отношение силы в

момент разрушения к минимальной площади поперечного сечения в месте разрыва.

Ряд особенностей диаграммы деформации при статическом нагружении связан с проявлением эффектов пластической деформации (рис. 1.3).

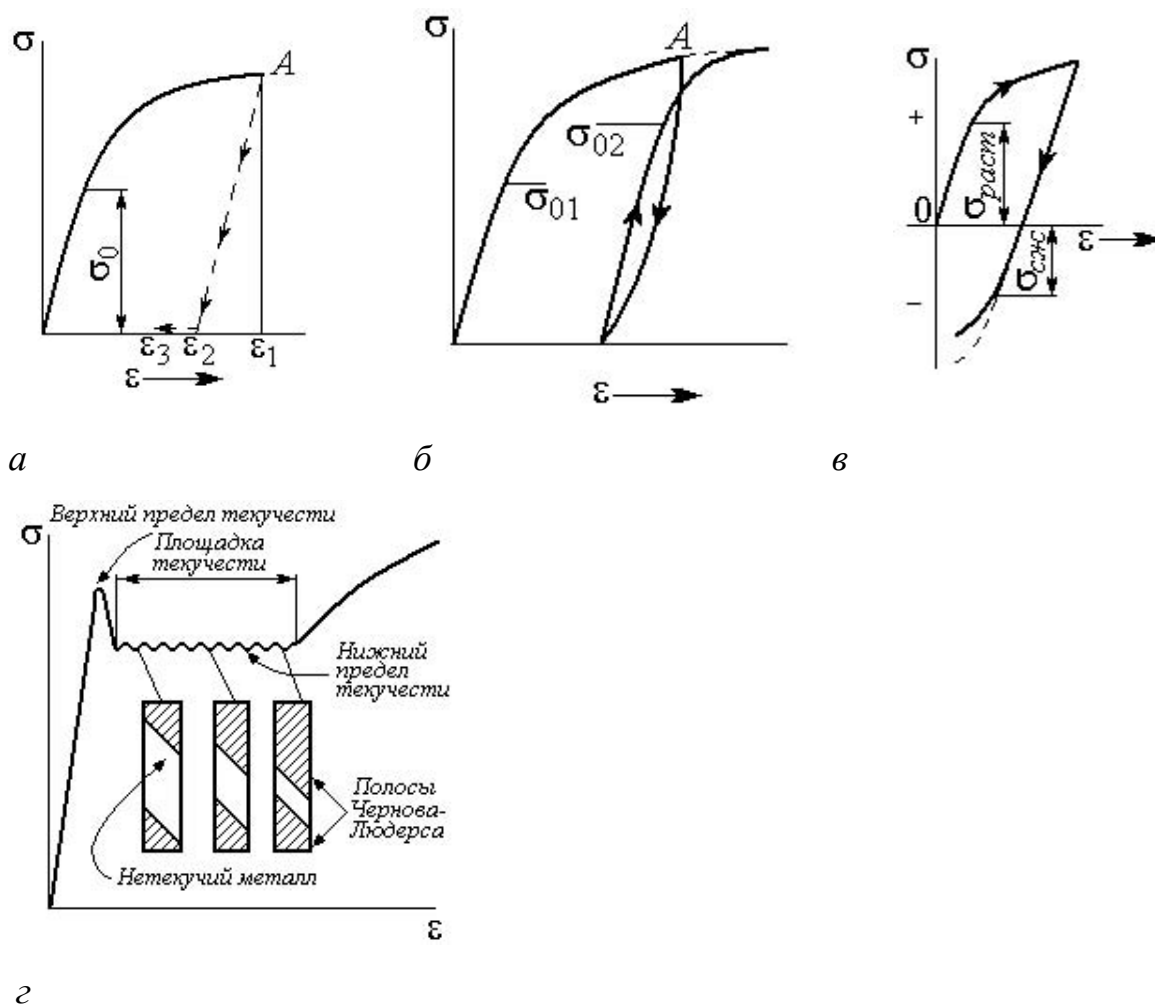


Рис. 1.3. Петля механического гистерезиса (а), эффекты наклепа (б), Баушингера (в) и зуб текучести при нагружении (г) (на примере технически чистого железа)

Петля механического гистерезиса означает, что деформация не является однозначной функцией напряжения, а кривые нагружения и снятия нагрузки не совпадают (рис. 1.3, а), что есть следствие невыполнения линейного закона Гука, так как модуль упругости в течение цикла $d\sigma/d\epsilon$ зависит от деформации. Здесь $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ – обратимая упругая деформация, $(\epsilon_2 - \epsilon_3)$ – неупругая деформация, восстанавливаемая во времени.

Эффект наклепа (упрочнения) проявляется после снятия нагрузки, при вторичном нагружении в пределах одной схемы напряженного состояния напряжение сопротивления текучести возрастает (рис. 1.3, б – $\sigma_{02} > \sigma_{01}$) и тем больше, чем выше напряжение предварительного деформирования.

Эффект Баушингера (1886 г.) связан с переменной схемы нагружения – падение напряжения течения при смене растяжения $\sigma_{раст}$ сжатием $\sigma_{сж}$ и наоборот (рис. 1.3, в); за меру эффекта принимают такие характеристики, как $(\sigma_{раст} - \sigma_{сж})$, $(\sigma_{раст} / \sigma_{сж})$ и др. Это означает, что в холоднодеформированных кристаллах движение дислокаций в обратном направлении при смене знака напряжения облегчено. Наибольший эффект достигается на стадии легкого скольжения ГПУ- и ГЦК-кристаллов (при перемене знака нагружения дислокации могут возвращаться к источникам и аннигилировать).

Зуб текучести с выраженными верхним и нижним пределами текучести и площадкой текучести (рис. 1.3, г) обнаружен на моно- и поликристаллах железа, в твердых растворах внедрения Cd-N, Zn-N, β -латунь-N, в твердых растворах замещения Cu – 30% Zn, Cu – 10% In, в полупроводниковых материалах и др. Деформация на площадке текучести происходит путем распространения пластических волн с образованием *полос Чернова – Людерса*. Поперечное сечение вблизи полос уменьшается, полосы образуются в нескольких местах и расширяются до тех пор, пока они не встретятся. После того как весь образец покрывается полосами Чернова – Людерса и каждый участок образца продеформирован на заданную величину, начинается обычный процесс деформационного упрочнения. С повышением температуры зуб текучести на диаграммах деформации постепенно исчезает, и кривые в определенном интервале температур приобретают пилообразный профиль (сплавы Fe-C, Al-Mg). Это явление динамической неустойчивости называют *эффектом Портевена – Ле Шателье*. Оно связано с уменьшением коэффициента упрочнения при уменьшении скорости деформирования или при повышении температуры.

Большинство структурно чувствительных свойств материалов (прочность, пластичность) являются функциями трех факторов: *материала* (состав, структура, обработка), *вида напряженного*

состояния (форма, размеры, условия закрепления) и *условий внешнего воздействия* (температура, уровень нагружения, внешняя среда и поля – облучение, магнитное поле и т.п.). Материал в конструкциях должен обеспечить *прочность, надежность и необходимый ресурс работы*.

Обобщенные диаграммы Эшби дают достаточно полное представление о свойствах широкого круга материалов, включая технические сплавы и композиты [8].

Выбор материала и его характеристик для обеспечения надежной работы реальной инженерной конструкции является сложной конструкторской и технологической задачей. Пути повышения удельной прочности связаны с обоснованным выбором оптимальных соотношений прочностных, упругих характеристик материала и его веса. Диаграммы Эшби позволяют сделать оценку качества материала применительно к реальным условиям работы изделия.

1.2. Строение металлов

Общие понятия о структуре металлических материалов. Обработке давлением преимущественно подвергаются *кристаллические* твердые тела – металлы и сплавы на их основе, сохраняющие приданную им форму до определенных температур. Металлическое тело может состоять из одного кристалла (*монокристалл*) или из множества кристаллов (*поликристаллы*). В зависимости от масштаба структурных составляющих и применяемых методов их изучения физическое металловедение использует такие понятия, как кристаллическая структура, микро- и макроструктура.

Кристаллическая структура. Металлы относятся к природным веществам, способным иметь в твердом состоянии кристаллическое строение. Термин «кристаллическое строение» включает два понятия – совершенной (или идеальной) и несовершенной (или дефектной) структуры. В реальных твердых металлах имеется большое количество дефектов кристаллического строения различного типа, обусловленных отклонениями от правильного расположения атомов. Теория несовершенств кристаллического строения и комплекс структурных и экспериментальных методов исследований дают возможность выявить физическую природу многих практически

важных явлений, таких как пластическая деформация и упрочнение, диффузия и плавление, возврат и рекристаллизация, закалка и отпуск и многих других.

Микроструктура. В основе микроструктурного анализа лежат методы изучения структурных составляющих. Металлы и их сплавы характеризуются *составом* (% по массе или атомные), *фазовым состоянием*¹ и *структурой*. Металлографический анализ дает возможность определить размеры, форму и ориентировку кристаллов (*зерен*), их распределение и относительные объемные количества, форму инородных включений и пустот, внутризеренное строение (блоки, ячейки), несовершенства кристаллического строения (линии, полосы и пачки скольжения, двойникование, дислокационные сетки и скопления) и т.д.

Макроструктура. Структурный анализ макроструктуры выполняется с помощью визуального осмотра или при небольших увеличениях с помощью лупы. Этот весьма информативный метод исследования позволяет выявить характер излома, химическую неоднородность, размеры и форму крупных кристаллов, волокнистость, наличие пор и трещин и другие дефекты.

Кристаллическое строение металлов. В 1848 г. О. Браве показал, что все многообразие кристаллических структур в зависимости от их симметричности можно описать с помощью 14 типов решеток, характеризующихся различными *элементарными ячейками*. Ячейки Браве отличаются друг от друга соотношением параметров, углами и месторасположением материальных частиц.

Под параметрами понимаются угловые соотношения между ребрами (или гранями) элементарной ячейки α , β , γ и размерное соответствие ребер (или периодов решетки) a , b , c (рис. 1.4). Элементарную ячейку ориентируют относительно выбранной

¹ Согласно определению Гиббса (1875 г.), фаза – однородная по химическому составу и свойствам часть системы (металла или сплава), отделенная от других фаз границами раздела, компоненты – химические элементы, число которых достаточно для определения всех фаз системы.

системы координат так, чтобы ее ребра совпадали с координатными осями, а длины ребер были соизмеримы с масштабными отрезками. Размер элементарной ячейки кристаллической решетки называют *периодом решетки*. Любую кристаллическую решетку можно воспроизвести последовательными перемещениями (трансляциями) элементарной кристаллической ячейки. Совокупность координат узлов, принадлежащих элементарной ячейке, называют *базисом* ячейки.

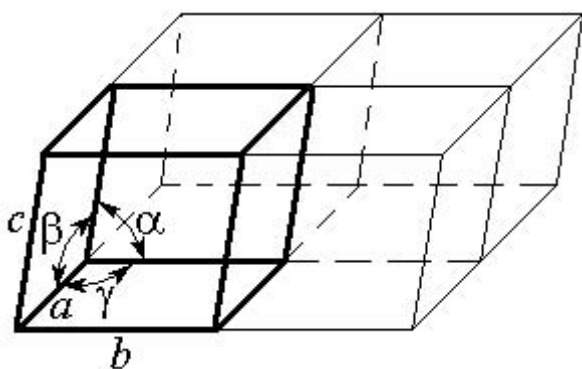


Рис. 1.4. Пространственная решетка и ее элементарная ячейка

Для металлов и сплавов наиболее распространенными являются следующие системы упаковки атомов в кристаллической ячейке: объемноцентрированная кубическая (ОЦК), гранецентрированная кубическая (ГЦК) и гексагональная плотноупакованная (ГП) решетки (рис. 1.5).

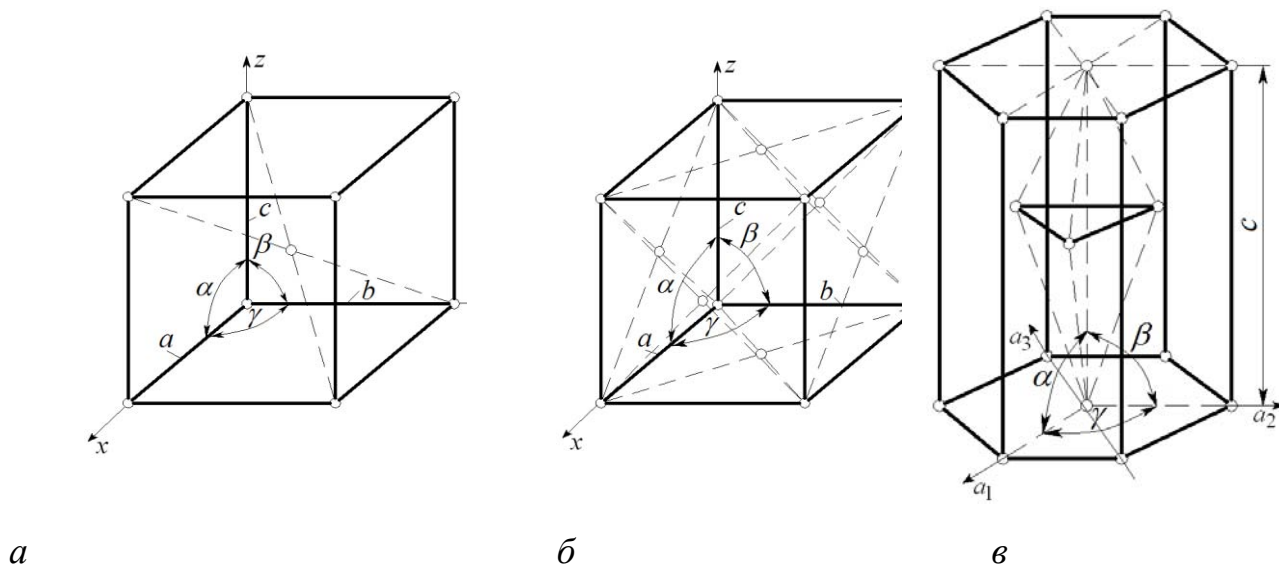


Рис. 1.5. Элементарные ячейки структур с ОЦК- (а), ГЦК- (б) и ГП- (в) решетками

Наиболее высокой симметрией обладают кристаллы *кубической* системы (рис. 1.5, а и б). Элементарной ячейкой является куб, его описание дается в обычной декартовой системе координат ($a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$). Для гексагональных плотноупакованных кристаллических решеток используется четырехразмерная индексация решетки (рис. 1.5, в), базирующаяся на координатной системе с четырьмя осями: три базовые координатные оси a_1, a_2, a_3 , расположенные под углом 120° относительно друг друга, и четвертая, вертикальная ось c , расположенная в центре ячейки.

Кристаллографические индексы плоскостей и направлений. Начало прямоугольных координат в кубической кристаллической ячейке выбирают в вершине ячейки, располагая ось y вправо, ось z — вверх (рис. 1.5, а и б). Обратные направления противоположны описанным. Координаты узлов (атомных позиций) выражают с

использованием *единичных* долей трансляции (расстояний) вдоль осей x , y и z и обозначают в двойных квадратных скобках. Например, координаты атомов в восьми угловых позициях объемноцентрированной кубической решетки составляют:

[[0,0,0]]	[[1,0,0]]	[[0,1,0]]	[[0,0,1]]
[[1,1,1]]	[[1,1,0]]	[[1,0,1]]	[[0,1,1]]

Индексы могут быть дробными. Например, положение центрального атома в ОЦК-решетке отвечает координатам $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Аналогично могут быть заданы другие атомные позиции.

Для аналитической записи взаимного расположения плоскостей и направлений кристалла в пространстве применяют кристаллографические символы (*индексы Миллера*). Под *индексами плоскости* понимают три целых взаимно простых числа h, k, l , обратно пропорциональных отрезкам, отсекаемым этой плоскостью на координатных осях. Отрезки измеряются в параметрах или их долях и являются числами безразмерными. Символ плоскости изображается в круглых скобках $-(hkl)$. Если плоскость параллельна какой-либо координатной оси, то соответствующий индекс равен нулю. Порядок нахождения индексов Миллера в кубической решетке следующий. Находят отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях в параметрах решетки a, b, c , например, пусть отрезки составляют $1/4, 1/2, 3/4$. Берут величины, обратные отрезкам,

и определяют их отношения: $4:2:4/3$. Полученные отношения приводят к отношению трех целых взаимно простых чисел: $12:6:4=6:3:2$. Индекс плоскости будет (632) . На рис. 1.6 приведены характерные для кубических решеток плоскости. Для нахождения индексов Миллера любой кристаллографической плоскости или грани в ГП-решетке используют четырехосную систему координат (см. рис. 1.5, в). Символ плоскости запишется как $(hkil)$. Положение базисной плоскости вверху ГП-решетки параллельно осям a_1 , a_2 и a_3 , а отрезки этой плоскости могут быть бесконечно большими: $a_1 = \infty$, $a_2 = \infty$ и $a_3 = \infty$. Ось c является общей, так как базисная плоскость пересекает ее. Обратные значения указанных отрезков являются согласно правилу Миллера – Браве индексами для ГП базисной плоскости $h=0$, $k=0$, $i=0$ и $l=1$, и она обозначается как (0001) . На рис. 1.7 показаны некоторые плоскости в гексагональной ячейке.

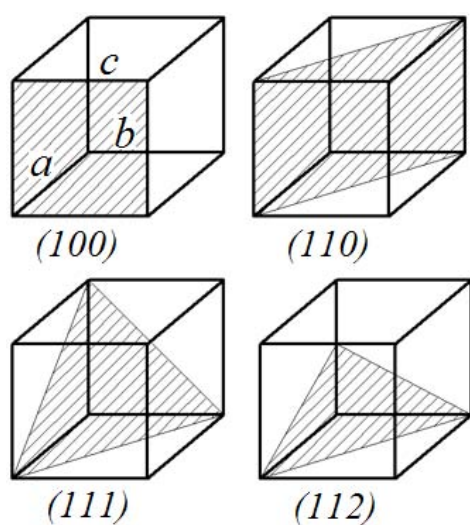


Рис. 1.6. Обозначения некоторых плоскостей кубических ячеек

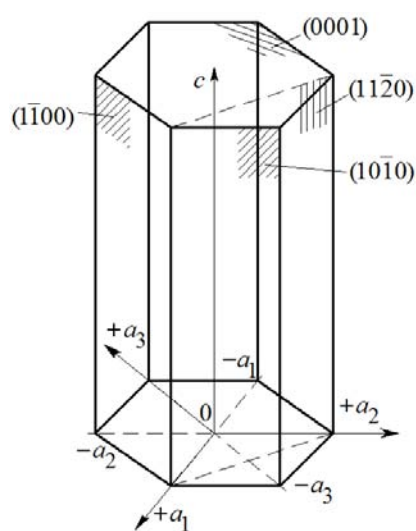


Рис. 1.7. Некоторые плоскости в гексагональной ячейке

Кристаллографические *индексы направления* в кубической решетке определяются координатами вектора, выходящего из начала координат. Например, точка u, v, w связана с точкой $0,0,0$ векторной трансляцией $r = ua + vb + wc$, где a, b и c – постоянные решетки; u, v, w – коэффициенты при векторах по осям x, y, z соответственно. Кристаллографические индексы координат вектора разделяются по направлениям каждой из координатных осей и приводятся к минимальным значениям. Индексы в квадратных скобках $[uvw]$ должны быть числами целыми и взаимно простыми, отрицательные значения индексов обозначают знаком «минус» над индексом. Таким образом, *индексы направления u, v, w – это три целых взаимно простых числа, пропорциональных координатам ближайшего узла на данном направлении*. Например, координаты узла: $[\frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2}]$. Тогда $u : v : w = \frac{1}{2} : 1 : \frac{1}{2} = 1 : 2 : 1$. Следовательно, искомое направление – $[121]$.

Координаты узла $(1, \frac{1}{2}, 0)$ отражаются преобразованными (умноженными на 2) индексами $[210]$, для координат узла $(-1, -1, 0)$ – индексы направления $[\bar{1} \ \bar{1} \ 0]$.

На рис. 1.8 показаны основные направления в кубической элементарной ячейке и их обозначение.

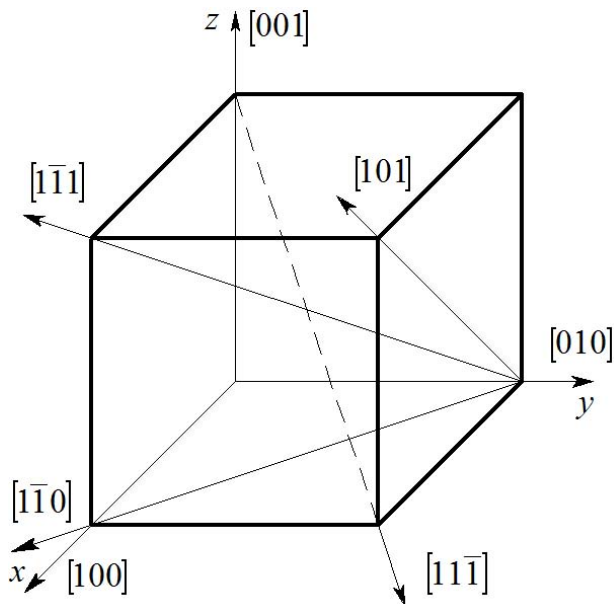


Рис. 1.8. Схематическое изображение основных направлений в кубической элементарной ячейке

Анизотропия кристаллов. Под анизотропией понимается зависимость механических и физических свойств кристалла от выбранного в нем направления. В основном все кристаллы анизотропны, и их упругие постоянные (или скорость распространения звука) зависят от ориентировки. Это хорошо иллюстрирует изменение констант (постоянных) упругости в монокристаллах, учитывающих индекс направления, вдоль которого проводятся измерения.

Поликристаллы состоят из множества жестко связанных между собой отдельных кристаллитов (зерен), имеющих различную ориентировку, поэтому они являются *квазиизотропными*. Однако если в пространственном расположении таких кристаллических зерен наблюдается упорядоченность, то поликристаллический материал окажется также анизотропным. Подобная преимущественная кристаллографическая ориентировка зерен называется *текстурой*.

Она может возникать, например, в результате ряда технологических обработок металлов давлением – при волочении, прокатке.

Полиморфизм. Свойство кристаллов в твердом состоянии при разных температурах (или давлении) иметь различный тип упаковки кристаллической решетки (*аллотропические формы или модификации кристаллической структуры*) называют полиморфизмом. Низкотемпературную модификацию обозначают α , высокотемпературные – β, γ, δ и т.д. Стабильность модификаций определяется при заданных внешних параметрах (температура, давление). Полиморфизм оказывает существенное влияние на пластичность при горячей обработке металлов и сплавов и в режиме сверхпластичности. В табл. 1.1 приведены температурные области существования кристаллических модификаций некоторых полиморфных металлов.

Таблица 1.1

Температурные области кристаллических модификаций

Металл	Кристаллическая упаковка	Температурная область существования данной модификации, °С
Титан	ГП ОЦК	до 882 882...1668
Железо	ОЦК ГЦК ОЦК	до 911 911...1392 1392...1539
Кобальт	ГП ГЦК	до 477 477...1490

Дефекты кристаллического строения. Пространственная решетка металлических кристаллов – это идеализированная модель расположения атомов в объеме. Чтобы разрушить такой кристалл, необходимо разорвать межатомные связи. Впервые теоретическую оценку критического скалывающего напряжения сделал Я.И. Френкель для модели идеально «жесткого» сдвига. Было показано, что максимальное (амплитудное) значение $\tau_{теор} \approx G/2\pi$ (G – модуль сдвига). Сравнение теоретических оценок с экспериментальными данными об-наружило их существенное расхождение на три – четыре порядка (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Значения критических скалывающих напряжений в кристаллах при комнатной температуре

Материал	$\tau_{теор}$, ГПа	$(\tau_{кр})_{экспер}$, ГПа	Чистота, %
Медь	7,68...8,34	$3 \cdot 10^{-3}$	99,93
Серебро	4,8...5,34	$(4...7) \cdot 10^{-4}$	99,999
Золото	4,85	$5 \cdot 10^{-4}$	99,999
Магний	3,13	$5 \cdot 10^{-4}$	99,99
Цинк	5,01...7,35	$9,5 \cdot 10^{-4}$	99,96
Железо	13	$2 \cdot 10^{-2}$	99,94
Хлорид натрия (поваренная соль)	2,4...2,7	10^{-3}	99,9

Ответ на вопрос о несоответствии реальной и теоретической прочности кристаллов был получен в 30-х годах XX столетия. Наш соотечественник Я.И. Френкель, зарубежные физики Дж. Тейлор, Е. Орован, М. Поляни предположили, что кристалл не разрушается сразу по плоскости сдвига. Процесс деформации постепенно распространяется в кристалле. В каждый момент времени только у небольшого количества атомов происходит разрыв связей. Затем такой локальный сдвиг подобно волновому процессу передается эстафетно от атома к атому через весь кристалл. Были разработаны основы *теории дефектов кристаллической решетки* (теория дислокаций).

Решетка реального кристалла имеет различного рода *дефекты*, или *несовершенства*, обусловленные нарушением его периодической структуры. По геометрическому признаку их делят на *точечные*, *линейные*, *поверхностные* и *объемные*. Точечные, линейные и поверхностные дефекты считаются микроскопическими, так как, по крайней мере, в одном направлении их протяженность измеряется лишь несколькими атомными диаметрами. Объемные несовершенства относят к макроскопическим, имеющим во всех трех измерениях

сравнительно большие размеры (поры, трещины, царапины). Несовершенствами кристаллического строения являются дефекты микроскопических размеров. От наличия и поведения дефектов зависят структурно-чувствительные свойства кристаллических материалов, механизмы диффузии и массопереноса вещества, химические реакции в твердом состоянии. Пластические свойства и формоизменение металлов и сплавов, их эксплуатационная стойкость, усталость, ползучесть и разрушение определяются подвижностью и взаимодействием дефектов.

Точечные дефекты. Размеры точечных дефектов по всем направлениям не превышают нескольких атомных диаметров. К таким дефектам относят структурные точечные дефекты – вакансии, меж-узельные атомы, а также примесные атомы внедрения и замещения (рис. 1.9).

Вакансии представляют собой узлы решетки, в которых отсутствуют атомы. *Межузельные атомы* являются как бы избыточными, лишними атомами и располагаются в междоузлиях. Появление точечных дефектов вызывает упругие искажения в кристаллической решетке, на расстоянии одного-двух атомных диаметров от центра дефекта создаются заметные смещения соседних атомов из равновесных положений. Наибольшие искажения решетки вносятся межузельными атомами, поэтому энергетические затраты на их образование (энергия активации) в 3-4 раза выше, чем для вакансий.

Примесные атомы внедрения располагаются преимущественно в микропорах, где для них имеется достаточно свободного пространства, образуя тем самым *твердый раствор внедрения* (рис. 1.9, в). Примесные атомы в узлах кристаллической решетки, занимая места атомов основного компонента, образуют *твердый раствор замещения* (рис. 1.9, а). Роль точечных дефектов в этом случае выполняют примесные атомы, размер которых отличается от размера атомов, образующих решетку.

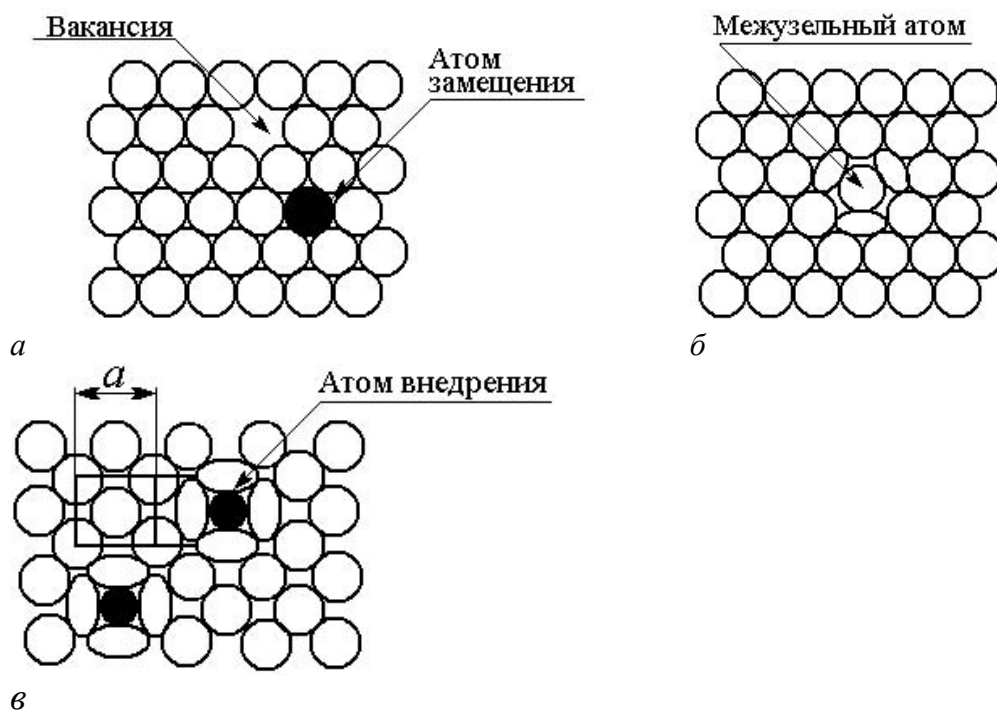


Рис. 1.9. Типы точечных дефектов кристаллической решетки: вакансия (а); межузельный атом (б); примесные атомы замещения (а) и внедрения (в)

При значительной деформации кристалла, например, при воздействии ковкой, прокаткой или волочением, возникают многочисленные дефекты структуры, в том числе и точечные, хотя решетка при этом по-прежнему сохраняет в основном свою кристаллическую упаковку. Избыточное (для данной температуры) количество точечных дефектов может быть достигнуто при резком охлаждении от более высокой температуры (закалке) или в результате радиационного облучения металлов частицами с высокой энергией. Избыток вакансий сверх равновесной концентрации с течением времени исчезает на свободных поверхностях кристалла, порах, границах зерен и других дефектах. Места, где исчезают вакансии, называются *стоками*. Вакансии ускоряют все процессы, связанные с перемещением атомов, – диффузию, ползучесть, спекание порошков, плавление и многие другие.

Линейные дефекты (дислокации). Дислокации в том ли ином количестве всегда присутствуют в кристаллах. В 50-е годы прошлого столетия с развитием трансмиссионной электронной микроскопии удалось экспериментально наблюдать наличие дислокаций в кристаллических структурах.

Они возникают из-за напряжений роста, обусловленных температурным градиентом на границе фронта кристаллизации, за счет конденсации вакансий, наличия включений и пр. Пластическая деформация является результатом непрерывного генерирования и движения таких дислокаций.

Дислокации представляют собой одномерный дефект, проявляющийся при сдвиге в кристалле. На рис. 1.10, *а* изображена схема дислокационной петли, лежащей в плоскости скольжения, на которой выделены области пластической деформации (скольжения) и области, где скольжения не было. Граница между участком, в котором скольжение уже прошло, и остальной частью кристалла, в которой скольжения еще не было, называется *линией дислокации*. С ней связано нарушение расположения атомов в плоскостях выше и ниже плоскости скольжения (рис. 1.10, *б*). Такое геометрическое несоответствие вдоль дислокационной линии (*AB* на рис. 1.10, *б*) компенсируют смешанные дислокации, имеющие различную долю *краевой* и *винтовой* компонент. Дислокационная линия будет чисто краевой в точке *B* и чисто винтовой в точке *A*. В любой произвольной точке линии смешанной дислокации можно разделить на краевую и винтовую составляющие.

Краевая дислокация. На рис. 1.10, *в* для случая простой кубической решетки показан разрез по атомной плоскости, *перпендикулярной* к дислокационной линии. В верхней части кристалла выше плоскости скольжения *CD* находится неполная атомная плоскость, *вставленная в кристалл и не имеющая продолжения в его нижней половине (экстраплоскость)*. Вдоль края экстраплоскости тянется область несовершенной решетки. Непосредственно вблизи края экстраплоскости решетка сильно искажена, выше края решетка оказывается сжатой, а ниже – растянутой.

Область несовершенного кристалла вокруг края экстраплоскости называется *краевой дислокацией*. Лишняя полуплоскость может находиться выше и ниже плоскости скольжения, в первом случае дислокацию условно принято называть положительной, а во втором – отрицательной. Обе дислокации обозначаются специальными значками – соответственно \perp и \top . Сдвиг кристалла происходит перпендикулярно к линии краевой дислокации. Положительные и отрицательные дислокации движутся по плоскости скольжения в

противоположных направлениях, создавая сдвиг одного и того же знака.

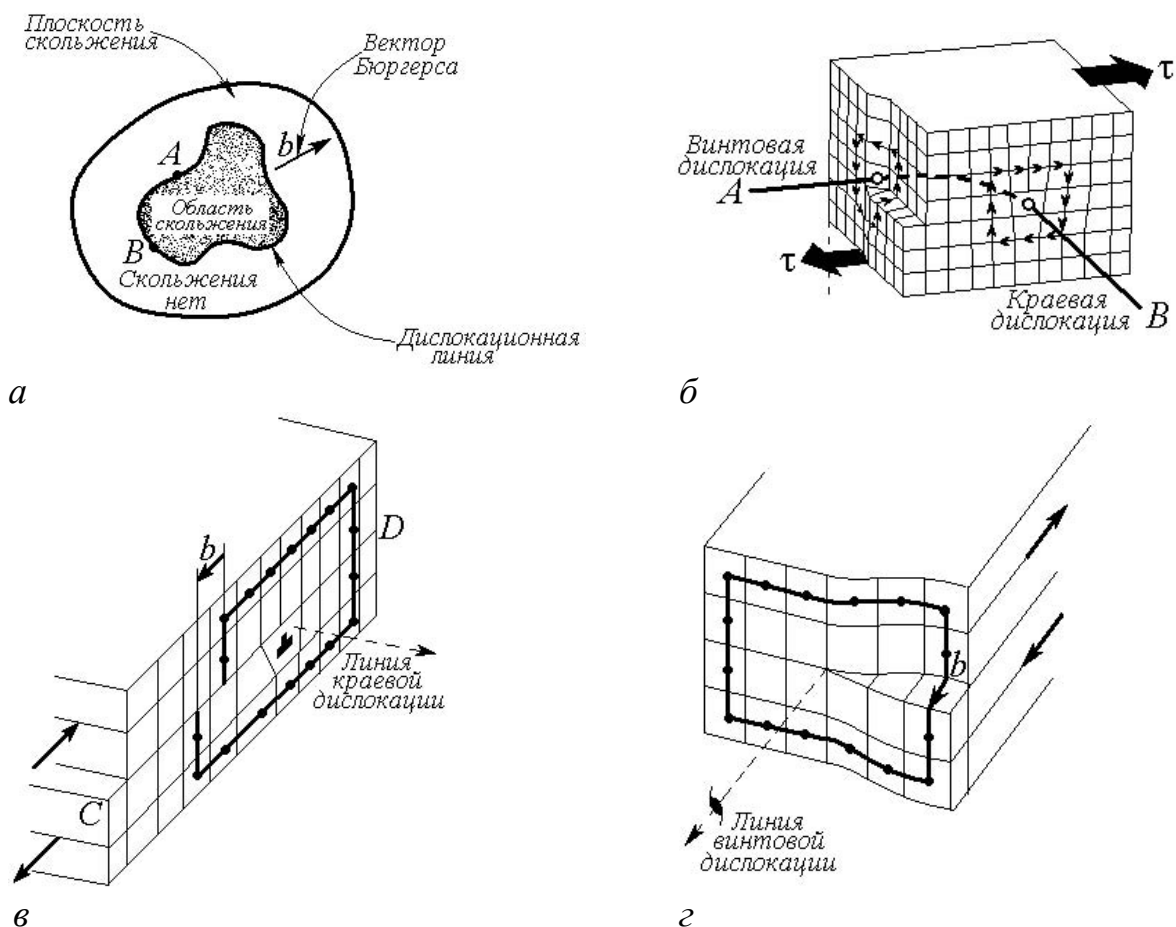


Рис. 1.10. Дислокации:

a – в плоскости скольжения; *б* – в перпендикулярной плоскости;

в – краевая (линейная) дислокация; *г* – винтовая дислокация

Винтовая дислокация. Винтовая дислокация образуется при сдвиге верхней части *надрезанного по плоскости скольжения* кристалла на одно межатомное расстояние (рис. 1.10, *г*). Граница зоны сдвига является линией винтовой дислокации, параллельной вектору сдвига (смещения). Образовавшаяся при таком сдвиге ступенька на передней грани не проходит через весь кристалл. Вертикальные атомные плоскости несколько изогнутся, и край каждой из них сомкнется с краем ближайшей соседней плоскости. В результате образуется единая атомная плоскость, закрученная по винту (лишней атомной плоскости в этом случае нет). После сдвига на параметр

решетки атомные плоскости образуют винтовую поверхность, осью которой является линия дислокации. Область несовершенства простирается вдоль линии винтовой дислокации, в то время как вдали от линии дислокации решетка остается практически без искажений. Винтовая дислокация, как и резьба винта, может быть правой (положительная) и левой (отрицательная).

Вектор Бюргерса \bar{b} является вектором неувязки между замкнутым контуром, построенным вокруг линии дислокации (см. рис. 1.10, *б* – случай *B*), и контуром, построенным в решетке совершенного кристалла (см. рис. 1.10, *в*). Если полностью воспроизвести в области краевой дислокации построение контура для совершенного кристалла от старта до финиша, то он окажется незамкнутым. Таким образом, вектор Бюргерса отражает величину и направление сдвига, вызванного движением дислокации, определяет энергию дислокации, является показателем упругих искажений решетки, создаваемых этим дефектом, и мерой ее подвижности. Принятая в теории дислокаций форма записи вектора Бюргерса позволяет отразить его величину и направление. У краевой дислокации вектор Бюргерса перпендикулярен к дислокационной линии, у винтовой дислокации ее линия по направлению совпадает с ним.

Трехмерная дислокационная сетка образуется при равновесном распределении дислокаций в недеформированном кристалле. Дислокации встречаются в узлах, в которых удовлетворяются условия равновесия сил линейного натяжения. При этом результирующий вектор Бюргерса, являющийся суммой векторов Бюргерса, сходящихся в узле дислокаций, должен быть равен нулю. Когда все три дислокации имеют одинаковую энергию, то в ГЦК-решетках они встречаются в узле под углом 120° . Сетки могут быть не только трехмерными, но и плоскими.

Плотность дислокаций ρ – суммарная длина всех дислокаций в единице объема кристалла (или количество дислокаций, пересекающих единицу площади поверхности кристалла) – одна из важнейших структурных характеристик. Плотность дислокаций зависит от состояния материала и вида его обработки. В металлах и сплавах происходит значительный рост ρ при деформации, фазовом наклепе, лазерной обработке.

Поверхностные дефекты. Твердые тела имеют не только внешние поверхности, но и внутренние границы, которые способны

влиять на свойства металлических материалов, – дефекты упаковки, мало- и высокоугловые границы зерен, границы двойников и другие.

Дефект упаковки. Когда в зоне сдвига дислокации полная дислокация приобретает иное расположение атомов, отличное от первоначального, ее называют *частичной*. Это возможно в решетках с плотной упаковкой атомов, например, ГЦК, ОЦК и ГПУ, т.е. в большинстве реальных металлов. При перемещении частичной дислокации решетка не совмещается сама с собой, и в плоскости скольжения нарушается сопряжение атомов плоскостей, лежащих выше и ниже ее, т.е. нарушается порядок укладки атомных слоев. Это приводит к появлению добавочной энергии, обусловленной образованием поверхности.

Локальное нарушение чередования атомных слоев называют *дефектом упаковки*.

Границы зерен. В поликристаллических материалах существуют внутренние границы (поверхности), разделяющие соседние зерна. Они представляют собой области несовершенного контакта, где имеется нарушение непрерывности кристаллической структуры. Два соседних зерна в общем случае имеют несовпадающую кристаллографическую ориентировку. В зависимости от угла разориентировки θ принято выделять *высоко- и малоугловые границы*. К малоугловым относят границы с углом разориентировки не более 5° . Если этот угол превышает 10° , то такие границы считаются высокоугловыми (при $\theta \sim 5..10^\circ$ границы относятся к среднеугловым).

При переходе через высокоугловые границы происходит резкий скачок ориентировки атомных плоскостей и анизотропных свойств соприкасающихся решеток соседних кристаллов. Это объясняет многие свойства границ зерен – высокую подвижность атомов и более быструю диффузию по границам зерен, повышенную травимость границ зерен, упрочняющий и разупрочняющий эффекты при низких и высоких температурах.

Границы внутри одного зерна, состоящие из дислокационных стенок, называют *субграницами*, а фрагменты, которые они разделяют, – *субзернами*. Субграница как поверхность с постоянным разворотом представляет собой особый дефект кристаллической решетки.

Дисклинация – линейный дефект решетки, охватывающий замкнутый контур Бюргерса, при обходе которого накапливается на угол разворота $\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ – безразмерный вектор ротации Франка); периметр субграницы отражает собой дисклинацию. Субзеренная структура формируется в результате пластической деформации, особенно в металлах с высокой энергией дефектов упаковки. После пластической деформации накапливается избыточное количество дислокаций одного знака, что при последующем нагреве (например, при полигонизации) приводит к образованию малоугловых границ. Из-за невысокой устойчивости субграниц, состоящих из смешанных дислокаций, в решетке преобладают «чистые» границы наклона или кручения. Чем больше плотность дислокаций в стенке и меньше расстояние между ними, тем выше угол разориентировки соседних зерен, малоугловая граница постепенно трансформируется в высокоугловую.

Объемные дефекты. Нарушением сплошности называется дефект (полость) в кристалле, наименьший размер которого превышает радиус действия межатомных сил сцепления, а противоположные берега полости можно рассматривать в качестве свободных поверхностей. Различают силовые и геометрические нарушения сплошности – *трещины* и *поры*. Особенность трещин состоит в том, что они обладают собственным полем напряжений. В то же время вокруг поры кристалл свободен от напряжений.

Образование трещин. Предложены и нашли экспериментальное подтверждение различные схемы дислокационного зарождения трещин. Простейший пример – слияние нескольких краевых дислокаций в одну (*сверхдислокацию*) с общим вектором Бюргерса $\bar{b}^* = n\bar{b}$, где n – количество слившихся единичных дислокаций, образует ядро в виде зародыша клиновидной трещины. Для зарождения трещин необходима высокая локальная концентрация напряжений. Поэтому обычно трещины возникают у вершин скоплений дислокаций вблизи барьеров. На рис. 1.11 приведены схемы зарождения трещин у дислокационных скоплений – в плоскости (*а*), параллельных плоскостях (*б*), пересекающихся плоскостях (*в*), при искривлении плоскостей скольжения (*г*), в результате разрыва малоугловой границы (*д*), если в нижней части кристалла происходит разрыв

ки (e), при циклическом нагружении (ж) [8].

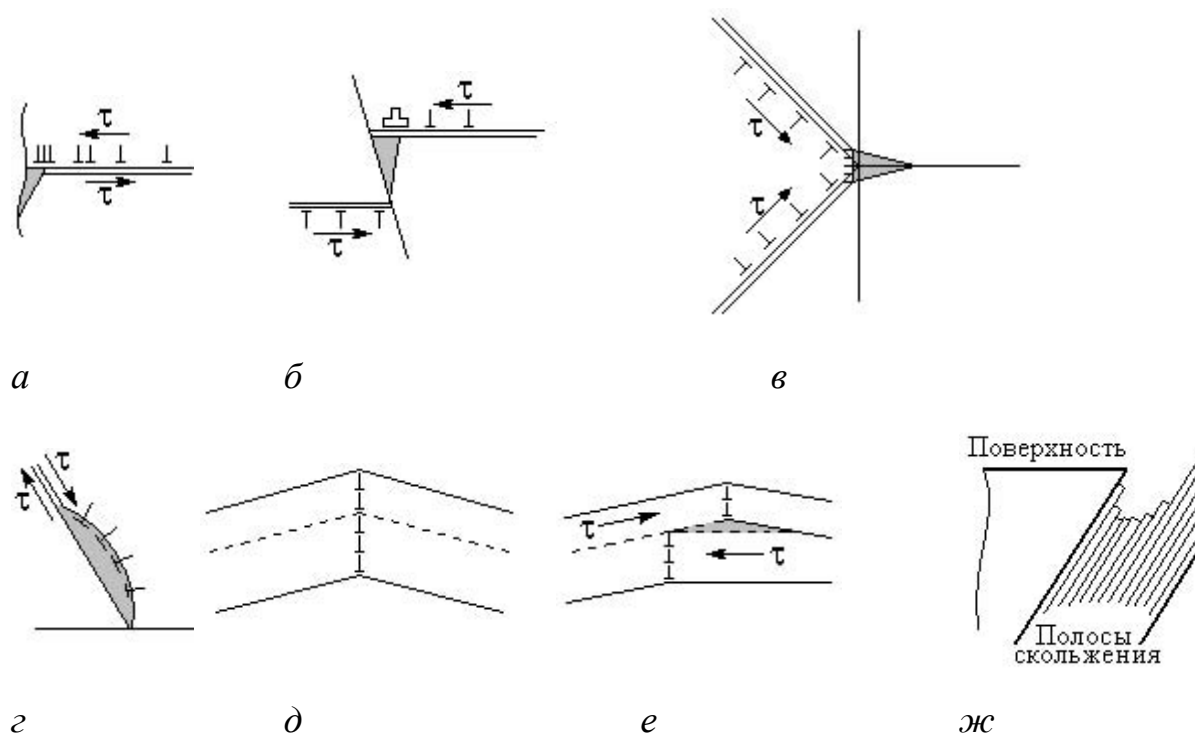


Рис. 1.11. Схемы зарождения трещин у дислокационных скоплений

Образование пор. Распространенный механизм образования пор – формирование локальных скоплений вакансий с их последующей конденсацией в поры. В объеме вакансионной поры сосредотачиваются за счет диффузии атомы или молекулы растворенного в металле газа. Обработки, связанные с внешним воздействием и приводящие к получению вакансионного пересыщения кристаллической решетки, создают благоприятные условия для порообразования. Специфические особенности эксплуатации металлических материалов могут также привести к возникновению в их объеме газовых пор (пузырьков) с давлением газа, существенно превышающим атмосферное. В таких случаях поры становятся источниками значительных напряжений, что не наблюдается для вакансионных пор.

Возможно образование пор в результате сдвиговых процессов за счет дислокационных перемещений в пересекающихся плоскостях скольжения, например, в случае поперечной прокатки, когда по мере поворота заготовки попеременно активизируются пересекающиеся плоскости скольжения. Формирование технологических несплошностей возможно также за счет усадки металла в ходе кристаллизации, при сварке, в процессе прессования и спекания порошковых материалов.

1.3. Холодная пластическая деформация

Картина пластической деформации монокристалла. О закономерностях развития пластической деформации судят обычно по диаграмме растяжения, обеспечивающего однородную деформацию по толщине и длине образца. В результате приложения к кристаллу внешних напряжений появляется сила, действующая внутри кристалла в плоскости скольжения (*плоскость скольжения* – кристаллографическая плоскость, по которой происходит перемещение одной части кристалла по отношению к другой). Эта сила действует вдоль плоскости скольжения и ориентирована в монокристалле в направлении развития пластической деформации. Напряжение, при котором в чистых монокристаллах металлов начинается скольжение (пластическая деформация), зависит от типа упаковки кристаллической решетки, от характеристик сил связи между атомами, температуры деформирования и от ориентации активных плоскостей скольжения.

Скольжение начинается, когда сдвиговое (касательное) напряжение τ в плоскости скольжения в направлении скольжения достигнет определенного уровня, называемого *приведенным критическим напряжением сдвига* $\tau_{кр}^{np}$ (рис. 1.12).

Движение дислокаций в плоскости скольжения вызвано приложением нормального напряжения вдоль оси образца.

Пусть F_0 – площадь сечения, нормальная по отношению к осевой силе P , и F_1 – площадь сдвига в плоскости скольжения под действием P_r .

Ориентация

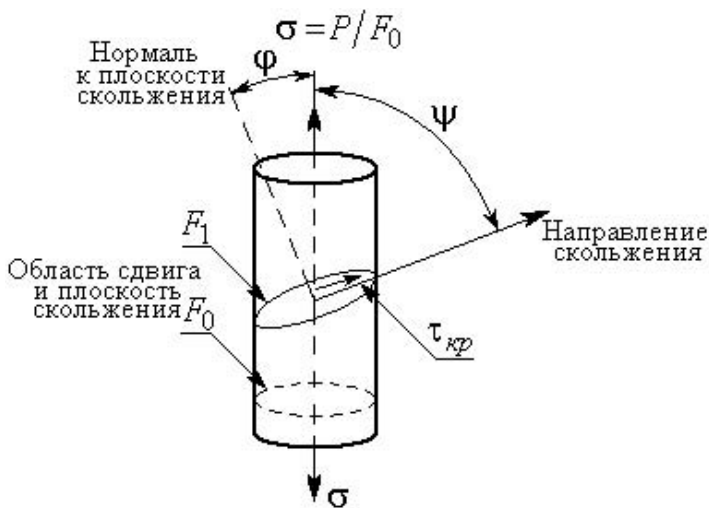


Рис. 1.12. Схема возникновения приведенного критического напряжения сдвига в монокристалле

плоскости скольжения задана углами φ и ψ . Следовательно, касательное напряжение, обуславливающее движение дислокации в направлении скольжения, будет:

$$\tau_{кр}^{np} = \frac{P \cos \psi}{F_0 / \cos \varphi} = \sigma_{кр} \cos \psi \cos \varphi. \quad (1.3)$$

Величину $M = 1/\cos \psi \cos \varphi$ называют *ориентационным фактором*. Скольжение начинается в той из систем, где $\tau_{кр}^{np}$ наибольшее (закон Шмидта, 1927 г.). Таким образом, нормальное напряжение $\sigma_{кр}$, вызывающее текучесть (пластическую деформацию) в плоскости скольжения, зависит от ориентационного фактора M : $\sigma_{кр} = M\tau_{кр}^{np}$. Для чистых монокристаллов с ГПУ-решеткой с постоянным значением приведенного критического напряжения сдвига в плоскости скольжения $\sigma_{кр}$ менялось более чем в 100 раз в зависимости от ориентационного фактора, т.е. от расположения плоскости по отношению к оси нагружения.

В табл. 1.3 приведены значения $\tau_{кр}$ для некоторых чистых металлов при комнатной температуре.

Скольжение развивается по плоскостям и направлениям, на которых плотность атомов максимальна. Плоскость скольжения вместе с направлением скольжения, принадлежащим этой плоскости, образует систему скольжения. Количество систем скольжения неодинаково в металлах с разным типом решеток.

Таблица 1.3

Системы скольжения и приведенные критические напряжения сдвига для монокристаллов при комнатной температуре

Металл	Тип упаковки	Чистота, %	Плоскости скольжения	Направление скольжения	Критическое напряжение сдвига, МПа
Zn	ГПУ	99,99	(0001)	$[1\bar{1}21]$	0,18
Cu	ГЦК	99,99	(111)	$[1\bar{1}1]$	0,65
		99,98	(111)	—	0,94
Fe	ОЦК	99,96	(110), (112), (123)	$[\bar{1}11]$	27,5

У металлов с ГЦК-решеткой (Cu, Al, Ni и др.) 12 эквивалентных систем скольжения. В металлах с ОЦК-решеткой количество систем скольжения составляет 48. У металлов с ГП-решеткой при $c/a \geq 1,63$ (Mg, Zn) скольжение развивается по плоскости базиса, в которой находятся три эквивалентных направления. Эти металлы менее пластичны, чем металлы с ОЦК- и ГЦК-решетками.

Рельеф скольжения. Элементарный акт сдвига – это смещение одной части кристалла относительно другой (рис. 1.13).

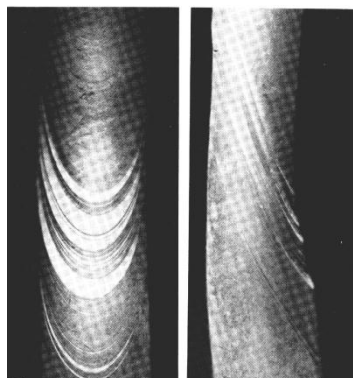
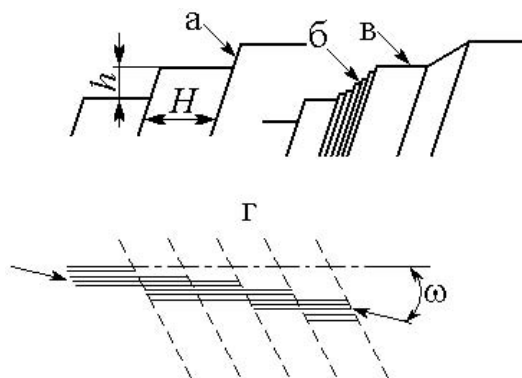


Рис. 1.13. Схема рельефа скольжения

на поверхности монокристалла при растяжении:

a – одиночные линии скольжения; *б* – полоса скольжения;

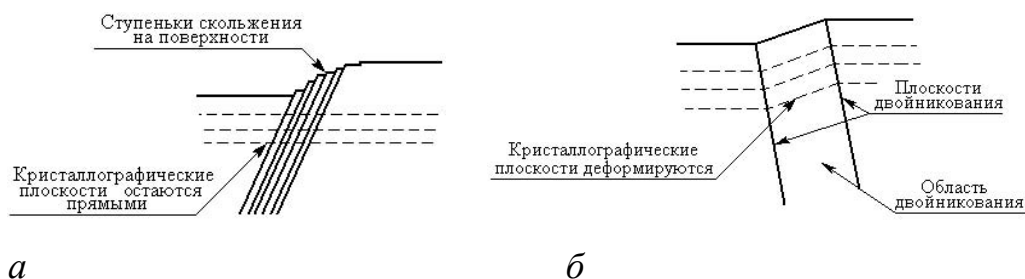
в – пачка скольжения; *г* – «вид сверху» (поворот полосы скольжения)

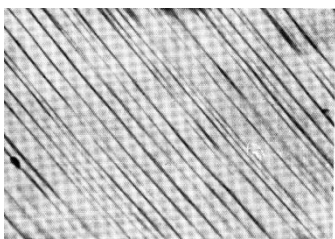
и микрорельеф полос скольжения прямо и сбоку образца монокристалла цинка (*E. Parker*)

Ступенька, видимая под микроскопом на полированной поверхности образца, называется линией скольжения. *Линия скольжения* – след пересечения плоскости скольжения с поверхностью образца (h – высота рельефа, H – шаг линий). По мере увеличения нагрузки деформация развивается неоднородно, линии скольжения располагаются на различном расстоянии одна от другой. Группы близкорасположенных параллельных линий скольжения образуют **полосы** скольжения. *Полоса скольжения* – образование на поверхности металла, состоящее из группы следов скольжения (линий скольжения). Полосами скольжения монокристалл разбивается на пачки скольжения (или блоки). *Пачка скольжения* – это область кристалла между полосами скольжения. Расстояние между отдельными линиями в полосе скольжения составляет порядка 10^{-5} см, между полосами – 10^{-4} см. По мере дальнейшего развития деформации происходит разворот полос скольжения, изменяются их форма и размеры и наступает разрушение.

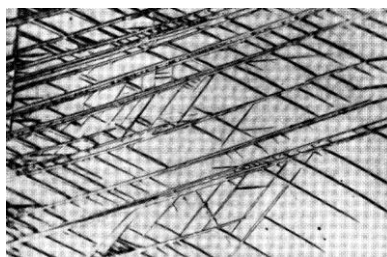
Физическая природа пластического течения монокристалла.

Пластическое деформирование в реальных кристаллах осуществляется путем последовательного перемещения дислокации. Основными дислокационными механизмами проявления микропластичности в металлах являются *скольжение и двойникование* (рис. 1.14).





а



б

Рис. 1.14. Схемы и структуры поверхностей деформированного металла после скольжения (а, в) и двойникования (б, г):

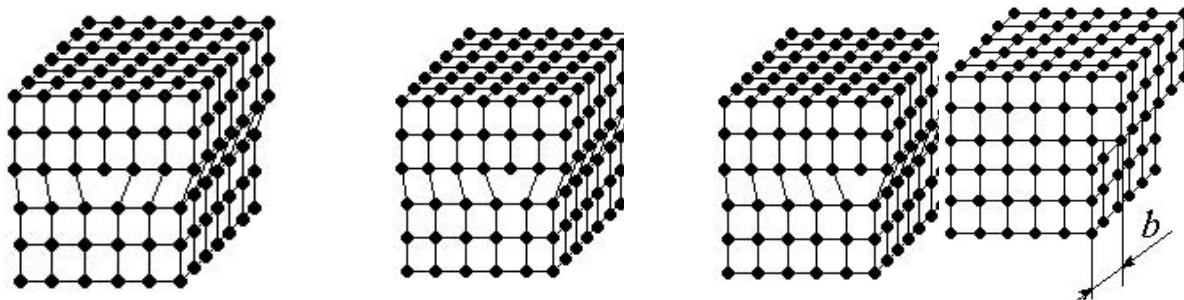
в – монокристалл меди после деформации 0,9 %, × 100;

г – титан 99,77 %, × 150 (F. Rosi et all)

Дислокация легко движется в той плоскости, в которой находятся дислокационная линия и ее вектор Бюргера.

Скольжение. Перемещение краевой дислокации при сдвиге на одно межатомное расстояние представляет собой согласованную перегруппировку атомов около дислокаций и не сопровождается диффузионным переносом массы. Под действием касательного напряжения ряд атомов, образующих дислокационную линию, вытесняет ближайший ряд атомов в соседней плоскости. Этому способствуют упругие искажения кристалла около дислокации, облегчающие разрыв старых и образование новых межатомных связей.

Скольжение краевой дислокации. Под действием внешних сил атомы экстраплоскости (рис. 1.15, а) испытывают некоторое смещение на расстояние, не превышающее межатомное. Вследствие этого экстраплоскость упруго взаимодействует с атомами нижней части соседней полной плоскости. В результате разрушается их межатомная связь, и краевая дислокация перемещается на одно межатомное расстояние (рис. 1.15, б). Многократное повторение этого процесса приводит к выходу дислокации на поверхность кристалла, и его верхняя часть сдвигается относительно нижней на межатомное расстояние – возникает ступенька (рис. 1.15, г).



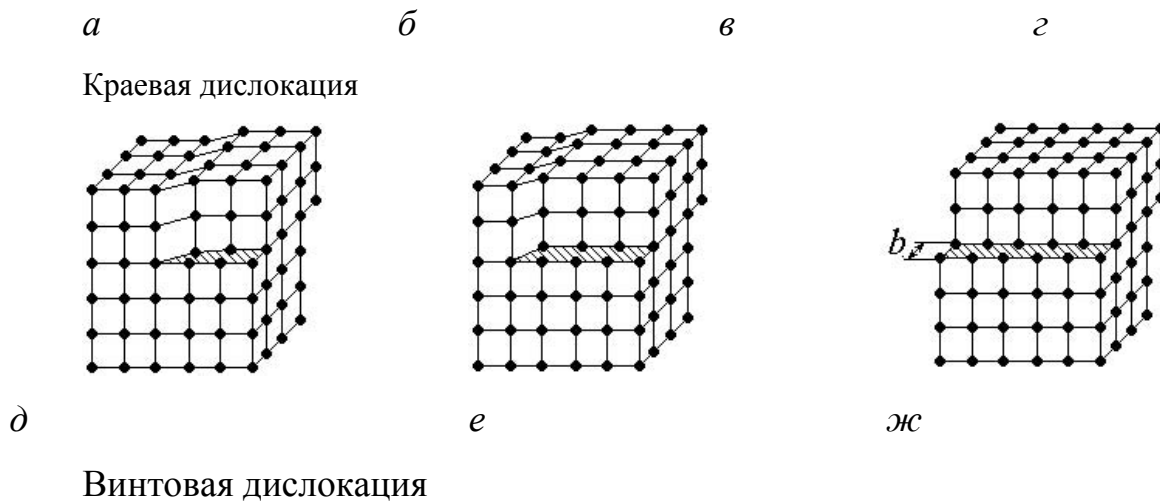


Рис. 1.15. Кинетика развития пластической деформации за счет скольжения краевой и винтовой дислокаций в плоскости скольжения

Движение единичной дислокации с выходом на поверхность кристалла и образованием ступеньки представляет собой элементарный акт пластической деформации, при этом величина сдвига b дискретна и кратна межатомному расстоянию. Макроскопический сдвиг набирается из множества единичных, которые при рассмотрении под оптическим микроскопом наблюдаются в виде линий скольжения. Относительная величина пластического сдвига составит:

$$\varepsilon = b\rho\lambda,$$

где λ – средняя длина пробега дислокаций; ρ – плотность дислокаций, представляющая собой суммарную длину всех дислокаций, приходящихся на единицу объема кристалла.

Скорость пластической деформации может быть определена как

$$\dot{\varepsilon} = d\varepsilon / dt = b\rho v,$$

где v – скорость движения дислокации.

В свою очередь скорость пластического течения прямо зависит от скорости перемещения дислокаций и протекает при любых температурах. Скорость скольжения дислокаций может меняться в довольно широких пределах; она зависит от приложенного напряжения, температуры и других факторов. Однако ее величина не может превышать скорость распространения в данном материале упругой деформации, т.е. скорости звука.

В дислокационном сдвиге в каждый момент времени участвуют только те атомы, которые находятся в области дислокации, достаточно разрыва связи между небольшим числом атомов в непосредственной близости от дефекта. Происходит эстафетное перемещение атомов на величину, меньшую межатомной, в результате чего дислокация скользит через весь кристалл на большие расстояния. Этим объясняются низкие опытные значения критических напряжений сдвига в металлах (см. табл. 1.3). Для одновременного смещения одной части кристалла относительно другой (теоретическая прочность) нужно было бы мгновенно разрывать все межатомные связи между плоскостями.

Переползание краевой дислокации. Возможен другой способ движения краевой дислокации – перемещение в направлении, перпендикулярном к плоскости скольжения. Перемещение краевой дислокации по нормали к своей плоскости скольжения путем диффузии атомов или вакансий принципиально отличается от скользящего движения дислокации.

Дислокация может двигаться вверх (положительное переползание) или вниз (отрицательное) относительно исходной плоскости скольжения благодаря миграции точечных дефектов (вакансий V , межузельных атомов) к краю экстраплоскости (рис. 1.16). Когда к краю полуплоскости подходят вакансии, а атомы с ее кромки уходят в вакантные места (или междоузлия), то краевая дислокация перейдет в вышерасположенную параллельную плоскость скольжения.

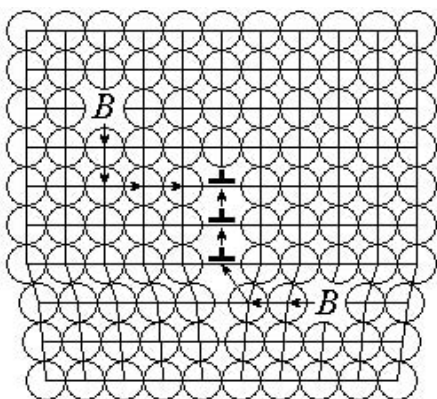


Рис. 1.16. Переползание дислокации при движении вакансии к краю экстраплоскости

жет скользить в любой кристаллографической плоскости, переходя из одной плоскости скольжения в другую. Если на пути ее движения встречается какой-либо барьер, то она может продолжить скольжение в другой атомной плоскости, находящейся под углом к первоначальной. Такой процесс является *поперечным скольжением*. Пройдя некоторый путь в плоскости поперечного скольжения и удалившись от барьера, винтовая дислокация может перейти в атомную плоскость, параллельную исходной. Если такой процесс повторяется многократно, то его называют *множественным поперечным скольжением*.

Деформация двойникованием. Пластическая деформация двойникованием происходит при более высоком уровне напряжений, когда скольжение по ряду причин затруднено – при низких температурах и высоких скоростях деформации в ГП- и ОЦК-металлах, при отрицательных температурах в ГЦК чистых металлах и т.д. Двойникование может быть инициировано деформацией (*механический двойник*) или в результате отжига после пластической деформации (*двойник отжига*).

Перестройка решетки в новое равновесное положение часто происходит со скоростью, близкой к скорости звука (время образования двойника $\sim 10^{-6}$ с), сопровождаясь акустическими сигналами – характерным потрескиванием (для регистрации процесса двойникования применяют скоростную съемку).

Плоскость двойникования – это плотноупакованная (с малыми индексами) плоскость зеркального отражения (симметрии) решетки (рис. 1.17). При приложении напряжения сдвига кристалл разворачивается относительно плоскости двойникования.



Область справа от нее не деформирована, слева – атомные плоскости сдвигаются «зеркально» симметричным образом. Каждый атом в области двойникования испытывает гомогенный сдвиг на дистанцию, пропорциональную по

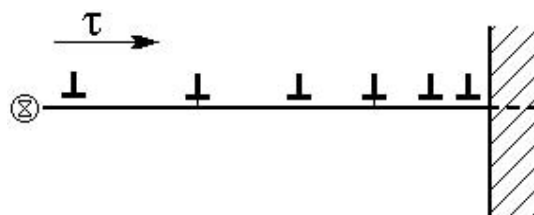
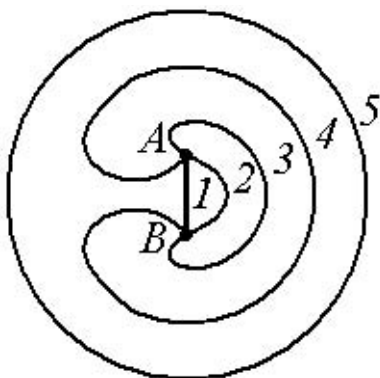
Рис. 1.17. Схема двойникования

расстоянию от плоскости двойникования. Открытые кружки показывают положения атомов, которые не перемещались, пунктирные – их первоначальные

позиции в решетке, которые изменили свое положение, темные – конечные позиции этих атомов в области двойникования.

Существуют принципиальные различия процессов скольжения и двойникования. При скольжении ориентация кристалла выше и ниже плоскости скольжения та же, что и до процесса деформирования; при двойниковании она различна по отношению к плоскости двойникования. Скольжение реализуется многократным дискретным перемещением атомов, при двойниковании атом смещается на расстояние много меньшее атомного размера. В отличие от сдвига при скольжении сдвиг при двойниковании полярен, т.е. смещение атомов может происходить только в одну сторону. Двойникование не приводит к значительной остаточной деформации. Металлы, в которых деформация преимущественно реализуется двойникованием, считаются «хрупкими» (например, висмут, сурьма); образование двойников приводит к повышению сопротивления пластической деформации за счет дополнительных барьеров, создаваемых двойниковыми границами.

Размножение дислокаций. Одним из способов размножения дислокаций, действующим в процессе пластического деформирования металлов, является механизм Франка – Рида. Он основан на рассмотрении дислокационной линии, закрепленной на обоих концах (рис. 1.18, а). Дислокационная линия AB лежит в плоскости скольжения и зафиксирована в точках A и B (позиция 1). Точками закрепления могут быть узлы в трехмерной дислокационной сетке, атомы примеси, частицы выделений и др.



a

б

Рис. 1.18. Схема стадийности размножения дислокаций (*a*) и их скопления у барьеров (*б*)

При постепенном нагружении дислокация двигается вперед, и напряжение сдвига достигает критической величины $\tau_{кр} = Gb/L$, где L – длина отрезка AB . Такое напряжение является максимальным для линии в форме полуокружности (поз. 2); после прохождения этой стадии дислокационная петля становится неустойчивой и непрерывно расширяется (позиция 3-5 ...). У точек закрепления A и B образуются два спиральных участка дислокации с противоположными знаками, которые будут перемещаться навстречу друг другу (поз. 4) и при соприкосновении исчезнут (поз. 5). В результате образуется замкнутая дислокационная петля, которая будет продолжать расширяться под действием приложенного напряжения. Одновременно восстанавливается первоначальный дислокационный отрезок AB (стартовое положение), который может полностью повторить описанный процесс.

Когда в плоскости скольжения имеется препятствие, то дислокации, испущенные источником, скапливаются у этого барьера (см. рис. 1.18, *б*). Последние дислокации оказывают давление на первые, в результате чего расстояние между ближайшими к препятствию дислокациями оказывается значительно меньшим, чем между теми, которые последними вышли из источника. Возникает некоторое равновесное распределение дислокаций. Около ведущей дислокации (лидера) возникает местная концентрация напряжений $\tau_1 = n\tau$, где τ – приложенное напряжение; n – число дислокаций в скоплении. Это означает, что в «голове» плоского скопления из n дислокаций возникает локальное внутреннее напряжение, которое в n раз больше приложенного напряжения. Подобные концентрации напряжений играют важную роль, например, в таких явлениях, как упрочнение и разрушение.

Источниками образования и размножения дислокаций могут быть и иные механизмы (вакансионные, зернограничные и т.д.).

Торможение дислокаций. Дислокациям при движении приходится преодолевать близко- и дальнедействующие поля упругих напряжений от препятствий. В первом случае полями упругих напряжений могут быть напряжения Пайерлса, сопротивления, вызываемые отдельными примесными атомами, зонами типа Гинье – Престона или сегрегациями, центрами радиационных повреждений; во-втором – это могут быть скопления примесных атомов, выделения избыточной фазы, взаимодействие скоплений дислокаций в параллельных плоскостях и др.

Элементарный акт пластической деформации связан с движением дислокаций и локализован по своей природе. При конечных температурах дислокация может преодолеть близкодействующее препятствие за счет *термических флуктуаций*; чем выше температура, тем меньшее напряжение необходимо для преодоления препятствия.

Рассмотрим наиболее важные из них с точки зрения развития пластической деформации.

Взаимодействие дислокаций с точечными дефектами. Образуя в решетке поле напряжений, точечные дефекты взаимодействуют с собственным полем дислокаций, что приводит к понижению упругой энергии кристалла. Особую роль играет реакция краевой дислокации с *атомами примесей*, приводящая к перераспределению последних. Вследствие *упругого взаимодействия* примесные атомы образуют вблизи ядра дислокаций скопления, которые называют *облаками* или *атмосферами Коттрелла*. Винтовая дислокация не создает областей гидростатического сжатия и растяжения и не способна притягивать точечные дефекты.

Дислокация, связанная атмосферами из примесных атомов, становится малоподвижной. Скорость движения такой дислокации будет лимитироваться диффузионной подвижностью атомов примеси и, следовательно, будет зависеть от температуры. При нагреве до *температуры конденсации* T_K все позиции для примесных атомов вдоль дислокации заняты, такую дислокационную атмосферу называют *насыщенной* или *конденсированной*. С повышением температуры вы-
ше T_K концентрация примеси на дислокации экспоненциально падает,

атмосферы становятся *разбавленными*, а пластичность металла возрастает.

Взаимодействие дислокаций. Дислокации взаимодействуют друг с другом своими полями напряжений. Например, взаимодействующие краевые дислокации одного знака в параллельных плоскостях сдвига выстраиваются одна над другой и создают механически устойчивые конфигурации – *дислокационные стенки*, играющие большую роль в процессах полигонизации, создании межблочных и межзеренных границ. Краевые дислокации разного знака в параллельных плоскостях скольжения также образуют устойчивую конфигурацию. Однако между разноименными дислокациями в одной плоскости сдвига действует только сила притяжения, что может привести к их *аннигиляции*. В близкорасположенных параллельных плоскостях взаимодействие таких дислокаций приводит к образованию цепочки точечных дефектов.

Пересечение одной дислокации другой вызывает разрыв части дислокационной линии. Образуется ступенька – *порог*, если она соединяет две части той же дислокации, лежащие в разных плоскостях скольжения, или *перегиб*, если она остается в плоскости скольжения. Образование порога характерно при пересечении краевых дислокаций, движущихся по нормальным друг к другу плоскостям (их векторы Бюргерса расположены под прямым углом друг к другу). Ступенька сохраняет ориентировку остальной части дислокации и свободно перемещается вместе с ней.

«Сидячие» дислокации. В кристаллах встречаются дислокации с весьма низкой подвижностью, их принято называть *«сидячими»*. Они являются естественными барьерами для скользящих дислокаций и тем самым существенно ограничивают подвижность дислокаций. «Сидячая» дислокация может возникать при взаимодействии расщепленных дислокаций, скользящих по двум пересекающимся плоскостям.

Холодная пластическая деформация поликристаллов.

Большинство металлов и сплавов являются поликристаллами. При комнатных и более низких температурах границы зерен упрочняют

металлы и сплавы, являясь барьерами для движения дислокаций. Ориентационный фактор меняется от зерна к зерну. В процессе пластического деформирования металлов дислокации, движущиеся в своей плоскости скольжения, не могут непрерывно переходить от зерна к зерну, так как ориентировка плоскостей скольжения в соседних зернах иная. Это предопределяет различный характер влияния типа упаковки атомов кристаллической решетки на кривые упрочнения $\sigma(\varepsilon)$ – трудность эстафетной передачи деформации от зерна к зерну для ГП-металлов с одной плоскостью базисного скольжения (например, *Zn*) и облегченная передача деформации в кубических системах с ГЦК- и ОЦК-решетками со многими плоскостями скольжения (например, для *Fe* таких плоскостей – 26).

Макроскопическая модель деформации поликристалла рассматривает деформирование как процесс распада поликристалла на отдельные зерна и последующего их слияния. В результате – образование пустот и перекрытий, связанное с генерацией статистически неравномерно накопленных дислокаций в отдельных зернах. Каждый тип таких несплошностей может разворачиваться и «залечиваться» за счет взаимодействия *зернограничных* дислокаций. Картина пластического течения может быть представлена и на *микроскопическом уровне*. Около границы отдельного зерна возникает скопление дислокаций, а напряжения от головной дислокации в скоплении передаются через границу и приводят в действие источники Франка – Рида в соседнем зерне. Пластическая деформация транслируется от зерна к зерну, а эффект упрочнения зависит от состава и температуры. Холодное деформирование осуществляют при температурах не выше $0,3T_{пл}$ (от температуры плавления). При температурах выше $0,5T_{пл}$ деформация может реализоваться путем скольжения вдоль границ зерен. С повышением температуры деформирования упрочняющий эффект постепенно исчезает. Упрочнение металла в процессе пластической деформации называют *наклепом*.

Структура металлов и сплавов при деформации. Структура деформированных поликристаллических материалов зависит от многих факторов, таких как тип упаковки кристаллической решетки, химический состав, схема и условия деформирования, степень обжатия, температура и скорость деформации. Основными механизмами реализации пластической деформации являются: скольжение дислокаций и двойникование, увеличение плотности дислокаций и их взаимодействие с другими структурными несовершенствами.

При деформировании поликристаллов с ОЦК- и ГЦК-решетками деформация зерен начинается сразу по нескольким системам скольжения и сопровождается изгибами и поворотами плоскостей скольжения. Пока общая деформация мала (до 1 %), зерна деформируются неоднородно в силу их разной ориентации по отношению к приложенным нагрузкам. По мере деформирования в металлах повышается концентрация точечных дефектов и плотность дислокаций, прежде всего, за счет генерации новых дислокаций источниками типа Франка – Рида. На ранних стадиях деформирования (3 – 5 %) у границ зерен образуются *плоские скопления* или *объемные сетки* дислокаций, имеющие плоский или пространственный характер. Образующийся тип дислокационных скоплений во многом зависит от энергии дефекта упаковки, характерного для металла, т. е. от возможности поперечного скольжения дислокаций.

С ростом степени деформации зерна постепенно вытягиваются в направлении пластического течения. По мере повышения степени предварительной деформации формируется *волокнистая структура* в направлении прокатки, и при больших степенях границы зерен различаются с трудом. Направление волокнистости зерен определяется способом деформирования.

Одновременно с ростом степени предварительной холодной деформации (более 5 %) образуется *внутризеренная ячеистая структура* с резко выраженной неоднородностью распределения дислокаций. С увеличением степени деформации размеры ячеек сохраняются практически неизменными, увеличивается лишь плотность дислокации в стенках ячеек.

Текстура деформации. Определенную ориентировку кристаллографических плоскостей и направлений под действием внешних сил называют *текстурой*. Она зависит от способа деформирования, кристаллической структуры металла, наличия примесей и условий деформирования. По способу деформирования выделяют *волокнистые текстуры* и *текстуры прокатки*. Волокнистые текстуры характерны для процессов деформирования, таких как волочение, прессование или радиальная ковка, при которых зерна вытягиваются в направлении деформации. При прокатке получается более сложная текстура: параллельно плоскости прокатки располагаются плоскость и направление решетки. Для текстур прокатки индексируется не только направление, параллельное направлению прокатки, но также определенная кристаллографическая плоскость, параллельная плоскости прокатки (листа или полосы).

Текстура, вызванная деформацией, обуславливает *анизотропию* механических и физических свойств поликристаллов. Это позволяет при нормированном выборе текстурованности материала и направления прокатки получать лист с более высокими прочностными характеристиками.

Упрочнение при холодной пластической деформации металлов. Стадийность процесса упрочнения наиболее полно выявляется при постоянно повышающемся нагружении образцов высокочистых моно- и поликристаллов с ГЦК-решеткой с низкой начальной плотностью дислокаций $\sim 10^5 \dots 10^6 \text{ см}^{-2}$ (рис. 1.19).

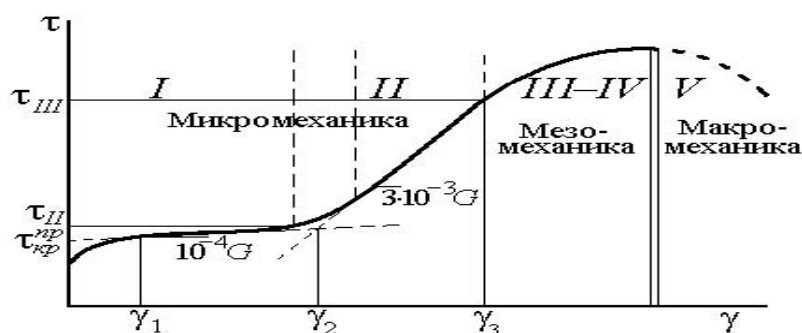


Рис. 1.19. Вид кривой «напряжение – деформация» и соответствующие масштабные уровни деформационного упрочнения

Дислокационные механизмы упрочнения. Пластическая деформация монокристалла по мере нагружения проявляет три характерные стадии на кривой «напряжение – деформация»: легкого (I), множественного (II) скольжения и параболического упрочнения (III). Основной причиной упрочнения на этих стадиях нагружения является резкое повышение плотности дислокаций, а также фрагментирование ячеистой структуры в результате взаимодействия дислокаций и преобразования их в дислокационные скопления.

Линейная стадия упрочнения I (после упругой области кривой деформации) характеризуется очень малым коэффициентом упрочнения. На поверхности кристалла формируются параллельные «атомнотонкие» следы одной системы скольжения (см. рис. 1.14, в). Они появляются сразу и независимо друг от друга, заполняя весь объем. Эта стадия кривой деформации является основной при испытаниях высокочистых ГЦК-металлов, деформирующихся по базисным плоскостям с плотной упаковкой $\{0001\}$ (Mg, Zn, Cd). Перемещение дислокаций в поле напряжений происходит по параллельным плоскостям скольжения, пересечение между ними отсутствует. Низкая степень деформационного упрочнения и характер скольжения дислокаций в непересекающихся плоскостях скольжения дали основание для определения I стадии как *стадии легкого скольжения*.

Стадия множественного скольжения при упрочнении ГЦК-кристалла проявляется по достижении критической плотности линий скольжения при деформации γ_2 . Накопление дислокаций и их взаимодействие в нескольких системах вызывает множественное скольжение – линейное упрочнение с высоким коэффициентом упрочнения (II стадия). Характерной для II стадии упрочнения является *фрагментация* дислокационной структуры. Взаимодействующие между собой дислокации различных систем скольжения формируют вначале рыхлые границы ячеек. Их уплотнение приводит к образованию плоских субграниц с разворотом ω ($1...2^\circ$) и свободных от дислокаций фрагментов толщиной \sim

0,1...0,5 мкм. Вторичное скольжение поворачивает «старые» полосы из первичной плоскости скольжения. Как только главным фактором упрочнения станут поля скоплений дислокаций, наступает II стадия упрочнения, а напряжение течения определяется плотностью этих скоплений дислокаций ρ .

Коэффициент упрочнения не зависит от плотности дислокаций в скоплениях: ячеистая структура, которая, раз сформировавшись, сохраняет неравномерность распределения дислокаций между объемом и границей ячеек (1:5) при любой большей деформации.

Стадия параболического упрочнения III проходит при достаточно высоких плотностях дислокаций, когда часть дислокаций теряется из-за реакций между ними и аннигиляции (*динамический возврат*). Коэффициент упрочнения θ_{III} монотонно убывает.

По следам скольжения и дислокационной структуре стадии II и III мало отличимы. Однако полосы скольжения на III стадии короче, а реакции встречи дислокаций с препятствиями характеризуются *поперечным* (вихревым) скольжением – появлением грубых полос скольжения с частыми следами поперечного сдвига, а при высокой температуре – *переползанием*. Степень развития этого явления зависит от величины энергии упаковки металла. При относительно малой энергии дефекта упаковки металла (например, медь) для поперечного скольжения необходима значительная энергия активации, и III стадия при комнатной температуре достигается при больших напряжениях. При большой энергии дефекта упаковки (например, алюминий) III стадия упрочнения при комнатной температуре начинается рано.

Мезо- и макроструктурные механизмы упрочнения. К ним относят стадию слабого деформационного упрочнения IV и стадию V (см. рис. 1.19), связанную с образованием шейки. Эти стадии связаны с потерей сдвиговой устойчивости нагруженного твердого тела и имеют собственную стадийность преобразования структуры.

Ячеистая структура практически заканчивает свою эволюцию при истинной деформации $e \sim 0,3...0,4$, общая плотность дислокаций достигает $1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, ячейки размельчаются до 0,2 мкм. Более высокие деформации *не ведут* к приросту плотности дислокаций, а меняют структуру при небольшом упрочнении. Границы ячеек никак не связаны с определенной кристаллографической плоскостью. В результате разворот границ нарастает до их полной непроницаемости,

превращая их в монокристалле в границы наклона с большим углом разориентировки. *Появление в монокристалле границ зерен* – результат самоорганизации течения на мезоскопическом уровне 10 – 100 мкм, т. е. много большего характерного элемента структуры (фрагмента $d_{\phi} < 1$ мкм), но много меньшего размера образца. Такая микроструктура формируется из дисклинаций, а главное отличие этого этапа деформирования – масштабы и эволюция мезоструктуры.

Если сразу инициировать пластическое течение на мезоуровне, то стадийность на диаграммах « σ – ε » проявляется в такой последовательности: одиночное движение мезополос; множественное движение мезополос; вихревое движение мезообъемов в пределах мезоструктуры (параболическое упрочнение).

Образование шейки на макромасштабном уровне также характеризуется тремя стадиями падения упрочнения. На начальной стадии развиваются непересекающиеся и далеко расположенные друг от друга макрополосы деформации, что сопровождается высокой скоростью снижения коэффициента упрочнения $\Delta\sigma/\Delta\varepsilon$. Затем сопряженные макрополосы соединяются своими концами, образуя между собой трехгранную призму, а развитие макрополос сопровождается внедрением призмы внутрь образца ($\Delta\sigma/\Delta\varepsilon$ изменяется слабо). Наконец в области трехгранной призмы и прилегающего материала интенсивно развивается фрагментация образца – в области шейки формируется вихревая диссипативная структура. Эта стадия характеризуется быстрым падением приложенного напряжения и коэффициента $\Delta\sigma/\Delta\varepsilon$. На данной стадии формирования структуры зарождается трещина и распространяется по ее границам.

Дислокационные механизмы упрочнения для металлов с ОЦК-упаковкой, сплавов, твердорастворное упрочнение, зернограничное упрочнение описаны в работе [8].

Влияние холодной пластической деформации на свойства металлов. В результате холодного пластического деформирования металла (наклепа) изменяются его механические и физические свойства, и тем сильнее, чем больше степень деформации.

По мере роста степени предварительной деформации увеличиваются прочностные характеристики (твердость, σ_s , $\sigma_{0,2}$), понижаются пластичность и ударная вязкость (δ , ψ , KCV) (рис. 1.20).



Рис. 1.20. Характер изменения свойств после холодной пластической деформации металлов

Металлы интенсивно наклепываются в начальной стадии деформирования.

Наиболее интенсивное упрочнение характерно для металлов и сплавов с ГЦК-решеткой с минимальной энергией дефектов упаковки – аустенитной стали, никеля.

С увеличением степени деформации предел текучести $\sigma_{0,2}$ растет быстрее временного сопротивления σ_s : временное сопротивление удается повысить в 1,5...3 раза, а предел текучести – в 3...7 раз.

У сильнонаклепанных металлов иссякает запас пластичности – соотношение $\sigma_{0,2}/\sigma_s$ стремится к единице, а удлинение – к нулю. Такое состояние является предельным, и при попытке продолжить деформирование металл разрушается.

Снижение пластичности при наклепе улучшает обрабатываемость резанием вязких и пластичных материалов (латунь, сплавы алюминия и др.). Наклепанный металл запасает 5...10 % энергии, затраченной на деформирование. Запасенная энергия тратится на образование дефектов решетки (плотность дислокации возрастает до $10^9 \dots 10^{12} \text{ см}^{-2}$) и на упругие искажения решетки. Деформация в поликристаллических материалах развивается неоднородно, так как отдельные зерна имеют различную ориентировку и не находятся при деформировании в поле одноосной системы напряжений. Деформация неравномерно распределяется не только в объеме тела между зернами, но и внутри зерен и отдельных дефектов. Из-за неоднородности деформации в металлах, согласно классификации Н.Н. Давиденкова, возникают различного уровня *внутренние остаточные напряжения* – I, II и III рода. По протяженности

силового поля после снятия нагрузки остаточные напряжения I рода (макронапряжения) уравниваются в пределах объема тела, II рода (микронапряжения) – в пределах одного порядка с размерами зерен и пачек скольжения и III рода (искажения кристаллической решетки) – в пределах небольших групп атомов.

Особое значение имеют величина и распределение *поверхностных* остаточных напряжений после наклепа с градиентом напряжений, часто значительно превышающим предел текучести материала. Образование остаточных напряжений в результате неоднородного пластического деформирования встречается во многих технологических процессах (ковка, штамповка, прокатка, волочение, механическая обработка). В высокопрочных материалах это может привести к разрыву готовой заготовки. Поэтому уровень остаточных напряжений (искажений) часто предопределяет эксплуатационные характеристики деформированных материалов и выбор технологии их обработки. Например, для благоприятного распределения остаточных напряжений используется поверхностный наклеп (обкатка роликами, обдувка дробью или обработка специальным инструментом и др.). В результате в поверхностном слое возникают напряжения сжатия, а под ним, на большем расстоянии от поверхности, – напряжения растяжения. Сжимающие напряжения в поверхностных слоях повышают их вязкость, замедляют зарождение усталостных трещин и тем самым увеличивают долговечность работы деталей.

Пластическая деформация влияет на физические и некоторые химические свойства металлических материалов. С увеличением степени деформации повышается удельное электросопротивление (на 2...6 %), у ферромагнетиков, к которым относится большинство сталей, понижаются магнитная проницаемость и остаточная индукция, возрастает коэрцитивная сила. У сплавов такие зависимости могут быть более сложными. Наклеп повышает химическую активность металлов, они легче растворяются в кислотах и склонны к коррозионному растрескиванию. Образование текстуры при деформировании вызывает анизотропию свойств.

1.4. Влияние нагрева на структуру и свойства металлов

Возврат и рекристаллизация. В процессе получения изделий из металлов и сплавов холодным деформированием теряется пластичность, накапливаются значительные остаточные напряжения.

Восстановление свойств и переход металла в более стабильное состояние происходит при нагреве. По мере нагрева холоднодеформированного металла проходит серия структурных изменений – возврат, рекристаллизация и рост зерен (рис. 1.21).

Метастабильное состояние деформированного металла вызвано высоким уровнем накопленной внутренней энергии и плотностью (концентрацией) дислокаций и точечных дефектов. Кинетика микро- и субструктурных изменений при нагреве прокатанного на 85 % сплава Al – 0,8% Mg показана на рис. 1.22. После холодной деформации сильно выражена волокнистость зерен в направлении прокатки

(рис. 1.22, а), субструктура формируется из сетки ячеек и стенок между ними с очень высокой плотностью дислокаций до 10^{12} см⁻² (рис. 1.22, а').

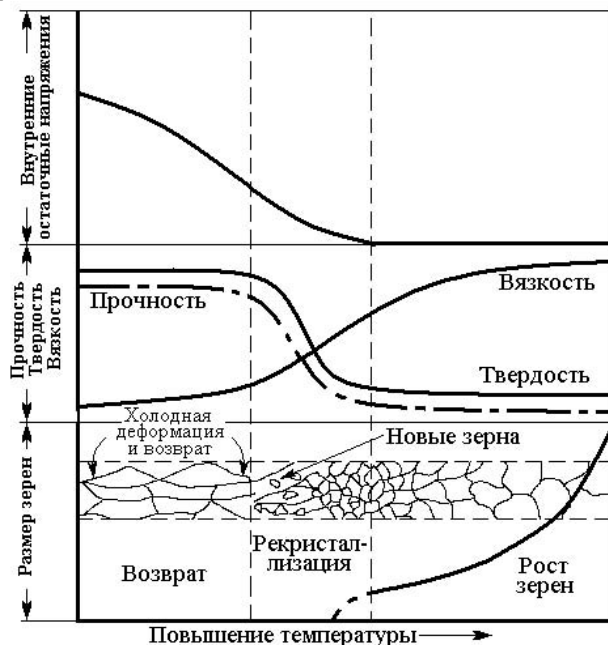


Рис. 1.21. Влияние нагрева (отжига) на изменение структуры и свойств холоднодеформированного металла

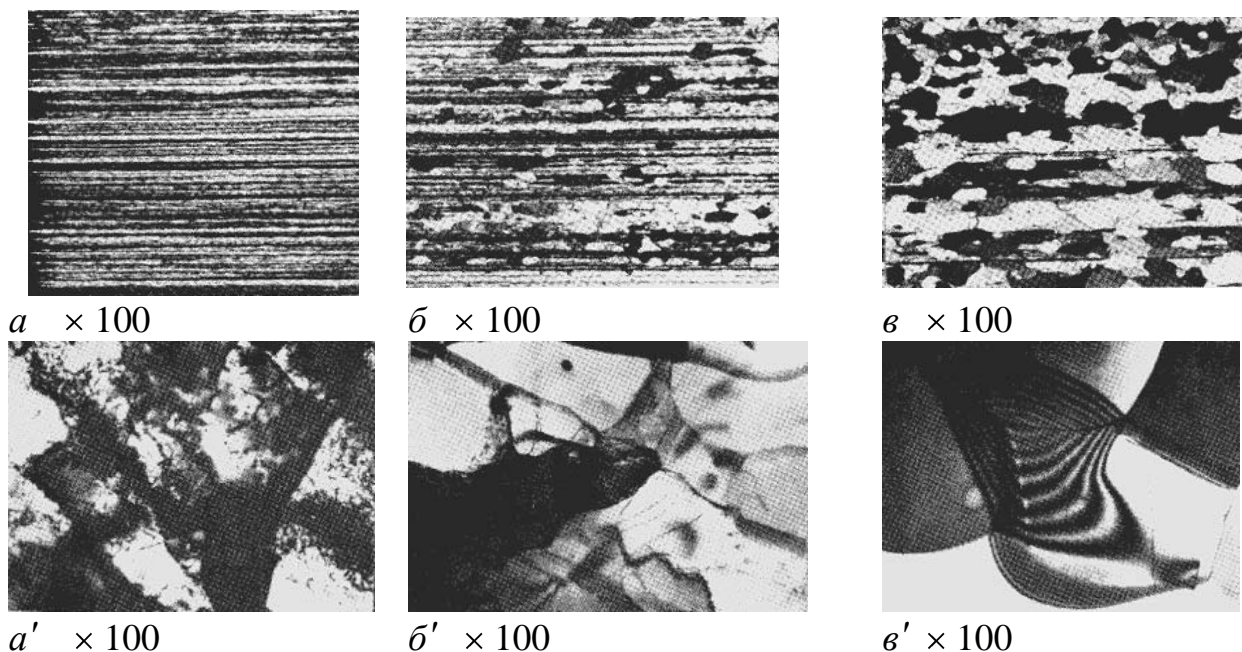


Рис. 1.22. Влияние нагрева на микроструктуру деформированного на 85 % сплава Al – 0,8% Mg:

a, a' – после деформации; *б, б'* – после деформации и последующего нагрева при 302 °С, 1 ч; *в, в'* – после деформации и последующего отжига при 316 °С, 1 ч. (After “Metals Handbook”, vol. 7, 8th ed. American Society for Metals, 1972, p. 243)

Возвратом называют все изменения тонкой структуры и свойств при нагреве, которые не сопровождаются изменениями микроструктуры деформированного металла, т.е. размера и формы зерен. При нагреве холоднодеформированного сплава в области температур возврата (ниже температур рекристаллизации) внутренняя энергия и уровень остаточных напряжений снижаются в связи с частичной аннигиляцией дислокаций и их перераспределением в низкоэнергетические конфигурации. При температурах до $0,2T_{пл}$ стадию возврата называют *отдыхом*. В этом интервале температур происходит снижение избыточной концентрации точечных дефектов (аннигиляция вакансий и межузельных атомов), миграция вакансий к дислокациям и их локальное перераспределение. Это приводит к уменьшению остаточных напряжений и к повышению плотности металла. Изменение свойств начинается с самого начала отжига, без инкубационного периода. Механические свойства при отдыхе меняются незначительно, максимально до 10...15 % от исходного состояния.

Сохраняя волокнистую форму зерен (см. рис. 1.22, *б*), нагрев способствует формированию в них субструктуры, содержащей сетки дислокаций и малоугловые границы (см. рис. 1.22, *б'*). Процесс

формирования субзерен, разделенных малоугловыми границами, называют *полигонизацией*. Восстановление прочностных свойств и вязкости металлов на этой стадии нагрева деформированного металла незначительно (см. рис. 1.21). При дальнейшем нагреве до определенных температур в холоднодеформированном металле зарождаются и растут новые зерна на фоне полосовой структуры вдоль прокатки (см. рис. 1.22, б и в). Процесс зарождения и роста новых зерен с меньшим количеством дефектов строения называют *рекристаллизацией*. В результате рекристаллизации образуются новые, чаще равноосные, зерна и наблюдается рост субзерен (см. рис. 1.22, в'). Для начала высокотемпературной стадии возврата – *полигонизации* – в наклепанных металлах технической чистоты необходим нагрев до $0,3...0,35T_{пл}$, в сплавах – до более высоких температур. Полигонизация сопровождается перестройкой дислокационной структуры с образованием малоугловых границ, угол разориентировки обычно не превышает 10° . Перераспределение дислокаций, беспорядочно расположенных в деформированном металле, осуществляется при нагреве не только скольжением, но и переползанием дислокаций. Области между границами с низкой плотностью дислокаций называют субзернами или фрагментами.

Стабилизирующая полигонизация развивается в монокристаллах и крупнозернистых поликристаллах после небольших пластических деформаций. Она формирует субзерна, разделенные плоскими малоподвижными дислокационными стенками, весьма устойчивыми при дальнейшем нагреве. Если процесс достаточно полно завершился после отжига при $(0,3...0,35)T_{пл}$, то при дальнейшем нагреве даже при более высокой температуре рекристаллизация не развивается. Такая термическая обработка находит широкое использование: для упрочнения и одновременного снижения остаточных напряжений (например, для наклепанных латуней отжиг при $\sim 300^\circ\text{C}$ устраняет растрескивание); для повышения жаропрочности изделий; для обеспечения достаточной пластичности и высокой прочности при термомеханической обработке сталей за счет *динамической полигонизации* в процессе деформирования. Закрепление дислокации атомами легирующих элементов и примесей, образование дефектов упаковки, уменьшение концентрации вакансий, что затрудняет

переползание дислокации, – все это замедляет развитие полигонизации в сплавах.

Предрекристаллизационная полигонизация развивается в сильнонаклепанных металлах с ячеистой дислокационной структурой. Дислокационные стенки при нагреве уплотняются, сохраняя значительную кривизну и подвижность. Отдельные субзерна могут увеличиться и стать центрами первичной рекристаллизации. В этом случае полигонизация является начальной стадией первичной рекристаллизации.

В зависимости от температуры нагрева и выдержки различают три стадии рекристаллизации: первичную, собирательную и вторичную.

Первичная рекристаллизация связана с зарождением и ростом в деформированном металле более совершенных зерен с высокоугловыми границами и заканчивается образованием новой поликристаллической структуры. Для начала первичной рекристаллизации степень предварительной деформации наклепанного металла должна быть больше критической $\varepsilon_{кр}$ (рис. 1.23, а). *Степень критической деформации* соответствует минимальной степени деформации, выше которой при нагреве становится возможной первичная рекристаллизация. При нагреве холоднореформированного металла, когда его деформация ниже критической, еще не формируется ячеистая дислокационная структура, способная создать зародыши рекристаллизации.

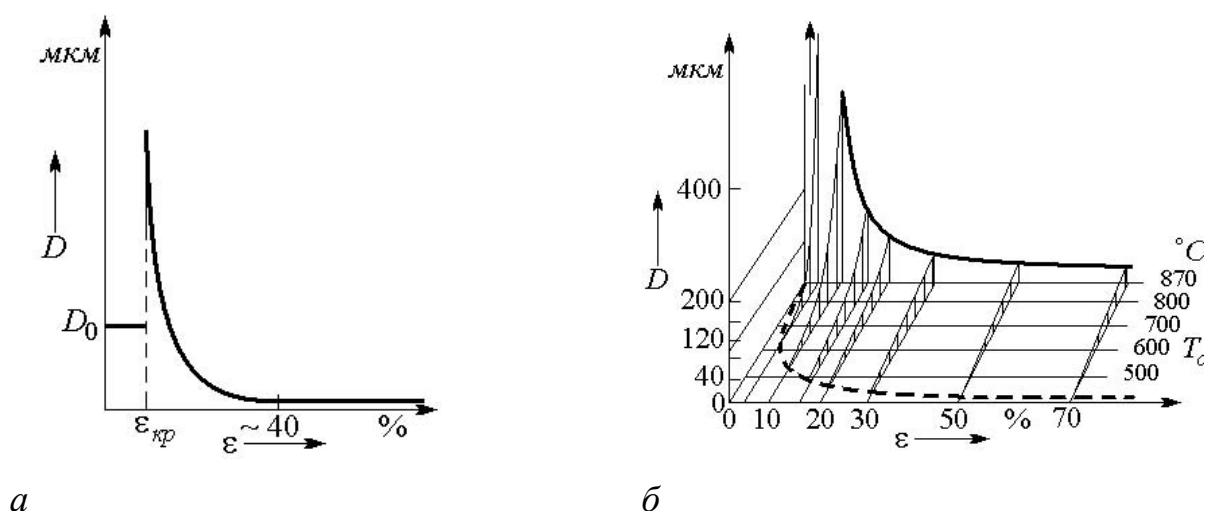


Рис. 1.23. Зависимость размера зерна D рекристаллизованного металла от степени предварительной деформации (а) и диаграмма рекристаллизации технически чистого железа (б):

D_0 – размер исходного зерна

Связь между абсолютной температурой начала рекристаллизации $T_{рекp}$ и температурой плавления металла $T_{пл}$ впервые установлена А.А. Бочваром (1927 г.):

$$T_{рекp}/T_{пл} = \text{const} \quad (\text{или } T_{рекp} = aT_{пл}).$$

Коэффициент a определяет степень чистоты металла¹: для высокочистых металлов $a \sim 0,1...0,2$; для металлов технически чистых – $0,3...0,4$; для твердых растворов – $0,5...0,6$; для тугоплавких металлов и сплавов – $0,7...0,8$. С увеличением степени деформации коэффициент a уменьшается.

На стадии первичной рекристаллизации зародыши новых зерен возникают в местах наибольшей локальной деформации – на стыке границ зерен. Зерна растут за счет движения высокоугловых границ через наклепанный металл. В таком зерне плотность дислокации и других дефектов минимальна, в наклепанном металле – максимальна. Первичная рекристаллизация заканчивается при полном замещении новыми зернами всего объема деформированного металла, последний приобретает равновесную структуру с минимальным количеством дефектов кристаллического строения. Свойства металла после рекристаллизации близки к свойствам отожженного металла. Первичная рекристаллизация ускоряется при высоких скоростях нагрева (~ 1000 °C/с, индукционный нагрев или непосредственное пропускание электрического тока через наклепанный металл), где она развивается и заканчивает формирование мелкозернистой структуры за несколько секунд вместо нескольких часов.

Собирательная рекристаллизация представляет собой самопроизвольный процесс роста зерен, образовавшихся на стадии первичной рекристаллизации, за счет соседних зерен. Термодинамическим стимулом для роста зерен является минимизация поверхностной энергии, связанная с уменьшением протяженности суммарной поверхности зерен. Рост зерен замедляется, когда примесные атомы находятся в твердом растворе или образуют частицы избыточной фазы, с повышением температуры рост зерен

¹ Под степенью чистоты понимается доля основного металла в твердом растворе, в % (например, Al – 99,7; 99,9; 99,99 ...)

ускоряется. Собираетельная рекристаллизация тормозится, когда зерна становятся многогранниками с плоскими гранями, а углы между соседними гранями составляют 120° .

Вторичная рекристаллизация – это стадия неравномерного роста одних зерен по сравнению с другими. В результате формируется конгломерат зерен-гигантов, резко различных по размерам. Механические свойства подобной разнотернистой структуры хуже, чем свойства однородной структуры рекристаллизованного металла. Вторичной рекристаллизации соответствуют высокие температуры нагрева наклепанного металла.

Хорошо известно, что механические свойства во многом определяются размером зерен в металлах и сплавах. Мелкозернистые металлы и сплавы обладают повышенной прочностью и пластичностью, крупнозернистые техническое железо и трансформаторная сталь обеспечивают наиболее высокие магнитные свойства, жаропрочные сплавы используются с определенным, нормированным размером зерен. Размер зерен, образующихся в результате рекристаллизации, зависит от химического состава сплава, размера исходного зерна, скорости нагрева и от определяющих процесс факторов – степени пластической деформации и температуры, при которой происходила ре-кристаллизация. Увеличение выдержки при нагреве также способствует росту зерен, но эффект значительно меньше, чем при повышении температуры нагрева. Зависимость размера зерен D от степени предварительной пластической деформации ε и от температуры последующего рекристаллизационного отжига $T_{отж}$ при его одинаковой продолжительности представляют при помощи диаграмм рекристаллизации I рода (см. рис. 1.23, б). Такие диаграммы позволяют выбрать в первом приближении режим рекристаллизационного отжига.

Рекристаллизованные металлы, как правило, однородны по свойствам и анизотропии не обнаруживают. Однако в некоторых случаях возможна предпочтительная кристаллографическая ориентация зерен, которую называют *текстурой рекристаллизации*. Она определяется составом, способом предшествующей обработки (прокатка, волочение и т.д.) и условиями проведения отжига. В зависимости от температуры отжига текстура рекристаллизации

может либо сохранять текстуру деформации (например, ГЦК-металлы при низкой температуре), либо формировать отличную текстуру рекристаллизации или ее устранять (например, Cu, Al, Fe и другие металлы при высоких температурах отжига).

В ряде случаев возникающая анизотропия свойств нежелательна. При глубокой штамповке листы должны деформироваться во всех направлениях одинаково для устранения технологических дефектов – складчатости, волнистой кромки и т.д. С другой стороны, вызванная текстурой анизотропия имеет определенное практическое значение для сплавов с особыми физическими свойствами, когда требуется улучшить свойства в определенном направлении изделия. Например, в листах трансформаторной стали образование текстуры дает возможность уменьшить потери на перемагничивание по определенным направлениям листа.

Рекристаллизация многофазных сплавов – более сложный процесс. На зарождение и рост размера новых зерен влияют различия свойств каждой фазы, характер структуры и объемные соотношения между фазами, размер частиц второй фазы и их дисперсность.

Горячая обработка металлов давлением. В зависимости от температуры обработки и скорости деформации различают процессы холодной, теплой и горячей обработки металлов давлением.

Сопротивление деформации – это напряжение одноосного растяжения (сжатия), при котором осуществляется пластическая деформация. *Горячую деформацию* производят при температурах выше $0,6T_{nl}$ (при температурах выше температуры рекристаллизации). Основную роль играют процессы разупрочнения, когда с большой скоростью развиваются *динамические* процессы возврата, полигонизации и рекристаллизации.

При холодном деформировании сопротивление деформации σ возрастает по мере роста степени деформации ε (рис. 1.24, кривая 1), при горячем – характерна стадия установившегося течения (рис. 1.24, кривые 2, 3), когда величина σ перестает зависеть от ε . После стадии упрочнения за счет роста плотности дислокаций (A) идет эффективное разупрочнение с различной глубиной (B и C). На стадии установившегося течения

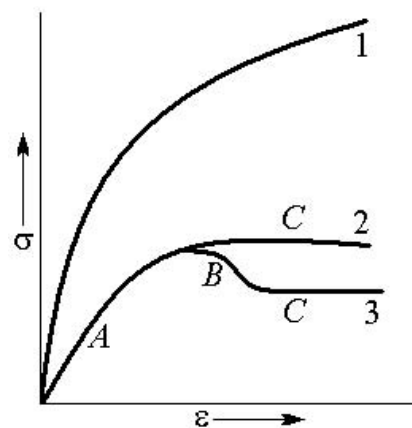


Рис. 1.24. Зависимость сопротивления пластическому деформированию от степени холодной (1) и горячей (2, 3) деформации

(участок C на кривых 2 и 3) упрочнение и разупрочнение практически компенсируют друг друга.

Совокупность процессов упрочнения и разупрочнения, их последовательность и полнота протекания определяют конечную структуру горячедеформированных металлов (рис. 1.25).

Начальная структура недеформированной стали состоит из равноосных зерен с малой плотностью дислокаций. На входе в пространство между валками (очаг деформации) степень деформации максимальна, быстро возникает состояние горячего наклепа, формируется волокнистая структура с высокой плотностью дислокаций. По мере продвижения металла в очаге скорость деформации падает, что создает условия для последовательного развития процессов динамического разупрочнения – возврата и рекристаллизации разупрочнения. Благодаря разупрочнению обеспечивается деформирование с большими степенями деформации за одну операцию.

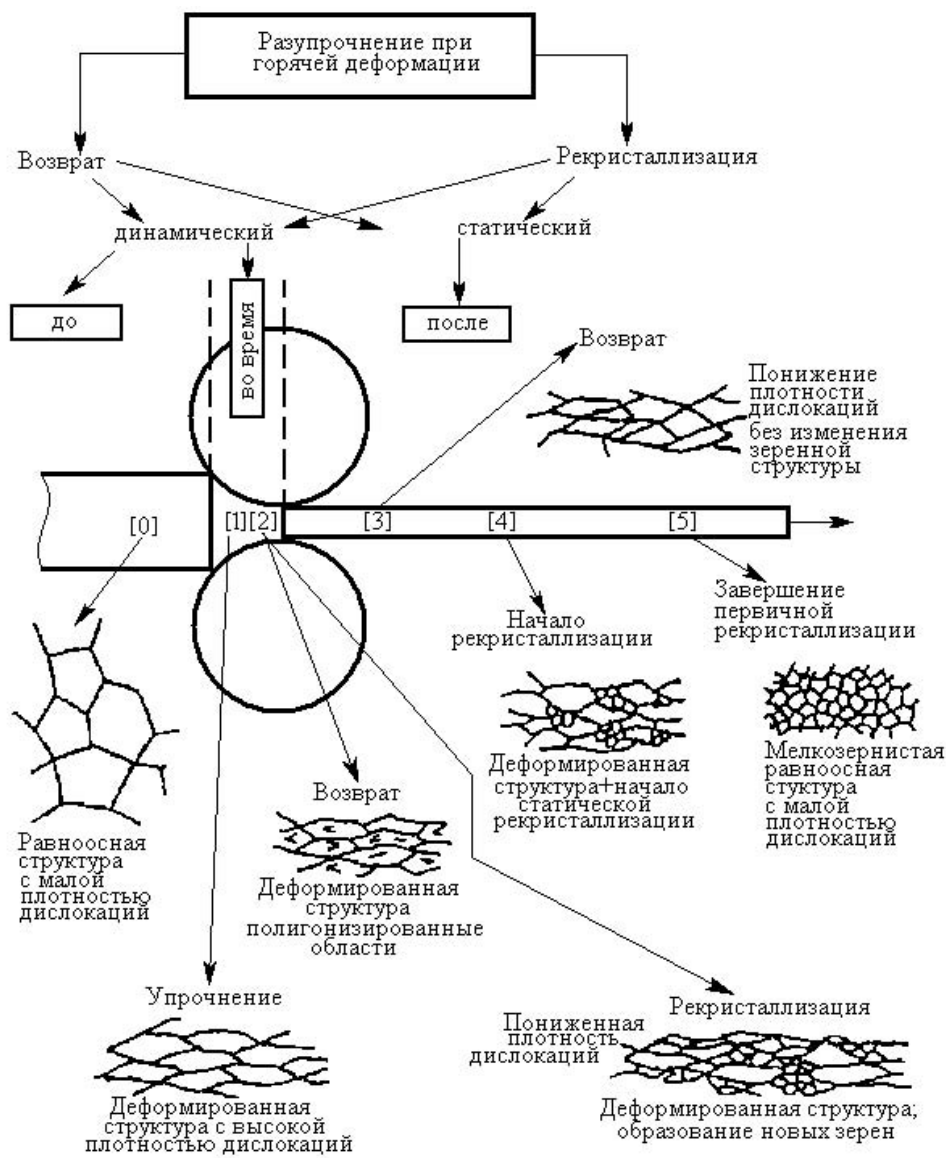


Рис. 1.25. Схема структурообразования при горячей прокатке стальной полосы в гладких валках (по Ленерту)

Возможны различные варианты развития процесса разупрочнения. Во-первых, на стадии возврата образуется субзеренная (полигонизированная) структура. Для некоторых металлов эта структура устойчива и тормозит последующую статическую рекристаллизацию. Для таких металлов процесс разупрочнения заканчивается на этом этапе. Во-вторых, в ходе горячей обработки образование субзерен подавлено, и сразу развиваются процессы динамической рекристаллизации – образование и рост зародышей новых зерен. Как правило, в условиях горячей обработки процесс формирования новых равновесных зерен не успевает завершиться и заканчивается во время

последдеформационной выдержки (паузы) или при последующем медленном охлаждении. Изменяя параметры прокатки (скорость деформации и скорость охлаждения), можно регулировать структуру металла и его свойства. Упрочнение металлов при деформировании выше $0,6T_{nl}$ можно сохранить лишь резким охлаждением, не дожидаясь снятия наклепа вследствие протекания процесса разупрочнения.

Диаграммы рекристаллизации II рода при горячей обработке металлов давлением отображают зависимости среднего размера зерна D от степени предварительной деформации ε и от температуры $T_{обр}$, при которой проводилась горячая деформация (без проведения специального последдеформационного отжига). В табл. 1.4 приведены температуры рекристаллизации $T_{рек}$, рекомендуемые температуры рекристаллизационного отжига и горячей обработки некоторых металлов давлением.

Таблица 1.4

Температуры рекристаллизации и горячей обработки некоторых металлов

Металл	$T_{рек}, ^\circ\text{C}$	Температура рекристаллизационного отжига, $^\circ\text{C}$	Температура горячей обработки давлением, $^\circ\text{C}$
Железо	450	600...700	1300...800
Медь	270	450...500	800...600
Латунь	250	400...500	750...600
Алюминий	50	250...350	450...350
Молибден	900	1400...1600	2000...1400

В большинстве случаев структурная задача горячей обработки давлением – заморозить либо полигонизированную структуру с высокой плотностью дислокаций, либо мелкое рекристаллизованное зерно (лучше их обоюдное формирование). Для этого необходимо воспроизводить исходное состояние и иметь надежные диаграммы рекристаллизации ($D, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, t$ – время), полученные на основе многомерных карт состояний в виде гиперплоскостей $\lg t(1/T, \lg \varepsilon, \lg \dot{\varepsilon})$ в линеаризующих координатах.

Теплое деформирование проводят при температурах $(0,3...0,5)T_{nl}$ в верхней температурной области холодной пластической деформации.

Основными являются процессы упрочнения при одновременно идущих процессах разупрочнения – поперечное скольжение винтовых и переползание краевых дислокаций. Главное преимущество теплой пластической деформации заключается в снижении нагрузки на инструмент в процессе обработки металла давлением за счет снижения предела текучести. Металл имеет частично рекристаллизованную структуру, что затрудняет процесс деформации с большими обжатиями и сечениями.

Примеси и их распределение оказывают значительное влияние на сопротивление металла деформированию. Сера, находящаяся в стали в виде легкоплавкой сульфидной эвтектики, при пониженных температурах горячего деформирования приводит к оплавлению границ зерен и охрупчиванию (*красноломкость*) или при повышенных температурах – к расплавлению самого сульфида (*горячеломкость*). Затрудняют обработку сплавов давлением даже малые примеси Pb, Sb, Bi, Sn, As, Si, P, а загрязнение примесями (например, серой, свинцом) делает сплав вообще непригодным для горячей обработки. Выделения избыточных фаз в виде сеток по границам зерен ограничивают возможности горячего деформирования, снижают прочностные и пластические свойства. Слитки и заготовки, имеющие литую структуру, обычно подвергаются обработке давлением в условиях горячей деформации. Одновременно с образованием волокнистой структуры при деформировании происходит вытягивание в направлении интенсивного течения металла межкристаллитных прослоек в форме прядей, содержащих неметаллические включения, – формируется *полосчатая макроструктура*. В этом случае анизотропия свойств вдоль и поперек волокна весьма значительна при больших степенях деформации.

Широкое практическое использование горячей обработки металлов давлением достигается за счет: повышения пластичности металлов путем множественного скольжения дислокаций и снижения склонности их к растрескиванию; возможности многих технических металлов и сплавов с повышенной хрупкостью деформироваться при повышенных температурах (Mg, Zn, W, Mo, системы Cu –Zn, карбиды W, грубозернистые слитки стали и т.п.); технологичности процесса, не требующего дополнительных промежуточных отжигов;

возможности получения мелкозернистой заготовки при интенсивной горячей деформации (при высокой скорости деформации образование новых зародышей рекристаллизации идет быстрее, чем рост старых зерен). Поэтому деформирование начинают при высоких температурах при максимальной пластичности металла, а заканчивают при более низких – для устранения роста размера зерна. Регулируя параметры обработки (диаграмма рекристаллизации, скорость деформации), можно получить зерно заданного размера.

В практике использования технологий горячего деформирования металлов имеются определенные ограничения. Одним из них является трудность поддержания постоянной температуры. При получении заготовок малого сечения (тонкие листы, проволока) охлаждение идет настолько быстро, что требуется специальный подогрев валков. Проблемой остается и удаление с поверхности окалины, образовавшейся при горячей деформировании. Структура металлов после горячей деформации весьма неоднородна, так как деформация распределяется неравномерно по сечению (в поверхностных слоях возникает более мелкое рекристаллизованное зерно) и при охлаждении температура внутренних слоев остается высокой, что способствует росту размера зерна. Поэтому в горячедеформированном изделии имеется градиент размеров зерен по сечению – от мелких на поверхности до крупных в центре. Расслоение деформированного металла – серьезный фактор, ограничивающий возможность использования жестких режимов деформаций сплавов на основе железа.

1.5. Виды деформации при обработке металлов давлением

Способы нагружения. Обработка давлением стала основой важных технологических процессов изготовления деталей и изменения свойств сплавов. Эффективность использования различных способов обработки металлов давлением зависит от многих факторов – от выбранной схемы внешнего нагружения, температуры, скорости деформации и т.д.

Принципиальные схемы обработки металлов давлением (рис. 1.26) реализуют различные условия внешнего нагружения тела. Согласно классификации Я.Б. Фридмана, напряженные состояния принимают

следующих типов: линейное (одноосное растяжение и сжатие), плоское (двухосное растяжение, сжатие и разноименное) и объемное (трехосное растяжение, сжатие и разноименное).

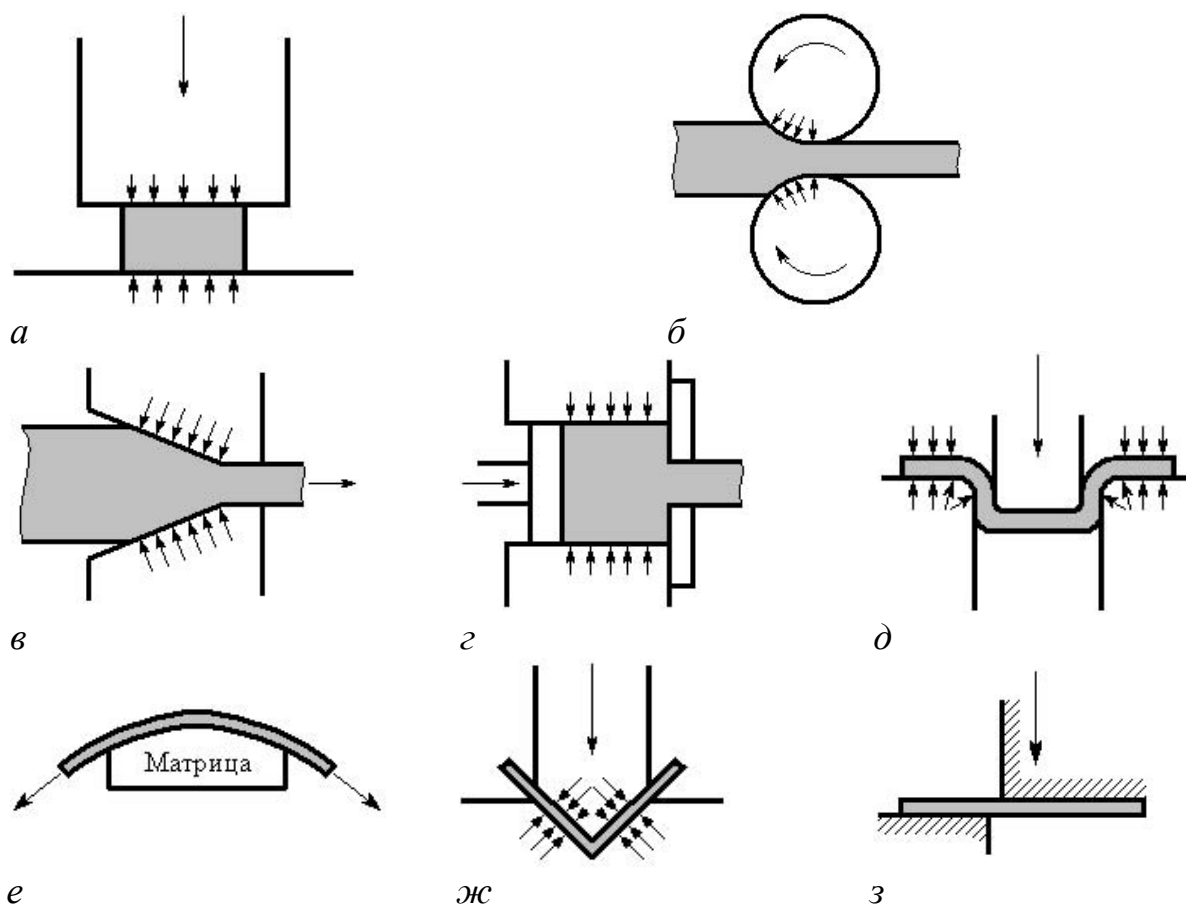


Рис. 1.26. Основные технологические схемы обработки металлов давлением:
a – осадка; *б* – прокатка; *в* – волочение; *г* – выдавливание;
д – вытяжка; *е* – протяжка; *ж* – гибка; *з* – вырубка

Схема напряженного состояния сильно влияет на характеристики пластичности (сопротивление деформированию) металла в зависимости от соотношений сжимающих и растягивающих напряжений в схеме. Сжимающие напряжения способствуют проявлению пластичности в материалах (при гидростатическом сжатии разрушения вообще не происходит). Чем больше роль сжимающих напряжений в схеме напряженного состояния, тем она считается «мягче».

Скорость деформации. Скорость деформации наряду с приложенным напряжением и температурой является фундаментальным параметром в теории пластической деформации. В широком интервале температур (не только при высокой температуре)

с увеличением скорости деформации значения предела текучести повышаются:

$$\sigma_T = k(\dot{\epsilon})^m,$$

где $\dot{\epsilon}$ – скорость деформирования; K и m – константы, зависящие от прочности материала.

Степень влияния скорости деформации на величину условного предела текучести тем больше, чем крупнее зерно. В случае повышенной температуры деформирование с малыми скоростями приводит к образованию широких полос скольжения с большими промежутками между ними, а также к увеличению пластического течения в каждой полосе. В медленнодеформированных кристаллах обнаруживается больше действующих систем скольжения, чем в кристаллах, подвергнутых быстрому деформированию. Снижение условного предела текучести при уменьшении скорости деформации или при повышении температуры связано с тем, что в обоих случаях достигается наиболее полное использование способности дислокаций к перемещению. В этих условиях процесс скольжения начинается при более низких напряжениях, и этот эффект в согласии с экспериментом тем больше, чем выше степень деформации, допускаемая при определении условного предела текучести, и чем крупнее зерно (меньше препятствий, которые тормозят или усложняют движение дислокаций).

В случае стабильной структуры сплава напряжение, вызывающее пластическое течение при повышенной температуре T , не может зависеть только от температуры или только от скорости деформации, а определяется совместным влиянием этих переменных.

Влияние скорости нагружения качественно адекватно снижению температуры деформации – *с ростом скорости деформации напряжение начала текучести материала возрастает, а пластичность падает*. На современном оборудовании для обработки давлением скорость деформации изменяется в широком диапазоне, с⁻¹: холодная прокатка (волочение) – $10 \dots 10^3$, горячая прокатка – $1 \dots 10^2$, экструзия – $10^{-2} \dots 10$, прессование – $10^{-2} \dots 10$, штамповка на гидравлических прессах – $10^{-2} \dots 10^2$, ковка на молоте – $10 \dots 10^3$, штамповка взрывом – $10 \dots 10^2$. Становится ясным, что учет влияния скорости деформации на свойства металлов необходим при проектировании процессов обработки металлов давлением.

Скорость деформации определяют как изменение степени деформации (или относительное смещение объема) в единицу

времени: $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/d\tau$, скорость деформирования – как скорость движения деформирующего инструмента. Влияние скорости деформации наиболее эффективно при горячей обработке давлением, протекающей при малых скоростях деформирования. При горячей обработке металлов давлением, кроме описанных выше процессов упрочнения и разупрочнения, проявляется *тепловой эффект пластической деформации*, когда энергия, затраченная на пластическую деформацию, превращается в основном в теплоту. Коэффициент выхода теплоты для чистых металлов – 0,85...0,90, для сплавов – 0,75...0,85, остальная часть работы расходуется на повышение внутренней энергии металла. Тепловой эффект при горячей деформации по сравнению с холодной меньше за счет меньшего выделения количества теплоты и ее малости по отношению к теплосодержанию нагретого металла. При значительных скоростях деформации за счет резкого тепловыделения в металлах могут возникать эффекты местного пережога, даже когда нагрев проводился до обычно принятых температур. Повышение скорости деформации в условиях, когда рекристаллизация в сплаве развивается медленно, может изменить характер обработки: горячая деформация может перейти в теплую, что приводит к резкому снижению пластичности и к росту напряжения текучести (например, магниевые сплавы при ковке в обычном интервале температур).

Выбор скорости деформации при режимах обработки давлением в интервале температур, близких к проявлению хрупкости в металлах, неоднозначен. Например, у технически чистого железа имеет место охрупчивание при температурах 825...1100 °С. Поэтому ковка заготовок при температурах, близких к 825 °С, с большой скоростью может привести к разогреву, когда армко-железо окажется в зоне хрупкости. И, наоборот, тот же эффект может вывести металл из зоны хрупкости при горячей деформации при температуре 1100 °С. В первом случае имеет место рост напряжения текучести и потеря пластичности, во-втором – восстановление деформационной способности металла. Для многих металлов и сплавов обнаружены критические скорости деформации, при которых они теряют пластичность и становятся хрупкими. Особый интерес вызывают методы обработки давлением при сверхвысоких скоростях деформирования (штамповка взрывом, в сильных магнитных полях и

т.п.), когда труднодеформируемые сплавы в обычных условиях допускают практически неограниченную степень деформации.

В практике обработки металлов давлением используются эмпирические соотношения зависимостей напряжения текучести от скорости деформации при заданных температуре и степени деформации. Во многих случаях при расчетах влияние скорости деформации учитывается относительным коэффициентом ψ_c , показывающим, во сколько раз возрастают напряжения течения в зависимости от скорости деформации (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Значения скоростного коэффициента ψ_c (по С.И. Губкину)

Отношение скоростей деформации $\dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1$	Температура деформации, К			
	$\frac{T}{T_{пл}} < 0,3$	$\frac{T}{T_{пл}} = 0,3 \dots 0,5$	$\frac{T}{T_{пл}} = 0,5 \dots 0,7$	$\frac{T}{T_{пл}} > 0,7$
10	1,05...1,10	1,10...1,15	1,15...1,30	1,30...1,50
100	1,10...1,22	1,22...1,32	1,32...1,70	1,70...2,25
1000	1,16...1,34	1,34...1,52	1,52...2,20	2,20...3,40

1.6. Температурно-временные условия деформирования

Кратковременный нагрев¹. Влияние температуры на свойства металлов, в том числе и на их сопротивление пластическому течению при обработке давлением, далеко не однозначно. При нагреве помимо изменения чисто физического состояния материалов могут происходить существенные изменения свойств за счет фазовых и структурных превращений. Например, при повышении температуры деформации пластичность металлов повышается, но если это сопровождается дисперсионным твердением, она уменьшается в несколько раз. Для металлов и сплавов возможны различные температурные уровни начала разупрочнения при кратковременном нагреве.

¹ При кратковременном нагреве характеристиками материалов остаются пределы упругости, текучести и прочности (при наличии шейки), равномерная деформация и сосредоточенное сужение; при длительном – скорость ползучести, предел ползучести, длительная прочность и др.

Оценка физического состояния различных материалов и их свойств должна проводиться в идентичных условиях. Обычно такие испытания проводят при одинаковых температурах и условиях нагружения и на этой основе делают вывод об их потенциальных возможностях при обработке. Это не отвечает критерию физической сопоставимости состояний материалов и условиям подобия проведения самих механических испытаний. Объективная оценка поведения материалов под нагрузкой может быть дана при условии их определения при одинаковых гомологических условиях.

Гомологические температуры и напряжения. Количественным показателем *температурного подобия* проведения механических испытаний является коэффициент гомологичности α , который определяется по соотношению $\alpha = T/T_{пл}$, где T – температура испытания, К; $T_{пл}$ – температура плавления, К. Для обеспечения физического принципа подобия испытания необходимо было бы сопоставлять свойства для меди при комнатной температуре (293 К), а для железа – при 391 К (118 °С). При фиксированном значении действующего напряжения также нельзя сопоставить физическую картину поведения различных материалов под нагрузкой. Для конкретных материалов она может отвечать напряжениям меньше, равным или больше предела текучести. В этих условиях необходим обоснованный выбор физического критерия отсчета для определения гомологических напряжений (например, в равных долях от значений предела текучести σ_T или от предела выносливости σ_{-1} при усталостных испытаниях).

Сопротивление начальным пластическим деформациям (предел текучести) существенно зависит от температуры. При достаточно низких температурах, приближающихся к абсолютному нулю, скорость разупрочняющих процессов мала: они практически не успевают пройти и повлиять на механические свойства. При высоких температурах, близких к температурам плавления, скорость разупрочнения велика – на основной атермический процесс при горячей деформации накладывается термический процесс разупрочнения. Различие между пределами текучести поли- и монокристалла более ощутимо в области холодной деформации. Особенно сильное влияние сходственной температуры на свойства проявляется в среднем интервале, обуславливающим переход от

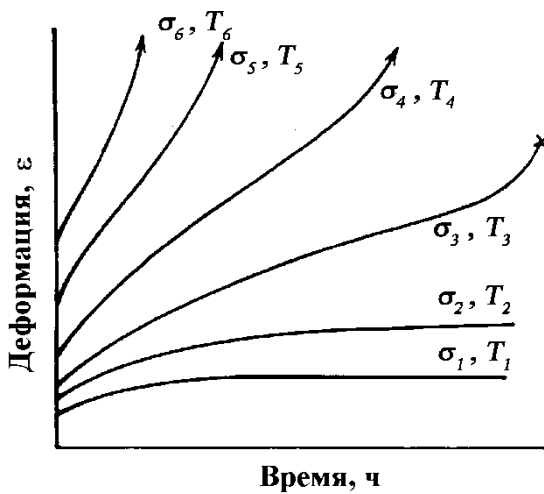
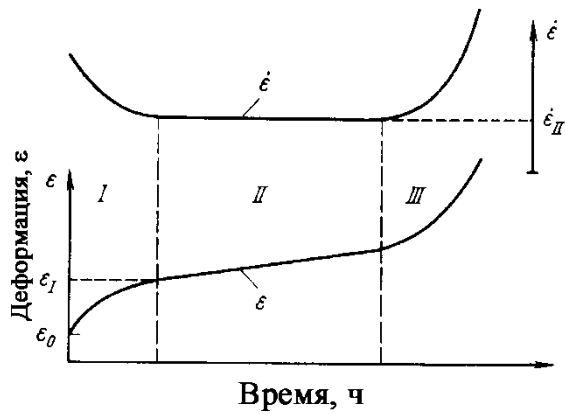
холодного деформирования к горячему и наоборот. Эти температурные интервалы во многом связаны с исходной фазовой и металлографической структурой деформируемого металла.

Общей закономерностью является факт падения сопротивления сдвигу при повышении определенной температуры за счет трансформации дислокационных, металлографических и фазовых структур и общего снижения эффективности сопротивления препятствий движению дислокаций. Однако процессы накопления пластической деформации развиваются при нагреве весьма интенсивно, когда в дело вступает временной фактор. Уменьшение предела текучести при длительном одновременном воздействии температур и напряжений определяет возможность развития явления ползучести.

Кривые ползучести. *Кинетика процесса.* Одним из наиболее ярких проявлений неупругого поведения металлов под нагрузкой является ползучесть.

Ползучесть – это медленная и непрерывная пластическая деформация материала под воздействием постоянной нагрузки. В зависимости от напряжения и температуры, а также от сопротивления, которое данный материал оказывает пластической деформации, ползучесть может постепенно прекратиться или, наоборот, продолжаться вплоть до разрушения. *Предел ползучести* – наибольшее условное растягивающее напряжение, при котором скорость (или деформация) на установившейся стадии ползучести за определенное время достигает заданной величины. Сопротивление материала разрушению под действием длительно приложенной нагрузки называют длительной прочностью. *Предел длительной прочности* – условное наибольшее напряжение, под действием которого материал при данной температуре разрушается через заданный промежуток времени.

Результаты испытаний на ползучесть при заданных температуре и напряжении принято представлять в виде *кривых ползучести* (рис. 1.27, а).



а

б

Рис. 1.27. Зависимости относительной деформации ε и скорости ползучести $\dot{\varepsilon}$:
 а – при удлинении от времени при постоянном напряжении;
 б – при возрастающих уровнях приложенных напряжений ($\sigma_6 > \sigma_5 > \sigma_4 > \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$) и температур ($T_6 > T_5 > T_4 > T_3 > T_2 > T_1$)

На этих кривых можно выделить три отчетливо выраженных участка (три стадии ползучести): I – неустановившаяся ползучесть непосредственно после приложения нагрузки – характеризуется постепенным уменьшением скорости деформации (удлинения); II – установившаяся (стационарная) ползучесть – участок с постоянной скоростью удлинения; III – стадия разрушения – незадолго до образования шейки и следующего затем разрушения. Относительное

развитие каждой стадии ползучести зависит от приложенной нагрузки σ и температуры T (см. рис. 1.27, б).

Механизмы ползучести. Ползучесть является в целом термически активируемым процессом. Во многих случаях в одно и то же время параллельно функционирует несколько механизмов ползучести. Когда каждый из них работает независимо от других, то средняя скорость ползучести

$$\dot{\epsilon} = \sum_i \dot{\epsilon}_i,$$

где $\dot{\epsilon}_i$ – скорость ползучести для i -го механизма. Если механизмы ползучести реализуются последовательно:

$$\frac{1}{\dot{\epsilon}} = \sum_i \frac{1}{\dot{\epsilon}_i},$$

то наиболее медленный из них контролирует деформацию при ползучести.

К настоящему времени проведены достаточно обширные исследования механизмов проявления ползучести в металлах и сплавах, которые позволяют выделить несколько основных.

Дислокационное скольжение вызвано движением дислокаций вдоль плоскостей скольжения и преодолением барьеров за счет термической активации. Этот механизм проявляется при высоких напряжениях ($\tau/G > 10^{-2}$).

Дислокационная ползучесть обусловлена как скольжением дислокаций, так и диффузией вакансий (область реализации составляет: $10^{-4} < \tau/G < 10^{-2}$).

Диффузионная ползучесть обусловлена течением вакансий или межузельных атомов сквозь кристалл под действием приложенных напряжений ($\tau/G < 10^{-4}$).

Диффузионная объемная ползучесть Набарро – Херринга (1948 г.) представляет случай пластической деформации, обусловленной направленным перемещением потока вакансий через зерно (или толщину образца) под действием приложенных растягивающих напряжений.

Диффузионная ползучесть по границам зерен Кобла (1963 г.) предполагает, что энергия активации диффузии по границам зерен примерно вдвое ниже, чем для самодиффузии в объеме.

Зернограничное проскальзывание вызвано скольжением границ относительно друг друга. По существу это относится к стадии разрушения, которая в условиях производства заготовок горячей обработкой не допускается.

Практическую иллюстрацию графического отражения проявления различных механизмов деформации при ползучести позволяют получить карты, разработанные М.Ф. Эшби с сотрудниками факультета прикладных наук Гарвардского университета и технических лабораторий Кембриджского университета.

Разные области карты (рис. 1.28, а) отражают доминирующий механизм деформации для заданных напряжений и гомологических температур. Границы разделов между областями отражают эквивалентную возможность реализации нескольких механизмов ползучести. Например, при гомологической температуре 0,8 и низком уровне напряжений деформация развивается путем диффузионного течения (ползучесть Набарро – Херринга). Поддерживая температуру постоянной и повышая напряжения, можно войти в область дислокационной ползучести, а при еще более высоких напряжениях – в область дислокационного скольжения.

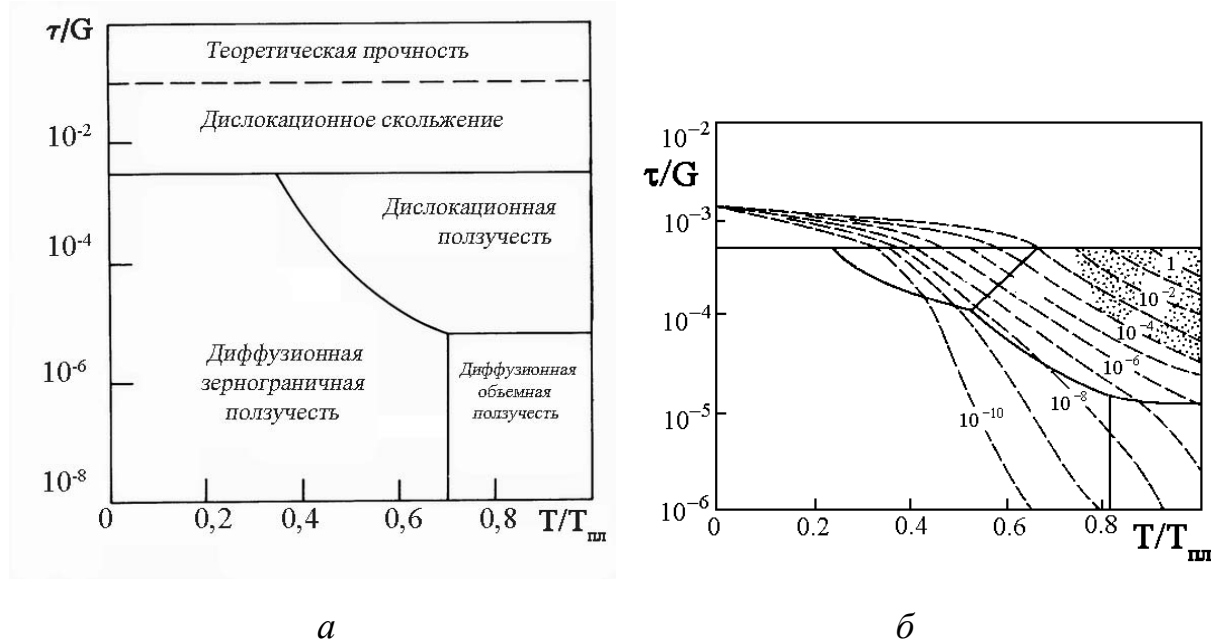


Рис. 1.28. Обобщенная карта механизмов деформации (а) и ее вид для чистого никеля с размером зерна 32 мкм

(б – на пунктирных линиях указана скорость деформации, c^{-1}).

Заштрихована область динамической рекристаллизации (M.F. Ashby, 1972 г.)

Контуры изодеформационных скоростей могут быть рассчитаны для конкретных материалов из соответствующих соотношений и нанесены на карту механизмов деформации (рис. 1.28, б).

Сверхпластичность. Способность материалов деформироваться при растяжении до чрезвычайно высоких степеней деформации, сохраняя сильную зависимость напряжения от скорости деформации, впервые отметили Бенгафом (1912 г., двухфазная латунь) и Пирсон (1934 г., эвтектический сплав $Bi - Sn$). Относительное удлинение при растяжении составляло несколько сотен и даже тысяч процентов при относительно низких напряжениях без локализации деформации и образования шейки; зерна, как правило, оставались равноосными и не изменяли своих малых размеров. Термин «сверхпластичность» (СП) ввел А.А. Бочвар (1945 г.), который и определил ведущую роль межфазной поверхности (объемного соотношения фаз) и аккомодационных процессов (залечивания) для этого вида деформации.

Выделяют три основных вида проявления сверхпластической деформации в металлах и сплавах (рис. 1.29):

1) *структурная* (микрозеренная) при температурах выше $0,5T_{пл}$, обусловленная сверхмелким зерном (< 10 мкм) и малой скоростью деформации;

2) *субкритическая* в интервале температур под критической точкой полиморфного превращения;

3) *фазовая* в процессе полиморфных превращений мартенситного типа.

Общим для всех видов сверхпластичности является высокая дисперсность зерен или фазовых составляющих, весьма развитые межзеренные или межфазовые поверхности и их способность к *аккомодации* – приспособление друг к другу за счет внутреннего формоизменения без разрушения. В настоящее время насчитывается более

200 металлических материалов, проявляющих эффект сверхпластичности, причем их список непрерывно пополняется. К ним относятся чистые металлы (Al, Cu, Fe, Ni, Ti, Zr, Pb, Be и др.) и

сплавы на их осно-ве, углеродистые, легированные и нержавеющей стали, белые чугуны.

Структурная сверхпластичность кристаллических материалов наблюдается в интервале температур $(0,6...0,85)T_{пл}$ при малых скоростях пластического деформирования порядка $10^{-5}...10^{-1}$ м/с. Наиболее полно эффект структурной сверхпластичности проявляется в материалах с ультрамелким зерном ($0,5...10$ мкм) равноосной формы при горячем деформировании металлов. При низких скоростях деформирования ($10^{-5}...10^{-4}$ м/с) металл течет равномерно, не упрочняясь; относительные удлинения достигают $10^2...10^3$ %. Чтобы реализовать сверхпластичное состояние, требуется сохранить ультрамелкие зерна в течение всего периода деформирования (порядка десятков минут). С уменьшением размера зерна интервал проявления сверхпластичности смещается в область более высоких скоростей деформирования.

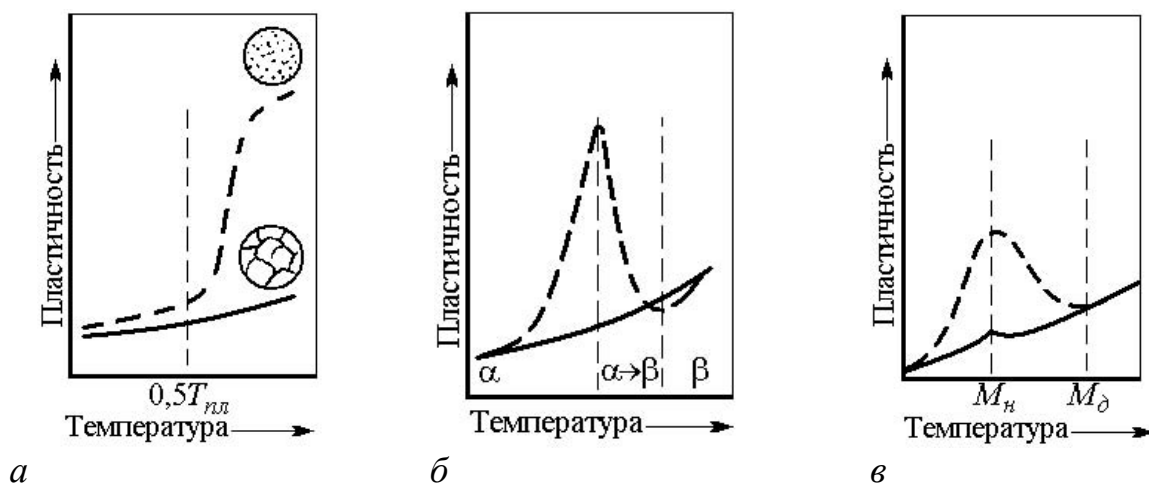


Рис. 1.29. Схемы видов проявления сверхпластичности:

а – микроструктурная; *б* – субкритическая; *в* – мартенситная для обычного (сплошные линии) и сверхпластического (пунктир) состояний (А.П. Гуляев)

Субкритическая сверхпластичность характеризуется весьма узким интервалом температур ($10...20$ град.) вблизи температуры фазового перехода $(0,9...0,98)T_{фп}$, когда межфазовая поверхность достигает своей максимальной величины, при скорости деформации около 10^{-3} с⁻¹. Здесь $T_{фп}$ – температура, при которой наблюдается равенство

свободных энергий исходной и новой фаз. Высокая пластичность сплавов проявляется в непосредственной близости к температурам полиморфного превращения типа $\alpha \Leftrightarrow \beta$ или плавления (например, вблизи точки эвтектоидного превращения A_{c1} в сталях). В этих случаях микроструктура сохраняется, но кристаллическая решетка основы сплава оказывается неустойчивой, модуль упругости уменьшается

в

2...

3 раза. Для промышленных двухфазных сплавов наилучшее сочетание их объемов фаз – 1:1, так как при этом максимальна поверхность межфазных границ, а исходная мелкозернистость сохраняется в течение всего срока изготовления изделий (эвтектические и эвтектоидные смеси, двухфазные сплавы титана и т.п.).

Фазовая сверхпластичность мартенситного типа реализуется в температурном интервале $M_H - M_D$, где M_H – температура мартенситного превращения, ниже которой образуется мартенсит при обычном охлаждении; M_D – температура этого же превращения в условиях внешнего нагружения. Аномально высокая пластичность при мартенситных превращениях наблюдается при температурах, соответствующих 50 % превращения. При этом скорость деформации выше (порядка 10^{-2} с^{-1}), чем при диффузионных превращениях.

Условия деформации. Для сверхпластической деформации характерна необычно высокая чувствительность напряжения течения к изменению скорости деформации. Показатель чувствительности m определяется из соотношения

$$\sigma = K(\dot{\epsilon})^m,$$

где K – константа для данного материала.

При сверхпластичности, в отличие от обычного состояния ($m < 0,3$), показатель m составляет 0,5...0,7 и в некоторых случаях близок к предельному значению – единице. Это определяет необходимость соблюдения баланса между скоростями деформационного упрочнения и процессов возврата, определяющих возможность аккомодации зерен. Скорость возврата должна быть больше или равна скорости деформационного упрочнения, а эффективная величина деформационного упрочнения $d\sigma/de$ близка к нулю. Наиболее полно преимущества обработки в режимах

сверхпластичности реализуются при деформации в условиях наиболее жестких схем напряженного состояния (бесфильтренное волочение, пневмоформовка, глубокая вытяжка). В режимах сверхпластичности при любом напряженном состоянии снижаются удельные давления и устраняется неоднородность деформации по сечению деталей.

Механизмы проявления сверхпластичности. В условиях сверхпластического деформирования материалы обладают весьма низкой эффективной величиной деформационного упрочнения, что свидетельствует о весьма высокой скорости возврата и о наличии динамического равновесия между этими двумя процессами.

Структурная сверхпластичность реализуется в основном за счет механизма зернограничного проскальзывания (рис. 1.30). При этом скольжение аккомодировано переносом вещества в объеме или вдоль границ.

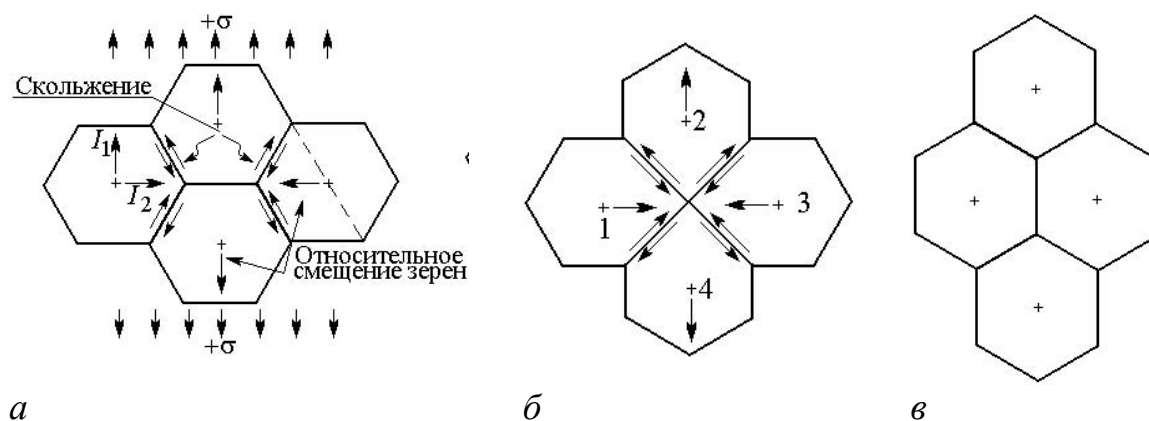


Рис. 1.30. Модель Эшби – Верралла элементарного акта деформации группы из четырех зерен путем обмена смежными зернами, скользящими относительно друг друга:

a – начальное состояние; *б* – промежуточное состояние; *в* – конечное состояние. Полная деформация равна 55 %, зерна не изменяют свою форму

Энергия, затраченная на деформацию, расходуется: на диффузию вещества для аккомодации приграничного скольжения; на процессы испускания и поглощения вакансий на межфазных границах; на приграничное скольжение; на изменение площади поверхности границы (при образовании стыка в виде шейки на рис. 1.30, *б* поверхность границы больше, чем в исходной и конечной позициях).

Дискретность процесса межзеренного проскальзывания как во времени, так и в пространстве, занимающем общий объем образца, приводит к возникновению сил, периодически вызывающих поворот отдельных зерен друг относительно друга до тех пор, пока не будет достигнута их более благоприятная ориентация относительно действующего напряжения при нагружении образца. В повороте и вращении участвует все большее количество зерен, и соответственно возрастает занимаемый ими объем.

Во всех случаях действует один механизм деформации – винтовые дислокации взаимодействуют с границами, в результате чего образуются зернограницные дислокации с векторами Бюргерса, параллельными поверхности границы, а также ступеньки на границе с перпендикулярными к ней векторами. Движение зернограницных дислокаций вдоль границы приводит к межзеренному проскальзыванию, а движение ступенек – к миграции границы. Соответственно изменяются и комбинации действующих механизмов – от скольжения по единичным плоскостям и миграции границ к зернограницному проскальзыванию с внутризеренным множественным скольжением и к обычной дислокационной ползучести. Параллельно протекают процессы восстановительной диффузии и непрерывного залечивания субмикроочагов разрушения по границам зерен (аккомодация) со скоростью, равной скорости образования этих очагов. Такими процессами аккомодации зерен при сверхпластичности могут быть диффузионная ползучесть по границам зерен (относительно низкая температура, доминирует граничная диффузия, прочностные свойства существующих фаз примерно одинаковы) или диффузионная объемная (более высокая температура, доминирует объемная диффузия, существенно разные свойства фаз).

В случае фазовой сверхпластичности контролирующим механизмом массопереноса является также проскальзывание по межфазовым границам. При этом температурный интервал области сверхпластичности резко сужается и находится в непосредственной близости к температуре перехода T_0 , а основным механизмом аккомодации при проскальзывании является вакансионная ползучесть по

Набарро –
Херрингу.

Отыскание оптимальной скорости СПД сводится к оценке скорости межзеренного проскальзывания или к определению

скорости движения дислокаций вблизи границы «матричная фаза – мартенсит».

Практическое использование эффекта сверхпластичности. Сверхпластическое состояние используют для производства изделий весьма сложной формы при помощи пневматического формования листов или объемного прессования. Ниже приведены наиболее характерные примеры использования эффекта СП при обработке металлических сплавов давлением и термомеханическом упрочнении:

<i>Объект</i>	<i>Методы обработки</i>
Изделия сложной формы и полые – типа баллонов и сильфонов из легких сплавов	Газовая и вакуумная формовка, бесфильтрованное волочение
Изделия из нержавеющей стали и труднодеформируемых сплавов	Глубокая вытяжка, формообразование в жестких штампах
Режущий инструмент (заготовки для фрез и резцов) из литой и порошковой быстрорежущей стали	Объемная штамповка, глубокая вытяжка, прессование
Изделия из высокопрочных титановых сплавов и сталей	Термомеханическое упрочнение

Во многих случаях СП является единственным ресурсом повышения деформационной способности таких традиционно малопластических материалов, как металлокерамика и дисперсно-упрочненные

Ni-Cr сплавы, например, типа ЖС6КП, инструментальные стали У8, Р6М5 и т.п. С применением СПД для термомеханического упрочнения ($\alpha + \beta$)-титановых сплавов и сталей получено рекордное сочетание прочности, пластичности и вязкости разрушения благодаря формированию мелкоблочной структуры. Помимо обработки давлением и термомеханического упрочнения эффект СП используется для сварки металлов давлением в твердом состоянии и получения волокнистых композиционных материалов методами прокатки или горячего прессования пакетов из сверхпластических металлических фольг, между которыми располагаются ряды высокопрочных керамических волокон.

Задания для самоконтроля

1. Дайте понятие упругой и пластической деформации и их характеристики.

2. Как определить суммарное значение величины пластической деформации при ступенчатом деформировании заготовки металла? Приведите пример.

3. Если известен модуль нормальной упругости Юнга материала, как найти значение его модуля сдвига?

4. В чем особенности проявления эффектов зуба текучести и Портевена – Ле Шателье при нагружении металлов и сплавов?

5. Опишите эффекты петли гистерезиса, наклепа и эффекта Баушингера при механических испытаниях материалов.

6. Что такое элементарная ячейка кристаллической решетки, какие параметры ее характеризуют? Приведите примеры металлов с разными системами упаковки атомов в кристаллической ячейке.

7. Что такое полиморфизм металлов? Приведите два-три примера.

8. Почему не соответствуют друг другу теоретическая (расчетная) и реальная прочность металлов?

9. Что такое плотность дислокаций и как она зависит от состояния материала?

10. В чем особенности геометрии краевых и винтовых дислокаций и как она контролируется вектором Бюргерса?

11. Чем различается строение мало- и высокоугловых границ зерен?

12. Назовите и охарактеризуйте объемные дефекты в кристаллах.

13. Что представляют собой линия скольжения, плоскость скольжения, полоса скольжения?

14. Что отличает процессы скольжения, двойникования и переползания дислокаций при пластической деформации?

15. Опишите механизм размножения дислокаций в поле напряжений.

16. В силу каких причин возможно взаимодействие точечных и линейных дефектов в кристаллах?

17. Перечислите и опишите основные стадии деформационного упрочнения на диаграммах деформации моно- и поликристаллических ГЦК-металлов.

18. Опишите основные стадии кривой деформации на мезоуровне.
19. Как изменяются механические характеристики металлов в процессе пластического деформирования?
20. В каких объемах уравниваются внутренние напряжения I, II и III рода?
21. Что такое текстура деформации и ее роль в формировании свойств?
22. Определите температуры начала рекристаллизации для технически чистых металлов – железа и меди.
23. К каким структурным изменениям в холоднодеформированных металлах приводит процесс полигонизации?
24. В чем различие диаграмм рекристаллизации I и II рода?
25. Возможен ли наклеп металла, если деформация осуществлена при температурах выше температуры рекристаллизации?
26. Что отличает процессы возврата и рекристаллизации в металлах после предварительной холодной обработки давлением?
27. Как влияет полигонизация на последующее развитие процесса рекристаллизации при нагреве металла после предварительной холодной обработки?
28. Как можно регулировать размер зерна при горячей обработке металлов давлением?
29. Опишите в общих чертах схему структурообразования в металлах при горячей прокатке.
30. Как влияет среднее напряжение на пластичность материала? Приведите примеры.
31. Как влияет увеличение скорости деформации на значения предела текучести металлов?
32. Чем различаются понятия «скорость деформации» и «скорость деформирования»?
33. Что такое тепловой эффект пластической деформации?
34. В чем заключается закон аддитивности механизмов упрочнения металлов и сплавов?
35. Какова эффективность различных механизмов упрочнения при кратковременном нагружении при повышенных температурах?

36. Что такое гомологические напряжения и гомологические температуры?

37. Приведите структурные схемы проявления основных видов сверхпластичности.

38. Чему равна эффективная величина коэффициента деформационного упрочнения в условиях сверхпластичного деформирования?

39. Укажите классы сплавов на основе железа, для которых возможны эффекты структурной и фазовой сверхпластичности при деформировании.

Часть II. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАВЛЕНИЕМ

Глава 2. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

В каждом процессе пластического формоизменения важное место занимает анализ напряженного состояния в очаге деформации. Он позволяет определить компоненты напряжений в любой точке на произвольно ориентированной площадке, оценить силовые режимы формоизменения, которые связаны с подбором оборудования, выявить опасные области возможного разрушения, рассчитать нагрузки на инструмент, которые необходимы для оценки его работоспособности. Теория напряженного состояния дает возможность рассчитать критические напряжения, связанные с потерей устойчивости деформирования и разрушением заготовки. Параметры вида напряженного состояния и их изменение дают возможность судить о деформируемости материала.

Эта глава посвящена изложению основных понятий, гипотез, допущений и соотношений, используемых в теории напряженного состояния.

2.1. Основные гипотезы

Современные теории обработки металлов давлением базируются на четырех основных гипотезах:

- 1) о непрерывности, или сплошности тела;
- 2) естественном ненапряженном состоянии;
- 3) изотропности свойств материала;
- 4) однородности свойств материала.

Ценность первой гипотезы состоит в том, что она позволяет использовать аппарат анализа бесконечно малых величин. Операции с непрерывными функциями значительно проще и практически удобнее, чем исследование совокупности отдельных дискретных частиц тела. Согласно гипотезе о естественном ненапряженном состоянии тел, при изучении напряжений и деформаций, возникающих в теле под действием некоторой системы сил, предполагается, что до приложения нагрузок напряжения в теле отсутствуют. Использование этой гипотезы позволяет изучать изменения напряжений, возникающие под действием только внешних нагрузок. Третья гипотеза допускает независимость механических свойств материалов от рассматриваемого направления. Гипотеза об однородности материала предполагает неизменность механических свойств материала в рассматриваемом объеме деформируемого тела. При отклонении от указанных выше гипотез в соответствующих разделах будут даны дополнительные пояснения.

2.2. Вектор напряжения. Нормальные и касательные напряжения

Рассмотрим тело, которое под действием некоторой системы сил находится в равновесии (рис. 2.1, *a*).

Рассечем тело какой-либо плоскостью на части A и B . Одну из них – B – отбросим. Для сохранения равновесия оставшейся части тела необходимо действие отброшенной части тела заменить системой соответствующих внутренних сил, приложенных в плоскости сечения.

Допустим, что на бесконечно малую площадку этого сечения ΔF

действует сила $\Delta \bar{P}$ (рис. 2.1, б).

Отношение $\Delta \bar{P} / \Delta F$ характеризует среднюю интенсивность распределения внутренних сил по элементарной площадке с нормалью \bar{v} .

Вектор
$$\bar{p}_v = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F} \quad (2.1)$$

называется вектором полного напряжения в данной точке на площадке с нормалью \bar{v} .

Выбрав произвольную прямоугольную декартову систему координат x, y, z , разложим вектор полного напряжения \bar{p}_v на три составляющие:

$$p_{vx} = X_v; p_{vy} = Y_v; p_{vz} = Z_v. \quad (2.2)$$

В общем случае вектор \bar{p}_v не перпендикулярен к площадке с нормалью \bar{v} . Поэтому вектор полного напряжения можно разложить на нормальное и касательное напряжения:

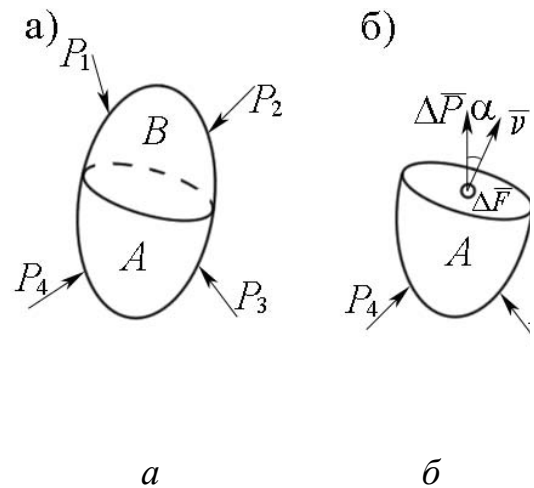


Рис. 2.1. Элементарная сила на элементарной площадке в плоскости сечения тела

$$\sigma_v = p_v \cos \alpha; \quad \tau_v = p_v \sin \alpha, \quad (2.3)$$

причем

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2. \quad (2.4)$$

Если проекции вектора полного напряжения на оси координат известны, то его величина определяется по формуле

$$p_v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}. \quad (2.5)$$

Величина нормального напряжения рассчитывается следующим образом:

$$\sigma_v = \bar{p}_v \bar{v} = X_v l + Y_v m + Z_v n, \quad (2.6)$$

где $l = \cos(v, x)$; $m = \cos(v, y)$; $n = \cos(v, z)$.

2.3. Напряженное состояние в точке

Напряженное состояние в точке будем считать известным, если известен вектор полного напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку.

Покажем, что напряженное состояние в любой точке может быть определено, если известны векторы полных напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку.

Выберем в исследуемой точке начало декартовой системы координат и рассмотрим обозначения нормальных и касательных напряжений в координатных плоскостях.

Вектор полного напряжения \bar{p}_x в координатной плоскости yOz т.е. на площадке с нормалью x , в общем случае раскладывается на три направления, параллельные осям координат:

$$\bar{p}_x \{ \sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz} \}.$$

Первый индекс указывает направление нормали площадки, второй – направление оси, на которую проектируется вектор напряжения. Аналогично для плоскостей xOz и xOy с нормальями y и z получим

$$\bar{p}_y \{ \sigma_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz} \}; \quad \bar{p}_z \{ \sigma_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy} \}.$$

Иногда в ряде случаев принимают обратный порядок индексов. Часто используются и другие обозначения составляющих вектора напряжения:

$$\bar{p}_x \{ X_x, Y_x, Z_x \}; \quad \bar{p}_y \{ Y_y, X_y, Z_y \}; \quad \bar{p}_z \{ Z_z, X_z, Y_z \}.$$

Считая девять составляющих напряженного состояния известными, можно определить проекции полного напряжения на оси координат, нормальное и касательное напряжения на некоторой площадке, проходящей через рассматриваемую точку и определяемой нормалью с направляющими косинусами l, m, n .

Рассмотрим равновесие элементарной пирамиды $OABC$, образованной тремя координатными плоскостями, проходящими

через рассматриваемую точку, и четвертой плоскостью, близкой к началу координат и имеющей нормаль \bar{v} (рис. 2.2).

Введем следующее правило знаков. Для площадок, у которых внешняя нормаль совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси, составляющие напряжения считаются положительными, если их направления совпадают с положительными направлениями координатных осей.

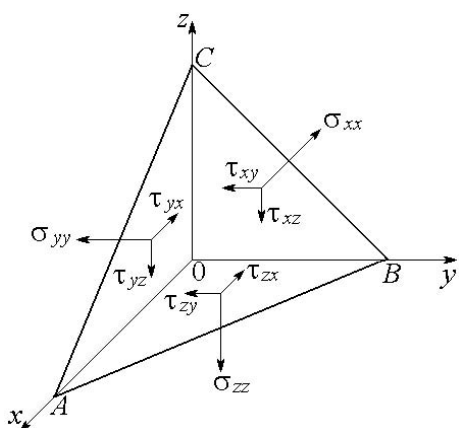
Аналогично для площадок, у которых внешняя нормаль совпадает с отрицательным направлением координатной оси, составляющие напряжения считаются положительными, если их направления совпадают с отрицательными направлениями координатных осей.

Обозначим площадь грани ABC пирамиды (рис. 2.2) ΔF , тогда площади других граней будут соответственно равны:

$$\text{площадь } BOC = \Delta Fl;$$

$$\text{площадь } AOC = \Delta Fm;$$

$$\text{площадь } AOB = \Delta Fn.$$



Составим три уравнения равновесия пирамиды:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$-\sigma_{xx} \Delta Fl - \tau_{yx} \Delta Fm - \tau_{zx} \Delta Fn + X_v \Delta F = 0. (*)$$

Рис. 2.2. Напряжения в трех взаимно перпендикулярных гранях элементарной пирамиды

Сокращая на ΔF , получаем

$$X_v = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n.$$

Аналогично могут быть получены два других уравнения равновесия. Таким образом, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \\ Y_v &= \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n; \\ Z_v &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

В уравнения равновесия не вошли объемные силы, так как они являются малыми третьего порядка, например $\rho X \Delta W = \rho X \frac{\Delta F}{3} h$, между тем как все члены первого уравнения равновесия (*) являются малыми второго порядка.

Выражения (2.7) позволяют определить полное напряжение на любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку, если известны девять компонентов напряженного состояния в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через эту точку.

Если формулы (2.7) применить к элементу, находящемуся на поверхности, они дадут зависимости, связывающие девять компонент напряжений у поверхности с внешними силами на поверхности.

Если составить еще три уравнения равновесия элементарной пирамиды: сумма моментов всех сил относительно осей координат равна нулю, то можно показать, что $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, т.е. составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, нормальные к линии пересечения этих плоскостей, равны между собой.

Таким образом, напряженное состояние в точке определяется девятью компонентами напряженного состояния, из которых шесть касательных попарно равны.

Из соотношений (2.6) и (2.7) следует

$$p_{vv} = \sigma_v = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}ln = \sigma_{ij}n_i n_j. \quad (2.8)$$

Касательная составляющая напряжения согласно выражению (2.4) определится по формуле

$$p_{vt} = \tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - \sigma_v^2}. \quad (2.9)$$

2.4. Тензор напряжений. Формулы преобразования компонент напряжений при повороте осей

При анализе технологических операций ОМД возникает необходимость рассчитать напряжения в очаге деформаций с целью определения напряжений в опасных зонах. Для этого необходимо и удобно преобразовать компоненты напряжений из одной системы координат в другую.

Допустим, что компоненты напряжений заданы в произвольной системе координат x, y, z :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_{yy} & \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} & \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{array}$$

Введем новую систему координат x', y', z' , положение которой относительно системы x, y, z задается девятью направляющими косинусами:

x			
y			
z			

Единичные орты координатных осей x, y, z и x', y', z' обозначим соответственно $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$.

Напряженное состояние в рассматриваемой точке тела в новой координатной системе определяется напряжениями

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \sigma_{y'y'} & \tau_{y'x'} & \tau_{y'z'} \\ \sigma_{z'z'} & \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} \end{array}$$

Можно показать, что эти компоненты напряжений могут быть найдены через напряжения в системе координат x, y, z по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx}l_1^2 + \sigma_{yy}m_1^2 + \sigma_{zz}n_1^2 + 2\tau_{xy}l_1m_1 + 2\tau_{yz}m_1n_1 + 2\tau_{zx}l_1n_1; \\
\tau_{x'y'} &= \sigma_{xx}l_1l_2 + \sigma_{yy}m_1m_2 + \sigma_{zz}n_1n_2 + \tau_{xy}(m_1l_2 + m_2l_1) + \\
&+ \tau_{yz}(n_1m_2 + n_2m_1) + \tau_{zx}(l_1n_2 + l_2n_1); \\
\sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx}l_2^2 + \sigma_{yy}m_2^2 + \sigma_{zz}n_2^2 + 2\tau_{xy}l_2m_2 + 2\tau_{yz}m_2n_2 + 2\tau_{zx}l_2n_2; \\
\sigma_{z'z'} &= \sigma_{xx}l_3^2 + \sigma_{yy}m_3^2 + \sigma_{zz}n_3^2 + 2\tau_{xy}l_3m_3 + 2\tau_{yz}m_3n_3 + 2\tau_{zx}l_3n_3; \\
\tau_{y'z'} &= \sigma_{xx}l_2l_3 + \sigma_{yy}m_2m_3 + \sigma_{zz}n_2n_3 + \tau_{xy}(m_2l_3 + m_3l_2) + \\
&+ \tau_{yz}(n_3m_2 + n_2m_3) + \tau_{zx}(l_3n_2 + l_2n_3); \\
\tau_{z'x'} &= \sigma_{xx}l_1l_3 + \sigma_{yy}m_1m_3 + \sigma_{zz}n_1n_3 + \tau_{xy}(m_1l_3 + m_3l_1) + \\
&+ \tau_{yz}(n_3m_1 + n_1m_3) + \tau_{zx}(l_3n_1 + l_1n_3).
\end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Зависимости (2.10) между компонентами напряженного состояния при переходе путем поворота от одной системы координат к другой позволяют рассматривать напряженное состояние в точке тела как тензорную величину.

Тензором второго ранга называется величина, определяемая девятью компонентами, для которых при переходе от одной системы координат к другой путем поворота справедливы соотношения (2.10).

Тензор напряжений имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Понятие тензора является обобщением понятия вектора, или тензора первого ранга, определяемого тремя скалярными величинами (проекциями вектора на координатные оси). В силу закона парности касательных напряжений этот тензор называется симметричным.

2.5. Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений

Можно показать, что в каждой точке тела существуют взаимно перпендикулярные плоскости, свободные от касательных напряжений и носящие название главных площадок.

Предположим, что наклонная грань ABC (см. рис. 2.2) представляет собой одну из главных площадок. Тогда на этой площадке действует только нормальное напряжение σ . Проекция этого напряжения на координатные оси равны:

$$X_v = \sigma l; \quad Y_v = \sigma m; \quad Z_v = \sigma n,$$

где l, m, n – направляющие косинусы нормали к искомой главной площадке.

Подставив эти выражения в соотношения (2.7), получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Выражения (2.11) можно рассматривать как систему трех линейных однородных уравнений относительно направляющих косинусов l, m, n .

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то l, m, n не могут одновременно обращаться в нуль.

Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела отличные от нуля решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов уравнений, равнялся нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (2.12')$$

или

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (2.12)$$

Г

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3\sigma_{cp}; \\ I_2 &= -\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \\ &\quad - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\}$$

(2.13)

Корни уравнения (2.12) дают величины искоемых главных напряжений, а уравнение называется характеристическим для тензора напряжений.

Все корни уравнения (2.12) – действительные, а площадки действия главных напряжений взаимно перпендикулярны. Если окажется, что два главных напряжения равны, например $\sigma_2 = \sigma_3$ на

площадках с нормалью \bar{v}_2 и \bar{v}_3 , то можно показать, что все площадки, нормальные к площадке с нормалью \bar{v}_1 , являются главными и нормальные напряжения в них равны между собой. Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то все площадки, проходящие через рассматриваемую точку, являются главными. Поскольку корни кубического уравнения (2.12) не зависят от выбора координатной системы, то коэффициенты этого уравнения также не зависят от выбора координатной системы. Иными словами, I_1, I_2, I_3 представляют собой инварианты напряженного состояния, т.е. не зависят от выбора исходной системы координат. В главных осях они будут иметь вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{cp}; \\ I_2 &= -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1; \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Расположение главных площадок относительно выбранной системы x, y, z определяем направляющими косинусами нормалей к главным площадкам, которые можно найти из уравнения (2.11). Для расчета, например, направляющих косинусов l_1, m_1, n_1 нормали \bar{v}_1 подставим $\sigma = \sigma_1$ в уравнения (2.11). Из этой системы определим независимые величины

$$\frac{l_1}{n_1} = a_1 \text{ и } \frac{m_1}{n_1} = b_1.$$

Величину n_1 найдем из уравнения

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Затем вычислим величины $l_1 = a_1 n_1$ и $m_1 = b_1 n_1$.

Для определения направляющих косинусов нормалей \bar{v}_2 и \bar{v}_3 необходимо в систему уравнений (2.11) подставить соответственно σ_2 и σ_3 .

Используя соотношения (2.7) – (2.9), можно показать, что в сечениях, делящих углы между главными плоскостями пополам и проходящих соответственно через главные оси 1, 2, 3, касательные напряжения достигают экстремальных значений и называются главными касательными напряжениями. Их величина находится по следующим выражениям:

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}; \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_2 - \sigma_3}; \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_3 - \sigma_1}. \quad (2.15)$$

Наибольшее из всех значений касательное напряжение в данной точке называется максимальным напряжением τ_{\max} ; если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

По формулам (2.8) можно определить величину нормальных напряжений на площадках, на которых действуют главные касательные напряжения:

$$\sigma_{12} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2}; \quad \sigma_{23} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_2 + \sigma_3}; \quad \sigma_{31} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_3 + \sigma_1}.$$

2.6. Круговая диаграмма Мора

Наглядные представления о значениях нормального σ_n и касательного τ_n напряжений в рассматриваемой точке в зависимости от ориентации площадки дает диаграмма Мора (рис. 2.3).

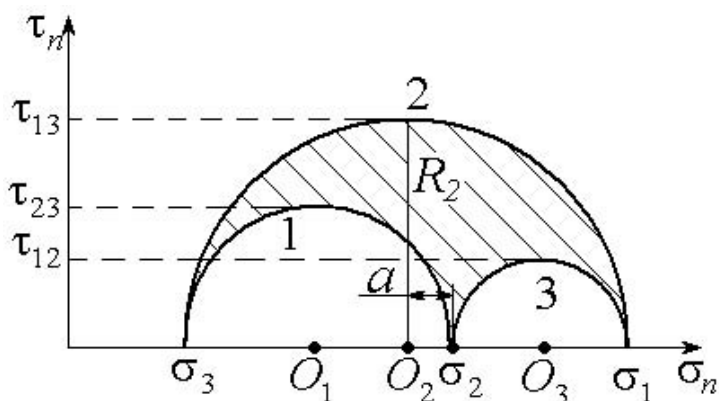


Рис. 2.3. Диаграмма Мора

Заштрихованная область вместе с полуокружностями Мора является геометрическим местом точек, характеризующих возможные значения σ_n и τ_n . Из бесчисленного множества площадок, которые могут проходить через некоторую точку, заслуживают внимания три площадки с главными нормальными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 , на которых касательные напряжения $\tau_n = 0$, а также шесть площадок с экстремальными касательными напряжениями τ_{12} , τ_{23} , τ_{13} .

Максимальное касательное напряжение $\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ действует на двух ортогональных площадках с нормальными \bar{n}_1 и \bar{n}_3 , которые делят углы между координатными главными плоскостями пополам.

Окружности 1, 2, 3, ограничивающие круговую диаграмму, являются геометрическим местом точек, координаты которых дают

величины нормальных и касательных напряжений на площадках, перпендикулярных к главным плоскостям.

Площадь, ограниченная этими окружностями, является геометрическим местом точек, изображающих напряжения на площадках, наклоненных к главным плоскостям.

2.7. Характеристика вида напряженного состояния

Одной из основных характеристик напряженного состояния является параметр Лодэ – Надаи μ_σ , определяемый по выражению

$$\mu_\sigma = \frac{a}{R_2},$$

где a – расстояние от центра окружности 2 (O_2) до точки ($\sigma = \sigma_2, \tau = 0$); R_2 – радиус окружности 2 (см. рис. 2.3).

Учитывая величины a и R_2 , находим

$$\mu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.16) видно, что при наложении на напряженное состояние равноосного растяжения или сжатия параметр Лодэ – Надаи не изменяется. Поэтому данный параметр характеризует вид напряженного состояния в точке тела с точностью до равноосного растяжения или сжатия. Параметр Лодэ – Надаи изменяется в пределах $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$:

- для одноосного растяжения

$$\sigma_1 > 0; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \mu_\sigma = -1;$$

- для одноосного сжатия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 < 0; \quad \mu_\sigma = 1;$$

- для чистого сдвига

$$\sigma_1 = -\sigma_3; \quad \sigma_2 = 0; \quad \mu_\sigma = 0.$$

2.8. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

Материалы обладают различными механическими свойствами по отношению к равномерному растяжению (сжатию) и к касательным напряжениям. Поэтому целесообразно представить тензор напряжений в виде суммы:

$$T_\sigma = \sigma_{cp} T_1 + D_\sigma, \quad (2.17)$$

$$\text{где } \sigma_{cp} T_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix} \text{ – шаровой тензор,}$$

который обуславливает изменение объема без изменения формы;

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii}.$$

Второй тензор – девиатор, который обуславливает изменение формы без изменения объема, имеет вид

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{cp} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{cp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Единичный тензор записывается как

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.9. Инварианты девиатора напряжений

Если обозначить компоненты девиатора напряжений в главных осях напряжений

$$s_k = \sigma_k - \sigma_{cp},$$

то по аналогии с инвариантами тензора напряжений можно записать инварианты девиатора:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = 0; \\ \bar{I}_2 &= -s_1s_2 - s_1s_3 - s_2s_3 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = T^2; \\ \bar{I}_3 &= s_1s_2s_3. \end{aligned} \right\}$$

(2.18)

Главные оси девиатора s_{ij} совпадают с главными осями тензора. Главные значения девиатора s_k определяются характеристическим уравнением для девиатора напряжений, которое представляет собой кубическое уравнение вида

$$s^3 - \bar{I}_2 s - \bar{I}_3 = 0; \quad s^3 + \bar{I}_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) s - s_1 s_2 s_3 = 0. \quad (2.19)$$

Важное значение в теории обработки металлов давлением имеет второй инвариант девиатора напряжений. В произвольной системе координат он записывается следующим образом:

$$T^2 = \bar{I}_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]. \quad (2.20)$$

2.10. Интенсивность напряжений

Важное значение в механике деформируемого тела имеют величины, которые называют интенсивностями нормальных и касательных напряжений. Эти величины широко используются при описании поведения различных материалов.

Интенсивность нормальных напряжений определяется по выражению

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2.21)$$

В случае линейного растяжения $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; $\sigma_i = \sigma_1$.

Интенсивность касательных напряжений находится из выражения

$$\tau_i = T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2.22)$$

В случае чистого сдвига

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau; \quad T = \tau.$$

Между интенсивностью нормальных и касательных напряжений существует связь:

$$\sigma_i = \sqrt{3}T; \quad T = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}. \quad (2.23)$$

2.11. Дифференциальные уравнения равновесия (движения)

Из твердого тела выделим бесконечно малый элемент параллелепипеда с тремя парами граней, параллельных координатным плоскостям (рис. 2.4).

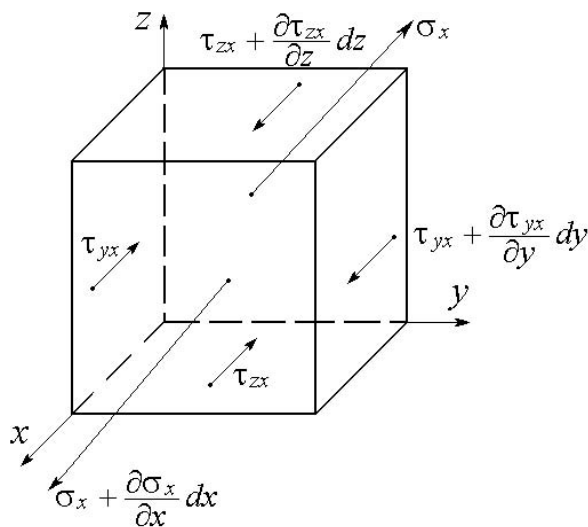


Рис. 2.4. Схема действия напряжений на площадках элементарного параллелепипеда, дающих проекции сил на ось X

Считаем, что все компоненты тензора напряжений являются непрерывными функциями координат. Так как тело находится в равновесии, то для каждого элемента должны удовлетворяться шесть уравнений:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Рассмотрим первое уравнение равновесия. На рис. 2.4 изображены только те напряжения, которые дают проекцию на ось x .

Напряжения на соседних площадках, отстоящих соответственно на расстоянии dx, dy, dz друг от друга, отличаются на бесконечно малые величины.

Пренебрегая членами высших порядков малости, можно принять, что приращение каждого напряжения выражается частным дифференциалом по той координате, по которой переместилась площадка.

Приравнивая к нулю сумму проекций сил на ось x , действующих на элемент, находим

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X \rho dv = 0. \end{aligned}$$

После преобразований и деления на $dW = dx dy dz$:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0. \quad (2.25)$$

Аналогично получим два других уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.25')$$

где x, y, z – проекции объемных сил на оси координат; ρ – плотность металла.

В сокращенных обозначениях эти уравнения запишутся

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho X_j = 0. \quad (2.26)$$

Используя уравнения равновесия

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0,$$

получаем

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

т.е. закон парности касательных напряжений.

В тех случаях, когда ускорениями можно пренебречь, дифференциальные уравнения равновесия (2.25) – (2.25') справедливы и для движущегося металла. Если этого сделать нельзя, то

необходимо учесть силы инерции и в правые части уравнений (2.25) – (2.25') ввести соответственно величины ρa_x , ρa_y и ρa_z , где a_x , a_y , a_z – проекции ускорения на оси координат.

Заметим, что для определения шести компонент напряжений имеем только три известных уравнения равновесия (движения). Остальные уравнения, необходимые для решения задачи, можно получить, используя физические свойства деформируемых металлов и геометрические соотношения.

Часто в процессах обработки металлов давлением реализуется осесимметричное напряженное состояние. Такое напряженное состояние имеет тело вращения, к поверхности которого приложены нагрузки, симметричные относительно его оси. Примером могут служить осадка цилиндрической заготовки, ее прошивка, выдавливание, волочение и др. При осесимметричном напряженном состоянии удобно пользоваться цилиндрическими координатами ρ , θ , z (рис. 2.5). Компоненты напряжений σ_ρ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\rho z}$, отличные от нуля, не зависят от координаты θ .

Выведем дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах для осесимметричного напряженного состояния. Рассмотрим равновесие выделенного элемента (рис. 2.6).

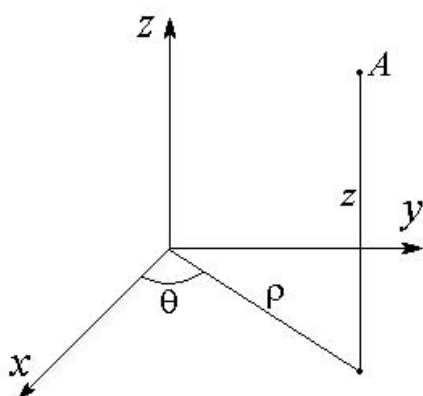


Рис. 2.5. Цилиндрическая

система

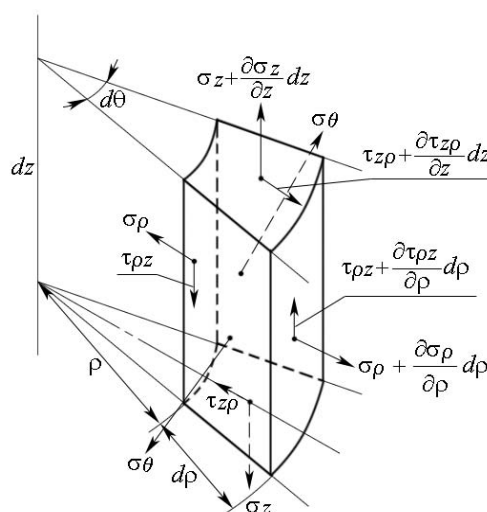


Рис. 2.6. Равновесие элемента

Проектируя все силы на оси ρ и z и принимая $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$,

запишем условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} & -\sigma_{\rho} \rho d\theta dz + \left(\sigma_{\rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} d\rho\right) (\rho + d\rho) d\theta dz - \sigma_{\theta} d\theta d\rho dz - \\ & -\tau_{z\rho} \rho d\theta d\rho + \left(\tau_{z\rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} dz\right) \rho d\theta d\rho = 0; \\ & -\sigma_z \rho d\theta d\rho + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) \rho d\theta d\rho - \tau_{\rho z} \rho d\theta dz + \\ & + \left(\tau_{\rho z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} d\rho\right) (\rho + d\rho) d\theta dz = 0. \end{aligned} \right\}$$

После преобразования получим

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

2.12. Плоское деформированное и плоское напряженное состояния

При решении многих практических задач с достаточной точностью можно считать, что в одном из направлений деформируемой заготовки относительные перемещения металла малы по сравнению с относительными перемещениями в других направлениях. В качестве примера служат объемная штамповка шатуна, коленчатого вала, осадка призматического бруса. В этих процессах продольные перемещения металла, отнесенные к единице длины, малы по сравнению с относительными перемещениями

металла в поперечных сечениях, т.е. имеет место плоская деформация металла в поперечных сечениях заготовки.

При решении других практических задач можно полагать, что в одном из главных направлений отсутствуют напряжения. Примером служит листовая штамповка. В большинстве процессов листовой штамповки напряжения, нормальные к поверхности листовых заготовок, составляют доли процентов от напряжений, возникающих в поперечных сечениях заготовок. В этих случаях имеет место плоское напряженное состояние.

Выберем систему координат x, y, z так, чтобы ось z совпала с направлением отсутствующей деформации или отсутствующего нормального главного напряжения. Тогда в первом случае будем иметь

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (\text{а})$$

во втором –

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (\text{б})$$

Компоненты напряжений не зависят от координаты z . Уравнения равновесия (2.25) при отсутствии массовых сил принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Соотношения (а), (б) и (2.28) значительно упрощают решение ряда технологических задач.

Примеры решения задач

Задача 2.1. Пластика под действием напряжений σ_1 и σ_2 растягивается по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Определить нормальное и касательное напряжения на площадке с норма-

лью \bar{v} , определяемой направляющими косинусами $l = \cos \alpha$, $m = \sin \alpha$.

Решение. Нормальное напряжение σ_v определим по выражению (2.8), в котором необходимо принять

$$\sigma_{xx} = \sigma_1; \quad \sigma_{yy} = \sigma_2; \quad \sigma_{zz} = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

$$l = \cos \alpha; \quad m = \sin \alpha; \quad n = 0.$$

$$\text{Тогда получим } \sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha.$$

Касательное напряжение τ_v вычислим по формуле (2.9). Для этого из выражений (2.7) найдём проекции полного напряжения на оси координат

$$X_v = \sigma_1 \cos \alpha; \quad Y_v = \sigma_2 \sin \alpha; \quad Z_v = 0,$$

а затем

$$\tau_v = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha - \sigma_1^2 \cos^4 \alpha - 2\sigma_1 \sigma_2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sigma_2^2 \sin^4 \alpha} =$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Окончательно получим

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad \tau_v = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Задача 2.2. В точке тела известны компоненты напряжений: $\sigma_{xx} = 5$; $\sigma_{yy} = 0$; $\sigma_{zz} = -3$; $\tau_{xy} = 5$; $\tau_{yz} = -7$; $\tau_{zx} = 8$. Компоненты напряжений даны в Н/мм².

Найти нормальное и касательное напряжения для площадки, нормаль к которой определяется направляющими косинусами

$$l = \frac{1}{2}; \quad m = \frac{1}{2}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Определим по формуле (2.8) нормальное напряжение. Затем по формулам (2.7) найдём проекции полного напряжения: $X_v = 10$; $Y_v = -2,46$; $Z_v = -1,62$.

$$\text{Полное напряжение } p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}; \quad p_v = 11,2.$$

Касательное напряжение определяется по формуле (2.9):

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}; \quad \tau_v = 10,9.$$

Задача 2.3. Напряжённое состояние в точке тела описывается тензором напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и главные оси тензора. Компоненты напряжений даны в Н/мм².

Решение. Уравнение (2.12') для определения главных напряжений будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 3 - \sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

или $(\sigma + 2)(\sigma - 4)(\sigma - 1) = 0,$

т.е. $\sigma_1 = 4; \quad \sigma_2 = 1; \quad \sigma_3 = -2.$

Положения главных осей определим с помощью уравнений (2.11). Для первого главного напряжения σ_1 имеем

$$-l_1 + m_1 + n_1 = 0;$$

$$l_1 - 4m_1 + 2n_1 = 0;$$

$$l_1 + 2m_1 - 4n_1 = 0;$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Отсюда находим

$$l_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \quad m_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad n_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Для второго главного напряжения σ_2 имеем

$$2l_2 + m_2 + n_2 = 0; \quad l_2 - m_2 + 2n_2 = 0;$$

$$l_2 + 2m_2 - n_2 = 0; \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1.$$

Решив эту систему, получим $l_2 = -m_2 = -n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Для третьего главного напряжения σ_3 имеем

$$5l_3 + m_3 + n_3 = 0; \quad l_3 + 2m_3 + 2n_3 = 0;$$

$$l_3 + 2m_3 + 2n_3 = 0; \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1.$$

$$\text{Отсюда следует } l_3 = 0; \quad m_3 = -n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задача 2.4. Определить нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке, равнонаклоненной к трем главным осям (рис. 2.7).

$$l_8 = m_8 = n_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Нормальное напряжение на октаэдрической площадке определяется по формуле (2.3):

$$\sigma_8 = \sigma_1 l_8^2 + \sigma_2 m_8^2 + \sigma_3 n_8^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{cp}.$$

Для определения касательного напряжения вычислим сначала полное напряжение:

$$p_8 = \sqrt{X_8^2 + Y_8^2 + Z_8^2},$$

$$\text{где } X_8 = \sigma_1 l_8; \quad Y_8 = \sigma_2 m_8; \quad Z_8 = \sigma_3 n_8.$$

Отсюда следует

$$p_8 = \sqrt{\sigma_1^2 l_8^2 + \sigma_2^2 m_8^2 + \sigma_3^2 n_8^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

Найдем касательное напряжение:

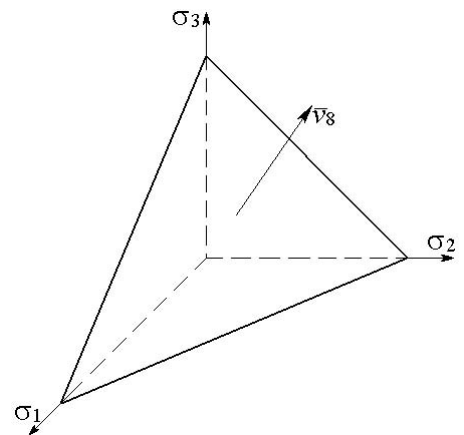


Рис. 2.7. Октаэдрическая площадка

$$\tau_8 = \sqrt{p_8^2 - \sigma_8^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Задача 2.5. В некоторой точке тела задан тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{yy} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить величину σ_{yy} , при которой вектор полного напряжения на некоторой площадке, проходящей через точку, обращался в нуль. Найти направляющие косинусы l, m, n нормали к этой площадке. Компоненты напряжений даны в Н/мм².

Решение. Так как $p_v = 0$, то $X_v = Y_v = Z_v = 0$. Для определения неизвестных согласно соотношениям (2.7) и $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ имеем

$$m + 2n = 0; \quad l + \sigma_{yy}m + n = 0; \quad 2l + m = 0.$$

Решив систему, получим

$$\sigma_{yy} = 1; \quad l = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad m = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Задания для самоконтроля

1. Назовите основные гипотезы теории обработки металлов давлением и дайте соответствующие им пояснения.

2. Приведите формулы для определения полного, нормального и касательного напряжений в точке на площадке с нормалью \bar{v} , направляющие косинусы которой l, m, n и проекции полного напряжения на оси координат X_v, Y_v, Z_v .

3. Что означает выражение «известно напряженное состояние в точке»?

4. Запишите формулы для определения напряженного состояния в точке тела.

5. Дайте понятие тензора напряжений.

6. Опишите площадки главных нормальных напряжений, их ориентации, напряжения, действующие на них. Приведите уравнение для определения их величины.

7. Приведите формулы, позволяющие найти инварианты тензора напряжений в системе координат x, y, z и в главных осях напряжений.

8. Дайте понятие площадок главных касательных напряжений, их ориентации. Запишите формулы для расчета нормальных напряжений на этих площадках.

9. Представьте тензор напряжений в виде суммы тензоров – шарового и девиатора. Приведите выражение для нахождения инвариантов девиатора.

10. Укажите формулы, по которым можно определить интенсивности нормальных и касательных напряжений.

11. Какую информацию о напряжении дает диаграмма Мора?

12. Какие характеристики вида напряженного состояния вам известны?

13. Каким образом получают дифференциальные уравнения равновесия (движения)? Запишите их в декартовой системе координат.

Глава 3. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Такие понятия, как компоненты перемещения, скоростей, деформаций, скоростей деформаций, широко используются при анализе деформированного и скоростного состояния металла, подвергнутого обработке давлением. Этот анализ дает возможность оценить неравномерность и равномерность распределения деформаций по сечению заготовки, которые определяют качество металла получаемой заготовки. С деформациями связаны механические свойства заготовки, выявление зон локальной деформации, где при определенных условиях может произойти разрушение. При известных компонентах напряжений рассчитанные компоненты деформаций и скоростей деформаций позволяют определить работу и мощность кинетического деформирования заготовки.

Деформацией называется процесс, при котором точки сплошного непрерывного тела перемещаются относительно друг друга. Однако любое переменное поле перемещений только в том случае будет определять деформацию, если из рассматриваемых перемещений исключить поступательное и вращательное движение твердого тела как жесткого целого.

3.1. Описание движения сплошной среды.

Переменные Лагранжа и Эйлера

В механике сплошных сред нашли применение две эквивалентные друг другу точки зрения на движение деформируемого материала – двух ученых Л. Эйлера и Ж. Лагранжа. Когда внимание концентрируют на данной точке пространства, в которую приходят

различные частицы деформируемой сплошной среды, – это сущность точки зрения Эйлера на изучаемое движение сплошной среды. С точки зрения Лагранжа, движение считается известным, если скорость, ускорение, температура и другие интересующие величины заданы как функции координат x_i точки пространства и времени t . Сущность точки зрения Лагранжа на изучаемое движение состоит в том, что внимание концентрируют на конкретной частице сплошной среды и интересуются историей ее деформирования и движения. Координаты x_i , индивидуализирующие точки сплошной среды и время t , называются переменными Лагранжа. Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды лежит в основе физических законов, так как они связаны с движением индивидуальных частиц. В начальный момент координаты некоторой точки M по Эйлери и Лагранжу совпадают: $x_i = \eta_j$. Текущие координаты материальной точки x_i в декартовой системе координат являются функциями начальных координат этой частицы η_j и времени t :

$$x_i = \varphi(\eta_j, t). \quad (\text{а})$$

Зафиксируем начальные координаты η_j , а время будем считать переменным, тогда будет получено уравнение траектории для конкретной частицы. Фиксируя время t , по формуле (а) определяется распределение материальных частиц в пространстве в данный момент времени. Закон движения сплошной среды имеет место, если η_j и t – переменные. Уравнение (а) можно разрешить относительно η_j , тогда получим

$$\eta_j = \eta_j(x_i, t). \quad (\text{б})$$

При фиксированных координатах x_i указываются частицы сплошной среды η_j , которые в разные моменты времени проходят

выбранную точку пространства. В некоторый момент времени t по формуле (б) в различных точках пространства находят наименования материальных частиц.

Уравнения (а) и (б) описывают один и тот же закон движения сплошной среды в выбранной системе координат. В отдельных случаях в качестве системы отсчета удобно использовать сопутствующую систему координат, связанную с частицами сплошной среды. В момент времени t ортогональная в начальный момент система координат превращается в криволинейную и неортогональную систему координат.

Таким образом, сопутствующая система координат как бы «вморожена» в сплошную среду и деформируется вместе с ней, а координаты Лагранжа η_j материальных частиц в этой системе отсчета не изменяются.

Целесообразность подхода Лагранжа и Эйлера выясняется в конкретных задачах. При этом следует учитывать, что в координатах x_i уравнения равновесия имеют более простой вид (они линейны), а граничные условия – более сложный вследствие того, что невозможно, не решая задачи, определить компоненты перемещения u_i , которые обычно входят в граничные условия. В координатах Лагранжа η_j краевые условия, как правило, записываются проще, а уравнения равновесия – сложнее.

При обработке металлов давлением металл претерпевает значительные деформации. Однако каждый процесс удобно

рассматривать в каждый фиксированный момент его протекания, поэтому необходимо знание основных положений и зависимостей, относящихся к малым деформациям.

Под малой понимается такая деформация, когда квадратами удлинений, сдвигов и углов поворота можно пренебречь. В этом случае очень мала разница между материальными (Лагранжевыми) и пространственными (Эйлеровыми) координатами.

3.2. Малые деформации. Зависимости между компонентами перемещений и деформаций

Обозначим проекции перемещения точки M с координатами x, y, z на направление осей через u_x, u_y, u_z (рис. 3.1). В результате деформации выделенный в теле элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям, изменит не только свое положение, но и форму. Ребра параллелепипеда изменят длину, а углы перестанут быть прямыми.

Линейные деформации в направлении осей координат обозначим e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} , а угловые — $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, где индексы показывают координатную плоскость, на которую проецируется искаженный деформацией угол. Относительные сдвиги считают положительными, если им соответствует уменьшение угла со сторонами, направленными в положительном направлении координатных осей.

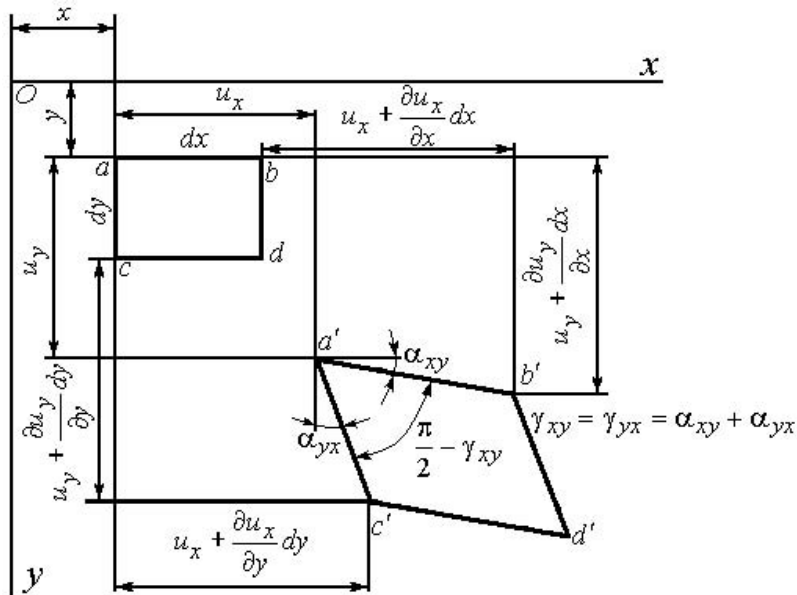


Рис. 3.1. Схема к определению деформации в плоскости xu

Выразим компоненты деформаций через компоненты перемещения. Для этого в точке $M(x, y, z)$ выделим элементарный параллелепипед с ребрами и вершиной в точке M . Допустим, что $abcd$ и $a'b'c'd'$ – проекции этого параллелепипеда на плоскость xu до и после деформации. Относительная деформация (ребра ab) в направлении x равна:

$$e_{xx} = \frac{u_{bx} - u_{ax}}{ab} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Аналогично в направлении y :

$$e_{yy} = \frac{u_{cy} - u_{ay}}{ac} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy - u_y}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Далее определим угловые деформации. Так как при малой деформации $\operatorname{tg}\alpha_{xy} = \alpha_{xy}$ и $\operatorname{tg}\alpha_{yx} = \alpha_{yx}$, то

$$\alpha_{xy} = \frac{u_{by} - u_{ay}}{u_{bx} + dx - u_{ax}} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y}{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}}.$$

Так как деформация мала, то в знаменателе этого выражения отбросим величину $\partial u_x / \partial x$, которая значительно меньше единицы:

$$\alpha_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Таким же образом определим и α_{yx} :

$$\alpha_{yx} = \frac{u_{cy} - u_{ax}}{u_{cy} + dy - u_{ay}} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy - u_x}{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + dy - u_y} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Используя предыдущие выражения, получим

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Проецируя рассматриваемый параллелепипед на плоскости yz и zx , определяем другие компоненты деформаций. В результате получим относительные удлинения и относительные сдвиги (искажения прямого угла):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ & & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) получены О. Коши.

3.3. Тензорный характер деформации тела в точке

Можно показать, что шесть компонент деформаций образуют симметричный тензор деформаций 2-го ранга

$$T_e = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix},$$

который полностью определяет деформированное состояние в точке тела.

Чтобы найти деформацию тела в окрестности точки M , рассмотрим соседнюю точку M_1 , положение которой относительно точки M устанавливается вектором $\bar{\rho}$, имеющим направление, определяемое направляющими косинусами l, m, n .

Отрезок ρ можно считать материальным волокном, длина которого бесконечно мала.

Относительные удлинения проекций отрезка ρ и относительное удлинение волокна ρ можно найти по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_x}{\rho} = e_{\rho x} &= e_{xx}l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n; \\ \frac{\delta_y}{\rho} = e_{\rho y} &= \frac{1}{2}\gamma_{yx}l + e_{yy}m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n; \\ \frac{\delta_z}{\rho} = e_{\rho z} &= \frac{1}{2}\gamma_{zx}m + \frac{1}{2}\gamma_{zy}n + e_{zz}n; \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$e_{\rho} = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + \gamma_{xy}lm + \gamma_{yz}mn + \gamma_{zx}ln. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) соответствует формулам (2.8) и (2.10) нормальных напряжений. Если величины e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} представить в виде выражений (3.4), то из соотношения (3.6) получим геометрический смысл величин e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} . Они являются относительными удлинениями волокон, исходящих из точки в направлениях осей координат x, y, z соответственно.

Изменение угла между двумя волокнами $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ в результате деформации тела может быть рассчитано через направляющие косинусы этих волокон l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 соответственно.

До деформации угол между волокнами $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ был θ_{12} . После деформации эти волокна займут новое положение, угол между ними будет θ'_{12} .

Рассмотрим случай, когда волокна $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ взаимно перпендикулярны, т.е. $\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \theta'_{12} = & (e_{xx} l_1 l_2 + e_{yy} m_1 m_2 + e_{zz} n_1 n_2) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \frac{1}{2} \gamma_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формула (3.7) аналогична формуле (2.10) для определения касательных напряжений в новой системе координат.

Направим теперь волокно $\bar{\rho}_1$ по оси x , а волокно $\bar{\rho}_2$ – по оси y . Найдем косинус угла между ними после деформации.

При этом

$$\theta'_{12} = \theta'_{x,y}; \quad l_1 = 1; \quad m_1 = n_1 = 0; \quad l_2 = n_2 = 0; \quad m_2 = 1.$$

Из формулы (3.7) $\cos \theta'_{xy} = \gamma_{xy}$. Так как деформация предполагается малой и, следовательно, $\frac{\pi}{2} - \theta'_{xy}$ – величина тоже малая, то

$$\cos \theta'_{xy} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'_{xy}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \theta'_{xy} = \gamma_{xy}. \quad (3.8)$$

Деформации γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} представляют собой относительный сдвиг, или изменение, прямого угла элемента с гранями,

параллельными плоскостям (x, z) и (y, z) ; (y, x) и (z, x) ; (z, y) и (x, y) соответственно (см. уравнения (3.4)).

Сравнив формулы (3.5) и (3.6) с формулами проекций напряжений на наклонной площадке (2.7) и выражением нормального напряжения (2.8), убедимся в их полной аналогии, если компонентам напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ поставить в соответствие компоненты деформаций $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}$. При повороте прямоугольных осей координат компоненты деформации изменяются так же, как и компоненты напряжений. На основании этой аналогии можно заключить, что шесть компонент деформаций $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}$ образуют симметричный тензор второго ранга, который называется тензором деформаций:

$$T_e = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

3.4. Условие совместности деформаций

Из зависимостей (3.4) следует, что шесть компонент деформаций выражаются через частные производные от трех компонент

перемещения по координатам x, y, z . Поэтому они не являются независимыми функциями этих координат. Между ними должны существовать зависимости, которые называются условиями совместности деформаций. Поясним это положение геометрическим путем, представив себе деформируемое тело как бы состоящим из элементарных параллелепипедов. Если каждый параллелепипед подвергнуть произвольной деформации так, что компоненты деформации не будут между собой связаны, а затем попытаться сложить деформированные элементы, то это окажется невозможным. Между некоторыми элементами образуются зазоры, для других элементов не окажется места, и деформированные элементы в этом случае невозможно объединить в непрерывное тело.

Условие совместности деформаций описывается шестью уравнениями, которые делятся на две группы. Рассмотрим вывод этих уравнений.

Первая группа. Продифференцируем первые два уравнения (3.4):

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2}.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Остальные уравнения первой группы можно получить круговой перестановкой индексов. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Вторая группа. Продифференцируем последние три уравнения (3.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} & + \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} & + \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} & - \end{aligned} \right\}$$

Изменив знаки третьего уравнения системы, а затем почленно сложив все уравнения, имеем

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}.$$

Полученное уравнение дифференцируем по z и, учитывая, что

$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

Остальные уравнения второй группы можно получить круговой перестановкой индексов. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Если при решении конкретной задачи удастся найти перемещения u_x, u_y, u_z , то компоненты деформации можно вычислить по уравнениям (3.4), при этом условия неразрывности (3.10) и (3.11) автоматически удовлетворяются. Если деформации находятся по напряжениям (используются физические соотношения), то при этом необходимо одновременно удовлетворить и уравнения неразрывности.

В противном случае деформации будут несовместимы, и перемещения u_x, u_y, u_z по уравнениям (3.4) найти нельзя.

3.5. Главные деформации. Инварианты тензора деформаций

В любой точке деформируемого тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные оси, для которых компоненты угловой деформации равны нулю, а угол между осями при деформации не

изменяется. Эти оси называются главными осями деформаций. Три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через главные оси деформаций, называются главными плоскостями деформаций. Положение главных осей деформаций в пространстве после деформации изменяется. Три волокна, до деформации совпадающие с тремя главными осями, и после деформации остаются взаимно перпендикулярными, но занимают новое положение путем вращения и поступательного перемещения.

Рассмотрим вопрос об определении ориентации главных осей деформаций и величин главных деформаций. Допустим, что l, m, n – неизвестные направляющие косинусы главного направления, а e_ρ – относительное удлинение главного волокна. Тогда перемещение волокна $\bar{\rho}$ будет $\bar{\rho}e_\rho$, а его проекции на оси

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \rho e_\rho l; \\ \delta_y &= \rho e_\rho m; \\ \delta_z &= \rho e_\rho n. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Подставляя выражения (3.12) в формулы (3.5), получаем однородную систему уравнений относительно направляющих косинусов:

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx} - e_\rho)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n &= 0; \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}l + (e_{yy} - e_\rho)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n &= 0; \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}l + \frac{1}{2}\gamma_{zy}m + (e_{zz} - e_\rho)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Отсюда уравнение для определения e_ρ будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e_p & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} - e_p & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_{zz} - e_p \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Раскрывая определитель, получаем кубическое уравнение, корни которого являются главными линейными деформациями:

$$e_p^3 - I_1 e_p^2 - I_2 e_p - I_3 = 0. \quad (3.15)$$

Коэффициенты кубического уравнения I_1, I_2, I_3 представляют собой инварианты тензора деформаций, т.е. они не зависят от выбора координатной системы.

$$\text{Здесь} \quad I_1 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 3e_{cp} = \theta;$$

$$I_2 = -e_{xx}e_{yy} - e_{yy}e_{zz} - e_{zz}e_{xx} + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2);$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}; \quad (3.16)$$

θ – среднее относительное изменение объема элемента.

Можно показать, что все три корня кубического уравнения – действительные. Положение главных осей деформаций может быть определено, так же как и в теории напряжений, с помощью выражений (2.11) с заменой в них компонент тензора напряжений компонентами тензора деформаций или с помощью выражений (3.13).

В главных осях деформаций инварианты тензора деформаций будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= e_1 + e_2 + e_3; \\ I_2 &= -e_1 e_2 - e_2 e_3 - e_3 e_1; \\ I_3 &= e_1 e_2 e_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

3.6. Круговая диаграмма Мора для деформаций

Проводя аналогию между деформированным и напряженным состояниями, можно сделать вывод, что геометрическое изображение на плоскости соотношений, связывающих компоненты деформаций между собой, совпадает с геометрическими изображениями в теории напряжений (рис. 3.2).

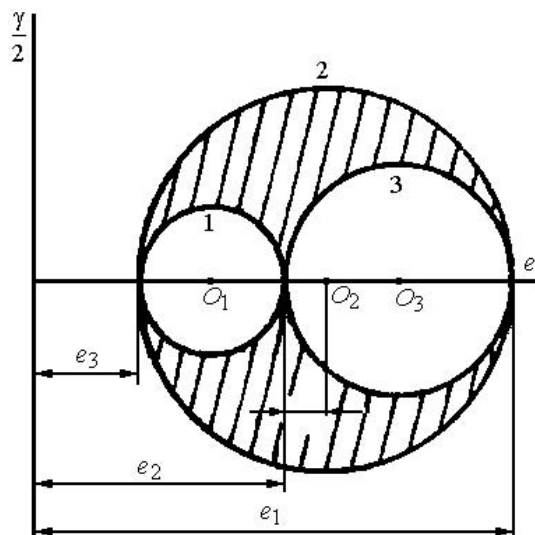


Рис. 3.2. Круговая диаграмма Мора для деформаций

По оси абсцисс откладываются линейные деформации, а по оси ординат – половины угловых деформаций. Координаты точек окружностей 1, 2, 3 равны линейным деформациям и половинам угловых деформаций по направлениям, лежащим в плоскостях 2-3, 3-1, 1-2 соответственно.

Любая точка, лежащая внутри области, ограниченной тремя окружностями диаграмм, своими координатами определяет линейную деформацию и половину угловой деформации в направлени-

ях, не лежащих в главных плоскостях.

Из круговой диаграммы следует, что одна из главных линейных деформаций является наибольшей, а другая – наименьшей из всех линейных деформаций в окрестности исследуемой точки.

На основании круговой диаграммы можно сделать вывод, что наибольшие угловые деформации имеют место в направлениях, лежащих в главных плоскостях и составляющих угол 45° с главными осями. Эти наибольшие угловые деформации, которые называются главными угловыми деформациями, равны разности главных линейных деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= e_2 - e_3; \\ \gamma_2 &= e_1 - e_3; \\ \gamma_3 &= e_1 - e_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

По аналогии с теорией напряжений параметр Лодэ – Надаи для деформаций имеет вид

$$\mu_e = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3}. \quad (3.19)$$

Он характеризует вид деформированного состояния с точностью до равноосного растяжения или сжатия.

3.7. Разложение тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор

Удобно пользоваться представлением тензора деформаций в виде суммы:

$$T_e = e_{cp} T_1 + D_e, \quad (3.20)$$

где $e_{cp} T_1 = \begin{pmatrix} e_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & e_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & e_{cp} \end{pmatrix}$ – шаровой тензор деформаций,

соответствующий объемному расширению – упругому изменению объема;

$$D_e = \begin{pmatrix} e_{xx} - e_{cp} & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & e_{yy} - e_{cp} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & e_{zz} - e_{cp} \end{pmatrix} \text{ – девиатор деформаций, который}$$

характеризует изменение формы, обусловленное сдвигами.

Инварианты девиатора определяются аналогично инвариантам тензора деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{e}_{xx} + \bar{e}_{yy} + \bar{e}_{zz} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0; \\ \bar{I}_2 &= -\bar{e}_1 \bar{e}_2 - \bar{e}_2 \bar{e}_3 - \bar{e}_3 \bar{e}_1 = -\bar{e}_{xx} \bar{e}_{yy} - \bar{e}_{yy} \bar{e}_{zz} - \bar{e}_{zz} \bar{e}_{xx} + \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \\ &= \frac{1}{6} \left[(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]; \\ \bar{I}_3 &= \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3. \end{aligned} \right\} (3.21)$$

3.8. Интенсивность деформаций

В теории обработки металлов давлением важную роль играют интенсивность деформации сдвига Γ и интенсивность линейных

деформаций e_i , которые определяются по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\sqrt{\bar{I}_2} = \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\bar{I}_2} = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В случае чистого сдвига изотропного материала

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0; \quad \gamma_{xy} = \gamma; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

тогда $\Gamma = \gamma$.

В случае одноосного растяжения

$$e_1 = e; \quad e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e,$$

тогда $e_i = e$.

3.9. Скорость деформации

Предположим, что частицы среды движутся со скоростью \bar{v} (v_x, v_y, v_z). При этом в течение бесконечно малого промежутка времени dt среда испытывает бесконечно малую деформацию, определяемую перемещениями $u_x = v_x dt, u_y = v_y dt, u_z = v_z dt$. Компоненты этой деформации, вычисленные по выражениям (3.4), имеют общий множитель dt , разделив на который, получим компоненты скорости деформации:

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \dots; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}; \dots, \quad (3.24)$$

где величины \dot{e}_{xx}, \dots определяют скорости относительных удлинений в направлениях координатных осей, а величины $\dot{\gamma}_{xy}, \dots$ – угловые скорости искажения первоначально прямых углов.

Все эти величины образуют симметричный тензор скоростей деформаций:

$$T_{\dot{e}} = \begin{pmatrix} \dot{e}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \dot{e}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} & \dot{e}_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Все справедливое для тензора деформаций остается справедливым и для тензора скоростей деформаций. По аналогии с понятиями интенсивности деформации сдвига и интенсивности линейных деформаций можно ввести понятия интенсивности скорости

деформаций сдвига $\dot{\Gamma} = H$ и интенсивности скорости линейных деформаций:

$$\dot{\Gamma} = H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{e}_1 - \dot{e}_2)^2 + (\dot{e}_2 - \dot{e}_3)^2 + (\dot{e}_3 - \dot{e}_1)^2}; \quad (3.26)$$

$$\dot{e}_i = \frac{H}{\sqrt{3}}. \quad (3.27)$$

Примечание. В научно-технической литературе часто при изучении деформированного состояния заготовки наряду с обозначениями, приведенными выше, также применяются следующие:

ε_{ij} $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$ – компоненты деформаций;

ξ_{ij} $(\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{zz}, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_{zx})$ – компоненты скоростей деформаций;

ε_i, ξ_i – их интенсивности.

3.10. Тензор конечных деформаций

В качестве меры деформируемости окрестности частиц возьмем разность квадратов расстояний между двумя точками двух близких частиц P_0 с декартовыми координатами η_j и Q_0 с декартовыми координатами $\eta_i + d\eta_i$ в конечный и начальный моменты времени.

Через координаты Лагранжа компоненты тензора конечной деформации будут определяться по выражениям

$$dS^2 - dS_0^2 = 2L_{ij}d\eta_i d\eta_j,$$

где $L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \eta_i} + \frac{\partial u_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial u_k}{\partial \eta_j} \right)$ – симметричный тензор 2-го

ранга, называемый Лагранжевым тензором конечных деформаций (тензором Грина).

Если в качестве независимых переменных примем переменные Эйлера, то

$$dS^2 - dS_0^2 = 2E_{ij}dx_i dx_j,$$

где $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$ – симметричный тензор 2-го ранга,

называемый Эйлеровым тензором конечных деформаций (тензором Альманси).

Если градиенты перемещений $\partial u_i / \partial \eta_j$ и $\partial u_i / \partial x_j$ малы по сравнению с единицей, то произведением градиентов можно пренебречь. Кроме того, если и сами перемещения малы, то можно принять, что Лагранжев и Эйлеров тензоры бесконечно малых деформаций равны.

3.11. Логарифмические деформации

Рассмотрим однородное растяжение цилиндра вдоль его оси, совпадающей с осью x_1 . Тогда

$$d\varepsilon_1 = \frac{dl}{l},$$

где l – текущая длина цилиндра; dl – ее бесконечно малое изменение.

Суммирование приводит к так называемому натуральному удлинению:

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0},$$

где l_0 – начальная длина.

Если главные оси при деформации не поворачиваются, интегралы $\int d\varepsilon_i$ имеют простой физический смысл, равняясь соответствующим натуральным удлинениям $\ln(l/l_0)$. Очевидно, что при этом справедлив простой закон сложения деформаций. В общем случае $\int d\varepsilon_i$ не вычисляются и не имеют определенного физического смысла. Это ограничивает область применения натуральных удлинений как меры деформации случаем фиксированных главных направлений.

Примеры решения задач

Задача 3.1. Поле перемещений в главной плоскости xu описывается уравнениями $u_x = 0,07x + 1$; $u_y = 0,05x^2 + 0,01y^2$.

Найти интенсивность малых деформаций в точке с координатами $x = 1$, $y = 1$.

Решение. Поскольку по условию задачи плоскость xu – главная, то компоненты тензора деформаций $\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0$. Вычислим по формулам (3.4) остальные компоненты тензора деформаций:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,07; \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,02y;$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 0,05x.$$

Для определения компоненты тензора деформации e_{zz} воспользуемся условием несжимаемости:

$$e_{zz} = -\left(e_{xx} + e_{yy}\right) = -0,07 - 0,02y.$$

Следовательно, деформированное состояние в точке с координатами $x=1$, $y=1$ описывается тензором малых деформаций

$$T_e = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & -0,09 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность деформации сдвига рассчитаем по формуле (3.22):

$$G = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(e_{xx} - e_{yy}\right)^2 + \left(e_{yy} - e_{zz}\right)^2 + \left(e_{zz} - e_{xx}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)}$$

$$G = 0,191.$$

Интенсивность линейных деформаций находим из выражения

$$e_i = \frac{G}{\sqrt{3}}; \quad e_i = 0,110.$$

Задача 3.2. Тонкостенная труба подвержена кручению на малый угол γ . В результате анализа деформации квадратной сетки, предварительно нанесённой на поверхность трубы, в пределах элементарной ячейки установлено поле перемещений

$$u_x = y \cdot \operatorname{tg}\gamma; \quad u_y = 0.$$

Найти компоненты тензора малых деформаций и интенсивность деформации сдвига.

Решение. Определим компоненты тензора малой деформации по формулам (3.4) и условию несжимаемости:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma;$$

$$e_{zz} = -\left(e_{xx} + e_{yy}\right) = 0; \quad \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = 0.$$

По формуле (3.22) находим

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(e_{xx} - e_{yy}\right)^2 + \left(e_{yy} - e_{zz}\right)^2 + \left(e_{zz} - e_{xx}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Заметим, что полученное выражение для интенсивности деформации сдвига остаётся справедливым и при значительных углах γ , если деформирование осуществлялось в условиях простого сдвига. При малых углах γ можно положить $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$.

Задача 3.3. В точке тела заданы компоненты деформации $e_{xx}, e_{yy}, \gamma_{xy}$, а остальные компоненты равны нулю $e_{zz} = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ – случай плоской деформации. Получить формулы для определения главных деформаций и найти инварианты тензора деформаций.

Решение. Деформированное состояние в точке тела определяется тензором

$$T_e = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По структуре тензора определяем, что ось z – главная и один из корней кубического уравнения (3.14) $e_2 = 0$. Два других корня найдём из выражения

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e_\kappa & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} - e_\kappa \end{vmatrix} = e_\kappa^2 - \left(e_{xx} + e_{yy}\right)e_\kappa + e_{xx}e_{yy} - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 = 0;$$

$$e_{1,3} = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}.$$

Если деформация – пластическая, то первый член предыдущего выражения равен нулю. Инварианты тензора деформаций вычисляются по формулам (3.15):

$$I_1 = e_{xx} + e_{yy}; \quad I_2 = -e_{xx}e_{yy} + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2; \quad I_3 = 0.$$

Задача 3.4. Задано поле скоростей перемещений точек деформируемого тела в главной плоскости:

$$v_x = \frac{V}{h} x \left(1 + \frac{yx}{h^2} \right); \quad v_y = \frac{V}{h} y \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right).$$

Найти интенсивность линейных и сдвиговых деформаций в точке с координатами $x = 0,5h$; $y = h$.

Решение. По условию задачи поле скоростей перемещений определено в главной плоскости, поэтому $\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} = 0$.

Компоненты тензора скоростей деформации $\dot{e}_{xx}, \dot{e}_{yy}, \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}$ находим по соотношениям

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{V}{h} \left(1 + 2 \frac{xy}{h^2} \right); \quad \dot{e}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{V}{h} \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right);$$

$$\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{V}{h^3} x (x - 2y).$$

При $x = 0,5h$, $y = h$ имеем

$$\dot{e}_{xx} = 2 \frac{V}{h}; \quad \dot{e}_{yy} = 0,75 \frac{V}{h}; \quad \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} = -0,375 \frac{V}{h}.$$

Третью линейную компоненту деформации найдём из условия несжимаемости:

$$e_{zz} = -\left(\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} \right) = -2,75 \frac{V}{h}.$$

Интенсивность сдвиговых и линейных скоростей деформации определим по формулам (3.25) – (3.27):

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sqrt{\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2} + \sqrt{\dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2} + \sqrt{\dot{\epsilon}_{zz}^2 + \dot{\epsilon}_{xx}^2} + \frac{3}{2} \sqrt{\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2} \right]^{1/2} = 4,96 \frac{V}{h};$$

$$e_i = \frac{H}{\sqrt{3}} = 2,867 \frac{V}{h}.$$

Задача 3.5. За счёт растяжения стержень получил относительное удлинение $e_1 = 0,2$. Вырезанный из стержня образец осаживался до относительного изменения высоты, равной 0,5. Определить интенсивность деформации сдвига, которая соответствует конечному деформированному состоянию. Как изменится эта величина, если образец осаживать в условиях плоской деформации?

Решение. Значение накопленной интенсивности деформаций сдвига складывается из двух величин, полученных при растяжении стержня и осаживании образца.

При растяжении образца на первом этапе деформирования интенсивность линейных логарифмических деформаций равна логарифмической деформации удлинения:

$$\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_1 = \ln(1 + e_1) = \ln 1,2 = 0,182.$$

Интенсивность деформации сдвига

$$\Gamma_I = \sqrt{3}\varepsilon_{i_1} = 0,315.$$

Интенсивность логарифмических линейных деформаций при осадке образца найдём по формуле

$$\varepsilon_{i_2} = -\varepsilon_3 \text{ или } \varepsilon_{i_2} = -\ln(1 + e_3) = -\ln 0,5 = 0,693.$$

Интенсивность деформации сдвига определим по выражению

$$\Gamma_{II} = \sqrt{3}\varepsilon_{i_2} = 1,199.$$

Накопленная за два этапа деформирования интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma_{\text{сум}} = \Gamma_I + \Gamma_{II} = 1,514.$$

Если операция осадки образца выполнялась в условиях плоской деформации, то

$$\varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = 0,693; \quad \Gamma_{II} = 2\varepsilon_1 = 1,386,$$

т.е. интенсивность деформации сдвига при осадке в условиях плоской деформации превосходит интенсивность деформации сдвига при обычной осадке в 1,155 раза.

Суммарная интенсивность деформаций сдвига при осуществлении второго этапа деформирования по схеме плоской деформации равна:

$$\Gamma_{\text{сум}} = \Gamma_I + \Gamma_{II} = 1,701.$$

Задания для самоконтроля

1. Дайте понятие малой деформации.
2. Укажите геометрический смысл линейных и сдвиговых деформаций.
3. Запишите уравнения связи компонент деформаций с перемещениями Коши.
4. Приведите выражения для определения относительных удлинений материальных волокон, ориентированных в направлении \bar{v} с направляющими косинусами l, m, n .
5. Рассмотрите вопрос об изменении угла между двумя волокнами, ориентация которых определяется направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 после деформации.
6. Геометрический и математический смысл условий совместности деформаций. Запишите эти условия. Когда их необходимо использовать?
7. Опишите подход к определению величин главных деформаций и их направлений действия.
8. Разложите тензор деформаций на шаровой тензор и девиатор.

9. Приведите выражения для вычисления инвариантов девиатора, интенсивности деформаций сдвига и линейных деформаций, девиатора, параметра Лодэ – Надаи для деформации.

10. Как определяются компоненты скоростей деформации, их интенсивности скорости деформаций сдвига и линейных скоростей деформаций?

Глава 4. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Теории напряжений, деформаций и скоростей деформаций относятся к любой сплошной среде. Учитывать реальные свойства материала в процессах пластического формоизменения можно при помощи физических уравнений – условия текучести (пластичности), т.е. условия перехода материала из упругого состояния в пластическое, и уравнений связи между напряжениями и деформациями. Они обычно называются теориями деформационного типа. Вторая группа рассматривает связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений и между напряжениями. В частном случае устанавливаются зависимости скорости деформаций от напряжений. Эти теории получили название теории течения.

В данной главе рассматриваются такие темы, как поведение материала за пределом текучести, сопротивление металла деформированию при холодной и горячей обработке давлением, описание этих явлений математическими зависимостями, а также критерии разрушения при пластической деформации, которые позволяют предсказать ожидаемые предельные деформации с учетом условий эксплуатации изготовленного изделия. Поскольку заготовки для обработки металлов давлением часто получают прокаткой, прессованием, волочением и другими методами, они обладают анизотропией механических свойств. Поэтому все перечисленные вопросы приводятся для анизотропных материалов. Эта информация для изотропного и анизотропного материала необходима для глубокого анализа процессов обработки металлов давлением,

позволяет определить напряжения, деформации в очаге пластической деформации, рассчитать предельные степени деформаций, силовые режимы, условия работы инструмента, оценить ожидаемые механические свойства, условия эксплуатации деталей.

4.1. Зависимости между деформациями и напряжениями для упругого изотропного тела

Из курса сопротивления материалов известно, что в пределах упругости зависимости компонентов деформации от компонентов напряжения для изотропного тела имеют вид

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где E и G – модули упругости первого и второго рода; ν – коэффициент поперечной деформации.

Между этими величинами существует следующая связь:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.2)$$

Объемная деформация ε , равная при малых деформациях сумме линейных деформаций, пропорциональна сумме нормальных напряжений:

$$\varepsilon = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 3\bar{k}\sigma, \quad (4.3)$$

где \bar{k} – коэффициент изменения объема;

$$\bar{k} = \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)G}. \quad (4.4)$$

В сокращенной тензорной записи соотношения (4.1) имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right). \quad (4.5)$$

Установим зависимости между компонентами девиатора деформаций и девиатора напряжений в пределах упругости, используя соотношения (4.3) – (4.5):

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ij} &= e_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) - \delta_{ij} \bar{k} \sigma = \\ &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma \right) = \frac{s_{ij}}{2G}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Таким образом, в пределах упругости компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций. Причем коэффициентом пропорциональности является удвоенная величина модуля сдвига.

Выясним связь между интенсивностями напряжений и деформаций в пределах упругости. Для этого подставим в формулу (3.23) выражения (4.6). Тогда, используя зависимость (2.21), получим

$$\sigma_i = 3G e_i \quad (4.7)$$

или на основании соотношений (2.23) и (3.27)

$$T = G\Gamma. \quad (4.8)$$

Следовательно, в пределах упругости интенсивность напряжений прямо пропорциональна интенсивности деформаций.

4.2. Условие текучести (пластичности)

Пластическое равновесие возможно только при определенных нагрузках. Пластическое состояние при линейном растяжении наступит, когда нагрузка вызовет напряжение, равное пределу текучести. Предел текучести σ_s разделяет кривую «напряжение – деформация» на упругую и пластическую области. Обычно под пределом текучести понимают такое значение напряжения, которое соответствует 0,2 % остаточной деформации образца. Если для дальнейшего развития пластической деформации в материале необходимо увеличивать напряжение, то такой материал называется упрочняющимся. Материал считается идеально пластическим, если он не упрочняется, т.е. напряжение растяжения будет постоянным (рис. 4.1).

При линейном растяжении условием перехода от упругого состояния к пластическому является равенство

$$\sigma_1 = \sigma_s(e_1). \quad (4.9)$$

Возникает вопрос: какими условиями определяется переход от упругого состояния к пластическому при любом виде напряженного состояния?

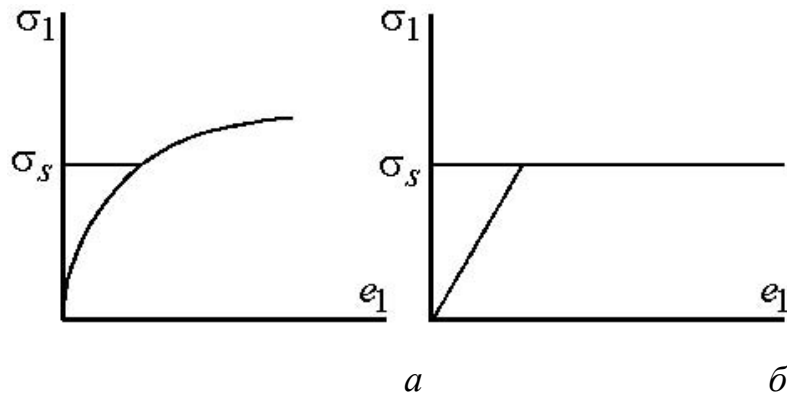


Рис. 4.1. Диаграммы растяжения материала:

a – упругопластического с упрочнением;

б – идеально пластического без упрочнения

Экспериментально установлено, что переход материала в пластическое состояние не зависит от равномерного гидростатического сжатия или растяжения, приложенного отдельно или наложенного на некоторое комбинированное напряженное состояние. Поэтому условие текучести (пластичности) может быть связано с функцией второго и третьего инвариантов девиатора напряжений.

На феноменологической основе самым простым условием текучести (пластичности) может быть функция, не зависящая от третьего инварианта девиатора напряжений, который характеризует вид напряженного состояния: $f(\sigma_2) = \varphi(q)$, где q – некоторая мера

изотропного упрочнения; φ – возрастающая функция, в частности $f(\mathbf{I}_2) = \sqrt{\mathbf{I}_2} = T$.

Существует несколько гипотез, основанных на эксперименте. Наибольшее распространение в расчетах пластического формоизменения при обработке металлов давлением получили условия текучести (пластичности) Губера – Мизеса и Треска – Сен-Венана.

Условие текучести (пластичности) Губера – Мизеса. Согласно этой гипотезе, условие текучести можно сформулировать следующим образом: пластическое состояние в любой точке тела наступает и поддерживается в том случае, если интенсивность нормальных напряжений в этой точке достигает величины напряжения текучести при линейном напряженном состоянии:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s(e_i), \quad (4.10)$$

где σ_s – истинное напряжение при линейном напряженном состоянии.

Учитывая связь интенсивности нормальных напряжений с интенсивностью касательных напряжений, условие текучести Губера – Мизеса можно записать в другом виде:

$$T = k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \quad (4.11)$$

Физический смысл условия текучести Губера – Мизеса.

Физический смысл условия текучести, установленный Г. Генки в 1924 году, заключается в том, что переход деформируемого материала в пластическое состояние происходит независимо от вида напряженного состояния в том случае, если в любой точке тела накоплена удельная потенциальная энергия изменения формы определенной величины, соответствующей линейному растяжению при напряжении текучести. Поэтому это условие текучести часто называют энергетическим.

Геометрический смысл условия текучести Губера – Мизеса.

Запишем условие текучести (4.10) в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2. \quad (4.12)$$

В трехмерном пространстве главных напряжений это уравнение представляет собой поверхность неограниченного по длине кругового цилиндра, ось которого проходит через начало координат и одинаково наклонена к осям координат (рис. 4.2).

Радиус этого цилиндра

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s.$$

Если напряжения в элементе тела таковы, что в пространстве напряжений изображают точку, лежащую на поверхности цилиндра, то этот элемент будет находиться в пластическом состоянии.

Если напряжения определяют точку, лежащую внутри цилиндра, то элемент тела будет находиться в упругом состоянии. Комбинации напряжений, определяющие точки вне поверхности цилиндра, не имеют физического смысла.

Окружность на поверхности цилиндра, полученная при пересечении его плоскостью, нормальной к его оси, представляет собой геометрическое место точек, определяющих пластическое напряженное состояние, которое характеризуется одним шаровым тензором. Образующая цилиндра c является геометрическим местом точек, для которого разности главных напряжений постоянны, т.е. определяют напряженные состояния с одинаковыми девиаторами.

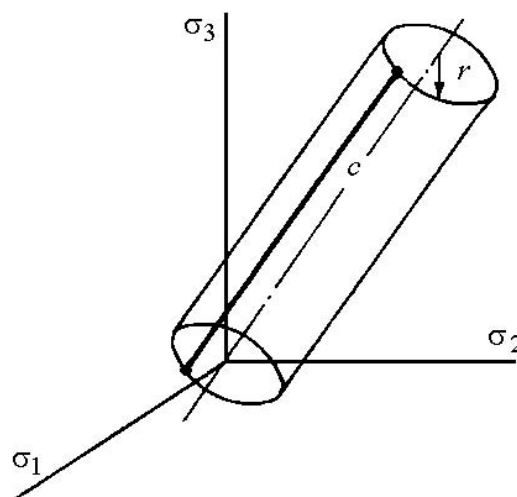


Рис. 4.2. Поверхность пластичности Губера – Мизеса

Если материал не упрочняется, то $\sigma_s = \text{const}$, и цилиндрическая поверхность не изменяется в пространстве напряжений. Если материал упрочняется, то поверхность будет расширяться и смещаться в этом пространстве. В случае изотропного упрочнения радиус цилиндра будет возрастать.

Условие текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана. Условие текучести было впервые предложено Г. Треска и разработано А. Сен-Венаном. Сущность гипотезы заключается в том, что пластическое состояние тела наступает тогда, когда в каждой точке тела максимальное касательное напряжение достигнет определенной величины (численно равной половине предела текучести σ_s), зависящей от физических свойств деформируемого тела и не зависящей от характера напряженного состояния. Математически это условие можно записать следующими зависимостями:

$$|\tau_{1,2}| \leq \frac{1}{2} \sigma_s; \quad |\tau_{2,3}| \leq \frac{1}{2} \sigma_s; \quad |\tau_{3,1}| \leq \frac{1}{2} \sigma_s$$

или
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s; \quad |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s; \quad |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s. \quad (4.13)$$

В упругом состоянии тела условия (4.13) выполняются со знаком неравенства. В пластическом состоянии в одном или в двух из этих условий должен быть знак равенства.

При объемном напряженном состоянии условие текучести Треска – Сен-Венана геометрически интерпретируется в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ поверхностью правильной шестигранной призмы бесконечной длины, ребра которой равно наклонены к координатным осям, а ось призмы проходит через начало координат (рис. 4.3). Эта призма вписывается в цилиндр, геометрически интерпретирующий энергетические условия текучести.

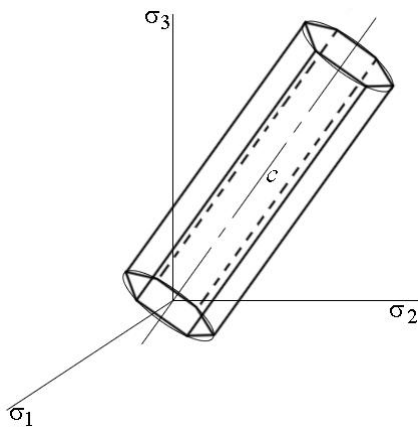


Рис. 4.3. Геометрическая интерпретация условия текучести Треска – Сен-Венана в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Следом призмы на девиаторной плоскости является правильный шестиугольник. Уравнение девиаторной плоскости имеет вид $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Так как максимальное касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений, то

промежуточное главное напряжение не влияет на состояние текучести.

Частные выражения условия текучести Губера – Мизеса и Треска – Сен-Венана

1. Плоское напряженное состояние

В условиях плоского напряженного состояния отсутствуют нормальное напряжение в направлении одной из осей системы координат x, y, z и касательные напряжения на площадках, нормальных к этой координатной оси. Если $\sigma_y = 0$, то $\tau_{xy} = \tau_{zy} = 0$.

Условие текучести Губера – Мизеса (4.12) в системе координат x, y, z принимает вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_z + 3\tau_{xz}^2 = \sigma_s^2. \quad (4.14)$$

В главных осях напряжений:

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_s^2. \quad (4.14, a)$$

Это соотношение геометрически интерпретируется эллипсом 1 в плоскости σ_1, σ_3 (рис. 4.4).

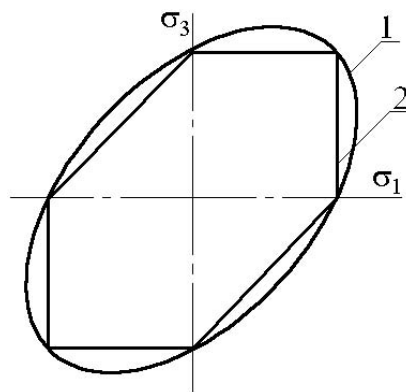


Рис. 4.4. Кривые пластичности Губера – Мизеса (1)

и Треска – Сен-Венана (2)

Условие текучести Треска – Сен-Венана при плоском напряженном состоянии геометрически представлено на рис. 4.4 шестиугольником 2, вписанным в эллипс.

2. Плоское деформированное состояние

В условиях плоского деформированного состояния, если деформация в направлении оси z отсутствует, $\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

Условие текучести Губера – Мизеса для случая плоской деформации имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2; \quad (4.15)$$

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}.$$

Такой же вид принимает условие текучести Треска – Сен-Венана, если в выражении (4.15) $k = \frac{\sigma_s}{2}$.

3. Осесимметричное напряженное состояние

При осесимметричном напряженном состоянии $\tau_{\rho\theta} = \tau_{z\theta} = 0$.

Условие текучести будет иметь вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 2\sigma_s^2. \quad (4.16)$$

В частном случае, когда $\sigma_\theta = \sigma_\rho$,

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 3\tau_{\rho z}^2 = \sigma_s^2.$$

Упрощенная запись условия текучести. При анализе технологических процессов обработки металлов давлением условие текучести (4.12) удобно представить в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \gamma\sigma_s, \quad (4.17)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\mu_\sigma^2 + 3}};$$

$$\mu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}.$$

(4.18)

Параметр Лодэ – Надаи μ_σ , характеризующий вид напряженного состояния, изменяется в пределах $-1 \leq \mu_\sigma \leq +1$. Поэтому величина γ находится в диапазоне $1 \leq \gamma \leq 1,155$. В целях упрощения расчетов она принимается постоянной и должна согласовываться с видом

напряженного состояния, но это редко учитывается при практических расчетах.

4.3. Поведение материала за пределом текучести

Продолжение нагружения после достижения начального предела текучести приводит к пластическим деформациям, которые могут сопровождаться изменениями первоначальной поверхности текучести. Если материал предполагается идеально пластическим, то поверхность текучести не изменяется в процессе пластического деформирования, и начальное условие пластичности остается в силе. Однако для материала с упрочнением пластическое деформирование в общем случае сопровождается изменениями поверхности текучести. Поверхность текучести часто называют поверхностью нагружения. Считаем, что материал в исходном состоянии обладает одинаковыми по величине пределами текучести на сжатие и растяжение.

Изотропное упрочнение. Если считать, что упрочнение развивается при пластическом деформировании, одинаково во всех направлениях и не зависит от гидростатического давления, то уравнение поверхности нагружения можно задать в форме

$$f(\bar{I}_2) = \varphi(q), \quad (4.19)$$

где q – некоторая мера изотропного упрочнения; φ – возрастающая функция.

В качестве меры упрочнения q часто принимается удельная работа пластической деформации A_p :

$$q = \int \sigma_{ij} de_{ij}^p. \quad (4.20)$$

Используется также характеристика накопленной пластической деформации (параметр Удквиста)

$$q = \int d\Gamma. \quad (4.21)$$

В общем случае уравнение (4.19) может содержать не одну, а несколько мер упрочнения: q_1, q_2, q_n . Согласно (4.19), поверхность нагружения равномерно (изотропно) расширяется, оставаясь подобной самой себе (рис. 4.5), с ростом пластической деформации.

Эффект Баушингера при этом не описывается, поскольку пределы текучести в прямом OM^+ и обратном OM^- направлениях нагружения равны между собой.

Трансляционное упрочнение. Пусть поверхность нагружения испытывает жесткое смещение в направлении деформирования. На рис. 4.6 сплошной линией показано начальное положение поверхности нагружения, пунктиром – ее положение после некоторой пластической деформации.

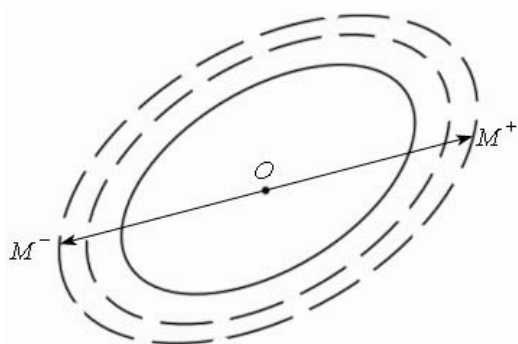


Рис. 4.5. Равномерное расширение поверхности нагружения при изотропном упрочнении материала

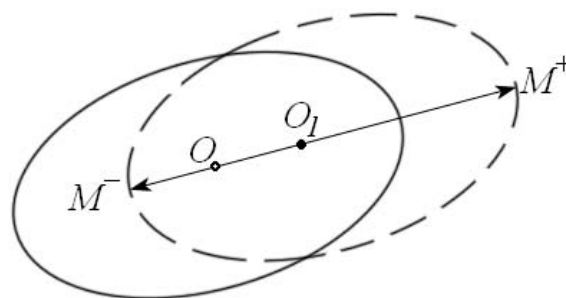


Рис. 4.6. Жесткое смещение поверхности нагружения при трансляционном упрочнении материала

Если теперь вновь нагрузить материал, то предел текучести в направлении предыдущей деформации OM^+ возрастает – произошло упрочнение, в обратном же направлении OM^- предел текучести падает – имеет место разупрочнение. Эта схема, по крайней мере, качественно описывает эффект Баушингера. В рассматриваемом случае уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = k, \quad (4.22)$$

где a_{ij} – координаты центра поверхности нагружения, изменяющиеся

при пластической деформации и определяемые в простейшем случае следующим образом:

$$a_{ij} = ce_{ij}^p, \quad (4.23)$$

где c – положительная постоянная, характерная для данного материала; e_{ij}^p – компоненты пластической деформации. Таким образом, составляющие жесткого смещения поверхности нагружения здесь пропорциональны компонентам пластической деформации.

Комбинированное упрочнение. Комбинация предыдущих случаев приводит к более полной схеме:

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q). \quad (4.24)$$

Поверхность нагружения испытывает перенос и одновременно расширяется равномерно во всех направлениях, т.е. сохраняет свою форму. Если среда в начальном состоянии изотропна и ее поведение зависит лишь от квадратичного инварианта, то уравнение (4.24) принимает вид

$$(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q). \quad (4.25)$$

4.4. Деформационная теория пластичности

В основу деформационной теории пластичности положены следующие допущения:

1. *Тело изотропно.*

2. *Относительное изменение объема является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению:*

$$\varepsilon = e_x + e_y + e_z = 3\bar{k}\sigma, \quad (4.26)$$

где \bar{k} – коэффициент изменения объема; он связан с упругими характеристиками материала зависимостью

$$\bar{k} = \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)G}, \quad (4.27)$$

где E, G, ν – модули Юнга первого, второго рода и коэффициент Пуассона.

3. При активном нагружении девиатор деформаций подобен и коаксиален девиатору напряжений, т.е. все компоненты девиаторов деформаций и напряжений пропорциональны, и главные направления их осей совпадают:

$$D_{\bar{\varepsilon}} = \psi D_{\sigma}; \quad \psi = \psi(x, y, z). \quad (4.28)$$

При разгрузке справедлив обобщенный закон Гука.

Под активным нагружением понимают такое изменение внешних нагрузок в процессе деформации, при котором интенсивность напряжений в каждом элементе деформируемого тела все время возрастает.

В дальнейшем будем пользоваться сокращенными обозначениями компонент девиатора и тензора напряжений и деформаций $s_{ij}, \sigma_{ij}, \bar{e}_{ij}, e_{ij}$, которые связаны соответственно зависимостями

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}; \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{\varepsilon}{3} \delta_{ij}, \quad (4.29)$$

где σ и $\frac{\varepsilon}{3}$ – среднее напряжение и средняя деформация; δ_{ij} – символ Кронекера, $S_{ij} = 1$ при $i = j$ и $S_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Индексы i и j приобретают значения x, y, z , а компоненты тензора деформаций определяются через перемещения зависимостями

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.30)$$

После введения обозначений тензорное соотношение (4.28) может быть записано в виде

$$\bar{e}_{ij} = \psi s_{ij}. \quad (4.31)$$

Полагая в выражении (4.31) $\psi = \frac{1}{2G}$, приходим к обобщенному закону Гука, т.е. данное уравнение представляет собой обобщение этого закона.

Полагая $\psi = \frac{1}{2G} + \varphi(x, y, z)$ и представляя компоненты деформаций в виде суммы упругой и пластической составляющих $e_{ij} = e_{ij}^{(e)} + e_{ij}^{(p)}$, находим

$$e_{ij}^{(p)} = \varphi s_{ij}. \quad (4.32)$$

Соотношение (4.31) с учетом выражения (4.26) запишем в следующем виде:

$$e_{ij} = \bar{k} \sigma \delta_{ij} + \psi s_{ij}. \quad (4.33)$$

Компоненты деформаций e_{xx} и γ_{xy} определяются по выражениям

$$e_{xx} = \bar{k}\sigma + \psi(\sigma_{xx} - \sigma); \quad \gamma_{xy} = 2\psi\tau_{xy}.$$

Вычисляя с помощью соотношения (4.31) интенсивности деформаций сдвига и линейных деформаций, получаем

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= 2\psi T; \\ e_i &= \frac{2}{3}\psi\sigma_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Соотношение (4.31) и выражения (4.34) называют уравнениями Гука – Генки. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{e_{xx} - \frac{\varepsilon}{3}}{\sigma_{xx} - \sigma} = \frac{e_{yy} - \frac{\varepsilon}{3}}{\sigma_{yy} - \sigma} = \frac{e_{zz} - \frac{\varepsilon}{3}}{\sigma_{zz} - \sigma} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = \psi = \frac{\Gamma}{2T} = \frac{3}{2} \frac{e_i}{\sigma_i}. \quad (4.35)$$

Уравнения Гука – Генки для упрочняющегося материала устанавливают взаимно-однозначное соответствие между компонентами напряжений и деформаций. В случае идеальной пластичности, когда $\sigma_i = \sigma_s = \text{const}$ и $T = \tau_s = \text{const}$, по компонентам деформаций можно определить компоненты напряжений, но обратную задачу решить нельзя. Для несжимаемого материала в уравнении (4.35) следует принять $\varepsilon = 0$.

Уравнение связи между напряжениями и деформациями относится к малым деформациям. Для конечных деформаций

уравнения Гука – Генки применимы при условии простого нагружения и только в главных осях деформаций. Под простым нагружением понимают процесс, в котором главные оси деформаций все время связаны с одними и теми же материальными волокнами и вид деформации не меняется, т.е. коэффициент Лодэ – Надаи

$$\mu_e = \text{const.}$$

В этом случае уравнения Гука – Генки при $\varepsilon = 0$ имеют вид

$$\frac{e_1}{\sigma_1 - \sigma} = \frac{e_2}{\sigma_2 - \sigma} = \frac{e_3}{\sigma_3 - \sigma} = \psi = \frac{\Gamma}{2T} = \frac{3}{2} \frac{e_i}{\sigma_i}, \quad (4.36)$$

где e_1, e_2, e_3 – логарифмические деформации; Γ, e_i – интенсивности логарифмических деформаций сдвига и линейных деформаций.

Если ввести понятие модуля пластичности или секущего модуля, который определяется по выражению

$$E_1 = \frac{\sigma_i}{e_i} = 3 \frac{T}{\Gamma},$$

то уравнения (4.36) могут быть представлены соотношениями, аналогичными обобщенному закону Гука, в которых модуль Юнга первого рода E заменяется на E_1 , а коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E_1} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \\ e_2 &= \frac{1}{E_1} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right]; \\ e_3 &= \frac{1}{E_1} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Уравнения деформационной теории пластичности – нелинейные, но благодаря относительной простоте они нашли широкое применение. Эти уравнения в полной мере описывают пластическую деформацию при простом нагружении. Однако их использование для описания пластических деформаций при сложном нагружении может привести к неудовлетворительным результатам.

4.5. Теория пластического течения

Теория пластического течения свободна от ряда недостатков, присущих деформационной теории. Она основывается на следующих предположениях:

1. Тело изотропно.

2. Относительное изменение объема пропорционально среднему давлению и является упругой деформацией:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 3\bar{k}\sigma; \\ d\varepsilon &= 3\bar{k}d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

3. Полное приращение составляющих деформаций de_{ij} складывается из приращений составляющих упругой деформации $de_{ij}^{(e)}$ и пластической деформации $de_{ij}^{(p)}$:

$$de_{ij} = de_{ij}^{(e)} + de_{ij}^{(p)}. \quad (4.39)$$

Приращение составляющих упругой деформации связано с приращением составляющих напряжения законом Гука.

4. Девiator приращения пластической деформации $D_{de^{(p)}}$ и девiator напряжений D_{σ} пропорциональны:

$$D_{de^{(p)}} = d\lambda D_{\sigma} \quad (4.40)$$

или

$$de_{ij}^{(p)} = d\lambda s_{ij}. \quad (4.41)$$

Уравнения пластического течения имеют вид

$$de_{ij} = de_{ij}^{(e)} + d\lambda s_{ij}. \quad (4.42)$$

Например, при $i = j = x$, $i = x$ и $j = y$ имеем

$$de_{xx} = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + d\lambda(\sigma_x - \sigma);$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 2d\lambda\tau_{xy}.$$

Вычисляя с помощью выражения (4.41) приращения интенсивности линейных деформаций и деформаций сдвига, находим

$$\left. \begin{aligned} de_i^{(p)} &= \frac{2}{3} d\lambda \sigma_i; \\ d\Gamma_p &= 2d\lambda T. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Приращение пластической работы деформации

$$dA_p = \sigma_{ij} de_{ij}^{(p)} = 2d\lambda T^2. \quad (4.44)$$

Здесь используется суммирование по повторяющемуся индексу. Уравнения (4.42), (4.43) или (4.44) при условии текучести Губера – Мизеса (для определения $d\lambda$) называются уравнениями Прандтля – Рейса. Если в этих уравнениях пренебречь компонентами упругой деформации, то получим уравнения теории пластичности Сен-Венана – Мизеса – Леви:

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= d\lambda s_{ij}; \\ \dot{e}_{ij} &= \dot{\lambda} s_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

где

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} = \frac{H_p}{2T} = \frac{N_p}{2T^2};$$

(4.46)

$N_p = \frac{dA_p}{dt}$ – мощность пластической деформации; \dot{e}_{ij} – компоненты

тензора скоростей деформаций; \dot{e}_i, H_p – интенсивности скоростей линейных деформаций и деформаций сдвига.

4.6. Ассоциированный закон течения

Вместе с функцией текучести иногда вводится пластический потенциал $\Phi(\sigma_{ij})$, но таким образом, чтобы уравнения пластического течения можно было представить в виде

$$de_{ij}^{(p)} = d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.47)$$

Принимая условие несжимаемости материала в пластической области, на функцию $\Phi(\sigma_{ij})$ накладываем ограничение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ii}} = 0. \quad (4.48)$$

Уравнение приращения полной деформации будет иметь вид

$$de_{ij} = de_{ij}^{(e)} + de_{ij}^{(p)}. \quad (4.49)$$

Представим напряженное состояние в точке некоторым вектором в девятимерном пространстве напряжений с координатами σ_{ij} . Приращение пластической деформации в этом же пространстве можно также изобразить некоторым вектором.

Уравнение $\Phi(\sigma_{ij}) = \text{const}$ в данном пространстве напряжений определяет гиперповерхность пластического потенциала. Так как направляющие косинусы нормали к этой поверхности пропорциональны частным производным $\partial \Phi / \partial \sigma_{ij}$, то из соотношений (4.47) следует, что вектор пластического течения $de^{(p)}$ направлен по нормали к поверхности пластического потенциала.

Важным является случай, когда функция текучести и пластический потенциал совпадают:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}), \quad (4.50)$$

где f – функция текучести.

Тогда

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.51)$$

и пластическое течение развивается по нормали к поверхности текучести (рис. 4.7).



Приращение работы пластической деформации определяется по выражению

$$dA_p = \sigma_{ij} de_{ij}^{(p)} = d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.52)$$

Если f – однородная функция напряжений степени m , то

Рис. 4.7. Схема к

иллюстрации

ассоциированного закона

течения

$$\left. \begin{aligned} dA_p &= d\lambda m f = d\lambda m \underline{\underline{K}}; \\ d\lambda &= \frac{dA_p}{m \underline{\underline{K}}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

В уравнениях теории течения Прандтля – Рейса и уравнениях теории пластичности Сен-Венана – Мизеса – Леви может использоваться и выражение (4.51), для этого нужно принять

$$\left. \begin{array}{l} f = T^2; \\ \underline{\underline{K}} = k^2 = \frac{\sigma_s^2}{3}. \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

Зависимость (4.51) называют ассоциированным законом пластического течения, так как он связывается (ассоциируется) с условием текучести.

Ассоциированный закон течения позволяет вводить различные обобщения уравнений пластичности.

4.7. Сопротивление металла деформированию при холодной обработке давлением. Кривые истинных напряжений

Кривые упрочнения. Процесс холодной пластической деформации сопровождается значительным изменением механических, физических и химических свойств металла. С повышением степени деформации увеличиваются все показатели сопротивления деформированию, уменьшаются показатели пластичности, растет электрическое сопротивление, снижаются сопротивление коррозии и теплопроводность.

Совокупность явлений, связанных с изменением механических и физико-химических свойств металла при пластической деформации, называется упрочнением.

Все рассмотренные теории пластичности основываются на гипотезе единой кривой упрочнения, согласно которой при активном нагружении интенсивность напряжений есть вполне определенная функция интенсивности деформаций и вид функции не зависит от вида напряженного состояния. Гипотеза о существовании единой кривой упрочнения позволяет получить из простейших опытов растяжения и сжатия образцов зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

В качестве характеристики сопротивления деформированию при линейном растяжении образца принимают истинное напряжение,

представляющее частное от деления действующей силы на площадь поперечного сечения образца в данный момент деформирования.

Показателями формоизменения образца, оценивающими степень деформации, являются относительное удлинение образца $\delta = (l - l_0) / l_0$, относительное сужение площади поперечного сечения образца $\bar{\psi} = (F_0 - F) / F_0$, логарифмическая деформация $e = \ln(l/l_0)$, где l_0, l и F_0, F – соответственно начальная и текущая расчетные длины образца и площади поперечного сечения.

Зависимости истинного напряжения от степени деформации называют кривыми упрочнения. Различают кривые упрочнения первого, второго и третьего видов – в зависимости от принятого показателя степени деформации δ , $\bar{\psi}$ или e .

При линейном растяжении образца на диаграмме истинных напряжений следует различать две области – область равномерной деформации, когда цилиндрическая форма образца не искажается, и область локальных деформаций, когда образуется шейка.

До начала образования шейки истинные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_s = \frac{P}{F}, \quad (4.55)$$

где P и F – действующая в данный момент сила деформирования и площадь поперечного сечения образца соответственно.

Истинное напряжение σ_s связывается с условным напряжением $\sigma = P / F_0$ соотношением

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{1 - \bar{\psi}} = \sigma(1 + \delta), \quad (4.56)$$

которое получается из выражения (4.55) с использованием условия постоянства объема.

В момент начала образования шейки $\sigma = \sigma_\epsilon$ (временное сопротивление) истинное напряжение находится из выражения

$$\sigma_{su} = \frac{\sigma_\epsilon}{1 - \bar{\psi}_{su}} = \sigma_\epsilon (1 + \delta_{su}), \quad (4.57)$$

где $\bar{\psi}_{su}, \delta_{su}$ – максимальное равномерное относительное сужение площади поперечного сечения образца и максимальное равномерное относительное удлинение образца.

После появления шейки линейное напряженное состояние в образце заменяется объемным напряженным состоянием в области шейки. Напряжения по сечению образца распределены неравномерно, что значительно повышает величину σ_s . Повышение напряжения после появления шейки, вызванное изменением формы растягиваемого образца, называется упрочнением формы.

Упрочнение формы определяется по формуле Давиденкова – Спиридоновой:

$$\sigma_s^* = \frac{\sigma_s}{1 + \frac{r}{4R}} \quad (4.58)$$

или по формуле Бриджмена:

$$\sigma_s^* = \frac{\sigma_s}{\left(1 + 2 \frac{R}{r}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{R}\right)}, \quad (4.59)$$

где σ_s^* – действительное напряжение с учетом упрочнения формы; σ_s – истинное напряжение; r – радиус наименьшего поперечного сечения (в шейке) образца; R – радиус кривизны шейки.

Кривые упрочнения различных материалов показывают, что наиболее интенсивное увеличение истинного напряжения имеет место в начальной стадии деформации. При некоторых значениях степени деформации (порог упрочнения) дальнейшая деформация не вызывает значительного изменения величины истинного напряжения.

При теоретическом анализе технологических процессов обработки металлов давлением обычно используют кривые упрочнения второго и третьего видов. Кривые упрочнения первого вида применяют редко и главным образом при малых деформациях.

Кривые упрочнения второго вида иногда заменяют касательной прямой, проходящей через точку $\bar{\psi} = \bar{\psi}_{su}$, $\sigma_s = \sigma_{su}$:

$$\sigma_s = \sigma_0 + n_{II} \bar{\psi}, \quad (4.60)$$

где

$$\sigma_0 = \sigma_s \frac{1 - 2\bar{\psi}_{su}}{-\bar{\psi}_{su}}; \quad n_{II} = \sigma_s \frac{1}{(1 - \bar{\psi}_{su})^2}.$$

(4.61)

Часто кривую упрочнения второго вида удобно заменять степенной функцией

$$\sigma_s = c \bar{\psi}^n. \quad (4.62)$$

Константы c и n определяются из условия прохождения кривой через точку $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{su}$, $\sigma_s = \sigma_{su}$, в которой $dP=0$ (dP – приращение силы в указанной точке).

Откуда следует

$$c = \frac{\sigma_{su}}{\bar{\Psi}_{su}^n} = \frac{\sigma_g}{1 - \bar{\Psi}_{su}} \frac{1}{\bar{\Psi}_{su}^n}; \quad n = \frac{\bar{\Psi}_{su}}{1 - \bar{\Psi}_{su}}.$$

После преобразования функции (4.62) будем иметь

$$\sigma_s = \frac{\sigma_g}{1 - \bar{\Psi}_{su}} \left(\frac{\bar{\Psi}}{\bar{\Psi}_{su}} \right)^{\frac{\bar{\Psi}_{su}}{1 - \bar{\Psi}_{su}}}. \quad (4.63)$$

Это уравнение предложено С.И. Губкиным.

В технологических расчетах процессов обработки металлов давлением кривую упрочнения третьего вида иногда заменяют уравнением секущей, проходящей через точки $e=0$, $\sigma_s = \sigma_g$ и $e = e_{su}$, $\sigma_s = \sigma_{su}$.

Тогда

$$\sigma_s = \sigma_g + \frac{\sigma_{su}}{e_{su}} e. \quad (4.64)$$

Кривую упрочнения можно также заменить уравнением касательной к этой кривой в точке начала образования шейки:

$$\sigma_s = \sigma_0 + n_{III} e, \quad (4.65)$$

где $\sigma_0 = \sigma_{su} \left(-e_{su} \right)$; $n_{III} = \sigma_{su}$,

и

$$\sigma_s = \sigma_{su} \left(-e_{su} + e \right). \quad (4.66)$$

Чаще всего кривую упрочнения заменяют степенной функцией

$$\sigma_s = Ae^n. \quad (4.67)$$

Константы A и n определяются из условий

$$e = e_{su}; \quad \sigma_s = \sigma_{su}; \quad e = e_{su}; \quad \frac{d\sigma_s}{de} = \sigma_{su} \quad (P=0),$$

откуда следует

$$A = \frac{\sigma_{su}}{e_{su}^n}; \quad n = e_{su}.$$

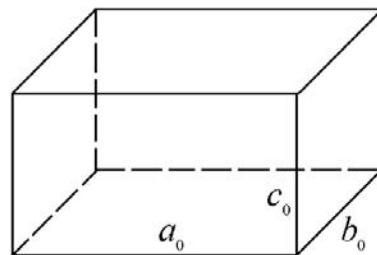
После преобразований уравнение (4.67) принимает вид

$$\sigma_s = \sigma_{su} \left(\frac{e}{e_{su}} \right)^n. \quad (4.68)$$

Связь между характеристиками деформации. Правила суммирования. Остановимся на связи между характеристиками деформации и правилах их суммирования. Рассмотрим деформацию прямоугольного параллелепипеда со сторонами a_0 , b_0 , c_0 , совпадающими с главными осями деформации (рис. 4.8).

Относительное удлинение δ , относительное сужение площади поперечного сечения $\bar{\psi}$ и логарифмическая деформация определяются соотношениями:

$$\delta = \frac{a - a_0}{a_0};$$



$$\bar{\Psi} = \frac{F_0 - F}{F_0} = \frac{a - a_0}{a};$$

$$e_1 = \ln \frac{a}{a_0}.$$

Рис. 4.8. Прямоугольный параллелепипед со сторонами, совпадающими с главными осями деформации

Эти характеристики деформации связаны между собой в области равномерного деформирования образца выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\bar{\Psi}}{1 - \bar{\Psi}}; \quad \bar{\Psi} = \frac{\delta}{1 + \delta}; \\ e_1 &= \ln(1 + \delta) = \ln \frac{1}{1 - \bar{\Psi}}; \\ \delta &= e^{e_1} - 1; \quad \bar{\Psi} = 1 - e^{-e_1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Характеристики деформации вида $\delta, \bar{\Psi}$ не обладают свойствами аддитивности, т.е. способностью слагаемости. Установим правила суммирования этих характеристик.

Допустим, что размер a_0 принимает последовательно значения a_1, a_2, a_3 . Тогда на каждом этапе деформации

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{a_1}{a_0} - 1; \\ \delta_2 &= \frac{a_2}{a_1} - 1; \\ \delta_3 &= \frac{a_3}{a_2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

По определению

$$\delta_{\text{сум}} = \frac{a_3 - a_0}{a_0} = \frac{a_3}{a_0} - 1.$$

Представим это соотношение в виде

$$\delta_{\text{сум}} = \frac{a_3}{a_0} \frac{a_1}{a_1} \frac{a_2}{a_2} - 1.$$

С учетом выражений (4.70) получим

$$\begin{aligned} \delta_{\text{сум}} &= (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) - 1 = \\ &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3\delta_1 + \delta_1\delta_2\delta_3. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Аналогично устанавливаем правило суммирования для характеристики деформации ψ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= 1 - a_0/a_1; \\ \bar{\psi}_2 &= 1 - a_1/a_2; \\ \bar{\psi}_3 &= 1 - a_2/a_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{\text{сум}} &= 1 - \frac{a_0}{a_3} = 1 - (1 - \bar{\psi}_1)(1 - \bar{\psi}_2)(1 - \bar{\psi}_3) = \\ &= \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_3 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2\bar{\psi}_3 - \bar{\psi}_3\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{\psi}_3.\end{aligned}\quad (4.73)$$

В случае логарифмической характеристики деформации

$$e_{1\text{сум}} = e_{11} + e_{12} + e_{13}, \quad (4.74)$$

$$\text{где } e_{11} = \ln \frac{a_1}{a_0}; \quad e_{12} = \ln \frac{a_2}{a_1}; \quad e_{13} = \ln \frac{a_3}{a_2}; \quad e_{1\text{сум}} = \ln \frac{a_3}{a_0}.$$

4.8. Сопротивление металла деформированию при высоких температурах

Термомеханический режим технологических процессов горячей штамповки характеризуется температурой, скоростью и степенью деформации. Совокупное влияние этих факторов определяет сопротивление металла деформированию.

Так как в реальных условиях обработки давлением температура, скорость и степень деформации в различных точках тела неодинаковы и изменяются в процессе деформирования, то в целях упрощения при расчетах исходят из их средних значений.

Многочисленные экспериментальные исследования о зависимости сопротивления пластической деформации от указанных выше параметров степени, скорости деформации и температуры показали:

1) сопротивление деформации увеличивается с повышением скорости деформации при всех температурах и степенях деформации, эта зависимость хорошо аппроксимируется степенной функцией

$$\sigma_{s2} = \sigma_{s1} \left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right)^n; \quad (4.75)$$

2) упрочнение, т.е. рост сопротивления деформации с увеличением степени деформации, характерно для всех сталей и сплавов в пределах изменения степени деформации ϵ от 0 до 0,3...0,4;

3) интенсивность упрочнения с развитием деформации уменьшается, при некоторой степени деформации достигается предел упрочнения, после чего сопротивление деформации остается практически постоянным или даже уменьшается; пока еще нет исчерпывающих объяснений последнего факта;

4) сопротивление деформации уменьшается с повышением температуры при постоянной скорости деформации и степени деформации по экспоненциальной зависимости

$$\sigma_{sa} = \sigma_{sb} e^{m(T_b - T_a)}, \quad (4.76)$$

где σ_{sa} , σ_{sb} – сопротивление деформации при абсолютных температурах T_a и T_b ($T_b > T_a$); m – температурный коэффициент.

Эта формула справедлива, если при нагреве в температурном интервале в металле не происходят фазовые превращения или структурные изменения.

На основании экспериментов было предложено описать сопротивление деформации как функцию некоторого базисного значения сопротивления деформации σ_{s0} и коэффициентов k_T , $k_{\dot{\epsilon}}$, k_e , учитывающих влияние температуры, скорости и степени деформации в виде

$$\sigma_s = \sigma_{s0} k_T k_{\dot{\epsilon}} k_e, \quad (4.77)$$

где σ_{s0} , k_T , $k_{\dot{\epsilon}}$, k_e – константы, которые определяются экспериментально.

4.9. Феноменологический критерий разрушения при пластической деформации

Критерии разрушения при пластической деформации изотропного материала. Сложность и неизученность процессов разрушения на микроуровне ставит перед исследователями задачу формулировки феноменологических критериев разрушения в рамках механики деформируемых сред.

Разные материалы под действием системы сил при обработке давлением до разрушения способны претерпевать различные по величине пластические деформации, которые зависят от свойств материала и условий деформирования (напряженного состояния, температуры, скоростей деформирования и деформаций и т.д.) и их изменения в процессе деформирования. Поэтому на протяжении нескольких десятков лет рядом ученых (С.И. Губкин, Я.Б. Фридман, М.А. Зайков, А.А. Логутин, В.Н. Перетяцько, Л.Д. Соколов, В.А. Скуднов, А.А. Пресняков, Ю.М. Чижиков, В.А. Бабичков, М.Я. Дзугутов)

изучались зависимости величины предельной деформации от характеристики напряженного состояния, причем показатели деформаций и напряженного состояния принимались различными.

В настоящее время наиболее часто берется за показатель пластичности (ресурс пластичности) величина накопленной интенсивности деформации e_i , а в качестве параметра схемы напряженного состояния – выражение $\eta = 3\sigma / \sigma_i = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sigma_i$, где σ_i – интенсивность напряжений; σ_1 , σ_2 и σ_3 – главные напряжения.

Критерии деформируемости металлов и сплавов без разрушения, предложенные С.И. Губкиным, М.А. Зайковым, В.Н. Перетятыко и другими, обладают общим недостатком – они применимы к конкретным технологическим процессам и поэтому не являются универсальными.

Существенный вклад в развитие теории деформируемости материалов без разрушения внесли Г.А. Смирнов-Аляев и В.М. Розенберг. Ими предложен универсальный критерий деформируемости без разрушения в виде

$$e_i < e_{i_{np}}(\eta), \quad (4.78)$$

где η – коэффициент жесткости напряженного состояния; e_i – накопленная интенсивность деформации к моменту времени τ ; $e_{i_{np}}$ – предельная интенсивность деформации на диаграмме пластичности $e_i = e_{i_{np}}(\eta)$ для показателя η в точке деформируемого тела, где ожидается разрушение.

Этот критерий справедлив, если в процессе деформации $\eta = \text{const}$. Влияние истории деформирования на пластичность он не учитывает.

Вопрос разрушения при сложных путях нагружения $\eta = \eta(t)$ и разных видах напряженного состояния $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$ рассмотрен в работах В.Л. Колмогорова, А.А. Богатова, Г.Д. Деля, В.А. Огородникова, Ю.Г. Калпина, О.И. Мижирицкого.

В.Л. Колмогоров предложил критерий деформируемости без разрушения, учитывающий залечивание дефектов при знакопеременной деформации и за счет рекристаллизации, а также диффузионных процессов, протекающих при высокой температуре, в следующем виде:

$$\Psi_p = \int_0^t \frac{B(\tau)E(t-\tau)Hd\tau}{\lambda_p(\eta)}, \quad (4.79)$$

где Ψ_p – степень использования запаса пластичности, которая изменяется от нуля до деформации, равной единице в момент разрушения; τ , t – время или некоторый заменяющий его параметр; $E(t-\tau)$ – коэффициент, учитывающий самозалечивание дефектов при высоких температурах и монотонно убывающий от единицы до нуля с увеличением аргумента; $B(\tau)$ – коэффициент, учитывающий историю деформирования; H – интенсивность скорости деформации сдвига; λ_p – предельная величина интенсивности сдвиговой деформации.

В настоящее время ТОМД не располагает необходимой информацией о значениях E и B для различных процессов обработки металлов давлением, и в расчетах обычно их принимают равными единице, т.е.

$$\Psi_p = \int_0^t \frac{H d\tau}{\lambda_p(\eta)} \leq 1. \quad (4.80)$$

Критерий деформируемости (4.80) обладает достаточной точностью при монотонном процессе деформирования.

Экспериментальные исследования показали, что во всех случаях существенно немонотонного деформирования этот критерий дает завышенные расчетные значения Ψ_p , т.е. разрушение происходит при больших деформациях, чем предсказывает этот критерий.

Влияние немонотонности деформирования на степень использования запаса пластичности может быть учтено в критерии деформируемости материала без разрушения, основанном на нелинейном накоплении повреждаемости и предложенном В.Л. Колмогоровым и А.А. Богатовым:

$$\Psi_p = \int_0^{\lambda} \frac{a\lambda^{a-1}}{\lambda_p^a} d\lambda. \quad (4.81)$$

Здесь a – коэффициент, значение которого зависит от физико-химической природы деформируемого металла и его параметров.

Для использования критериев (4.79) и (4.81) необходимо иметь функциональные зависимости пластичности металла λ_p и показателя a от термомеханических параметров процесса пластической деформации:

$$\lambda_p = \lambda_p(\sigma/T; \mu_\sigma; H; \theta; \bar{x}_i; c_j); \quad (4.82)$$

$$a = a(\sigma/T; \mu_\sigma; H; \theta; \bar{x}_i; c_j), \quad (4.83)$$

где σ/T – отношение гидростатического напряжения к интенсивности касательных напряжений (показатель напряженного состояния);

μ_σ – показатель Лодэ, характеризующий вид девиатора напряжений;
 θ – температура; \bar{x}_i – характеристические параметры структуры (средний размер зерна, плотность распределения неметаллических включений и т.д.); c_j – содержание химических элементов в сплаве.

Уравнения (4.82) и (4.83) называются базовыми уравнениями феноменологической теории разрушения металлов, которые определяются на основе простейших опытов.

Диаграмму пластичности металла $\lambda_p(\sigma/T)$ при холодной деформации обычно аппроксимируют экспоненциальной зависимостью

$$\lambda_p = \chi \exp(\lambda \sigma/T), \quad (4.84)$$

где коэффициенты χ и λ определяются экспериментально и зависят от химического состава и структуры металла.

Учесть влияние вида напряженного состояния на пластичность можно по формулам

$$\lambda_p = [\chi_2 - (\chi_1 - \chi_2)\mu_\sigma] \exp\left\{[\lambda_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\mu_\sigma] \frac{\sigma}{T}\right\} \quad (4.85)$$

и

$$\lambda_p = \exp \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \mu_\sigma + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 \mu_\sigma) \frac{\sigma}{T} \right] \quad (4.86)$$

в зависимости от наличия информации о величинах λ_p при двух показателях Лодэ ($\mu_\sigma = 0, \mu_\sigma = -1$) или более двух, где $\chi_1, \chi_2, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и ε_4 – коэффициенты, определяемые экспериментально.

Указанные выше критерии можно сформулировать с использованием понятий интенсивности линейных деформаций e_i и интенсивности напряжений σ_i , если учесть, что $e_i = \lambda / \sqrt{3}$ и $\sigma_i = T \sqrt{3}$.

Используя идеи А.А. Ильюшина, В.В. Новожилова и Ю.А. Работнова о нелинейном накоплении повреждаемости при пластической деформации, описываемом кинетическим уравнением, Г.Д. Дель и В.А. Огородников предложили критерий деформируемости материала без разрушения, учитывающий историю деформирования:

$$\Psi_p = \int_0^{e_i} \left(1 + a_1 \operatorname{arctg} \frac{d\eta}{de_i} \right) \frac{e_i^{a_1 \operatorname{arctg} \frac{d\eta}{de_i}}}{\left[1 + a_1 \operatorname{arctg} \frac{d\eta}{de_i} \right]} de_i, \quad (4.87)$$

где $a_1 = 0,2$ для исследованных ими материалов.

Критерий позволяет с помощью диаграммы пластичности и известного пути деформирования рассчитать величину предельной деформации при различных технологических операциях обработки металлов давлением. Он существенно улучшил согласование между теорией и экспериментом.

Для сложного нагружения Ю.Г. Калпиным предложен следующий критерий деформируемости:

$$\Psi_p = \int_0^{e_i} \left(n \varphi_0 e_i + \frac{\varphi_0 e_{inp}^n(\eta)}{e_{inp}(\eta)} \right) de_i < 1, \quad (4.88)$$

где φ_0 и n – коэффициенты, определяемые экспериментально.

При этом φ_0 определяется из испытаний на пластичность при сложных программах нагружения.

Критерий (4.88) учитывает влияние инвариантов напряженного состояния, упрочнение металла, историю деформирования и дает хорошие результаты, но его использование затруднительно в связи с необходимостью определения φ_0 .

Система опытов построения диаграмм пластичности в области $-1 \leq \eta \leq 1$ предусматривается в виде растяжения, сжатия, растяжения с кручением, сжатия с кручением цилиндрических и трубчатых образцов, растяжения плоских образцов, гладких и с надрезными выточками. Для построения диаграмм $\eta < -1$ необходимо применение специальных установок высокого давления.

В результате экспериментальных исследований выявлено существенное влияние значения показателя напряженного состояния и параметра Лодэ на пластичность металлов. С уменьшением показателя напряженного состояния пластичность металлов увеличивается. Влияние параметра Лодэ μ_σ на пластичность неоднозначно: с увеличением μ_σ может наблюдаться как рост пластичности, так и ее уменьшение. Для ряда алюминиевых и медных сплавов экспериментально установлено явление неограниченного роста пластичности при некоторых критических значениях показателя напряженного состояния.

Исследования В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова показали, что остаточные повреждения в виде субмикро- и макропор и трещин возникают уже на первых этапах пластической деформации и накапливаются с ее ростом. При последующей термической обработке (отжиге) эти повреждения исчезают полностью только в том случае, если степень использования запаса пластичности при предшествовавшей деформации не превышала 0,25...0,3. Поэтому для ответственных деталей, работающих в условиях циклической нагрузки и подвергающихся после обработки давлением термической обработке (отжигу или закалке), допустимой величиной степени использования запаса пластичности следует считать 0,25. При $0,25 < \Psi_p < 0,65$ последующий за деформацией отжиг позволяет устранить только часть повреждений (микропор), что обусловлено объединением отдельных микропор в полость большего размера. Поэтому только для неответственных деталей допустимая степень использования запаса пластичности может быть принята 0,65.

Если на всех предшествующих операциях обработки давлением степень деформации выбиралась такой, чтобы величина использования запаса пластичности не превышала 0,25, число операций может быть не ограничено и может быть получена значительная суммарная степень деформации.

Рядом исследователей в качестве характеристики разрушения материала предлагалось принимать удельную пластическую работу деформации разрушения. Рассмотрим одну из возможных энергетических формулировок критерия разрушения изотропного

материала. Пусть нам известна кривая упрочнения $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ и диаграмма пластичности. В этом случае

$$A_p = \int_0^{e_{i_p}} \sigma_i de_i, \quad (4.89)$$

где величина e_{i_p} является функцией σ/T и μ_σ ; σ_i – интенсивность напряжений.

Таким образом, $A_p = F(\sigma/T, \mu_\sigma)$ может заменить диаграммы пластичности.

Исходя из этого, по аналогии с рассмотренными выше феноменологическими критериями разрушения можно ввести понятие степени использования пластической работы разрушения:

$$\Psi_A = \int_0^A \frac{dA}{A_p} = \int_{t_0}^t \frac{N}{A_p} dt = \int_0^{e_i} \frac{\sigma_i de_i}{A_p}, \quad (4.90)$$

где N – мощность пластической деформации; t_0 и t – время.

Здесь интегрирование ведется вдоль траектории рассматриваемых частиц. Отметим, что до деформации (при $t = t_0$) $\Psi_A = 0$, а в момент разрушения $\Psi_A = 1$, как и для приведенных выше критериев разрушения. Если принять, что материал не упрочняется, то критерий разрушения (4.90) сводится к критерию (4.80), предложенному В.Л. Колмогоровым.

Критерий разрушения (4.90) при нагружении, в котором показатель напряженного состояния σ/T и параметр Лодэ μ_σ не изменяются, значительно упрощается и приводится к виду

$$A \leq A_p. \quad (4.91)$$

Если, кроме того, материал не упрочняется, то

$$e_i \leq e_{i_p}, \quad (4.92)$$

где e_{i_p} – интенсивность деформации в момент макроразрушения (пластичность металла).

Для использования этого критерия разрушения необходимо иметь информацию о напряженном и деформированном состоянии рассматриваемого элемента объема в очаге деформации, о траектории движения этого объема, а также о диаграмме пластичности материала.

4.10. Теория пластичности ортотропного материала

Заготовки, подвергаемые штамповке, как правило, обладают анизотропией механических свойств, обусловленной маркой материала, технологическими режимами ее получения, которая может оказывать как положительное, так и отрицательное влияние на устойчивое протекание технологических процессов обработки металлов давлением.

При анализе технологических процессов ОМД в настоящее время учитывается начальная анизотропия механических свойств материала и его изотропное упрочнение.

Предельные возможности формоизменения при пластическом деформировании анизотропных материалов обычно оцениваются по максимальной величине растягивающего напряжения на выходе из очага пластической деформации, а также по феноменологическим критериям разрушения, связанным с накоплением микроповреждений.

Ниже приведены основные уравнения и соотношения, необходимые для теоретического анализа процессов пластического деформирования анизотропных материалов.

Условие текучести и ассоциированный закон пластического течения ортотропного материала. Материал принимаем несжимаемым, жесткопластическим, ортотропным, для которого справедливы условие текучести Мизеса – Хилла [43, 45, 46]:

$$2f \sqrt{\sigma_{ij}^2} \equiv F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (4.93)$$

и ассоциированный закон пластического течения:

$$\begin{aligned} de_x &= d\lambda[H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)]; & d\gamma_{yz} &= d\lambda L\tau_{yz}; \\ de_y &= d\lambda[F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)]; & d\gamma_{zx} &= d\lambda M\tau_{zx}; \\ de_z &= d\lambda[G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)]; & d\gamma_{xy} &= d\lambda N\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

где F, G, H, L, M, N – параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в главных осях анизотропии; $de_x, de_y, de_z, d\gamma_{yz}, d\gamma_{xy}$ и $d\gamma_{zx}$ – компоненты приращения тензора деформаций; $d\lambda$ – коэффициент пропорциональности. Здесь x, y, z – главные оси анизотропии, оси пересечения трех ортогональных плоскостей симметрии механических свойств материала.

Параметры анизотропии F, G, H, L, M, N связаны с величинами сопротивления материала пластическому деформированию следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
2F &= \frac{1}{\sigma_{sy}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{sx}^2}; & 2L &= \frac{1}{\tau_{syz}^2}; \\
2G &= \frac{1}{\sigma_{sz}^2} + \frac{1}{\sigma_{sx}^2} - \frac{1}{\sigma_{sy}^2}; & 2M &= \frac{1}{\tau_{szx}^2}; \\
2H &= \frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sy}^2} - \frac{1}{\sigma_{sz}^2}; & 2N &= \frac{1}{\tau_{sxy}^2},
\end{aligned} \tag{4.95}$$

где σ_{sx} , σ_{sy} и σ_{sz} – величины сопротивления материала пластическому деформированию при растяжении в главных осях анизотропии x, y, z ; τ_{sxy} , τ_{syz} , τ_{szx} – величины сопротивления материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к главным осям анизотропии x, y, z .

В случае изотропно-упрочняющегося начально ортотропного тела Р. Хиллом введены понятия интенсивности напряжений σ_i [46]:

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= \sqrt{3/[2(F + G + H)] [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\
&+ H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2]^{1/2}}, \tag{4.96}
\end{aligned}$$

приращения интенсивности деформации de_i и скорости деформации:

$$\begin{aligned}
de_i &= \sqrt{\frac{2}{3}(F + G + H)} \left[F \left(\frac{Gde_y - Hde_z}{FG + GH + HF} \right)^2 + G \left(\frac{Hde_z - Fde_x}{FG + GH + HF} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. H \left(\frac{Fde_x - Gde_y}{FG + GH + HF} \right)^2 + \frac{2d\gamma_{yz}^2}{L} + \frac{2d\gamma_{zx}^2}{M} + \frac{2d\gamma_{xy}^2}{N} \right]^{1/2}; \tag{4.97}
\end{aligned}$$

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{F + G + H} \left[F \left(\frac{G\dot{\epsilon}_y - H\dot{\epsilon}_z}{FG + GH + HF} \right)^2 + G \left(\frac{H\dot{\epsilon}_z - F\dot{\epsilon}_x}{FG + GH + HF} \right)^2 + H \left(\frac{F\dot{\epsilon}_x - G\dot{\epsilon}_y}{FG + GH + HF} \right)^2 + \frac{2\dot{\gamma}_{yz}^2}{L} + \frac{2\dot{\gamma}_{zx}^2}{M} + \frac{2\dot{\gamma}_{xy}^2}{N} \right]^{1/2}. \quad (4.97')$$

Плоское напряженное состояние анизотропного материала.

Ряд процессов обработки металлов давлением, таких как вытяжка, обжим, раздача и другие, протекают в условиях плоского напряженного состояния листовой заготовки. Теоретические исследования напряженного и деформированного состояния заготовки, силовых режимов этих процессов выполняются на основе уравнений плоского напряженного состояния.

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) условие текучести (4.93) записывается в виде

$$\sqrt{G + H} \overline{\sigma}_x^2 - 2H \sigma_x \sigma_y + \sqrt{H + F} \overline{\sigma}_y^2 + 2N \tau_{xy}^2 = 1. \quad (4.98)$$

Кроме указанных выше характеристик анизотропии F , G , H и N , анизотропию механических свойств листовых материалов оценивают коэффициентом анизотропии R_β , который представляет собой

отношение логарифмических деформаций по ширине и толщине образца, вырезанного под углом β к направлению прокатки, при испытании его на растяжение:

$$R_{\beta} = e_b / e_z, \quad (4.99)$$

где e_b – логарифмическая деформация по ширине; e_z – логарифмическая деформация по толщине.

Коэффициент анизотропии R_{β} связан с параметрами анизотропии соотношением

$$R_{\beta} = \frac{\frac{H}{F} + \left(2\frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4\frac{H}{F} \right) \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta + \frac{G}{F} \cos^2 \beta}. \quad (4.100)$$

Выражение (4.100) позволяет определять коэффициент анизотропии в любом направлении листа относительно направления прокатки в зависимости от отношения параметров анизотропии H/F , N/F и G/F .

Величины сопротивления материала пластическому деформированию $\sigma_{s\beta}$ в различных направлениях β по отношению к направлению прокатки x в плоскости листа могут быть рассчитаны по выражению

$$\sigma_{sb}^2 = \frac{\sigma_{s90}^2 \left(1 + \frac{H}{F}\right)}{\sin^2 \alpha + \frac{G}{F} \cos^2 \alpha + \frac{H}{F} + \left(2 \frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4 \frac{H}{F}\right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}, \quad (4.101)$$

где σ_{s90} – сопротивление материала пластическому деформированию при растяжении образца, вырезанного в направлении, перпендикулярном к направлению прокатки.

Отношения параметров анизотропии определяются на основе измерений деформаций образцов, вырезанных в различных направлениях относительно направления прокатки, при их испытании на растяжение по зависимостям:

$$\frac{H}{F} = R_{90}; \quad \frac{G}{F} = \frac{R_{90}}{R_0}; \quad \frac{N}{F} = \left(R_{45} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{R_{90}}{R_0}\right). \quad (4.102)$$

Определив коэффициенты анизотропии в направлениях 0, 45 и 90° к направлению прокатки и параметр анизотропии F по выражению

$$F = \frac{1}{\sigma_{s90}^2 \left(1 + \frac{H}{F}\right)}, \quad (4.103)$$

можно найти остальные параметры анизотропии.

Часто анизотропию в плоскости листа оценивают средним значением R , вычисленным по формулам:

$$R = \frac{R_0 + R_{90} + R_{45}}{3}; \quad R = \frac{R_0 + R_{90} + 2R_{45}}{4}. \quad (4.104)$$

Плоское деформированное состояние анизотропного тела.

Теоретические исследования таких процессов обработки металлов давлением, как прокатка листов, осадка призматических заготовок с большим отношением длины к ширине, вытяжка с утонением, волочение и выдавливание полых осесимметричных деталей и труб с большим отношением диаметра к толщине, проводятся на основе уравнений плоского деформированного состояния.

Пусть координатные оси x , y , z совпадают с главными осями анизотропии.

Выбираем такое состояние плоской деформации, чтобы главная ось анизотропии y была нормальна к плоскости течения. В этом случае деформация вдоль оси y отсутствует:

$$de_y = 0. \quad (4.105)$$

С учетом зависимостей между напряжениями и приращениями деформаций (4.94), отнесенных к главным осям анизотропии, и условия (4.105) найдем

$$\sigma_y = \frac{H\sigma_x + F\sigma_z}{H + F}. \quad (4.106)$$

Подставляя значение σ_y из (4.106) в условие текучести для анизотропного тела (4.93) и принимая во внимание, что для рассматриваемого случая $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, получим

$$\frac{FG + GH + FH}{H + F} (\sigma_x - \sigma_z) + 2M \tau_{xz}^2 = 1. \quad (4.107)$$

Введя обозначения c и τ_{sxz} :

$$c = 1 - \frac{M(F + H)}{2(FG + GH + HF)}; \quad (4.108)$$

$$\tau_{sxz}^2 = \frac{1}{2M}, \quad (4.109)$$

условие текучести (4.107) приводим к виду

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4(-c) \tau_{sxz}^2 = 4\tau_{sxz}^2 (-c), \quad (4.110)$$

где τ_{sxz} – сопротивление материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к осям x и z ; c – характеристика анизотропии тела в условиях плоской деформации; $-\infty < c < 1$.

Для изотропного и трансверсально-изотропного материала $c = 0$.

Условие текучести (4.110) для плоского деформированного состояния в главных осях напряжений имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{sxz} \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\varphi}}, \quad (4.111)$$

где φ – угол между первым главным направлением напряжения σ_1 и осью анизотропии x .

Обозначив

$$\gamma_{II} = \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\varphi}},$$

условие текучести (4.111) перепишем следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{sxz} \gamma_{II}. \quad (4.112)$$

Характеристиками анизотропии при плоском деформированном состоянии являются сопротивление материала пластическому деформированию τ_{sxz} при сдвиге и величина c .

Для изотропного упрочняющегося тела $c = 0$, $\tau_{sxz} = k$;

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad (4.113)$$

где k – пластическая постоянная материала.

Экспериментальное определение анизотропии механических свойств материала. Анализ процессов обработки давлением заготовок из анизотропных материалов возможен только при наличии информации об анизотропии механических свойств этих материалов.

Определение характеристик анизотропии механических свойств листовых материалов в условиях плоского напряженного состояния. Наиболее важными характеристиками анизотропии механических свойств листовых материалов при формоизменении в

условиях плоского напряженного состояния являются величины коэффициентов анизотропии R_β и сопротивления материала пластическому деформированию $\sigma_{s\beta}$ в различных направлениях по отношению к направлению прокатки (ось анизотропии x) в плоскости листа (плоскость $xу$).

Зная величины коэффициентов анизотропии в направлениях 0 , 45 и 90° к направлению прокатки и, например, определив параметр анизотропии F по выражению (4.103), можно найти остальные параметры анизотропии G , H , N по (4.102) при условии, что материал не упрочняется или изотропно упрочняется.

Таким образом, для определения параметров анизотропии необходимо испытать три вида образцов, вырезанных в пределах одного листа под углами 0 , 45 и 90° к направлению прокатки на растяжение по шесть штук каждого вида, в соответствии с ГОСТ 11701-84 (при $s_0 < 4$ мм) и ГОСТ 1497-84 (при $s_0 > 4$ мм) (рис. 4.9).

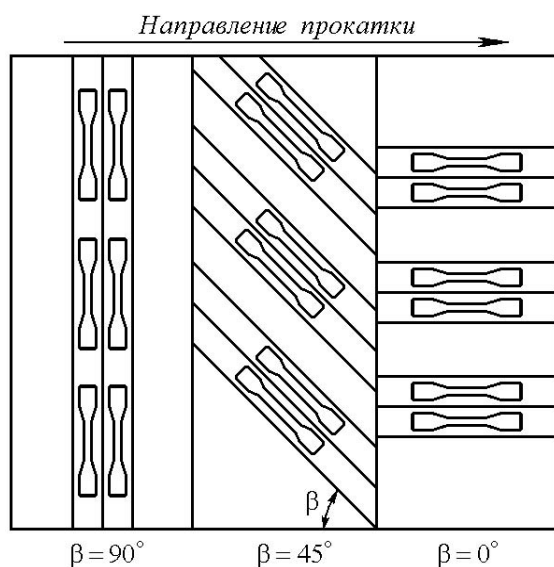


Рис. 4.9. Схема раскроя листов и вырезки образцов для испытания на анизотропию

Точность размеров образцов обеспечивается их обработкой в специальных шаблонах.

Предварительно перед испытаниями на образец в зоне расчетной длины l_0 необходимо нанести квадратные ячейки со стороной 10 мм (рис. 4.10).

Ячейки наносят алмазным индентором на измерительном микроскопе УИМ-21 с точностью до $0,025 \dots 0,03$ мм по методике, изложенной в работах [43, 45]. До и после испытаний ячейки

образцов измеряются на том же микроскопе.

Растяжение образцов необходимо производить на универсальных испытательных машинах с записью индикаторных диаграмм и с регистрацией в процессе деформирования продольных и поперечных деформаций [46].

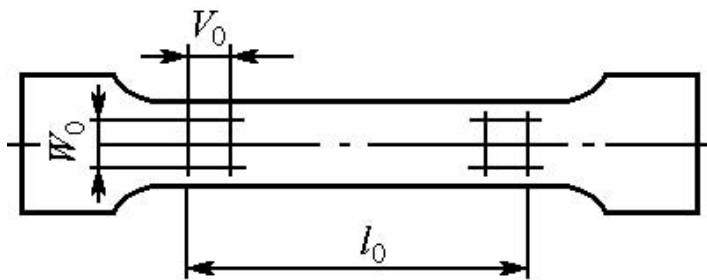


Рис. 4.10. Схема нанесения ячеек на образец

Величины пределов текучести $\sigma_{\beta_{0,2}}$ определяются в соответствии с ГОСТ 1497-84 или ГОСТ 11701-84 в зависимости от исходной толщины материала.

Деформации образцов по ширине e_w , длине e_v и толщине e_z находятся по формулам:

$$e_w = \ln \left(\frac{W}{W_0} \right); \quad e_v = \ln \left(\frac{V}{V_0} \right); \quad e_z = -e_w - e_v,$$

где W_0 , W , V_0 , V – размеры ячейки поперек и вдоль образца до и после этапа деформации.

Для получения наиболее достоверных результатов используют ту часть разорванного образца, в которой ячейка была наиболее удалена от очага локальной деформации (места разрыва).

Если коэффициенты анизотропии не зависят от степени деформации, то определяют их величины R_β при максимальной равномерной деформации, вычисленной по замерам ширины и толщины образца и по замерам ячейки.

Осадка вырезанных по толщине листа цилиндрических образцов стопкой должна осуществляться в штампе на испытательной машине с одновременной фиксацией величины силы на силоизмерительной шкале машины и перемещения осадочной плиты. Осадке должны подвергаться шесть составленных стопкой образцов.

На основе механических испытаний по одноосному растяжению образцов, вырезанных под углами β к направлению прокатки и осадки цилиндрических образцов, можно установить зависимости изменения истинного сопротивления материала пластическому деформированию $\sigma_{s\beta}$ и σ_{sz} и коэффициентов анизотропии R_β от степени деформации образца.

Определение характеристик анизотропии механических свойств листовых материалов в условиях плоской деформации.

Основными характеристиками анизотропии материалов в условиях плоского деформированного состояния, например, в плоскости xz являются характеристики анизотропии c и сопротивление материала пластическому деформированию при сдвиге τ_{s_zx} .

Определение механических характеристик листовых материалов в плоскости xz производится путем осадки призматических образцов,

причем длинная сторона образца располагается в направлении главной оси анизотропии y . Образцы вырезаются под углами 0 и 45° к толщине материала по шесть штук соответственно (рис. 4.11).

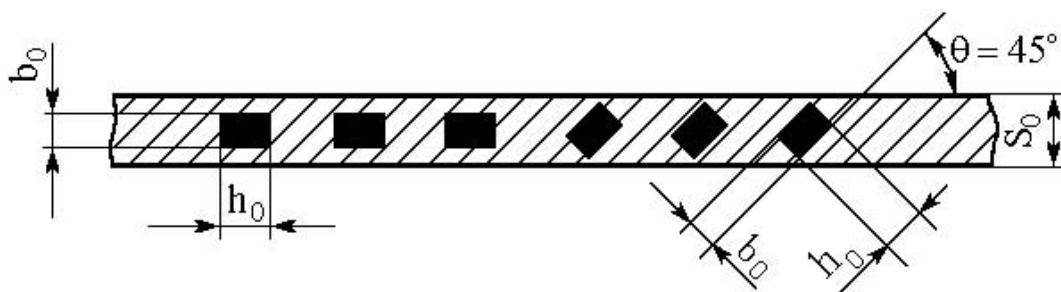


Рис. 4.11. Схема вырезки образцов для определения характеристик анизотропии механических свойств в условиях плоской деформации

Для уменьшения влияния трения при осадке отношение высоты осаживаемого образца к ширине рекомендуется выбирать таким образом, чтобы при степени деформации $\varepsilon = \Delta h/h_0 = 20\%$ выполнялось условие $h/b > 0,95$. В этом случае с достаточной точностью можно считать, что удельная сила осадки совпадает с истинным сопротивлением материала пластическому деформированию. Условия плоской деформации обеспечиваются конструкцией штампа и размерами образцов. Отношение длины образца к его ширине рекомендуется выбирать не менее 15. Следует отметить, что характеристика анизотропии s при различных степенях осадки будет неизменной, если испытываемый материал упрочняется изотропно.

Величина характеристики анизотропии c_{xz} и сопротивления материала пластическому деформированию при сдвиге τ_{sxz} определяются соответственно по формулам

$$\tau_{sxz} = \sigma'_{s_{45}} / 2; \quad (4.114)$$

$$c_{xz} = 1 - \left(\frac{\sigma'_{s_0}}{\sigma'_{s_{45}}} \right)^2, \quad (4.115)$$

где σ'_{s_0} , $\sigma'_{s_{45}}$ – пределы текучести при осадке образцов, вырезанных под углами 0 и 45° к толщине.

Определение характеристик анизотропии механических свойств трубных заготовок. Технология производства трубных осесимметричных заготовок прокаткой, прессованием, волочением обуславливает цилиндрическую анизотропию механических свойств, которая может оказывать на процессы обработки давлением как положительное, так и отрицательное влияние. Если трубу разрезать вдоль образующей и сделать развертку, то ее свойства будут аналогичны свойствам анизотропного листа. Следовательно, анизотропию трубы можно также характеризовать коэффициентами анизотропии $R_\beta (R_0, R_{45}, R_{90})$, где β – угол между осью трубы и направлением вырезки образца.

Для экспериментального определения этих параметров образцы изготавливаются из развертки, которую получают спрямлением отрезка трубы на прессе с малой скоростью деформирования. Установлено, что величина деформации спрямления незначительна и на механические характеристики металла практически не влияет.

Следует отметить, что при осесимметричном нагружении тонкостенных труб коэффициент анизотропии R_{45} не влияет на процесс пластического формоизменения, так как касательные напряжения и деформации сдвига отсутствуют.

Коэффициент анизотропии в продольном направлении определим, растягивая трубчатый образец продольной осевой силой и измеряя деформации в окружном направлении e_φ и деформацию по толщине образца e_δ , по формуле

$$R_m = R_0 = e_\varphi / e_\delta . \quad (4.116)$$

В дальнейшем этот параметр будем называть коэффициентом анизотропии в меридиональном направлении.

Подвергая образец раздате внутренним давлением, найдем коэффициент анизотропии в окружном направлении:

$$R_\varphi = R_{90} = e_m / e_\delta . \quad (4.117)$$

Кривые упрочнения анизотропного материала. Среди математических моделей, описывающих упрочнение материала, следует выделить модели изотропного, трансляционного и комбинированного упрочнения материала при пластическом формоизменении.

Изотропное упрочнение – простейшая модель упрочняющегося тела. Она реализуется в предположении, что поверхность нагружения расширяется подобно начальной поверхности текучести. В этом случае пределы текучести растут пропорционально одному параметру упрочнения, и состояние анизотропии механических свойств исходной заготовки не изменяется.

Рассмотрим некоторые возможные математические модели анизотропного упрочнения. Допустим, что поверхность нагружения не перемещается в пространстве напряжений, а анизотропно расширяется во всех направлениях.

Примем, что сопротивления материала пластическому деформированию в направлениях главных осей анизотропии x , y , z и при сдвиге в главных осях анизотропии подчиняются зависимостям

$$\sigma_{s_{ii}} = \sigma_{T_{ii}} + F_{ii}(e_i) \cdot F1_{ii}(e_{ii}, e_i); \quad \tau_{s_{ij}} = \tau_{T_{ij}} + F_{ij}(e_i), \quad (4.118)$$

где $\sigma_{T_{ii}}$ и $\tau_{T_{ij}}$ – пределы текучести в соответствующих направлениях; $F_{ii}(e_i)$ и $F_{ij}(e_i)$ – функции, зависящие от величины интенсивности деформации e_i , определяемой с помощью выражения (4.97); $F1_{ii}(e_{ii}, e_i)$ – функции, зависящие от величины интенсивности деформации e_i и компонент тензора деформаций e_{ii} в главных осях анизотропии x , y и z ; i и j принимают значения x , y и z .

В дальнейшем принимаем, что в случае совпадения индексов i и j остается только один из них.

Следует отметить, что модель анизотропного упрочнения (4.118) при $F1_{ii}(e_{ii}, e_i) = 1$ переходит в модель анизотропного упрочнения от интенсивности деформации e_i :

$$\sigma_{s_{ii}} = \sigma_{T_{ii}} + F_{ii}(e_i); \quad \tau_{s_{ij}} = \tau_{T_{ij}} + F_{ij}(e_i), \quad (4.119)$$

а в случае равенства

$$\begin{aligned} F1_x(e_i)/\sigma_{T_x} = F1_y(e_i)/\sigma_{T_y} = F1_z(e_i)/\sigma_{T_z} = F_{xy}(e_i)/\tau_{T_{xy}} = \\ = F_{zx}(e_i)/\tau_{T_{zx}} = F_{yz}(e_i)/\tau_{T_{yz}} = F(e_i) \end{aligned} \text{ – в модель изотропного упрочнения вида}$$

$$\sigma_{s_{ii}} = \sigma_{T_{ii}} [1 + F(e_i)]; \quad \tau_{s_{ij}} = \tau_{T_{ij}} [1 + F(e_i)]. \quad (4.119')$$

Функции $F_{ii}(e_i)$, $F_{ij}(e_i)$ и $F1_{ii}(e_i)$ могут быть определены из анализа системы опытов на растяжение, сжатие и чистый сдвиг

образцов в главных осях анизотропии в исходном состоянии и образцов, предварительно деформированных.

Структуры функций $F_{ii}(e_i)$, $F_{ij}(e_i)$ и $F1_{ii}(e_i)$ в дальнейшем представим в виде

$$F_{ii}(e_i) = A_{ii}(e_i)^{n_{ii}}; \quad F_{ij}(e_i) = A_{ij}(e_i)^{n_{ij}}; \quad (4.120)$$

$$F1_{ii}(e_{ii}, e_i) = \left[1 + \left(\frac{e_{ii}}{e_i} \right)^2 \right]^{m_{ii}}, \quad (4.121)$$

где A_{ii} , A_{ij} , n_{ii} , n_{ij} и m_{ii} – константы материала.

Учитывая соотношения (4.120) и (4.121), выражения для определения сопротивления материала пластическому деформированию (4.118) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{s_{ii}} = \sigma_{T_{ii}} + A_{ii}(e_i)^{n_{ii}} \left[1 + \left(\frac{e_{ii}}{e_i} \right)^2 \right]^{m_{ii}}; \quad \tau_{s_{ij}} = \tau_{T_{ij}} + A_{ij}(e_i)^{n_{ij}}. \quad (4.122)$$

В ряде случаев при отсутствии той или иной информации по анизотропии механических свойств исходного материала целесообразно принять равенство

$$\begin{aligned} F_x(e_i)/\sigma_{T_x} &= F_y(e_i)/\sigma_{T_y} = F_z(e_i)/\sigma_{T_z} = \\ &= F_{xy}(e_i)/\tau_{T_{xy}} = F_{zx}(e_i)/\tau_{T_{zx}} = F_{yz}(e_i)/\tau_{T_{yz}} = A(e_i), \\ n_x &= n_y = n_z = n_{xy} = n_{yz} = n_{zx} = n \end{aligned}$$

и представить выражения (4.122) в виде

$$\sigma_{s_{ii}} = \sigma_{T_{ii}} \left\{ 1 + A(e_i)^n \left[1 + \left(\frac{e_{ii}}{e_i} \right)^2 \right]^{m_{ii}} \right\}; \quad \tau_{s_{ij}} = \tau_{T_{ij}} [1 + A(e_i)^n]. \quad (4.122')$$

Такое допущение позволяет значительно упростить систему экспериментальных исследований по определению параметров кривых анизотропного упрочнения ортотропного материала.

Примечание. Выбор предложенных выше моделей упрочнения для исследуемого листового материала осуществляется следующим образом. Рассматривается простейшая модель упрочнения анизотропного материала – изотропного упрочнения. Если величины коэффициентов анизотропии R_β в опытах на простейшее растяжение изменяются менее чем на 5 % в пределах равномерной деформации, то эта модель закладывается в основу расчета процессов пластического формоизменения. Если это условие не выполняется, то анализируется однопараметрическая модель анизотропного упрочнения, предусматривающая использование кривых упрочнения в направлениях главных осей анизотропии x, y и z . Если же рассчитанные величины коэффициентов анизотропии R_β с учетом выражений (4.95) и (4.100) отличаются от экспериментальных более чем на 5 % в пределах равномерной деформации, то необходимо переходить на более сложную модель анизотропного упрочнения (4.122) – многопараметрическую. Методика определения коэффициентов анизотропии для указанных выше случаев приведена в работе [24]. При анизотропном упрочнении ортотропного материала в выражении интенсивности напряжений коэффициенты анизотропии будут изменяться и будет изменяться анизотропия механических свойств.

Феноменологический критерий разрушения анизотропного материала. Феноменологический критерий разрушения заготовки из анизотропного материала разработан на основании экспериментальных исследований [4, 5, 19, 20, 39]. Принимается, что

при пластическом формоизменении интенсивность деформации в момент разрушения e_{inp} существенно зависит от показателя напряженного состояния σ/σ_i и параметра вида напряженного состояния Лодэ μ_σ , а также учитывается ориентация первой главной оси напряжений σ_1 относительно главных осей анизотропии x, y, z , определяемых углами α, β и γ .

По аналогии с работами В.Л. Колмогорова, А.А. Богатова, Ю.Н. Работнова, С.Т. Милейко, С.А. Шестерикова, Б.А. Мигачева предлагается критерий деформируемости без разрушения записать в виде

$$\Psi_p = \int_0^{e_i} \frac{de_i}{e_{inp}} < 1. \quad (4.123)$$

Здесь Ψ_p – степень использования запаса пластичности материала по деформационной модели разрушения; предельная степень деформации $e_{inp} = e_{inp}(\sigma/\sigma_e, \mu_\sigma, \alpha, \beta, \gamma)$.

Интегрирование в выражении (4.123) ведется вдоль траектории рассматриваемых элементарных объемов. До деформации (при $t = t_0$) $\Psi_p = 0$, а в момент разрушения (при $t = t_p$) $\Psi_p = 1$.

Если при нагружении показатель напряженного состояния σ/σ_e и параметр Лодэ μ_σ не изменяется, то имеем

$$e_i \leq e_{inp}. \quad (4.124)$$

Оценка степени повреждаемости материала в деформационном критерии разрушения требует наличия информации о механических свойствах материала, напряженном и деформированном состояниях

элементарного объема в очаге деформации, а также значения функциональной зависимости

$$e_{inp} = e_{inp}(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma, \alpha, \beta, \gamma).$$

Представим зависимости интенсивности деформации в момент разрушения e_{inp} анизотропного тела в виде произведения двух функций:

$$e_{inp} = f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma) \cdot f_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad (4.125)$$

где $f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma)$ – функция, зависящая от показателя напряженного состояния σ/σ_i и параметра Лодэ μ_σ ; $f_2(\alpha, \beta, \gamma)$ – функция, зависящая от направляющих косинусов, определяющих ориентацию первой главной оси напряжений σ_1 относительно главных осей анизотропии x, y и z .

В соответствии с рекомендациями, предложенными в работах В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова, в дальнейшем структуру функции $f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma)$ выбираем типа (4.85) или (4.86) в виде

$$f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma) = [A_2 - (A_1 - A_2)\mu_\sigma] \exp\left\{ [B_2 - (B_1 - B_2)\mu_\sigma] \frac{\sigma}{\sigma_i} \right\} \quad (4.126)$$

или

$$f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma) = \left[C_1 + C_2\mu_\sigma + (C_3 + C_4\mu_\sigma) \frac{\sigma}{\sigma_i} \right]. \quad (4.127)$$

Если при пластической деформации вид напряженного состояния не оказывает влияния на предельное значение степени деформа-

ции e_{inp} , то функцию $f_1(\sigma/\sigma_i)$ удобно представить следующим образом:

$$f_1(\sigma/\sigma_i) = A \exp\left(B \frac{\sigma}{\sigma_i}\right). \quad (4.128)$$

В выражениях (4.126) – (4.128) $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, C_4, A, B$ – константы материала.

Учет анизотропии механических свойств материала заготовки при пластической деформации будем осуществлять с помощью функции $f_2(\alpha, \beta, \gamma)$, которую выбираем в следующей форме:

$$f_2(\alpha, \beta, \gamma) = a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma, \quad (4.129)$$

где a_0, a_1, a_2 и a_3 – константы материала, зависящие от анизотропии механических свойств материала заготовки.

Таким образом, для определения предельной величины степени деформации имеем следующие выражения, которые учитывают природу материала, анизотропию механических свойств исходной заготовки, влияние показателя напряженного состояния σ/σ_i и параметра вида напряженного состояния μ_σ :

$$e_{inp} = [A_2 - (A_1 - A_2)\mu_\sigma] \exp\left\{ [B_2 - (B_1 - B_2)\mu_\sigma] \frac{\sigma}{\sigma_i} \right\} \times \\ \times (a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma); \quad (4.130)$$

$$e_{inp} = \left[C_1 + C_2 \mu_\sigma + (C_3 + C_4 \mu_\sigma) \frac{\sigma}{\sigma_i} \right] (a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma);$$

(4.131)

$$e_{inp} = A \exp \left(B \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) (a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma). \quad (4.132)$$

Константы материала $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, C_4, A, B, a_0, a_1, a_2$ и a_3 находятся из системы опытов, реализуемых при различных значениях $\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma$ и углах вырезки образцов по отношению к направлению прокатки x, y и z .

Как отмечалось выше, построение диаграмм пластичности для исследуемых материалов связано со значительными затратами материальных ресурсов, времени экспериментатора и с наличием уникальных опытных установок. Поставленная задача существенно упрощается, если использовать имеющиеся экспериментальные данные для различных материалов, предложенные, например, в работах [4, 5, 19, 20, 39].

Накопленный богатый опыт по исследованию деформируемости изотропных материалов при пластической деформации позволяет выбрать вид функции $f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma)$, заложенный в законах деформируемости анизотропного тела при пластическом формоизменении, который учитывал бы природу материала.

В дальнейшем предлагается функцию $f_1(\sigma/\sigma_i, \mu_\sigma)$ выбирать в соответствии с родом материала (алюминиевые, медные, титановые сплавы, стали, высоколегированные стали и т.д.), а уточнение функциональной зависимости e_{inp} осуществлять с помощью функции $f_2(\alpha, \beta, \gamma)$, которая может быть определена путем обработки

экспериментальных данных по одноосному растяжению образцов, вырезанных под углами 0, 45 и 90° к направлению прокатки.

В этом случае зависимость интенсивности деформации в момент разрушения e_{inp} анизотропного тела может быть представлена в виде произведения двух функций: интенсивности деформации в момент разрушения изотропного тела $e_{inp_{из}} = f_1(\sigma_i, \mu_\sigma)$ и функции от направляющих косинусов, определяющих ориентацию первой главной оси напряжений σ_1 относительно главных осей анизотропии x , y и z $f_2(\alpha, \beta, \gamma)$.

Окончательно будем иметь

$$e_{inp} = e_{inp_{из}}(\sigma_i, \mu_\sigma) f_2(\alpha, \beta, \gamma). \quad (4.133)$$

Если величина интенсивности деформации в момент разрушения не зависит от параметра вида напряженного состояния μ_σ для изотропного тела, то выражение для её определения запишется как

$$e_{inp} = A \exp\left(B \frac{\sigma}{\sigma_i}\right) (a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma). \quad (4.134)$$

В частности, при рассмотрении изотропного тела в выражениях (4.130) – (4.132) надо положить $a_0 = 1$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; для трансверсально-изотропного тела – $a_0 \neq 1$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Поскольку в научно-технической литературе приводится сравнительно мало экспериментальных данных о влиянии параметра вида напряженного состояния μ_σ на предельную величину интенсивности деформации, а также их противоречивый характер, то

обычно для определения этой величины используется функция вида (4.134).

Примеры решения задач

Задача 4.1. В некоторой точке сплошной среды, подчиняющейся условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса, тензор напряжений задан выражением

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 0,6 & -0,3 \end{pmatrix} \mathfrak{N} \sigma_s (\mathfrak{N} > 0).$$

Компоненты напряжений заданы в Н/мм².

Чему равно \mathfrak{N} , если известно, что в рассматриваемой точке имеет место пластическое состояние?

Решение. По условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса пластическое состояние наступает и поддерживается в том случае, когда интенсивность напряжений σ_i достигает напряжения текучести при линейном напряжённом состоянии σ_s . Поэтому интенсивность напряжений вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ &= \frac{\mathfrak{N} \sigma_s}{\sqrt{2}} \sqrt{(0,5 - 0,2)^2 + (0,2 + 0,3)^2 + (-0,3 - 0,5)^2 +} \\ &+ 6[(0,4)^2 + 0^2 + 0,6^2]} = 1,43 \mathfrak{N} \sigma_s. \end{aligned}$$

Подставляя σ_i в условие текучести (пластичности) и решая получившееся уравнение относительно \mathfrak{N} , получаем

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{1,43} = 0,7.$$

Задача 4.2. В некоторой точке сплошной среды, подчиняющейся условию текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана, тензор напряжений задан выражением

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{N} \sigma_s \quad \mathfrak{N} > 0,$$

Компоненты напряжений заданы в Н/мм².

Чему равно \mathfrak{N} , если известно, что в рассматриваемой точке имеет место пластическое состояние?

Решение. Условие текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана записывается в главных напряжениях следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s.$$

Поэтому сначала необходимо вычислить величины главных напряжений. Для их определения имеем кубическое уравнение:

$$\sigma_k^3 - J_1 \sigma_k^2 - J_2 \sigma_k - J_3 = 0.$$

Находим инварианты:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3 + 0 + 0) \mathfrak{N} \sigma_s = 3 \mathfrak{N} \sigma_s;$$

$$J_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 =$$

$$= ((-3 \cdot 0 - 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3) + 1^2 + 2^2 + 1^2) \mathfrak{N}^2 \sigma_s^2 = 6 \mathfrak{N}^2 \sigma_s^2;$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= (3 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2 - 0 \cdot 1^2) \mathfrak{N}^3 \sigma_s^3 = -8 \mathfrak{N}^3 \sigma_s^3.$$

Составляем кубическое уравнение:

$$\sigma_k^3 - 3 \mathfrak{N} \sigma_s \sigma_k^2 - 6 \mathfrak{N}^2 \sigma_s^2 \sigma_k + 8 \mathfrak{N}^3 \sigma_s^3 = 0$$

и вычисляем его корни:

$$\sigma_1 = 4 \mathfrak{N} \sigma_s; \quad \sigma_2 = \mathfrak{N} \sigma_s; \quad \sigma_3 = -2 \mathfrak{N} \sigma_s.$$

Внося полученные значения σ_1 и σ_2 в условие текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана и решая получившееся уравнение относительно \mathfrak{N} , получаем $\mathfrak{N} = 1/6$.

Задача 4.3. В точках A и B однородной сплошной среды, подчиняющейся условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса, возникло пластическое состояние.

Тензоры напряжений в этих точках заданы выражениями

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma}_B = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряжений заданы в Н/мм².

Чему равно σ_x , если известно, что σ_x – первое главное напряжение? Среду считать идеально пластической.

Решение. В случае однородной среды предел текучести в любой точке один и тот же. Поэтому одинаковы и интенсивности напряжений.

Вычислим σ_i в точках A и B :

в точке A

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6-6)^2 + 6-8)^2 + 6-6)^2 + 6(-3)^2} = \sqrt{31};$$

в точке B

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - 3)^2 + 0 + 0 + 0} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x + 19}.$$

Приравнивая подкоренные выражения, получаем квадратное уравнение относительно σ_x :

$$\sigma_x^2 - \sigma_x - 12 = 0.$$

Его корни: $\sigma_{x_1} = 4$; $\sigma_{x_2} = -3$.

Так как по условию σ_x – первое главное напряжение, окончательно имеем $\sigma_x = 4$.

Задача 4.4. В некоторый момент процесса нагружения сплошной среды напряжённые состояния в точках A и B характеризовались тензором напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma}_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряжений заданы в Н/мм^2 .

При дальнейшем нагружении все напряжения возрастали пропорционально одному параметру (например, времени). В какой из двух точек раньше возникло пластическое состояние, если среда – идеально пластическая и подчиняется условию текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана?

Решение. Согласно условию пластичности Треска – Сен-Венана, пластическое состояние наступает, если $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$.

Поэтому при пропорциональном возрастании всех напряжений пластическое состояние возникает раньше в той точке, в которой разность первого и третьего главных напряжений будет наибольшей.

В точке A имеем

$$\sigma_1 = -9; \quad \sigma_3 = -12; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = -9 + 12 = 3.$$

В точке B соответственно

$$\sigma_1 = 4; \quad \sigma_3 = -3; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 4 + 3 = 7.$$

Как видно,

$$\sigma_1 - \sigma_3_B > \sigma_1 - \sigma_3_A,$$

т.е. пластическое состояние возникает раньше в точке B .

Задача 4.5. Записать условие пластичности анизотропного тела при плоском напряженном состоянии в главных осях напряжений.

Решение. Выпишем условие пластичности анизотропного материала в главных осях анизотропии (4.98):

$$(G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H + F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1.$$

Обозначив через β угол между первым главным напряжением σ_1 и осью анизотропии x (вдоль прокатки листа), величины компонент напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ через главные напряжения определим по известным формулам преобразования:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta;$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_2 \cos^2 \beta;$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \beta \cos \beta.$$

Подставляя эти выражения в условие пластичности, после преобразований получим окончательный результат:

$$A_0\sigma_1^2 + 2B_0\sigma_1\sigma_2 + C_0\sigma_2^2 - 1 = 0;$$

$$A_0 = F \sin^2 \beta + G \cos^2 \beta + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \beta \cos^2 \beta;$$

$$B_0 = -[H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \beta \cos^2 \beta];$$

$$C_0 = F \cos^2 \beta + G \sin^2 \beta + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \beta \cos^2 \beta.$$

Задача 4.6. Найти выражение для определения предела текучести σ_β в различных направлениях листа относительно направления прокатки β для плоского напряженного состояния.

Решение. Для растягиваемого образца, вырезанного под углом β к направлению прокатки листа, имеем

$$\sigma_x = \sigma_\beta \cos^2 \beta; \quad \sigma_y = \sigma_\beta \sin^2 \beta; \quad \tau_{xy} = \sigma_\beta \sin \beta \cos \beta.$$

Подставляя эти выражения в условие пластичности (4.98), получим

$$\frac{1}{\sigma_\beta^2} = F \left[\sin^2 \beta + \frac{G}{F} \cos^2 \beta + \frac{H}{F} + \left(2 \frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4 \frac{H}{F} \right) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \right].$$

Отсюда следует, что в направлении, перпендикулярном к направлению прокатки ($\beta = 90^\circ$),

$$F = \frac{1}{\sigma_{90}^2 (1 + H/F)}.$$

Окончательно можно записать

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\sigma_{90}^2 (1 + H/F)}{\sin^2 \beta + \frac{G}{F} \cos^2 \beta + \frac{H}{F} + \left(2 \frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4 \frac{H}{F} \right) \sin^2 \beta \cos^2 \beta}.$$

Задача 4.7. Найти выражение для определения величины коэффициента анизотропии R_β в любом направлении β в плоскости листа по отношению к направлению прокатки x .

Решение. Уравнения для компонент приращения деформаций (4.94) при одноосном растяжении образца под углом β к оси x примут вид

$$de_x = [(G + H) \cos^2 \beta - H \sin^2 \beta] \sigma_\beta d\lambda;$$

$$de_y = [(F + H) \sin^2 \beta - H \cos^2 \beta] \sigma_\beta d\lambda;$$

$$de_z = -[(F \sin^2 \beta + G \cos^2 \beta) \sigma_\beta d\lambda];$$

$$d\gamma_{xy} = (N \sin \beta \cos \beta) \sigma_\beta d\lambda,$$

если учесть, что при растяжении образца, вырезанного под углом β к направлению прокатки,

$$\sigma_x = \sigma_\beta \cos^2 \beta;$$

$$\sigma_y = \sigma_\beta \sin^2 \beta;$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\beta \sin \beta \cos \beta.$$

Коэффициент анизотропии R_β может быть определен как отношение приращения компонент тензора деформации $de_{\phi+\pi/2} / de_z$:

$$R_{\beta} = \frac{de_x \sin^2 \beta + de_y \cos^2 \beta - 2d\gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta}{de_z}.$$

После использования выражений для приращений компонент деформаций получим окончательный результат:

$$R_{\beta} = \frac{\frac{H}{F} + \left(2 \frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4 \frac{H}{F} \right) \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta + \frac{G}{F} \cos^2 \beta}.$$

Задача 4.8. Определить соотношение связи коэффициентов анизотропии с параметрами анизотропии и их обратную связь.

Решение. Положив в предыдущем выражении $\beta = 0; 45$ и 90° , получим

$$R_0 = \frac{H}{G}; \quad R_{90} = \frac{H}{F}; \quad R_{45} = -\frac{1}{2} + \frac{N/F}{1 + G/F}.$$

Из этих выражений находим обратные связи:

$$\frac{H}{F} = R_{90}; \quad \frac{G}{F} = \frac{R_{90}}{R_0}; \quad \frac{N}{F} = \left(R_{45} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{R_{90}}{R_0} \right).$$

Задания для самоконтроля

1. Сформулируйте условие текучести (пластичности) Губера – Мизеса. В чем заключается его физический и геометрический смысл?
2. Приведите частные выражения условия текучести Губера – Мизеса в случае плоского напряженного, плоского деформированного и осесимметричного состояний, отметьте упрощенную запись условия текучести в общем случае деформирования.
3. Изложите сущность условия текучести Треска – Сен-Венана, опишите его геометрический смысл.
4. Опишите модели упрочнения материала при пластическом формоизменении.
5. Укажите основные допущения при построении деформационной теории пластичности и запишите уравнения Гука – Генки для малых и конечных деформаций.
6. Перечислите основные предположения, свойственные теории пластического течения, и выпишите уравнения Прандтля – Рейса и Сен-Венана – Мизеса – Леви.
7. Дайте понятие об ассоциированном законе пластического течения, его основных предположениях и возможности использования.
8. Приведите формулы для определения истинных напряжений при равномерной и локальной деформации при растяжении образца.
9. Каким образом разделяются кривые упрочнения по видам?
10. Установите связь между различными характеристиками деформаций.
11. Перечислите правила суммирования различных видов деформаций.
12. Проанализируйте влияние температуры, степени и скорости деформации на сопротивление материала пластическому деформированию при высоких температурах.
13. Что понимается под пластичностью материала?
14. Что представляет собой ресурс пластичности?
15. Назовите координаты диаграммы пластичности.
16. Опишите диаграммы пластичности.
17. Запишите выражение для определения коэффициента жесткости напряженного состояния.

18. Приведите выражения для оценки степени использования ресурса пластичности согласно В.Л. Колмогорову.

19. Какое деформирование называется монотонным?

20. Какое деформирование называется существенно немонотонным?

21. Запишите выражение для определения степени использования ресурса пластичности, учитывающего самозалечивание дефектов при высоких температурах и знакопеременной деформации, и без их учета.

22. Укажите рекомендации по величине степени использования ресурса пластичности.

23. Опишите последовательность использования информации о деформированном состоянии для оценки возможности разрушения металлов.

24. Дайте пояснение по термину «анизотропный материал». Приведите примеры видов анизотропии.

25. Запишите условие пластичности анизотропного материала и ассоциированный с ним закон пластического течения.

26. Дайте определение понятия «главные оси анизотропии материала».

27. Какой вид будут иметь условия пластичности анизотропного материала при плоском напряженном и плоском деформированном состояниях?

28. Какие характеристики анизотропии материала определяют плоское напряженное и плоское деформированное состояния?

29. Укажите систему опытов для определения характеристик анизотропии при плоском напряженном, плоском деформированном и осесимметричном состояниях.

30. Какие математические модели упрочнения вам известны? Какие особенности имеет анизотропное упрочнение материала?

31. В чем состоит феноменологический критерий разрушения анизотропного материала? Запишите условие деформируемости материала без разрушения.

32. Каким образом можно упростить систему опытов для получения приближенной оценки степени использования ресурса пластичности анизотропного материала?

Глава 5. ВНЕШНЕЕ ТРЕНИЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

5.1. Особенности пластического трения

подавляющее число операций обработки металлов давлением осуществляется в условиях соприкосновения обрабатываемого металла с давящим инструментом. При этом частицы деформируемого металла скользят по поверхности инструмента, в результате чего возникают силы контактного трения, затрудняющие это скольжение.

Трение при обработке металлов давлением, за исключением отдельных операций, когда оно играет активную роль (например, прокатка, вальцовка, некоторые операции листовой штамповки), является вредным фактором.

Контактное трение ведет к возникновению неоднородности деформации, которая нарушает условия протекания упрочняющих и разупрочняющих процессов в объеме тела, в результате чего может возникать неоднородность металла (различная степень упрочнения по объему поковки, разная величина зерна и т.п.). Действие сил трения от контактных поверхностей распространяется в глубину деформируемого тела, и создаются зоны затрудненной деформации. Это может изменить схему напряженного состояния.

Контактное трение увеличивает необходимую деформирующую силу и работу деформации, снижает стойкость инструмента как в результате непосредственного износа контактной поверхности, так и вследствие дополнительного нагрева поверхности и увеличения напряжений в связи с ростом деформирующей силы. Используя различные способы снижения сил контактного трения, можно уменьшить силу деформации в 5...10 раз, а износ – в 100...1000 раз.

Необходимость применения технологических смазок при контактном трении усложняет технологический процесс, а также

иногда требует предварительной обработки исходного материала (например, нанесение пластмассовых пленок, фосфатирование).

Трение при пластическом деформировании существенно отличается от трения скольжения в машинных кинематических парах.

В кинематических парах давление между соприкасающимися поверхностями относительно мало, и последние находятся в упругом деформированном состоянии. При пластическом деформировании поверхность инструмента деформирована упруго, а обрабатываемое тело деформируется пластически, поверхность соприкосновения заготовки с инструментом непрерывно обновляется, увеличивается и стремится принять форму поверхности инструмента.

В результате действительная (фактическая) площадь контакта пластически деформируемой заготовки с инструментом увеличивается с повышением степени деформации и при выполнении процессов с высоким сжимающим средним нормальным напряжением.

Действительная площадь контакта при горячей деформации растет более интенсивно.

При обработке металлов давлением трущиеся поверхности, особенно при горячей обработке, нагреты до температур значительно более высоких, чем обычные кинематические пары.

Большое влияние вместе с тем имеет окалина, как образовавшаяся при нагреве, так и возникающая во время горячей обработки давлением, а также поверхностные окислы при обработке без нагрева. В последнем случае на условия трения также влияет деформационное упрочнение металла.

В связи с перечисленными особенностями пластического трения в процессах обработки металлов давлением различают три вида трения: сухое, гидродинамическое и граничное.

Сухое трение возникает между заготовкой и инструментом в том случае, если контактные поверхности не разделены каким-либо третьим телом: смазкой, окислами, пленками влаги, различными загрязнениями. Большие давления на отдельных контактных площадках в сочетании с относительным перемещением и значительной местной пластической деформацией обуславливают образование узлов схватывания, т.е. поверхностей, по которым вследствие адгезии образуется металлическое соединение трущихся тел. При сухом трении прочность металлического соединения в узле

схватывания в большинстве случаев выше, чем прочность заготовки. Поэтому дальнейшее перемещение заготовки по поверхности инструмента приводит к разрушению металла заготовки. По мере развития пластической деформации фактическая поверхность контакта стремится к номинальной, а контактное касательное напряжение становится соизмеримым с пределом текучести на сдвиг τ_s . Схватывание при сухом трении приводит к резкому ухудшению поверхности деформируемой заготовки и износу инструмента.

В обычных условиях деформации без смазки поверхности заготовки и инструмента покрыты окислами, пленками влаги, газов, различными загрязнениями. Поэтому условия, близкие к сухому трению, существуют на отдельных участках заготовки.

Гидродинамическое трение возникает при холодной пластической деформации с обильной смазкой. Особенность этого вида трения состоит в том, что во всех точках контактной поверхности заготовка и инструмент разделены пленкой смазки толщиной более 10^{-4} мм. Для этого вида трения контактное касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_k = \mu_c \frac{\partial v_c}{\partial n}, \quad (5.1)$$

где μ_c – динамическая вязкость смазки; $\frac{\partial v_c}{\partial n}$ – градиент скорости

в слое смазки в направлении нормали к контактной поверхности.

При использовании эффективных смазок толщина пленки оказывается достаточно большой, трущиеся поверхности надежно разделяются, а контактное касательное напряжение оказывается минимальным: примерно на два порядка ниже, чем при сухом трении. Это приводит к резкому снижению деформирующих сил, повышению качества изделий и увеличению стойкости инструмента.

В процессе обработки металлов давлением смазка выжимается с контактной поверхности под действием высоких нормальных

давлений. Для поддержания гидродинамического режима трения необходимо создавать условия, способствующие образованию смазочного клина. Относительное перемещение деформируемой заготовки по инструменту и вязкость смазки обуславливают вовлечение частиц смазки в зону деформации. Поэтому при движении вязкой жидкости в сходящемся канале давление повышается. При высоких давлениях вязкость смазки резко увеличивается. Большие давления и сравнительно высокие скорости относительного скольжения в плоскости контакта вызывают высокие локальные температуры, что приводит к падению вязкости смазки и резкому уменьшению толщины смазочного слоя. По этой причине условия гидродинамического трения нарушаются, и трение переходит в граничное.

Граничное трение при обработке металлов давлением встречается чаще других видов. Оно характеризуется тем, что поверхности инструмента и заготовки разделены тончайшим слоем смазки (не более $10^{-6} \dots 10^{-4}$ мм). Контактное касательное напряжение τ_k при граничном трении на порядок больше, чем при гидродинамическом. Здесь особо важное значение приобретают свойства смазки и состояние контактирующих поверхностей. Причины столь значительного повышения контактного касательного напряжения состоят в следующем. Во-первых, смазочные пленки толщиной менее 10^{-4} мм качественно отличаются от нормальной жидкости, из которой они образованы. Во-вторых, неровности контактирующих поверхностей местами прорывают смазочную пленку, образуя узлы

схватывания. Если пленка обладает малой механической прочностью, то количество узлов схватывания может быть весьма большим, и граничное трение приближается к сухому.

5.2. Факторы, влияющие на величину сил контактного трения

На величину возникающих на поверхности контакта элементарных сил трения при пластическом деформировании влияет ряд факторов: состояние поверхностей давящего инструмента и обрабатываемого тела, химический состав обрабатываемого сплава, температура деформации, скорость деформирования и характер приложения нагрузки.

Состояние поверхности рабочего инструмента является существенным фактором, влияющим на величину сил контактного трения. Чем выше качество обработки поверхности инструмента, тем меньше при прочих равных условиях силы трения. Влияние обработки настолько значительно, что величина сил трения различна в зависимости от направления скольжения металла по отношению к направлению обработки, т.е. проявляется анизотропия трения. Даже при обработке инструмента двойным шлифованием и при наличии смазки силы трения поперек направления обработки примерно на 20 % больше, чем вдоль направления обработки. При отсутствии смазки и при грубой обработке инструмента анизотропия трения проявляется еще резче.

Анизотропия трения может вызывать искажение формы тела при пластическом деформировании. Так, например, при осадке цилиндра в результате анизотропии трения поверхности контакта из круглых могут превратиться в эллиптические.

Вид обработки контактной поверхности деформируемого тела имеет значение лишь в начальный момент деформации. При ее

дальнейшем развитии контактная поверхность деформируемого металла сглаживается и согласуется с поверхностью инструмента. Шероховатость с регулярным рельефом на поверхности заготовки может способствовать захвату и созданию более благоприятного режима трения. На износ инструмента влияет сродство материала инструмента и деформируемой заготовки. При их малом сродстве мостики схватывания разрушаются по границе инструмент – заготовка, и налипание материала заготовки на инструмент не происходит. Обычно сродство материалов тем меньше, чем больше различаются параметры их решеток.

Важнейшим фактором, влияющим на трение, является температура деформации. При холодной деформации трение – наименьшее. С повышением температуры трение растет, достигая максимума в некотором интервале температур.

Исследования показали, что контактное трение несколько снижается с увеличением относительной скорости скольжения металла по поверхности инструмента, т.е. с увеличением скорости деформирования. Однако этот параметр процесса деформации строго определен типом машины, на которой выполняется заданная операция. В частности, контактное трение при обработке на молоте меньше, чем при обработке на прессе.

Характер нагрузки также оказывает влияние на трение. Так, при деформировании вибрационной нагрузкой деформирующая сила при осадке образцов иногда снижается в 1,5...2 раза, неравномерность деформации уменьшается (бочкообразность меньше, волокна макроструктуры более прямолинейны, микроструктура однороднее). Все это свидетельствует о значительном снижении трения.

Контактное трение снижается также при наложении на деформируемую заготовку ультразвуковых колебаний.

Рационально выбранная смазка снижает трение в несколько раз. Однако и при наличии смазки наблюдается относительный рост сил трения, особенно заметный при повышении температуры и степени деформации. От смазки требуется, чтобы она создавала прочную пленку, хорошо прилипла к поверхности контакта и в то же время легко удалялась после обработки.

Рецептуры современных смазочных составов для холодного деформирования отличаются разнообразием и сложностью. В состав смазок входят минеральные и органические масла, активизирующие

присадки (олеиновая кислота, сера), а также нейтральные наполнители (графит, мел, тальк) и другие вещества. При горячей обработке в качестве смазок применяют мазут, древесные опилки, коллоидальный графит и др.

В настоящее время при горячей обработке большое значение приобрели смазки на основе стекла. Эти смазки более эффективно снижают трение по сравнению, например, с графитовыми смазками. Они образуют теплоизолирующую пленку между поверхностями инструмента и металла, которая, кроме того, предохраняет металл от окисления, что ведет к улучшению качества поверхности.

Однако стеклянные смазки имеют серьезные недостатки, а именно: несовершенство и трудоемкость способов нанесения, загрязнение штампа, трудность удаления стекла с поверхности штампа и поковки.

5.3. Законы трения. Граничные условия

Для теоретического анализа процессов ОМД необходимо задать *граничные условия*, т.е. указать закон, по которому должны изменяться касательные напряжения на контактных поверхностях деформируемой заготовки. В зависимости от вида операции и состояния контактных поверхностей заготовки и инструмента граничные условия могут задаваться по-разному.

В соответствии с законом Амонтона – Кулона контактное касательное напряжение τ_k пропорционально нормальному давлению в плоскости контакта:

$$\tau_k = \mu \sigma_n. \quad (5.2)$$

Коэффициент трения μ определяется экспериментально специально для условий пластического деформирования. Следует учитывать, что значения коэффициента трения, принятые для условий трения в машинных парах, не пригодны для определения контактных касательных напряжений при пластическом деформировании.

На величину трения влияет ряд факторов, которые могут создавать различные условия трения во времени и на разных участках контактной поверхности. Например, при выдавливании меняется по длине матрицы степень деформации, скорость скольжения и даже температура. Поэтому коэффициент трения на контактной поверхности вообще зависит от координат и меняется во времени. Это обстоятельство предопределяет возможность пользоваться лишь некоторым осредненным значением коэффициента трения.

В отношении выражения (5.2) необходимо сделать существенную оговорку. Дело в том, что по энергетическому условию пластичности (4.17) максимальная величина касательного напряжения не может быть больше, чем

$$\tau_{k \max} \leq \frac{\gamma \sigma_s}{2},$$

где γ в зависимости от параметра вида напряженного состояния Лодэ – Надаи μ_0 и изменяется в пределах $1 \leq \gamma \leq 1,15$.

Поэтому контактное трение может возбудить на контактной поверхности металла касательное напряжение, величина которого ограничена в соответствии с неравенством

$$\tau_k = \mu \sigma_n \leq \frac{\gamma \sigma_s}{2}.$$

Использование закона Амонтона – Кулона не является единственно возможным способом учета контактного трения при расчетах напряженного состояния пластически деформируемых заготовок. Ряд исследователей считают более целесообразным, особенно при горячей деформации, принимать трение независимым от нормальной нагрузки и выражать его в долях от величины σ_s напряжения текучести материала, обуславливающего пластическую

деформацию. Примем в качестве второго выражения величины контактного трения

$$\tau_k = m_s \gamma \sigma_s. \quad (5.3)$$

Коэффициент m_s , в отличие от кулоновского коэффициента трения, будем именовать фактором трения.

В предыдущем выражении значение σ_s принимают осредненным, а μ_s – постоянным по всей поверхности контакта. Таким образом, это выражение предопределяет и постоянство контактных касательных напряжений (элементарных сил трения).

Поскольку максимальное касательное напряжение не может превзойти величину $0,5\gamma\sigma_s$, фактор трения

$$m_s \leq 0,5. \quad (5.4)$$

Условие (5.3) уместно использовать при исследовании процессов горячей деформации с достаточно выраженным всесторонним сжатием (значительная абсолютная величина отрицательного среднего напряжения σ), например, в случаях выдавливания (прессования), осадки низких заготовок или при больших степенях деформации, штамповки и т. п.

Зависимость (5.2) целесообразно применять при расчете ряда операций холодной листовой штамповки, а также операций со слабо выраженной схемой всестороннего сжатия при малых степенях деформации.

Характеристика численных значений фактора трения m_s при осадке и влияние на него температуры t , степени деформации ε и смазки представлены рис. 5.1 (кривая 1 относится к осадке без смазки, 2 – со смазкой нитридом бора и 3 – со смазкой графитом в масле).

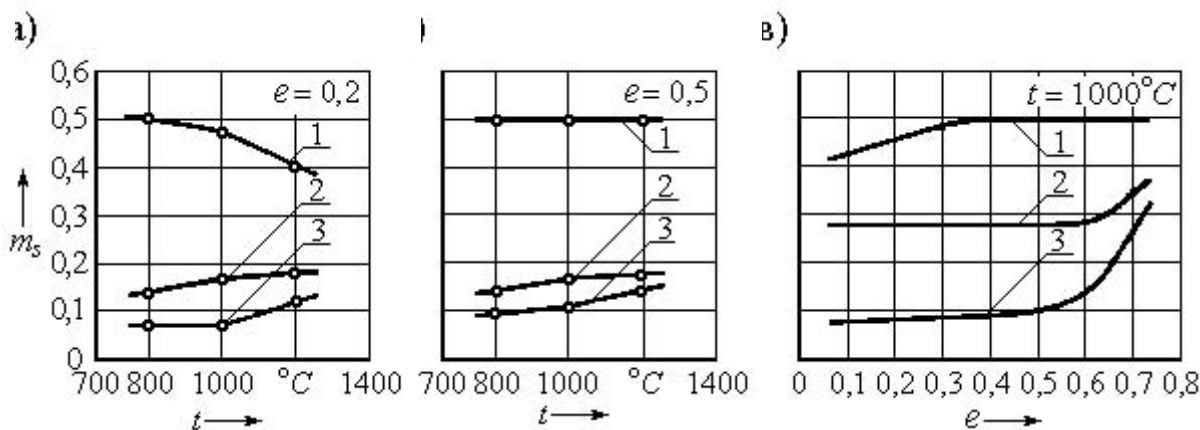


Рис. 5.1. Изменение фактора трения m_s при осадке от температуры t , степени деформации e и смазки

5.4. Принцип наименьшего сопротивления

Принцип наименьшего сопротивления, выдвинутый применительно к пластической деформации Г. Треска (1895 г.), сформулирован С.И. Губкиным следующим образом: «В случае возможности перемещения точек деформируемого тела в различных направлениях каждая его точка перемещается в направлении наименьшего сопротивления».

Прямым следствием закона наименьшего сопротивления является, например, образование заусенца при штамповке в открытых штампах. Металл в начальный период штамповки начинает вытекать за пределы фигуры штампа в зазор a между верхним и нижним штампами (рис. 5.2). Заполнение же элементов полости штампа возможно, если сопротивление течению металла в заусенец b становится больше сопротивления течению в те или иные участки полости. Сопротивление течению металла в заусенец увеличивается по мере уменьшения его толщины в процессе движения верхнего

штампа, что и обеспечивает в конечном счете заполнение всех элементов полости.

Для практического применения закона наименьшего сопротивления необходимо знать направление траектории, по которой для точек, на ней расположенных, сопротивление течению будет наименьшим.

Для случая осадки (сжатия) призматических и цилиндрических тел между параллельными плитами (бойками) при наличии трения по плоскостям контакта эти траектории определяются по принципу кратчайшей нормали, сформулированному А.Ф. Головиным и заключающемуся в том, что перемещение любой точки тела в плоскости, перпендикулярной к действию внешней силы, происходит по кратчайшей нормали к периметру сечения. Аналогичный принцип выдвинут

Э. Зибелем. Следует добавить, что максимальную конечную деформацию тело получит в тех направлениях, по которым будет передвигаться наибольшее количество точек.

Пусть, например, осаживается призма с прямоугольным основанием, сечение которой плоскостью, нормальной к направлению действующей силы, представлено на рис. 5.3.

Согласно принципу перемещения точек по кратчайшей нормали к периметру сечения, прямоугольник можно разделить на два треугольника и две трапеции линиями (штрихпунктирными на рис. 5.3), представляющими собой граничные линии или линии раздела течения, поскольку длина нормалей к периметру сечения по обе

стороны из каждой точки, лежащей на этих линиях, будет одинаковой. Направление движения точек показано стрелками.

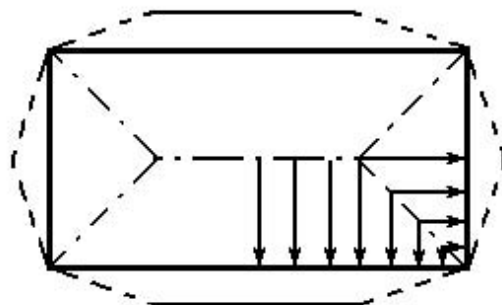
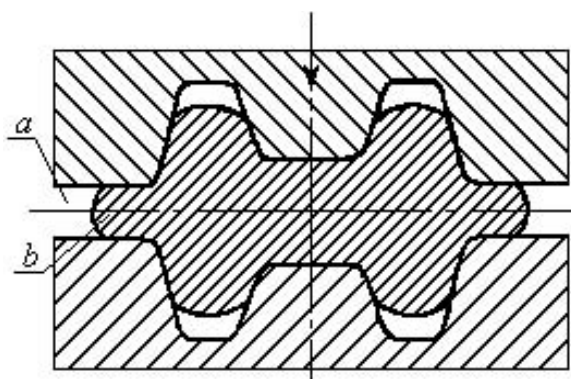


Рис. 5.2. Образование заусенца

при штамповке в открытых штампах

Рис. 5.3. Осаживание призмы с прямоугольным основанием

Учитывая количество точек тела, расположенных на направлениях течения в данном сечении, можно предположить, что после некоторой осадки сечение примет вид, показанный на рис. 5.3 штриховыми линиями. Нетрудно представить, что при увеличении степени осадки тела, рассматриваемого в нашем примере, периметры его поперечных сечений стремятся к эллипсам, а эллипсы в дальнейшем преобразуются в круги, после чего движение точек происходит по радиусам.

Такая закономерность изменения формы поперечных сечений тела при осадке была замечена еще С. Зобе (1908 г.), который предложил принцип наименьшего периметра. Этот принцип можно сформулировать так: любая форма поперечного сечения призматического или цилиндрического тела при его осадке в

пластическом состоянии с наличием контактного трения стремится принять форму, имеющую при данной площади наименьший периметр, т.е. в пределе стремится к кругу.

Принцип наименьшего периметра подвергался неоднократно тщательной экспериментальной проверке в работах А.Ф. Головина, С.И. Губкина и Е.М. Савицкого, Л.А. Шофмана и др.

Принцип наименьшего периметра справедлив при перемещении точек деформируемого тела по кратчайшим нормальям к периметрам сечений, перпендикулярных к направлению действующей силы. В дальнейшем было установлено, что кратчайшая нормаль не всегда является направлением наименьшего сопротивления, а лишь при следующих условиях:

- 1) трение на поверхностях контакта металла с инструментом изотропно, т.е. одинаково по всем направлениям;
- 2) величина контактного трения значительна.

При осадке, например, прямоугольного параллелепипеда между плоскими бойками без контактного трения схема перемещения точек отличается от представленной на рис. 5.3. Движение частиц в плоскостях, нормальных к направлению внешней силы, носит радиальный характер (рис. 5.4), и поперечные сечения в процессе деформации будут оставаться подобными исходным. В.Г. Березкин показал это весьма тонкими экспериментами по осадке прямоугольных свинцовых и алюминиевых образцов, при которых трение было практически исключено.

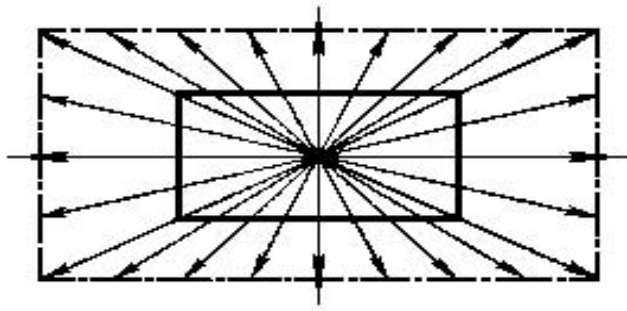


Рис. 5.4. Схема перемещения точек при осадке прямоугольного параллелепипеда между плоскими бойками без контактного трения

Возможны и схемы течения, промежуточные между схемами, изображенными на рис. 5.3 и 5.4.

5.5. Неравномерность деформаций и дополнительные напряжения

При обработке металлов давлением, как правило, возникает неоднородность напряженного состояния, а следовательно, и неоднородность деформации.

В связи с неоднородностью деформации отдельные слои и элементы деформируемого тела стремятся к различному изменению размеров. В то же время некоторые из них не могут изменить свои размеры самостоятельно, без влияния на соседние слои и элементы. Поэтому слои, стремящиеся к большему изменению размеров против (некоторого) среднего значения, будут передавать слоям и элементам, стремящимся к меньшему изменению размеров, силы такого знака, которые увеличивают изменение размеров. Слои и элементы, стремящиеся к меньшему изменению размеров, будут передавать слоям и элементам, стремящимся к большему изменению размеров, силы такого знака, которые уменьшают изменение размеров.

В результате, кроме внутренних сил, уравнивающих внешние приложенные силы, в теле возникают взаимно уравнивающиеся внутренние силы, обуславливающие напряжения, которые не могут быть отражены условиями на контуре и уравнениями равновесия. Они не определяются схемой напряженного состояния, соответствующей внешним силам. Эти взаимно уравнивающиеся напряжения названы С.И. Губкиным дополнительными.

Дополнительные напряжения могут быть трех родов:

а) дополнительные напряжения первого рода, уравнивающиеся между отдельными слоями тела;

б) дополнительные напряжения второго рода, уравнивающиеся между отдельными кристаллитами;

в) дополнительные напряжения третьего рода, уравнивающиеся между отдельными элементами кристаллитов.

Возникая в деформируемом теле, дополнительные напряжения могут:

– оставаться в теле после снятия нагрузки в виде остаточных напряжений, что в общем случае может вызывать снижение пластических качеств металла, понижение химической стойкости, поводку, коробление;

– сниматься в результате возникновения пластической деформации в слоях и элементах, в которых они возникли под действием дополнительных сдвигов;

– сниматься за счет нарушения целостности тела в отдельных его слоях и элементах, т.е. вызывать макро- и микротрещины, которые, в свою очередь, приводят к браку заготовок, получаемых обработкой давлением.

Возникновение дополнительных напряжений в процессе деформирования вызывает негативные для обработки металлов давлением последствия:

а) увеличение сопротивления деформированию;

б) снижение пластичности;

в) искажение той картины распределения напряжений в теле, которая вытекает из условий на контуре и условий равновесия.

Поскольку неравномерность напряженного состояния является общим случаем, а однородная деформация – частным, трудно говорить о причинах, вызывающих неравномерное напряженное состояние. Однако надо учитывать следующие факторы, воздействием на которые можно влиять на процесс деформирования для снижения неоднородности деформации.

1. Контактное трение, т.е. трение на поверхности соприкосновения обрабатываемой заготовки и деформируемого инструмента. Трение в ряде случаев создает неоднородное напряженное состояние, а в других – увеличивает степень неоднородности. Так, например, считают, что при операции осадки без контактного трения деформация была бы однородной, в результате же контактного трения однородность деформации нарушается. Поэтому давящий инструмент требует особо тщательной обработки поверхности, а применение смазки всегда оказывает благотворное влияние.

2. Форма исходной заготовки и требуемая форма поковки. Чем сложнее последняя и чем больше она отличается от исходной, тем больше и неоднородность напряженного состояния в процессе деформирования. Поэтому при штамповке необходимо применять промежуточные (заготовительные) операции, с тем чтобы формоизменение осуществлялось постепенным приближением формы исходной заготовки к форме готовой поковки.

3. Форма инструмента, применяемого для данной операции. Например, при вытяжке круглой заготовки в плоских бойках неоднородность напряженного состояния больше, чем при вытяжке в вырезных бойках.

4. Степень неоднородности свойств обрабатываемого металла в процессе деформации. Чем однороднее металл во всех точках деформируемого тела, тем меньше дополнительных напряжений будет возникать в процессе обработки. Отсюда следует, что обработку надо производить при максимально равномерной температуре металла, если возможно, при однородном его состоянии, в условиях полной рекристаллизации (если обработка производится с нагревом), при минимальной величине зерна (ниже критической температуры роста зерна) и т.д.

Снижение неоднородности деформации при обработке металла давлением оказывает благоприятное влияние на его качество. Структура обработанного металла получается однороднее, как при горячем деформировании за счет более равномерного протекания процесса рекристаллизации, так и при холодном деформировании вследствие большей равномерности упрочнения. Повышение однородности структуры, в свою очередь, обеспечивает более высокие механические качества металла.

Однако есть основание полагать, что однородная деформация в чистом виде возникает только в идеальном изотропном теле. В поликристаллическом теле деформация не будет однородной.

Задания для самоконтроля

1. Перечислите полезные и вредные факторы трения при обработке металлов давлением.

2. Укажите особенности трения при пластическом деформировании в отличие от трения скольжения в машинных кинематических парах.

3. Назовите виды трения в процессах обработки металлов давлением и охарактеризуйте их.

4. Роль смазки в процессах обработки металлов давлением.

5. Перечислите факторы, влияющие на величину сил контактного трения, и дайте их характеристику.

6. Опишите законы трения (граничных условиях) на контактных поверхностях заготовки и инструмента в процессах обработки металлов давлением.

7. Изложите сущность принципа наименьшего сопротивления и приведите примеры его использования.

8. Дайте понятие о дополнительных напряжениях и укажите причины их появления.

9. Назовите три рода дополнительных напряжений и поясните их различие.

10. Укажите факторы, воздействуя на которые, можно влиять на неравномерность деформаций.

Часть III. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Глава 6. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ. ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О МЕТОДАХ АНАЛИЗА

Разработка прогрессивных технологических процессов обработки металлов давлением и проектирование оборудования связаны с решением сложных вопросов, касающихся определения потребной силы, затрат энергии, выбора оптимальных технологических параметров деформирования, нахождения распределения деформаций и напряжений в объеме обрабатываемого материала и на контактной поверхности. Ответы на них можно дать лишь на научной основе, используя различные методы исследования. Все методы исследования процессов ОМД можно разделить на три класса: аналитические, экспериментально-аналитические и экспериментальные. Аналитические методы основаны на замене исследования реальных физических объектов и процессов их математическими моделями.

Влияние многих физико-механических факторов на протекание процессов пластического формоизменения металлов обуславливает сложность построения математической модели этих процессов. Теоретической базой методов анализа процессов обработки давлением является теория пластичности. В соответствии с этой теорией для решения задач пластического течения необходимо привлечь следующую систему уравнений:

а) уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

б) граничные условия для напряжений на поверхности тела s_F :

$$\sigma_{ij} n_j = X_{ni} \quad \text{на} \quad s_F;$$

в) условие текучести в одном из видов:

$$\sigma_i = \sigma_s(e_i), \sigma_i = \sigma_s(e_i, \dot{e}_i), \sigma_i = \sigma_s = \text{const};$$

г) условие несжимаемости и кинематические граничные условия:

$$\dot{e}_{ii} = 0; \quad v_i = v_{0i} \quad \text{на} \quad s_v;$$

д) геометрические соотношения Коши:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

е) уравнение связи между скоростями деформации и напряжениями в соответствии с ассоциированным законом течения:

$$\dot{e}_{ij} = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad 2f(\sigma_{ij}) = \sigma_i^2.$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; X_{ni} – компоненты вектора поверхностной нагрузки; s_F и s_v – части поверхности тела s , на которых заданы поверхностные нагрузки и скорости перемещений; n_j – компоненты нормали к поверхности s ; σ_i – интенсивность напряжений; e_i и \dot{e}_i – интенсивность деформации и скорости деформации соответственно; $d\lambda$ – коэффициент пропорциональности.

Точные методы решения такой системы не разработаны, поэтому при нахождении частных решений используют упрощающие допущения. Стремление получать решения максимально простые, но в то же время обладающие приемлемой для практики точностью, привело к разработке нескольких методов.

Одним из первых был разработан метод, основанный на совместном решении приближенных уравнений равновесия и условия пластичности. Большой вклад в его становление внесли Э. Зибель, Г. Закс, С.И. Губкин, Е.П. Унксов, М.В. Сторожев, Е.А. Попов и др. Этот метод позволяет определить лишь интегральные

характеристики внешних нагрузок. Распределение скоростей деформаций и напряжений остается неизвестным.

Другим методом, используемым главным образом для решения плоских задач и иногда для осесимметричных, является метод линий скольжения или характеристик. Применительно к решению задач обработки металлов давлением этот метод применялся и совершенствовался в работах Р. Хилла, У. Джонсона, А.Д. Томленова, Л.А. Шофмана, И.П. Ренне и др. В основе метода лежит приведение дифференциальных уравнений равновесия для плоской задачи к их характеристикам. Используя ряд свойств линий скольжения, определяют напряженное и деформированное состояние обрабатываемого материала.

Развитие метода линий скольжения привело к необходимости увязки построенных сеток линий скольжения с допустимой кинематикой формоизменения, а также к методу верхней оценки, для которого используется кинематически допустимая упрощенная сетка линий скольжения.

В 60-е годы XX века начал разрабатываться энергетический метод анализа операций обработки металлов давлением, базирующийся на равенстве работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях с использованием вариационных принципов для отыскания кинематических полей и сил деформирования, удовлетворяющих заданным условиям нагружения.

Развитие этот метод получил в работах И.Я. Тарновского, О.А. Ганаго, А.А. Поздеева, В.Л. Колмогорова, Л.Г. Степанского и др. Его плодотворность доказана хорошей результативностью решений, достаточно точным отражением реальной картины деформирования. Для отыскания полей напряжений и деформаций в настоящее время все шире в рамках данного метода применяется метод конечных элементов.

Каждый из перечисленных методов продолжает совершенствоваться в направлении учета в анализе большего числа факторов, реально воздействующих на процесс деформирования, а также повышения математической строгости решения.

Следует отметить, что разные методы анализа процессов деформирования в операциях обработки давлением дополняют друг друга и в ряде случаев полезные для практики результаты могут быть получены разумным комбинированием различных методов при анализе определенной операции обработки давлением. Критерием применимости теоретических решений, полученных указанными методами, может быть соответствие результатов анализа данным практики и экспериментальным исследованиям.

Необходимость опытной проверки теоретических выводов вызвала разработку экспериментальных и теоретико-экспериментальных методов исследований напряженно-деформированного состояния металла. Среди них следует назвать такие как метод сопротивления материалов пластическим деформациям, метод визиопластичности и др.

6.1. Метод осредненных напряжений

Основные допущения метода. Применение этого метода позволяет установить распределение напряжений на поверхностях контакта деформируемой заготовки и инструмента, что, в свою очередь, дает возможность вычислить силу деформирования при том или ином технологическом процессе обработки металлов давлением.

Метод основан на решении приближенных дифференциальных уравнений равновесия совместно с приближенным условием пластичности без привлечения физических соотношений. Так как при общем объемном напряженном состоянии количество неизвестных (компонент напряжений) больше числа уравнений (уравнений равновесия и условия пластичности), то осуществляется приведение механической схемы деформации к плоской (плоское напряженное или плоское деформированное состояние), либо к осесимметричной. В последнем случае принимается равенство двух из трех нормальных напряжений.

В результате использования дополнительных допущений в ряде случаев представляется возможным привести решение задачи к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения

взамен системы дифференциальных уравнений равновесия в частных производных совместно с линейным условием текучести. Решение приближенного дифференциального уравнения равновесия совместно с приближенным условием текучести выполняется в замкнутом виде и является характерной особенностью метода.

Исследования, проведенные Е.П. Унксовым, показали влияние на точность приближенных уравнений отношения контактной поверхности к свободной поверхности. Согласно опытным данным, вполне удовлетворительные результаты получаются при условии, что $\frac{F_{\text{конт}}}{F_{\text{своб}}} > 4$.

В основу метода осредненных напряжений положен ряд упрощающих допущений, главные из которых – следующие:

1. Касательное напряжение τ_{ij} является функцией одной из координат (как правило, определяющей положение контактных поверхностей), которое принимает максимальное значение τ_k на контактной поверхности; на оси симметрии оно равно нулю.

2. Нормальные напряжения являются функциями одной из координат. Физический смысл этого упрощения сводится к усреднению напряжений по одной из координат.

3. Условие текучести (пластичности) берется в линейной форме:

$$\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = c = \text{const} . \quad (6.1)$$

Если величины касательных напряжений относительно малы ($0 \leq \tau \leq 0,7k$, где k – пластическая постоянная материала), то $c = \gamma\sigma_s$, где γ – коэффициент, учитывающий схему деформации, который по

величине изменяется в пределах $1 \leq \gamma \leq 1,15$. Если величины касательных напряжений значительны ($\tau > 0,7k$), то принимают $c = 0$.

Формулировка граничных условий. При решении задач с учетом сил трения должны быть заданы условия трения на поверхности контакта. Обычно принимается один или совокупность следующих вариантов.

1. Контактные касательные напряжения пропорциональны нормальным, т.е. на контактной поверхности справедлив закон Амонтона – Кулона: $|\tau_k| = \mu|\sigma_n|$, где μ – коэффициент кулонова трения. Область, в которой реализуются эти условия, называют областью скольжения, условие текучести (пластичности) накладывает ограничение на величину касательного контактного напряжения. Оно не превышает величины максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = \gamma\sigma_s / 2$, где $1 \leq \gamma \leq 1,15$. В случае плоской деформации $|\mu\sigma_n| \leq k$, где k – пластическая постоянная материала:

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}.$$

2. Контактные касательные напряжения считаются постоянными, т.е. на контактной поверхности справедлив закон прандтлева трения: $|\tau_k| = m_s\sigma_s$, где m_s – коэффициент прандтлева трения (фактор трения). В частности, в случае плоской деформации $|\tau_k| = k$. Область, в которой реализуются такие условия, часто называют областью торможения.

3. Контактные касательные напряжения изменяются вдоль контактной поверхности по линейному закону от нуля на оси симметрии до максимальной величины k в случае плоской деформации:

$$|\tau_k| = k \frac{2x}{a_2},$$

где a_2 – длина участка контактной поверхности, на которой справедлив указанный выше закон трения; x – координата любой точки на этом участке.

Область, в которой реализуются такие условия, называется областью прилипания. Опыты, проведенные Е.П. Унксовым по осадке образцов, показали, что в общем случае на контактной поверхности могут иметь место все три участка (рис. 6.1):

1) периферийная область скольжения, где $|\tau_k| = \mu|\sigma_n|$;

2) область торможения, где $|\tau_k| = k$;

3) центральная область застоя, где наблюдается линейное изменение контактного касательного напряжения как функции координаты вдоль поверхности контакта.

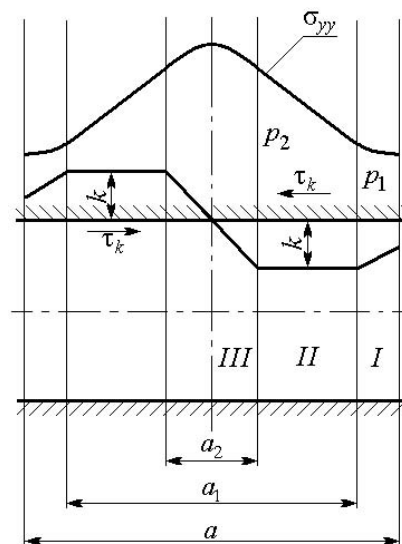


Рис. 6.1. Эпюры касательных контактных напряжений при осадке заготовки

Осадка призматической заготовки. Рассмотрим осадку призматической заготовки шириной a , высотой h и длиной l . Будем

считать, что $l \gg a$. Тогда можно принять, что деформированное состояние – плоское.

Систему координат x, y поместим в центре поперечного сечения осажённой заготовки (рис. 6.2).

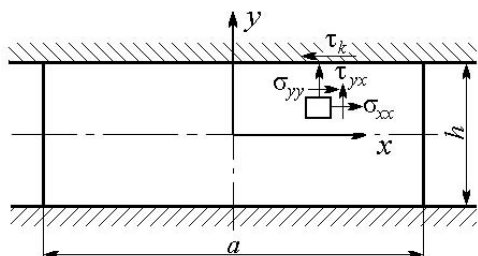


Рис. 6.2. Осадка призматической заготовки

Предполагаем, что касательное напряжение τ_{xy} является функцией только координаты y , т.е. $\tau_{xy} = f_1(y)$. На контактной поверхности оно равно τ_k , а на оси симметрии – нулю.

Нормальное напряжение σ_{xx} считаем функцией только координаты x , т.е. $\sigma_{xx} = f_2(x)$. Условие текучести (пластичности) запишем как

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = c = \text{const.}$$

Величина c равна нулю или $2k$ в зависимости от значения τ_k .

При этих предположениях из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

остается лишь первое, второе уравнение тождественно удовлетворяется. Проинтегрировав его по y от 0 до $\frac{h}{2}$:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dy + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = 0,$$

получим

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0.$$

Используя условие текучести (пластичности), найдем

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) может быть получено из первого дифференциального уравнения равновесия с использованием условия пластичности, если принять

$$\tau_{xy} = \frac{2y}{h} \tau_k.$$

Рассмотрим случай, когда на контактной поверхности имеет место линейная зависимость между контактными касательными и нормальными напряжениями: $\tau_k = \mu \sigma_{yy}$ (область I, рис. 6.1). В этом случае дифференциальное уравнение (6.2) переписывается как

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} + \frac{2\mu\sigma_{yy}}{h} = 0.$$

Разделяя и интегрируя переменные, получаем

$$\frac{d\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}} = -\frac{2\mu dx}{h}; \quad \ln \sigma_{yy} = -\frac{2\mu}{h}x + \ln C,$$

или

$$\sigma_{yy} = Ce^{-\frac{2\mu x}{h}}.$$

Постоянную интегрирования найдем из условия: при $x = \frac{a}{2}$ $\sigma_{yy} = -2k$. При меньших напряжениях σ_{yy} пластическая деформация вблизи боковой поверхности в условиях плоского деформированного состояния невозможна.

Следовательно,

$$C = -2ke^{\frac{\mu a}{h}}, \quad \sigma_{yy} = -2ke^{\frac{2\mu}{h}\left(\frac{a}{2}-x\right)}. \quad (6.3)$$

Полученное решение будет справедливым до тех пор, пока $|\mu\sigma_{yy}| \leq k$. Это условие позволяет определить величину a_1 (см. рис. 6.1), которая характеризует границу *I* и *II* участков контактной границы.

В дальнейшем обозначим величину нормального напряжения на границе *I* и *II* участков p_1 :

$$\sigma_{yy}\left(\frac{a_1}{2}\right) = -p_1 = 2ke^{\frac{2\mu}{h}\left(\frac{a}{2}-\frac{a_1}{2}\right)}.$$

Рассмотрим теперь вторую область в поперечном сечении заготовки (область II, рис. 6.1), где на контактной поверхности выполняется условие

$$\tau_k = -k.$$

Дифференциальное уравнение равновесия (6.2) для этой области переписывается в виде

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} - \frac{2k}{h} = 0.$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к выражению

$$\sigma_{yy} = 2k \frac{x}{h} + C_1.$$

Постоянную интегрирования определяем из условия $x = \frac{a_1}{2}$,

$$\sigma_{yy} = -p_1:$$

$$C_1 = -p_1 - 2k \frac{\frac{a_1}{2}}{h};$$

$$\sigma_{yy} = - \left(p_1 + 2k \frac{\frac{a_1}{2} - x}{h} \right). \quad (6.4)$$

Обозначим величину нормального напряжения σ_{yy} на границе II и III участков p_2 :

$$\sigma_{yy}\left(\frac{a_2}{2}\right) = -p_2.$$

Представляет определенный интерес случай, когда на всей контактной поверхности $|\tau_k| = k$, $p_1 = 2k$, $a_1 = a$ и

$$\sigma_{yy} = -2k \left(1 + \frac{\frac{a}{2} - x}{h} \right). \quad (6.5)$$

Найдем с помощью выражения (6.5) удельную силу осадки:

$$p_{cp} = -\frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \sigma_{yy} dy = 2k \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a}{h} \right). \quad (6.6)$$

Последнее выражение известно как формула Зибеля. Она дает завышенные результаты по удельной силе осадки при малых отношениях $\frac{a}{h}$. Ее следует применять при отношениях ширины заготовки к ее высоте $\frac{a}{h} > 3$. Найдем распределение нормальных напряжений на контактной поверхности в области прилипания, где

$$\tau_k = -k \frac{2x}{a_2}.$$

На основании проведенных экспериментов по осадке заготовок Е.П. Унксов установил, что $a_2 \approx 2h$. Поэтому на контактной поверхности касательное напряжение изменяется по закону

$$\tau_k = -k \frac{x}{h}.$$

Уравнение равновесия после подстановки выражения для τ_k принимает вид

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} - \frac{2kx}{h^2} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению

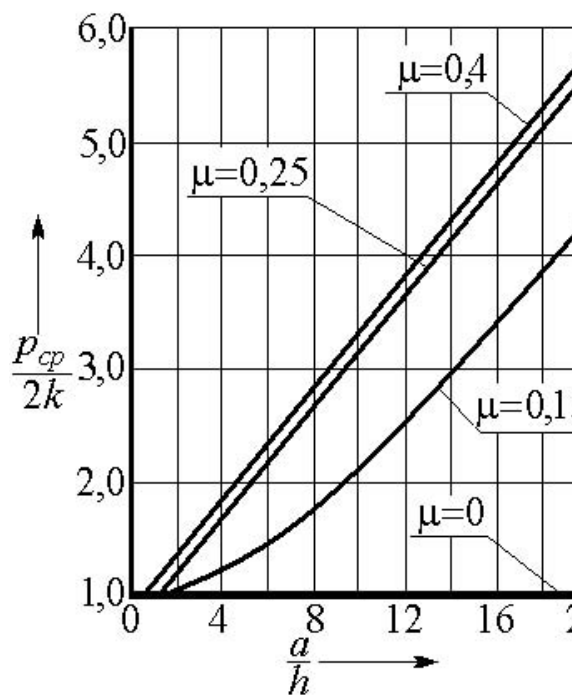
$$\sigma_{yy} = k \frac{x^2}{h^2} + C.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия

$$x = \frac{a_2}{2} = h; \quad \sigma_{yy} = -p_2,$$

следовательно,

$$C = -p_2 - k; \quad \sigma_{yy} = -\left[p_2 + k \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right) \right]. \quad (6.7)$$



Таким образом, эпюра нормальных напряжений на I участке контактной плоскости (области скольжения) определяется показательной функцией (6.3), на II участке (области торможения) – линейной функцией (6.4). На III участке (области прилипания) нормальные напряжения изменяются по параболическому закону (6.7).

Рис. 6.3. Распределение удельных сил осадки при различных соотношениях a/h и коэффициентах трения

На рис. 6.3 показано распределение нормальных напряжений на контактной плоскости. Е.П. Унксовым вычислены значения удельных сил осадки

$p_{cp}/2k$ для различных соотношений a/h при разных

коэффициентах трения. Результаты расчетов представлены на рис. 6.3.

Волочение полосы через клиновую матрицу. Рассмотрим волочение полосы с начальной толщиной h_0 через клиновую матрицу с углом 2α (рис. 6.4). В результате деформации толщина полосы изменяется до размера h_1 . Ширина полосы предполагается много больше толщины.

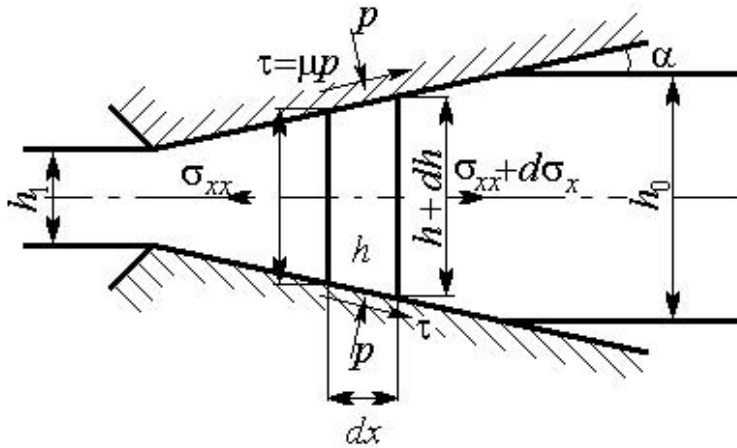


Рис. 6.4. Схема процесса волочения полосы через клиновую матрицу

Выделим двумя плоскими сечениями элемент деформируемого тела и представим систему напряжений, действующих на него (рис. 6.4). Уравнение равновесия выделенного элемента шириной, равной единице, имеет вид

$$(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})(h + dh) - \sigma_{xx}h + 2p \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha + 2\mu p \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha = 0,$$

ИЛИ

$$\sigma_{xx} dh + h d\sigma_{xx} + 2p \operatorname{tg} \alpha + \mu dx = 0.$$

Учитывая, что $dx = \frac{dh}{2 \operatorname{tg} \alpha}$, находим

$$\sigma_{xx} dh + h d\sigma_{xx} + p (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) dh = 0. \quad (6.8)$$

Если принять угол матрицы α малым, а коэффициент трения умеренным, то можно приближенно считать, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_1, \quad p = -\sigma_2.$$

Ошибка при этом оценивается в 10 %, если угол не превосходит 15° , а величина коэффициента трения $\mu \leq 0,1$.

Условие текучести (пластичности) можно переписать так:

$$\sigma_{xx} + p = 2k. \quad (6.9)$$

С помощью соотношения (6.9) исключим p из уравнения (6.8):

$$d\sigma_{xx} = \left[-\sigma_{xx} - 2k - \sigma_{xx} \quad 1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha \right] \frac{dh}{h}.$$

Выполним приведение подобных членов в квадратных скобках и, разделив переменные, найдем

$$\frac{d\sigma_{xx}}{\sigma_{xx} \mu \operatorname{ctg} \alpha - 2k \quad 1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{dh}{h}; \quad \frac{d\sigma_{xx}}{\sigma_{xx} - 2k \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} + 1 \right)} = \frac{dh}{h} \mu \operatorname{ctg} \alpha.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln \left[\sigma_{xx} - 2k \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} + 1 \right) \right] = \ln ch^{\mu \operatorname{ctg} \alpha}.$$

После потенцирования определим

$$\sigma_{xx} = 2k \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \right) + ch^{\mu \operatorname{ctg}\alpha}. \quad (6.10)$$

Используем граничное условие: при $h = h_0$ $\sigma_{xx} = 0$, т.е.

$$0 = 2k \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \right) + ch_0^{\mu \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Умножив последнее выражение на величину $\left(\frac{h}{h_0} \right)^{\mu \operatorname{ctg}\alpha}$, вычтем его

из равенства (6.10), тогда получим

$$\sigma_{xx} = 2k \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\mu \operatorname{ctg}\alpha} \right]. \quad (6.11)$$

Удельную силу волочения определим с помощью выражения (6.11) после подстановки $h = h_1$:

$$\sigma_{xx1} = 2k \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{\mu \operatorname{ctg}\alpha} \right]. \quad (6.12)$$

Если волочение полосы осуществляется в матрице без трения ($\mu = 0$), то выражение (6.12) после раскрытия неопределенности

типа $\frac{0}{0}$ дает удельную силу процесса

$$\sigma_{xx_1} = 2k \ln \frac{h_0}{h_1}.$$

Оно по величине равно идеальной работе пластической деформации изменения размеров полосы.

Примеры решения задач

Задача 6.1.1. Определить удельную силу осадки цилиндрической заготовки диаметром d и высотой h (рис. 6.5, *a*), если на границе контакта справедлив закон прандтлева трения: $\tau_k = -m_s \sigma_s$.

Решение. Предполагаем, что при изменении от z до 0 касательное напряжение изменяется от 0 до τ_k на контактных поверхностях, и допускаем, что напряжение σ_r и σ_z не зависит от z .

В этом случае уравнение равновесия элементарного сектора (рис. 6.5, *б*) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma F_r = & -\sigma_r r d\theta dz + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) r d\theta dz - \tau_{zr} r d\theta dz + \\ & + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - 2\sigma_{\theta} dz dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0, \end{aligned}$$

или

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_{\theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} r = 0.$$

Так как в задаче реализуется осесимметричное напряженное состояние, то предполагаем, что имеет место условие полной пластичности:

$$\sigma_r = \sigma_\theta. \quad (6.13)$$

С учетом (6.13) уравнение равновесия переписывается в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0. \quad (6.14)$$

Проинтегрируем уравнение (6.14) от 0 до $h/2$:

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dz + \int_0^{h/2} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz = 0$$

и получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (6.15)$$

Подставляя в уравнение (6.15) граничные условия для трения, переписем это уравнение в виде

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2m_s \sigma_s}{h} = 0.$$

В случае осесимметричного напряженного состояния в предположении полной пластичности условие текучести имеет вид

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_s. \quad (6.16)$$

Учитывая (6.16),
уравнение (6.15) записываем так:

$$\frac{d\sigma_z}{dr} - \frac{2m_s\sigma_s}{h} = 0. \quad (6.17)$$

Интегрирование выражения (6.17) позволяет получить закон изменения нормальных напряжений на границе контакта:

$$\sigma_z = 2m_s\sigma_s \frac{r}{h} + c_1.$$

Из условия: при $r = d/2$ $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -\sigma_s$ определим постоянную интегрирования:

$$c_1 = -\sigma_s - 2m_s\sigma_s \frac{d}{2h};$$

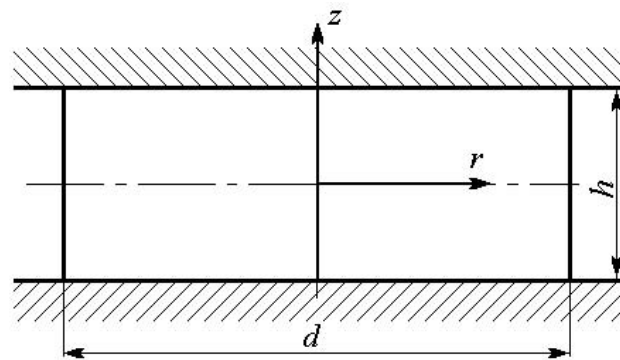
$$\sigma_z = -\sigma_s \left[1 + \frac{2m_s}{h} \left(\frac{d}{2} - r \right) \right].$$

Деформирующую силу найдем из следующего выражения:

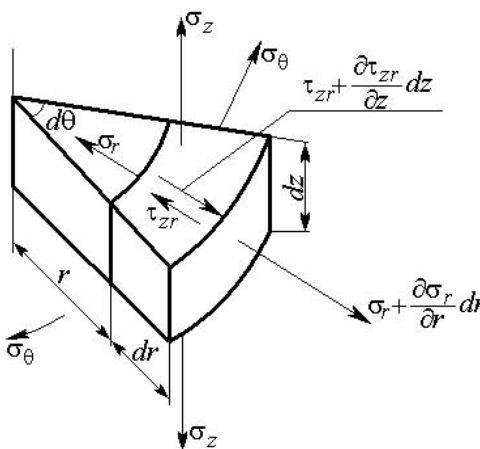
$$P = - \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi r dr = 2\pi\sigma_s \int_0^{d/2} \left[1 + \left(\frac{d}{2h} - \frac{r}{h} \right) 2m_s \right] r dr = \frac{\sigma_s \pi d^2}{4} \left(1 + \frac{m_s d}{3h} \right).$$

Удельная сила процесса равна:

$$P_{cp} = \frac{4P}{\pi d^2} = \sigma_s \left(1 + \frac{m_s d}{3h} \right).$$



a



б

Рис. 6.5. Схема процесса осадки цилиндрической заготовки

Задача 6.1.2. Определить удельную силу открытой прошивки плоским пуансоном диаметром d цилиндрической заготовки диаметром D (рис. 6.6). Предполагаем, что на поверхности контакта пуансона и заготовки справедлив закон прандтлева трения: $\tau_k = -m_s \sigma_s$.

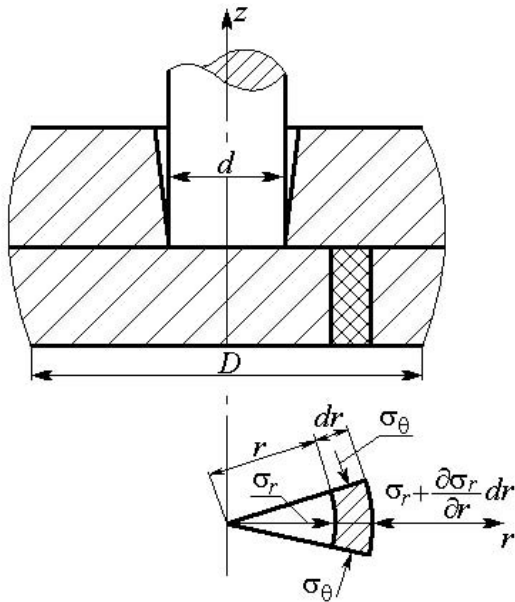


Рис. 6.6. Схема процесса открытой прошивки плоским пуансоном

Решение. Допускаем, что часть деформируемой заготовки, непосредственно находящейся под воздействием пуансона, подвергается осаживанию, которому препятствует кольцевая часть, окружающая металл.

Тогда, используя уравнение равновесия для случая свободной осадки цилиндрических заготовок и закон трения на контактной поверхности, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$d\sigma_z = 2\sigma_s m_s \frac{dr}{h}.$$

Интегрируя его, определяем

$$\sigma_z = 2\sigma_s m_s \frac{r}{h} + c.$$

Постоянная интегрирования находится из условия, что на границе цилиндрической и кольцевой частей радиальные напряжения равны между собой. Из условия текучести следует

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_s.$$

При $r = d/2$

$$\sigma_z = -\sigma_s - \sigma_k,$$

где σ_k – сопротивление (сжимающее напряжение), вызываемое кольцевой частью.

Тогда

$$c = -\sigma_s m_s \frac{d}{h} - \sigma_s - \sigma_k.$$

Окончательно нормальное напряжение определим следующим образом:

$$\sigma_z = -\sigma_s \left[1 + \frac{m_s}{h} (d - 2r) \right] - \sigma_k.$$

Деформирующая сила равна:

$$\begin{aligned} P &= - \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi r dr = \sigma_s \int_0^{d/2} \left[1 + \frac{m_s}{h} (d - 2r) \right] 2\pi r dr + \int_0^{d/2} \sigma_k 2\pi r dr = \\ &= \sigma_s \left[1 + \frac{m_s d}{3h} \right] \frac{\pi d^2}{4} + \sigma_k \frac{\pi d^2}{4}. \end{aligned}$$

Удельная сила находится по формуле

$$P_{cp} = \frac{4P}{\pi d^2} = \sigma_s \left[1 + \frac{m_s d}{3h} \right] + \sigma_k.$$

Для определения напряжения σ_k предположим, что кольцевая часть заготовки не испытывает осевой деформации ($e_z = 0$). В этом случае уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (6.18)$$

а условие текучести –

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s. \quad (6.19)$$

Решая совместно уравнения (6.18) и (6.19), находим постоянную интегрирования из условия, что при $r = D/2$ $\sigma_r = 0$:

$$\sigma_r = -\sigma_s \ln \frac{D}{2r}.$$

Величину σ_k определим, полагая $r = d/2$ и $\sigma_r = -\sigma_k$:

$$\sigma_k = \sigma_s \ln \frac{D}{d}.$$

Окончательно удельная сила открытой прошивки равна:

$$p_{cp} = \sigma_s \left(1 + \frac{m_s d}{3h} - \ln \frac{D}{d} \right).$$

Задача 6.1.3. Определить силу закрытой прошивки плоским пуансоном (рис. 6.7). На границе контакта материала заготовки и инструмента справедлив закон прандтлева трения.

Решение. Предполагаем, что при движении пуансона происходит осаживание металла, находящегося под непосредственным воздействием пуансона, в результате чего металл затекает в кольцевую полость между стенками матрицы и пуансона.

Решая задачу аналогично предыдущей, получаем выражение для удельной силы процесса:

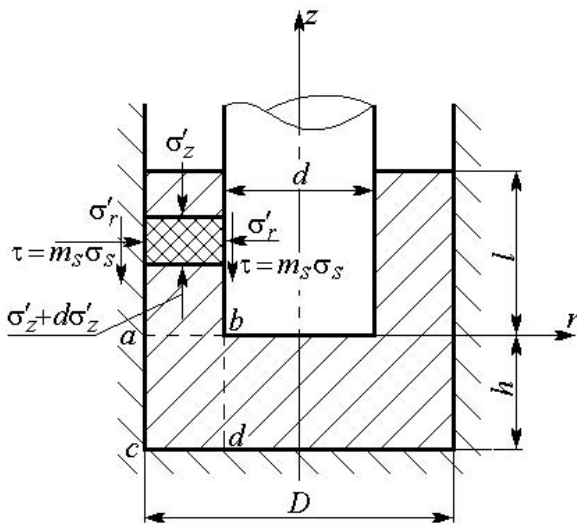


Рис. 6.7. Схема процесса закрытой прошивки плоским пуансоном

$$p_{cp} = \sigma_s \left(1 + \frac{m_s d}{3h} \right) + \sigma_u,$$

где σ_{φ} – напряжение, возникающее на границе кольцевой и цилиндрической частей и препятствующее осаждению последней.

Условие текучести для кольцевой части может быть записано следующим образом:

$$\sigma'_z - \sigma'_r = \sigma'_s,$$

где σ'_z и σ'_r – напряжения, действующие в кольцевой полости.

Условно допускаем равномерное распределение этих напряжений в области $abcd$. Тогда напряжение σ'_z определит сопротивление, которое необходимо преодолеть для продвижения металла в кольцевой части полости.

Выделив в кольцевой части бесконечно малый элемент и приняв условие постоянства силы трения:

$$\tau = m_s \sigma'_s,$$

получим уравнение равновесия бесконечно малого элемента:

$$\frac{d\sigma'_z \pi (D^2 - d^2)}{4} - \pi \sigma'_s m_s (D + D) dz = 0,$$

или

$$d\sigma'_z = 4\sigma'_s m_s \frac{dz}{D-d}. \quad (6.20)$$

Проинтегрировав уравнение (6.20), получим

$$\sigma'_z = 4\sigma'_s m_s \frac{z}{D-d} + c.$$

Из условия, что на свободной поверхности металла $\sigma'_z = 0$, найдем произвольную постоянную:

$$c = -4\sigma'_s m_s \frac{l}{D-d}; \quad \sigma'_z = -4\sigma'_s m_s \frac{l-z}{D-d}. \quad (6.21)$$

Сопротивление кольцевой части заготовки определим из выражения (6.21), полагая $z = 0$.

Тогда из условия текучести имеем:

$$\sigma'_r = \sigma'_y = \sigma'_z - \sigma'_s = -4\sigma'_s m_s \frac{l}{D-d} - \sigma'_s.$$

Удельная сила закрытой прошивки будет

$$P_{cp} = \sigma'_s \left(2 + \frac{m_s d}{3h} + 4m_s \frac{l}{D-d} \right).$$

Задания для самоконтроля

1. Укажите систему уравнений и соотношений, которую необходимо использовать для анализа напряженного и деформированного состояния, силовых режимов при пластическом деформировании в процессах обработки металлов давлением.

2. Перечислите основные особенности метода осредненных напряжений.

3. Приведите главные упрощающие допущения метода осредненных напряжений.

4. Дайте формулировку граничных условий в методе осредненных напряжений.

5. Опишите, какие ситуации по распределению касательных напряжений на контактных поверхностях могут возникнуть при осадке образцов.

6. Отметьте особенности распределения нормальных контактных напряжений в зависимости от распределения касательных напряжений на участках контакта металла и инструмента при осадке призматических заготовок.

6.2. Приближенный метод совместного решения

дифференциальных уравнений равновесия с условием текучести

Сущность метода. Этот метод расчета силовых режимов процессов обработки металлов давлением занимает промежуточное место между методами анализа, в которых получают решения, удовлетворяющие точным дифференциальным уравнениям равновесия и условию текучести (пластичности) (метод характеристик) и приближенным уравнениям (метод осредненных напряжений). Введение некоторых ограничений относительно вида функции напряжения (например, касательного) часто позволяет проинтегрировать дифференциальные уравнения равновесия в частных производных совместно с условием текучести. Полученное приближенное решение задачи в отдельных областях пластической деформации не удовлетворяет точно граничным условиям для напряжений или удовлетворяет лишь интегрально.

Задача Прандтля о сжатии полосы между шероховатыми плитами. Пусть сжатую жесткими шероховатыми плитами подвергается полоса бесконечной длины высотой h и шириной a (рис. 6.8).

Предполагается, что ширина полосы a много больше ее высоты; на контактной поверхности касательные напряжения равномерно распределены и $|\tau_k| = k$.

Для исследования напряженного состояния можно привлечь следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (6.23)$$

Дифференцируя первое из уравнений равновесия по y , а второе по x и вычитая второе из первого, получаем

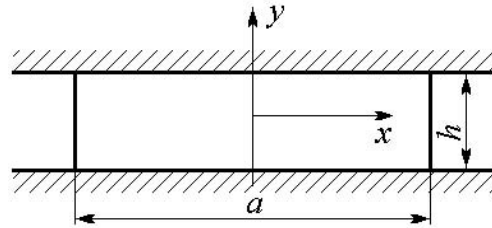


Рис. 6.8. Осадка жесткими шероховатыми плитами полосы бесконечной длины

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}$$

В результате использования условия текучести (пластичности) найдем

$$2k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{k} \right)^2} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}. \quad (6.24)$$

Так как $|\sigma_{yy}| > |\sigma_{xx}|$, в левой части уравнения (6.24) выбран знак плюс.

Поскольку касательные напряжения равномерно распределены по контактной поверхности $|\tau_k| = k$ и на оси симметрии $\tau_{xy} = 0$, т.е. независимы от координаты x , то можно считать, что $\tau_{xy} = f(y)$.

В этом случае из уравнения (6.24) имеем

$$\frac{d^2 \tau_{xy}}{dy^2} = 0;$$

$$\tau_{xy} = c_1 y + c_2.$$

Найдем константы интегрирования из условий:

$$\text{при } y = 0 \quad \tau_{xy} = 0; \quad c_2 = 0;$$

$$\text{при } y = \frac{h}{2} \quad \tau_{xy} = -k; \quad c_1 = -\frac{2k}{h}.$$

Следовательно,

$$\tau_{xy} = -\frac{2k}{h} y. \quad (6.25)$$

Подставляя полученное значение τ_{xy} в уравнения равновесия, получаем

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{2k}{h};$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Интегрируем эти уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2k}{h} x + f_1(y); \\ \sigma_{yy} &= f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Определяем произвольные функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$, подставляя найденные значения σ_{xx} и σ_{yy} в условие текучести

$$\frac{2k}{h}x + f_1 = f_2 = 2k\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2},$$

или

$$\frac{2k}{h}x - f_2 = 2k\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2} - f_1 = \bar{C}.$$

Это соотношение удовлетворяется при

$$f_2 = -\bar{C} + \frac{2k}{h}x;$$

$$f_1 = -\bar{C} + 2k\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2}.$$

Подставляя полученные значения функции f_1 и f_2 в соотношения (6.26), находим компоненты напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2k}{h}x + 2k\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2} - \bar{C}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{2k}{h}x - \bar{C}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2k}{h}y. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Так как край полосы свободен от напряжений, то

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \Big|_{x=\frac{a}{2}} dy = 0.$$

Откуда следует:

$$\bar{C} = k\frac{\pi}{2} + k\frac{a}{2}.$$

Анализ решения (6.27) показывает, что оно справедливо для пластических областей, достаточно удаленных от центральной части полосы и ее края. В частности, на оси симметрии поперечного сечения ($x=0$) касательные напряжения должны быть равными нулю независимо от координаты y ; боковая поверхность полосы $x = \frac{a}{2}$ должна быть свободна от напряжения σ_{xx} . В точной постановке эти условия не выполняются.

Для получения на основе системы (6.27) практически пригодного, но приближенного решения используем лишь второе уравнение системы (6.27), пренебрегая остальными:

$$\sigma_{yy} = \frac{2k}{h}x - \bar{C}.$$

При отсутствии трения напряжение σ_{yy} оставалось бы постоянным и равным $-2k$. Можно предположить, что в крайних точках контактной поверхности (при $x = \pm 0,5a$ и при наличии трения) начальное значение напряжения σ_{yy} также равно $-2k$ и с этого значения его абсолютная величина растет по мере уменьшения координаты x .

Итак, полагая, что при $x = 0,5a$ $\sigma_{yy} = -2k$, будем иметь

$$\bar{C} = 2k + \frac{ka}{h},$$

а подставляя это значение постоянной в уравнение для напряжения σ_{yy} , получим

$$\sigma_{yy} = -2k + \frac{k(a-2x)}{2h}, \quad (6.28)$$

или

$$\sigma_{yy} = -2k \left[1 + \frac{(a-2x)}{2h} \right]. \quad (6.28')$$

Удельная сила p процесса равна:

$$p = 2k \left(1 + \frac{a}{4h} \right).$$

Эта формула является основной для определения удельной силы осадки заготовок значительной длины с прямоугольным сечением при горячей деформации.

Задания для самоконтроля

1. Сущность приближенного метода совместного решения дифференциальных уравнений равновесия с условием текучести.

2. Изложите последовательность решения задачи по определению напряжений в задаче Прандтля о сжатии полосы между шероховатыми плитами.

3. Отметьте те трудности, которые возникают при решении задачи Прандтля по удовлетворению точным граничным условиям для напряжений.

4. Напишите формулу для определения удельной силы осадки заготовки значительной длины с прямоугольным сечением при горячей деформации.

6.3. Метод сопротивления материалов пластическим деформациям

Основные предположения и подход к решению задач. Метод сопротивления материалов пластическим деформациям (метод СМПД), разработанный Г.А. Смирновым-Аляевым, позволяет определять деформирующие силы и деформации при больших

а) главные оси скорости деформаций все время совпадают с одними и теми же материальными волокнами;

б) за весь процесс деформации вид малой деформации остается неизменным. Как показали экспериментальные исследования, процесс деформации в большинстве операций обработки металлов давлением не удовлетворяет условию монотонности. Однако в ряде операций листовой штамповки (вытяжка, отбортовка, обжим, раздача, формовка) можно считать, что условия монотонности приближенно выполняются. Кроме того, разбивая весь процесс деформирования на ряд достаточно малых этапов, можно предположить, что на каждом этапе реализуются условия приближенной монотонности.

2. Коэффициент пропорциональности в указанных выше соотношениях устанавливается на основе опытов по растяжению образцов.

3. Условие текучести Губера – Мизеса упрощается, для чего используется коэффициент Лодэ – Надаи μ_σ :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \gamma \sigma_s, \quad \gamma = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}. \quad (6.32)$$

Величина коэффициента Лодэ – Надаи для напряжений оценивается из условия соответствия вида напряженного состояния виду деформированного. Действительно, из соотношений (6.29) следует

$$\begin{aligned} \mu_\sigma &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \\ &= -\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} - \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_3} = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = \mu_e. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Аналогично устанавливаем при справедливости соотношений (6.30), что

$$\mu_{\sigma} = \mu_{\dot{\epsilon}}. \quad (6.34)$$

Предлагается следующий подход к решению задач. В заготовке выделяются достаточно малые интересующие нас объемы, в которых приближенно реализуются условия монотонности. Из геометрических соображений или непосредственно из опыта устанавливаются направления и величины главных деформаций (скоростей деформаций), оценивается величина параметра Лодэ – Надаи μ_{σ} , упрощается условие текучести. Для определения компонент напряжений обычно не хватает одних соотношений между напряжениями и скоростями деформаций (деформациями) при известном коэффициенте пропорциональности в соотношениях (6.29) и (6.30). Приходится использовать условия равновесия элемента вместе с граничными условиями задачи. В сопротивлении материалов пластическим деформациям применяются различного рода приближенные приемы интегрирования дифференциальных уравнений и ряд добавочных допущений, характерных для других методов анализа процессов обработки металлов давлением.

Задача о горячей осесимметричной пневмоформовке листовой заготовки. Рассмотрим операцию горячей осесимметричной пневмоформовки листовой заготовки. В результате операции плоская круглая часть заготовки с начальной толщиной t_0 преобразуется в сферическую поверхность радиусом R . Значение предела текучести σ_s , соответствующего температуре формовки, известно.

Для определения направлений и величин главных деформаций на заготовку наносится делительная сетка из соприкасающихся окружностей. При деформировании сетка искажается, и окружности, центры которых лежали на одном расстоянии от центра круговой части заготовки, превращаются в одинаковые эллипсы, большие оси которых направлены вдоль образующей сферической поверхности. Чем меньше было расстояние от центра заготовки до центра окружности, тем меньше разность между длинами главных осей у эллипса, в который она превратилась в процессе деформирования.

Так, окружность, ограничивающая область II (рис. 6.9) (в центре заготовки), трансформируется в эллипс с разностью длин главных осей, равных нулю, т.е. в окружность с большим радиусом.

Толщина заготовки в процессе деформирования уменьшается, так как объем области, ограниченной ячейкой делительной сетки, сохраняется неизменным.

Экспериментально установлено, что условия монотонности процесса приближенно выполняются.

Приведем анализ напряженного и деформированного состояний в областях *I* и *II* деформируемой заготовки (рис. 6.9).

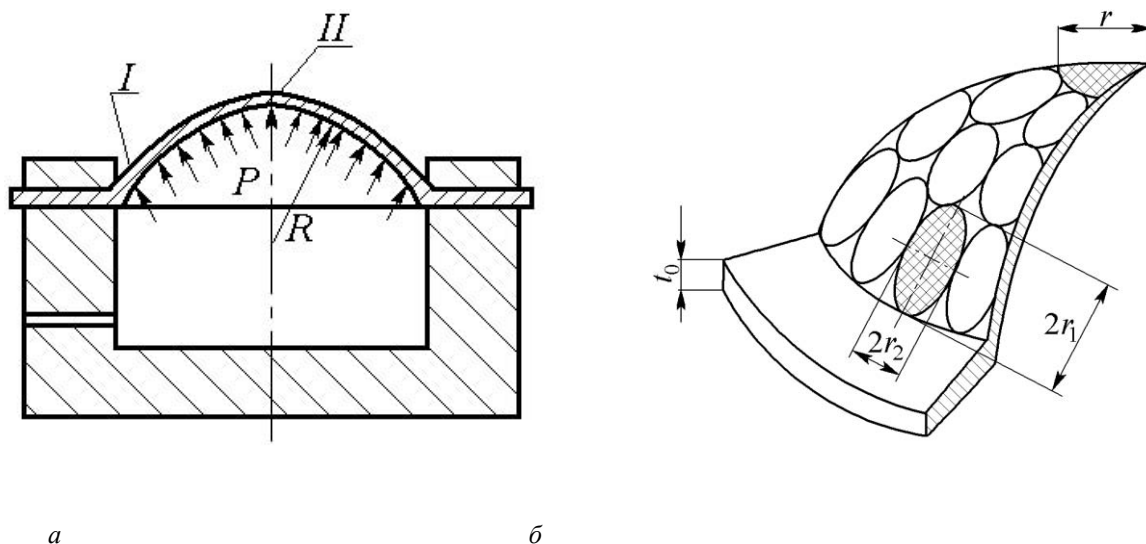


Рис. 6.9. Горячая осесимметричная пневмоформовка листовой заготовки (а) и искажение делительной сетки при деформации (б)

В процессе деформирования окружность радиусом r_0 , ограничивающая область *I*, трансформировалась в эллипс с полуосями r_1 и r_2 , а окружность радиусом r_0 , ограничивающая область *II*, – в окружность радиусом r .

Определим главные логарифмические деформации в обеих областях. В области *I* деформация в направлении образующей сферической поверхности r_1 будет деформацией наибольшего удлинения:

удлинения: $e_{r_1} = \ln \frac{r_1}{r_0}$; деформация в направлении r_2 будет

деформацией укорочения: $e_{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_0}$; деформация по толщине

заготовки устанавливается из условия несжимаемости материала:

$$e_t = -\ln \frac{r_1}{r_0} - \ln \frac{r_2}{r_0} = -\ln \frac{r_1 r_2}{r_0^2}.$$

Обычно $e_{r_1} > e_{r_2} > e_t$. Поэтому в этой области $e_1 = e_{r_1}$, $e_2 = e_{r_2}$,
 $e_3 = e_t$.

В области II две деформации равны между собой: $e_1 = e_2 = \ln \frac{r}{r_0}$,

а $e_3 = -2 \ln \frac{r}{r_0}$. Определим коэффициенты Лодэ – Надаи

деформированного состояния в областях I и II:

в области I

$$\mu_{e_1} = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{3 \ln \frac{r_2}{r_0}}{2 \ln \frac{r_1}{r_0} + \ln \frac{r_2}{r_0}};$$

в области II

$$\mu_{e_2} = 1.$$

Приняв во внимание, что $\mu_\sigma = \mu_e$, упростим условие текучести,

для чего вычислим коэффициент $\gamma = 2 / \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}$:

в области I

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{3 + \left(3 \ln \frac{r_2}{r_0} / \left(2 \ln \frac{r_1}{r_0} + \ln \frac{r_2}{r_0} \right) \right)^2}};$$

в области *II*

$$\gamma_2 = 1.$$

Теперь условия текучести в областях *I* и *II* соответственно будут

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \gamma_1 \sigma_s; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \gamma_2 \sigma_s.$$

Так как в рассматриваемом случае в обеих областях $\sigma_3 = 0$, то, присоединяя к условию текучести соотношения $2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = \mu_{\sigma_1} (\sigma_1 - \sigma_3)$; $2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = \mu_{\sigma_2} (\sigma_1 - \sigma_3)$, находим оставшиеся неизвестные напряжения σ_1 и σ_2 :

в области *I*

$$\sigma_1 = \gamma_1 \sigma_s; \quad \sigma_2 = \frac{\gamma_1 (\mu_{\sigma_1} + 1)}{2} \sigma_s; \quad \sigma_3 = 0;$$

в области *II*

$$\sigma_1 = \sigma_s; \quad \sigma_2 = \sigma_s; \quad \sigma_3 = 0.$$

Условие равенства нулю одного из главных напряжений позволило решить поставленную задачу без привлечения уравнений равновесия элемента.

Условие несжимаемости материала дает возможность определить среднюю толщину заготовки в областях *I* и *II*:

в области *I*

$$e_t = -\ln \frac{r_1 r_2}{r_0^2} = \ln \frac{t}{t_0},$$

поэтому

$$t = \frac{r_0^2}{r_1 r_2} t_0;$$

в области II

$$e_t = -2 \ln \frac{r}{r_0} = \ln \frac{t}{t_0},$$

следовательно,

$$t = \frac{r_0^2}{r^2} t_0.$$

Приведенные выше соотношения позволяют оценить напряженное и деформированное состояния заготовки при пневмоформовке по искажению нанесенной на заготовку делительной сетки. Необходимое для формовки давление можно найти из условия равновесия всей сферической оболочки.

Задания для самоконтроля

1. Приведите основные предположения, которые положены в основу метода расчета напряженного и деформированного состояний.
2. Опишите подход к анализу процессов деформирования.
3. Приведите схему решения задачи о горячей осесимметричной пневмоформовке листовой заготовки.
4. Каким образом определяются деформации и вычисляются напряжения?

6.4. Метод линий скольжения (характеристик)

Разработка метода линий скольжения (характеристик) была начата в работах М. Леви, Г. Генки, Л. Прандтля, выполненных в конце XIX – начале XX вв. Дальнейшее развитие он получил в трудах как советских ученых А.А. Илюшина, А.Ю. Ишлинского, С.Г. Михлина, В.В. Соколовского, С.А. Христиановича, так и ряда иностранных –

Х. Гейрингера, В. Джонсона, Е. Ли, В. Прагера, Э. Томсена, Ф.Г. Ходжа, Р. Хилла. В теории процессовковки и штамповки этот метод успешно использовали А.Д. Томленов, К.Н. Шевченко, Л.А. Шофман, Е.М. Макушок, И.П. Ренне и др.

Метод линий скольжения (характеристик) применим для анализа процессов обработки металлов давлением, протекающих в условиях плоской деформации, плоского напряженного состояния, а при определенных допущениях – при анализе процессов осесимметричного напряженного и деформированного состояний.

Сущность этого метода заключается в построении сетки линий скольжения (характеристик) и использовании их свойств для определения поля напряжений, скоростей, установления границ пластической области, нахождения сил, а также для распределения деформаций в готовом изделии.

Плоское деформированное состояние. *Линии скольжения, их свойства как физических линий.* **Ряд процессов обработки металлов давлением, таких как: прокатка листов, осадка призматических заготовок с большим отношением длины к ширине, протяжка (вытяжка с утонением), волочение и выдавливание полых осесимметричных деталей и труб с большим отношением диаметра к толщине ($d/s > 30$) и другие, протекают в условиях, близких к плоской деформации.**

Теория плоской деформации строго обоснована для перечисленных процессов и дает качественную картину деформации и таких процессов, как волочение проволоки, выдавливание стержней, протяжка и волочение полых цилиндрических деталей и труб с малым отношением диаметра к толщине.

Линиями скольжения называют линии, представляющие собой следы пересечения с главной плоскостью цилиндрических поверхностей, вдоль которых действует наибольшее касательное напряжение. Линии скольжения реализуются на поверхности тела, покрытого легким слоем окислов или подвергнутого полировке, в начальный период пластической деформации и известны как линии Чернова – Людерса.

Из определений линий скольжения как траекторий максимальных касательных напряжений следует:

1) через каждую точку проходят две линии скольжения;

2) линии скольжения ортогональны между собой;

3) линии скольжения подходят к главным осям под углом $\frac{\pi}{4}$;

4) свободную от напряжений поверхность и плоскость симметрии

линии скольжения пересекают под углом $\frac{\pi}{4}$;

5) линии скольжения пересекают границы с предельным трением под углами 0 и 90°;

6) уравнениями линий скольжения являются

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi; \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\varphi,$$

где φ – угол между касательной первой линии скольжения и осью X .

Основные уравнения и соотношения для определения напряжений. При анализе уравнений плоского деформированного состояния принимаем материал идеальным жесткопластическим неупрочняющимся, для которого справедливы условие текучести Губера – Мизеса и уравнения пластического течения Сен-Венана – Леви – Мизеса.

Координатные оси x, y, z выбираем так, чтобы пластическая деформация происходила в плоскости x, y . Вдоль оси z деформация отсутствует:

$$de_{zz} = 0; \quad d\gamma_{zx} = d\gamma_{zy} = 0. \quad (6.35)$$

По зависимости между напряжениями и приращениями деформаций и соотношению (6.35) находим

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \sigma; \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (6.36)$$

Условие текучести материала в случае плоской деформации имеет вид

$$\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \quad (6.37)$$

Обозначим через α угол между первым главным напряжением σ_1 и осью x . Тогда по формулам преобразования компонент напряжений найдем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Подставляя эти значения в условие текучести (6.37), получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k. \quad (6.39)$$

Выражение (6.39) является условием текучести для плоского деформированного состояния в главных осях напряжений. Учитывая

это условие, записываем выражения для компонент напряжений (6.38):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma + k \cos 2\alpha; \\ \sigma_{yy} &= \sigma - k \cos 2\alpha; \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

где $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$.

Перейдем в соотношениях (6.40) от угла α между первым главным напряжением и осью x к углу φ между α -линией скольжения и осью x (рис. 6.10):

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma - k \sin 2\varphi; \\ \sigma_{yy} &= \sigma + k \sin 2\varphi; \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Очевидно, что при этом условии текучести (6.37) удовлетворяется. Подставляя данные значения в уравнения равновесия для плоского деформированного состояния:

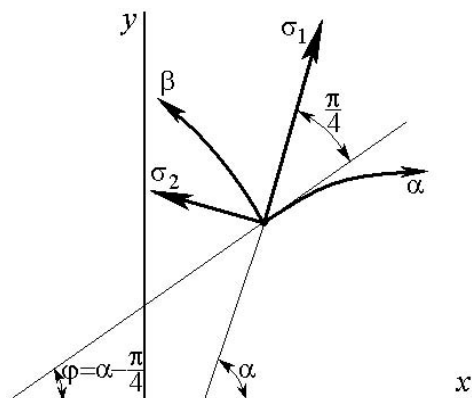


Рис. 6.10. Установление связи между углами α и φ

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$(6.42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций $\sigma(x, y); \varphi(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Решение этой системы уравнений тесно связано с понятием характеристических линий.

Характеристикой системы уравнений (6.43) называется линия, вдоль которой значения производных от неизвестных функций σ и φ по координатам x и y не определены однозначно.

Анализ показал, что это система уравнений гиперболического типа, имеющая две действительные характеристики.

Уравнения характеристик и соотношения для искомых функций вдоль них имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad -d\sigma + 2kd\varphi = 0; \\ \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi; \quad d\sigma + 2kd\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

Эти соотношения для плоской задачи теории пластичности впервые были выведены Г. Генки в 1923 году.

Сравнивая уравнения характеристик с уравнениями линий скольжения, обнаруживаем их совпадение, т.е. характеристики являются линиями скольжения. Соотношение для σ и φ вдоль характеристик имеют простой механический смысл: они являются дифференциальными уравнениями равновесия бесконечно малого элемента пластической среды, образованной сеткой линий скольжения $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$, $\tau_{\alpha\beta} = k$.

Интегрируя соотношения между σ и φ вдоль α и β характеристик (линий скольжения), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma}{2k} - \varphi = \xi \left(\text{вдоль } \alpha\text{-линии} \right); \\ \frac{\sigma}{2k} + \varphi = \eta \left(\text{вдоль } \beta\text{-линии} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

При переходе от одной линии скольжения семейства α к другой параметр ξ изменяется так же, как и параметр η при переходе от одной линии семейства β к другой.

Свойства линий скольжения как характеристических линий.

Линии скольжения обладают рядом замечательных свойств:

1. *Вдоль линии скольжения среднее напряжение σ изменяется пропорционально углу линии скольжения с осью x . Это свойство*

очевидно, так как на основании выражений (6.45) вдоль α -линии $\sigma = 2k\varphi + \text{const}$, вдоль β -линии $\sigma = -2k\varphi + \text{const}$.

Отсюда следует, что если линия скольжения – прямая линия, то среднее напряжение вдоль этой прямой остается постоянным, поскольку угол φ не меняется. На основании соотношений (6.41) устанавливаем, что вдоль прямой линии скольжения все компоненты тензора напряжений постоянны. Если в некоторой области прямолинейны оба семейства линий скольжения, то в этой области напряжения распределены равномерно.

2. Если переходить от одной линии скольжения семейства β к другой вдоль любой линии скольжения семейства α , то угол φ и давление σ будут изменяться на одну и ту же величину (первая теорема Генки).

Из соотношений (6.45) вытекает:

$$\sigma = k(\xi + \eta); \quad \varphi = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \quad (6.46)$$

Эти соотношения (рис. 6.11) позволяют установить, что

$$\theta_1 = \theta_2; \quad (6.47)$$

$$\sigma_{A_{21}} - \sigma_{A_{11}} = \sigma_{A_{22}} - \sigma_{A_{12}}. \quad (6.48)$$

Из первой теоремы Генки следует:

1) если некоторый отрезок линии скольжения семейства β (или α) является отрезком прямой, то все соответствующие отрезки линий β (или α), отсекаемые линиями семейства α (или β), – прямые (рис. 6.12).

В такой области напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ постоянны вдоль каждого прямого отрезка, но

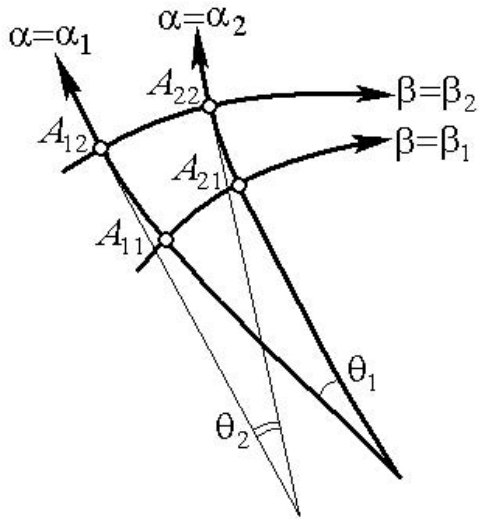


Рис. 6.11. Две пары линий скольжения для иллюстрации первой теоремы Генки

изменяются при переходе от одного отрезка β к другому. Подобное напряженное состояние будем называть простым;

2) прямые отрезки, отсекаемые линиями скольжения другого семейства, имеют одинаковую длину: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$;

3) если известно значение σ в какой-либо точке сетки скольжения, то оно может быть вычислено всюду в поле.

Пусть в точке A (рис. 6.13) известно σ_A ; в этой же точке знаем φ_A .

На рисунке стрелками указан путь, по которому нужно пройти, чтобы определить σ_c :

$$\eta_1 = \frac{\sigma_A}{2k} + \varphi_A; \quad \sigma_B = 2k(\eta_1 - \varphi_B); \quad \xi_1 = \frac{\sigma_B}{2k} - \varphi_B; \quad \sigma_C = 2k\xi_1 + \varphi_C.$$

(6.49)

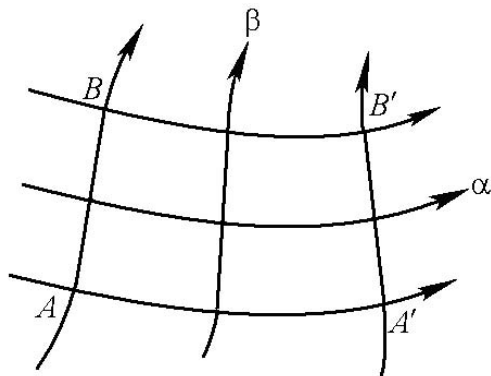


Рис. 6.12. Поле линий

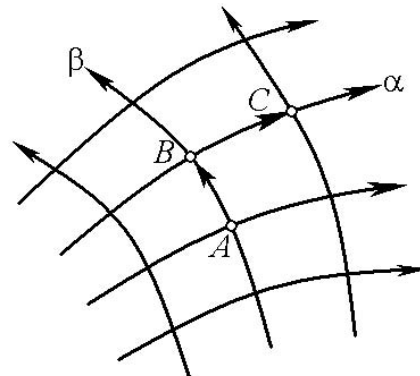


Рис. 6.13. Схема к определению среднего напряжения σ_c в точке

скольжения

поля C линий скольжения по σ_A в точке

с прямыми отрезками линий

A

скольжения $AB, A'B'$

3. При движении вдоль линии скольжения одного семейства радиус кривизны линии другого семейства в точках пересечения изменяется на величину пройденного пути (вторая теорема Генки).

Согласно первой теореме Генки, угол $\Delta\varphi''$ (рис. 6.14) между двумя линиями постоянен, поэтому можно показать, что

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1, \text{ аналогично } \frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1. \quad (6.50)$$

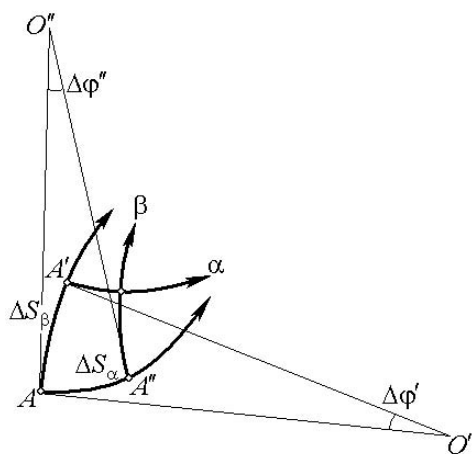


Рис. 6.14. Схема к иллюстрации второй теоремы Генки

Вторая теорема Генки в основном нашла применение при построении аналитического решения задачи методом линий скольжения.

Граничные условия для напряжений. Пусть на контуре C заданы нормальная и касательная составляющие напряжения σ_n , τ_n (рис. 6.15), причем $|\tau_n| \leq k$. По формулам для определения σ_n и τ_n имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \tau_n &= \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

где θ – угол между нормалью к контуру C и осью x .

Среда в окрестности контура C находится в пластическом состоянии, поэтому, подставляя в выражения (6.51) формулы (6.41), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma - k \sin 2(\varphi - \theta); \\ \tau_n &= k \cos 2(\varphi - \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

Если $x = x(s)$, $y = y(s)$ – уравнения контура, а $\sigma_n(s)$, $\tau_n(s)$ – заданные

напряжения, то на контуре можно считать известными $\sigma = \sigma(s)$, $\varphi = \varphi(s)$.

В частности, если на прямом отрезке ($\theta = \text{const}$) границы σ_n и τ_n постоянны, то σ и φ будут на нем также постоянны.

Из формул (6.52) находим

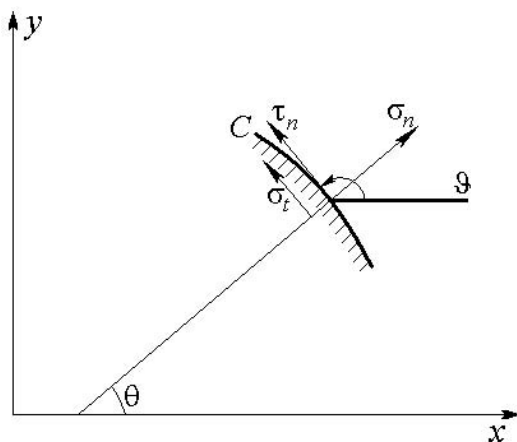


Рис. 6.15. Схема к определению граничных условий для σ и φ

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \theta \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\tau_n}{k} + m\pi; \\ \sigma &= \sigma_n + k \sin 2(\varphi - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

Наличие двух решений для σ и φ , удовлетворяющих условию текучести, объясняется квадратичным характером последнего. Для выбора знака необходимы дополнительные условия из механической постановки задачи.

Если на контуре касательное напряжение отсутствует ($\tau_n = 0$), то

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \theta \pm \frac{\pi}{4} + m\pi; \\ \sigma &= \sigma_n \pm k \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

и соответственно

$$\sigma_t = \sigma_n \pm 2k. \quad (6.55)$$

Рассмотрим случай, когда граница $x=0$ свободна от напряжений (рис. 6.16).

На этой границе $\theta=0$, $\sigma_n=0$, $\tau_n=0$ и, следовательно, $2\varphi = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi m$; $\sigma = \pm k$; $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = \sigma_t = \pm 2k$, т.е. вблизи границы может быть либо растяжение в направлении оси y , либо сжатие.

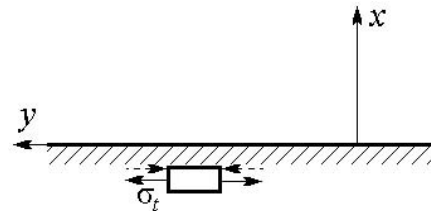


Рис. 6.16. Схема, когда граница $x=0$ свободна от напряжений

Основные краевые задачи. При рассмотрении конкретных задач необходимо построить решение полученных выше гиперболических уравнений (6.43), удовлетворяющее тем или иным граничным условиям. При этом приходится решать три краевые задачи: Коши, Римана и смешанную.

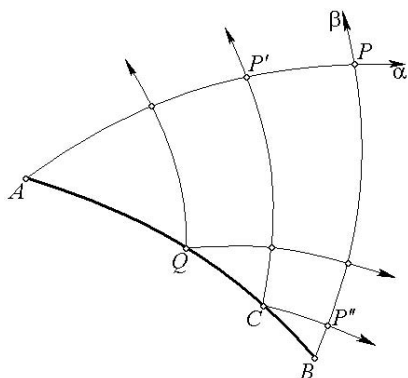
Задача Коши. В плоскости xu задана гладкая дуга AB (рис. 6.17), уравнение которой: $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – некоторый параметр.

Касательная к этой дуге нигде не совпадает с характеристическим направлением.

Каждая характеристика пересекает дугу только один раз. На дуге AB известны $\sigma = \sigma(s)$ и $\varphi = \varphi(s)$, непрерывные вместе с первыми и вторыми производными. Требуется построить решение уравнений (6.43), принимающее на дуге AB заданные значения.

Искомое решение существует, и оно единственно в треугольной области APB , ограниченной дугой AB и характеристиками α , β (линиями скольжения), исходящими из ее концов. Функции $\sigma(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определяются также на AP и BP .

Решение в точке P зависит только от данных на дуге AB .



Следовательно, к решению, фиксированному внутри этого треугольника, можно присоединить вдоль линии скольжения различные решения.

Рис. 6.17. Схема к формулировке

Значения $\sigma(s)$, $\varphi(s)$,

задачи Коши

задаваемые в какой-либо точке дуги Q , влияют на решение лишь в точках, лежащих внутри «характеристического угла», обра-

зованного линиями скольжения, исходящими из точки Q .

Начальная характеристическая задача Римана. На отрезках линий скольжения OA и OB (рис. 6.18) известны значения функций σ и φ , причем σ и φ на этих отрезках удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия элемента скольжения. Тогда решение определено в четырехугольнике $OACB$. Обычно σ и φ на линиях OA и OB становятся известными из построения решений в соседних областях, а потому уравнения равновесия элемента скольжения заведомо выполняются.

Важное значение имеет вырожденный случай характеристической задачи, когда отрезок линии скольжения OB (или OA) сходится в точку O , причем радиус его кривизны неограниченно уменьшается, изменение же угла φ остается постоянным (рис. 6.19).

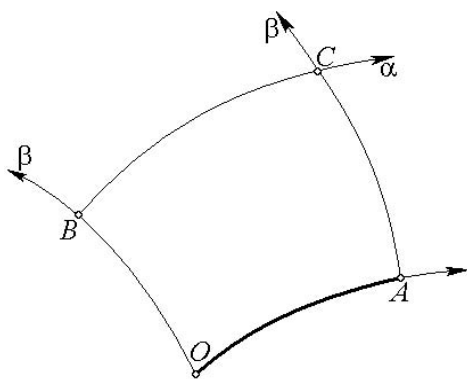


Рис. 6.18. Схема к формулировке задачи Римана

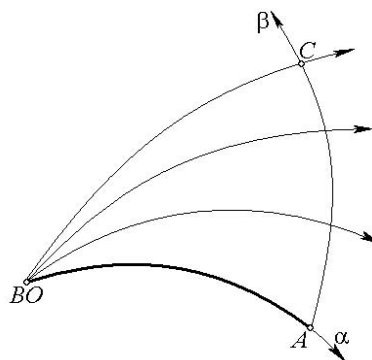


Рис. 6.19. Схема к формулировке вырожденного случая задачи Римана

В точке O все α -линии скольжения сходятся и напряжения разрывны. Решение определено в треугольнике OAC при задании угла раствора веера в узле O и значений σ , φ на дуге OA .

Смешанная задача. На отрезке линии скольжения OA известны функции σ , φ , удовлетворяющие условию равновесия (рис. 6.20) вдоль отрезка OA . К отрезку примыкает нехарактеристическая кривая OB , вдоль которой задан угол φ . Подобная задача возникает, например, если OB – свободная от трения граница среды. Тогда линии скольжения подходят под углом $\frac{\pi}{4}$ к кривой OB , следовательно, φ известно. Предполагается, что угол AOB – острый.

Решение смешанной задачи определено в треугольнике AOB . Само построение различно в зависимости от величины угла φ , определенной на OB в точке O . Если этот угол равен углу φ на линии OA в точке O , то поле линий скольжения имеет вид, показанный на рис. 6.20. Если α -линия, исходящая из точки O , лежит внутри области AOB (рис. 6.21), то последняя область разбивается на две части: BOA' и $A'OA$.

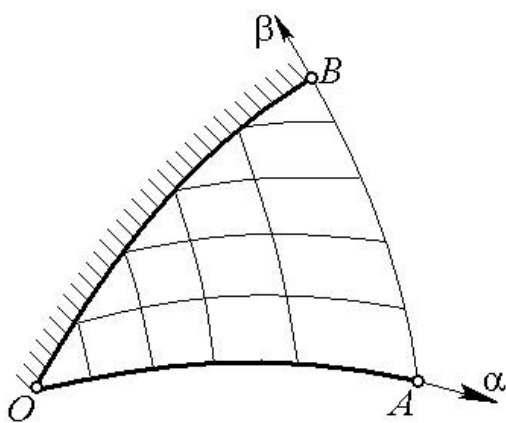


РИС. 6.20. СХЕМА К ФОРМУЛИРОВКЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

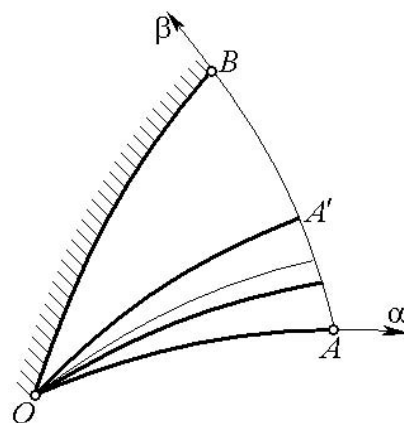
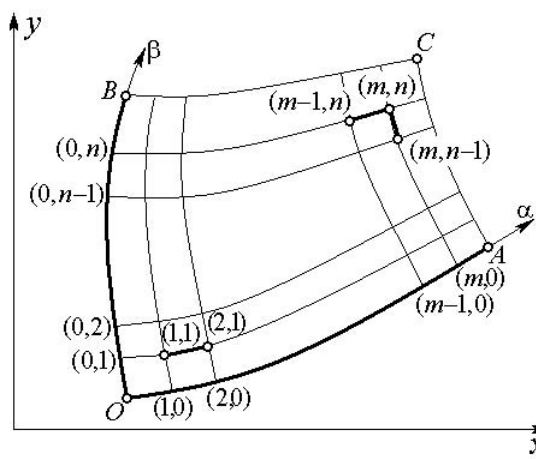


РИС. 6.21. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ, КОГДА УГОЛ φ НА OA И OB В ТОЧКЕ O НЕ СОВПАДАЕТ

Первая из них будет находиться в условиях предыдущего случая, если удастся найти значения σ и φ на линии скольжения OA' . Эти значения можно определить, решив для области AOA' начальную характеристическую задачу в вырожденном случае, так как угол раствора пучка характеристик AOA' известен.

Численные методы решения. Решение рассмотренных выше краевых задач может быть достигнуто построением точных аналитических решений и приближенных, основанных на переходе к конечноразностным соотношениям и использовании тех или иных свойств линий скольжения. Приближенные решения краевых задач широко применяются при анализе процессов обработки металлов давлением.

Начальная характеристическая задача. Отрезки линий скольжения OA , OB (рис. 6.22) делим на малые части точками $(1,0)$, $(2,0), \dots, (m,0)$, $(0,1)$, $(0,2), \dots, (0, n)$.



Пересечение линий скольжения, проходящих через эти точки, назовем узлами сетки и обозначим m, n . Функции σ и φ на сторонах OA и OB известны. По первой теореме Генки находим значения этих функций

РИС. 6.22. СХЕМА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ конечноразностных соотношений

в узле m, n :

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m,o} + \varphi_{o,n} - \varphi_{o,o}; \quad (6.56)$$

$$\sigma_{m,n} = \sigma_{m,n} + \sigma_{o,n} - \sigma_{o,o}. \quad (6.57)$$

Часто разбиение сторон OA и OB на отрезки выполняется так, что изменение угла φ происходит на одну и ту же величину $\Delta\varphi$. Обычно $\Delta\varphi = 5...15^\circ$.

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{m,n} &= \varphi_{o,o} + m\Delta\varphi + \varphi_{o,o} - n\Delta\varphi - \varphi_{o,o}; \\ \varphi_{m,n} &= \varphi_{o,o} + (n - m)\Delta\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{m,n} &= \sigma_{o,o} + 2k(\varphi_{m,o} - \varphi_{o,o}) + \sigma_{o,o} - 2k(\varphi_{o,n} - \varphi_{o,o}) - \sigma_{o,o}; \\ \sigma_{m,n} &= \sigma_{o,o} + 2k(\varphi_{m,o} - \varphi_{o,n}) = \sigma_{o,o} + 2k(m - n)\Delta\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Координаты узловых точек вычисляются шаг за шагом. Пусть известны координаты узлов $(n-1, n)$, $(n, n-1)$ и угол φ в них. Положение точки m, n определяется пересечением малых дуг. Заменяем дуги хордами, наклон которых равен среднему значению наклонов в исходной и конечной точках.

Дифференциальные уравнения линий скольжения

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi$$

заменяем разностными:

$$\left. \begin{aligned} y_{m,n} - y_{m-1,n} &= (x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) \\ y_{m,n} - y_{m,n-1} &= - (x_{m,n} - x_{m,n-1}) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

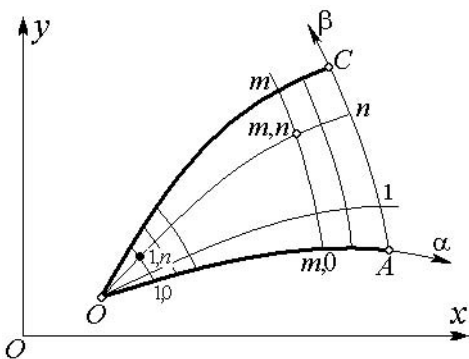
и найдем

$$\left. \begin{aligned} x_{m,n} &= \frac{y_{m,n-1} - y_{m-1,n} + x_{m-1,n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n})}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})} + \\ &+ \frac{x_{m,n-1} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})}; \\ y_{m,n} &= y_{m-1,n} + (x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Координаты узловых точек начинают определять с точки (1,1).

Рассмотрим вырожденный случай задачи Римана (рис. 6.23). На отрезке AO α -линии известны σ и φ . В точке O знаем изменение угла $\varphi \in \angle AOC$. Делим этот угол на некоторое число малых частей: $\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,n}$, при этом $\varphi_{0,n}$ — угол между линиями скольжения On и AO в вершине O .

Значение $\varphi_{m,n}$ в узле (m,n) находим по формуле (6.56).



Для определения среднего напряжения σ в любой точке поля найдем сначала $\sigma_{1,n}$ в точках (1,n).

Для точки (1,0) значения $\sigma_{1,0}$ и $\varphi_{1,0}$ заданы, следовательно,

Рис. 6.23. Вырожденный случай задачи Римана

известен параметр $\eta_1 = \frac{\sigma_{1,0}}{2k} + \varphi_{1,0}$, постоянный вдоль β -линии, проходящей через точку $(1,0)$.

Тогда $\sigma_{1,n} = 2k(\eta_1 - \varphi_{1,n})$. В дальнейшем можно использовать соотношения (6.57), заменив $\sigma_{0,0}$ значением $\sigma_{1,0}$, а $\sigma_{0,n} - \sigma_{1,n}$.

Координаты узловых точек вычисляются по предыдущим формулам.

Задача Коши. Разделим дугу AB на малые части точками $(0,0)$, $(1,1), \dots, (m,m)$ и т.д. (рис. 6.24).

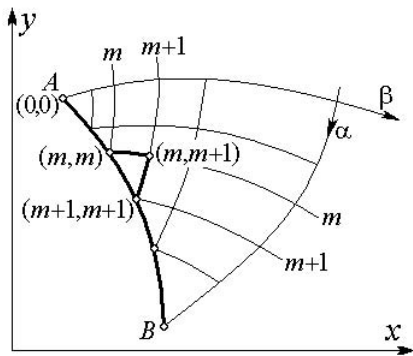


Рис. 6.24. Схема к задаче Коши

Значения σ и φ в узлах, ближайших к дуге, находим по условиям постоянства параметров ξ , η на линиях α , β :

$$\sigma_{m,m+1} - 2k\varphi_{m,m+1} = \sigma_{m+1,m+1} - 2k\varphi_{m+1,m+1};$$

$$\sigma_{m,m+1} + 2k\varphi_{m,m+1} = \sigma_{m,m} + 2k\varphi_{m,m}.$$

Координаты узловых точек определяются по формулам (6.61). В даль-

нейшем сетка скольжения вычисляется по схеме для начальной характеристической задачи.

Смешанная задача. Рассмотрим общий случай смешанной задачи (см. рис. 6.21). В области OAA' решение строится так же, как и в

вырожденном случае начальной характеристической задачи. Далее переходим к области $A'OB$. Разделим OA' на малые части точками $(1,0)$, $(2,0)$ и т.д. (рис. 6.25). На OA' известны значения σ , φ .

Начинаем построение с точки $(1,0)$, проводя из нее прямую в направлении β -линии; найдем на линии OB точку P' ; значение φ в точке P' задано по условию на OB . Вычисляем среднее значение угла φ по точкам $(1,0)$, P' и по нему вновь проводим прямую из точки $(1,0)$; найдем на линии OB точку P'' и так далее до тех пор, пока разность между последовательными положениями точек P не станет малой. Это определит точку $(1,1)$.

Точки $(2,1)$, $(3,1)$ вычисляются таким же образом, как в начальной характеристической задаче.

Для определения точки $(2,2)$ необходимо применить только что изложенный прием последовательного приближения.

Следует отметить, что если построена сетка линий скольжения, то в ее узлах известны значения σ , φ , а следовательно, и компоненты σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} .

При достаточно густой сетке линий скольжения можно с большой точностью определить пластическое состояние.

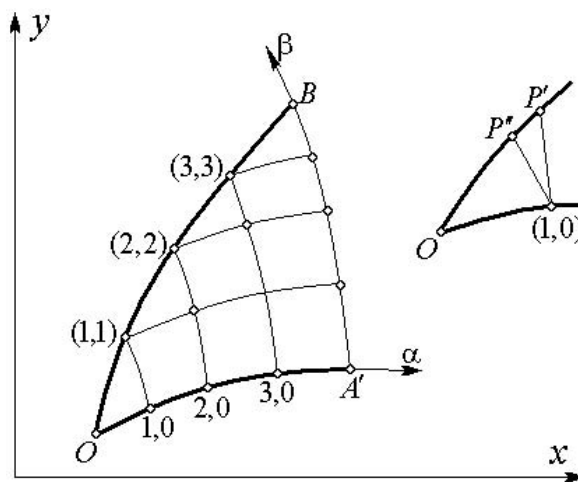


Рис. 6.25. Схема к общему случаю смешанной задачи

Определение поля скоростей. В процессах пластического формоизменения металлов обычно возникают неоднородные поля напряжений и скоростей. Определение поля скоростей в деформируемом металле является важной теоретической и практической задачей. Теоретическое значение поля скоростей заключается в том, что оно позволяет установить совместность сетки линий скольжения с кинематическими условиями задачи.

Практическое значение поля скоростей заключается в том, что оно позволяет определить направления течения материала и характер деформированного состояния.

Общие соотношения. Используя условия коаксиальности и подобия девиаторов скоростей деформаций и напряжений, будем иметь

$$\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad (6.62)$$

$$\text{где } \dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Присоединим условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (6.63)$$

Если напряжения известны, задача для скоростей является линейной, и скорости определяются из уравнений

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_y - \sigma_x + 2\tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0; \quad (6.62')$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (6.63')$$

Эта система уравнений относится к гиперболическому типу, ее характеристики ортогональны характеристикам системы уравнений (6.43) и совпадают с линиями скольжения. Из уравнений (6.62') и (6.63') можно найти все производные $\partial v_x / \partial x$, $\partial v_y / \partial x$, $\partial v_x / \partial y$, $\partial v_y / \partial y$, кроме случая, когда $\sigma_y = \sigma_x$. Это имеет место, когда оси x, y совпадают с характеристическими направлениями. Если характеристические координаты обозначить s_α и s_β , а составляющие вектора скорости по этим направлениям — u, v , то, так как вдоль характеристик (линий скольжения) $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$ и $\tau_{\alpha\beta} = k$, из (6.62') и (6.63') вытекает:

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial s_\beta} = 0, \quad (6.64)$$

а $\partial u / \partial s_\beta$ неопределенна.

Таким образом, скорости относительных удлинений вдоль линий скольжения равны нулю.

Соотношения (6.64) характеризуют особенности деформации элемента скольжения. Представим эти соотношения в другой, более удобной форме. Рассмотрим бесконечно малый отрезок ds_α линии α (рис. 6.26).

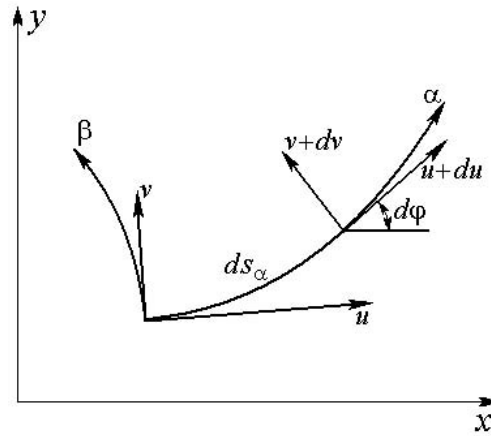


Рис. 6.26. Схема к получению уравнений Гейрингера

Скорость относительного удлинения в направлении α при отбрасывании малых 2-го порядка равна:

$$u + du - v d\varphi - u = 0,$$

или

$$du - v d\varphi = 0, \quad (6.65)$$

вдоль α -линии.

Аналогично получим (для β -линии)

$$dv + u d\varphi = 0 \quad (6.66)$$

вдоль β -линии.

Эти соотношения, найденные Х. Гейрингером, называются уравнениями для скоростей вдоль линий скольжения. Они указывают на то, что приращение скорости вдоль линии скольжения нормально к линии скольжения.

Уравнения (6.65) и (6.66) служат базой для определения поля скоростей в пластической области линий скольжения. Эти уравнения обычно записываются в виде конечных разностей, и решаются краевые задачи Коши, Римана и смешанная для скоростей течения.

Свойства полей скоростей. Годограф скоростей. Так как скорости деформаций растяжения или сжатия вдоль соответствующих линий скольжения равны нулю, то при перемещении вдоль линий скольжения α приращение вектора скорости должно быть ортогональным к линии скольжения (рис. 6.27, а).

Это относится и к приращению вектора скорости при перемещении его вдоль линии скольжения β . Если в плоскости выбрать произвольную точку и из этой точки откладывать непрерывно вектор скорости \vec{v} при движении вдоль линии скольжения α или β , то конец вектора опишет траекторию, ортогональную к соответствующей линии скольжения (рис. 6.27, б). Угол поворота касательной к этой траектории равен углу поворота касательной к линии скольжения на соответствующем участке.

Это построение называется годографом скоростей.

Участок ab линии скольжения α в плоскости годографа (рис. 6.27, а) отображается в участок $a'b'$ линии скольжения α' ; участок ac линии скольжения β – в участок $a'c'$ линии скольжения β' .

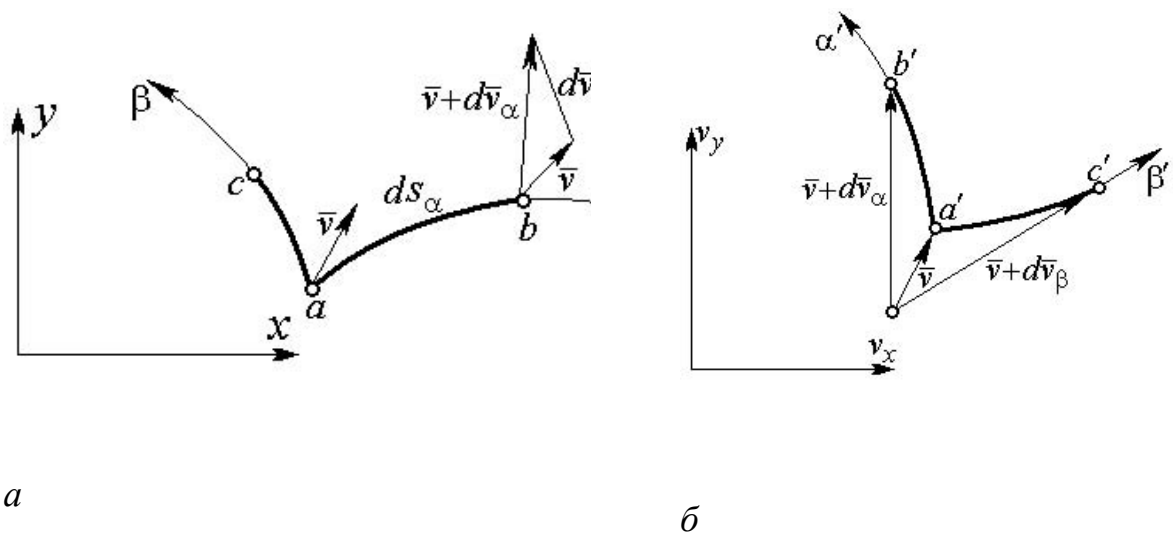


Рис. 6.27. Линии скольжения в физической плоскости (а) и плоскости скоростей (б)

Построение годографа скоростей дает решение задачи о распределении скоростей в деформируемом теле.

В ряде случаев оказывается невозможным построить решения с непрерывными скоростями (напряжениями). В то же время существуют решения с разрывными скоростями (напряжениями), удовлетворяющие граничным условиям.

В теории пластичности доказывается, что в любой точке поля линий скольжения не может быть одновременно разрыва в скоростях и в напряжениях. Линия разрыва вектора скорости – это либо линия скольжения, либо огибающая линий скольжения.

На линиях скольжения разрыв напряжений не происходит. Линия разрыва напряжений в каждой своей точке является биссектрисой угла, образованного одноименными линиями скольжения, которые подходят к этой линии с разных сторон (рис. 6.28).

Так как возможность появления трещин исключается, то разрыв в нормальной к линии разрыва составляющей скорости отсутствует. Возможен лишь разрыв (скачок) тангенциальной составляющей скорости. Если u , v – составляющие скорости вдоль α -, β -линий скольжения, то составляющая скорости u может быть разрывна вдоль α -линии, v – вдоль β -линии.

Из уравнений Гейрингер имеем

$$u = \int v d\varphi + C \quad (\text{вдоль } \alpha \text{-линии});$$

$$v = -\int u d\varphi + C \quad (\text{вдоль } \beta \text{-линии}).$$

Так как v непрерывна на α -линии, u – на β -линии, то видно, что скачок скорости u (или v) постоянен вдоль линий разрыва α (или β).

Остановимся на построении годографа для линий разрыва скоростей. Так как скорости по обе стороны линии разрыва скоростей отличаются на постоянную величину, то линия скольжения, являющаяся линией разрыва, отображается на годографе двумя линиями

(рис. 6.29).

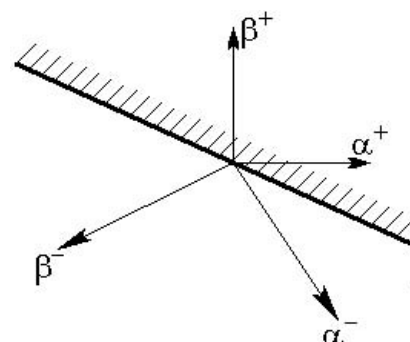


Рис. 6.28. Линия разрыва напряжений

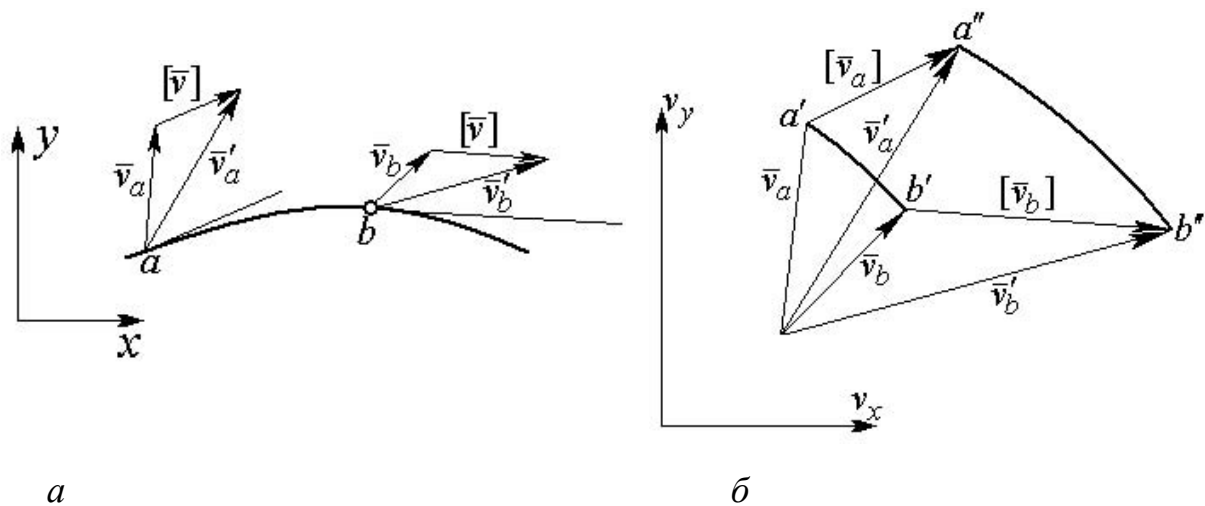


Рис. 6.29. Линия разрыва скоростей в физической плоскости (а) и ее отображение в плоскости скоростей (б)

Если ab – линия скольжения, являющаяся линией разрыва скоростей, то на годографе скоростей она отображается двумя линиями – $a'b'$ и $a''b''$. Так как величина разрыва скорости вдоль линий скольжения является постоянной, то линии $a'a'' = b'b''$ и направлены по нормали к линиям годографа $a'b'$ и $a''b''$. Длина отрезков $a'a''$ и $b'b''$ равна величине разрыва скорости.

Пусть по одну сторону линии скольжения металл перемещается как жесткое целое (область A) со скоростью \bar{v} (рис. 6.30). В этом случае скорости всех точек в этой области одинаковы, и они на годографе изобразятся одной точкой $a'b'$ (рис. 6.30, б). Таким образом, одно из двух отображений линии разрыва ab вырождается в точку.

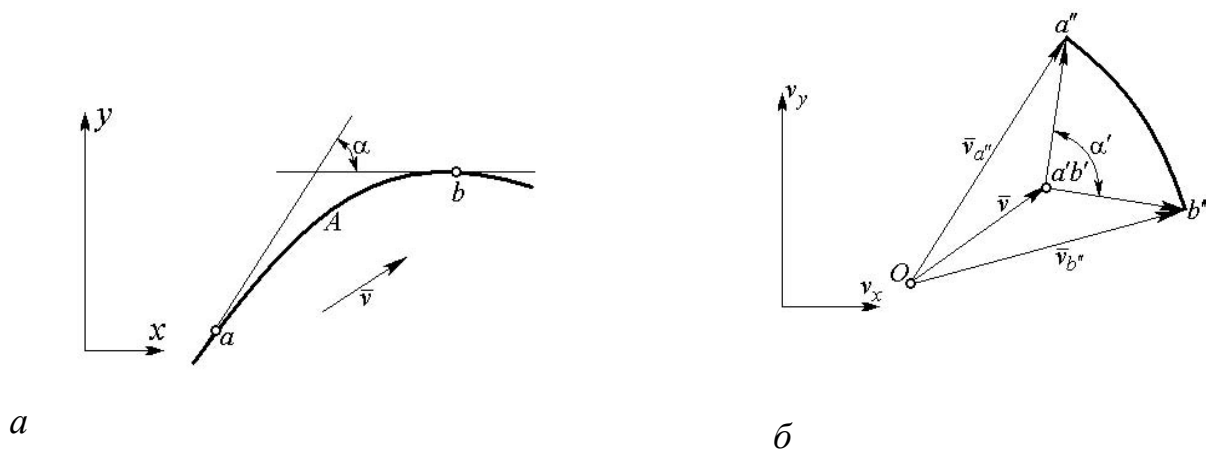


Рис. 6.30. Определение годографа скоростей на границе жесткой и пластической областей

Второе отображение линии скольжения ab вследствие постоянства величины разрыва представляется дугой окружности $a''b''$, радиус которой равен величине разрыва скорости. Центральный угол окружности α' равен углу α поворота касательной к линии скольжения на участке ab .

В точке пересечения линии разрыва с контуром инструмента скорость разрыва, нормальная к контуру инструмента, должна быть равна нулю. Разрыв в скорости распространяется от точки пересечения рассматриваемой линии скольжения с контуром инструмента вдоль линии скольжения другого семейства, начинающейся в точке пересечения (рис. 6.31).

При отражении величина разрыва скорости изменяется.

Соотношение между падающим разрывом скорости $[v_\alpha]$ и отраженным разрывом $[v_\beta]$ может быть найдено из условия, что нормальная компонента разрыва скорости в точке отражения равна нулю:

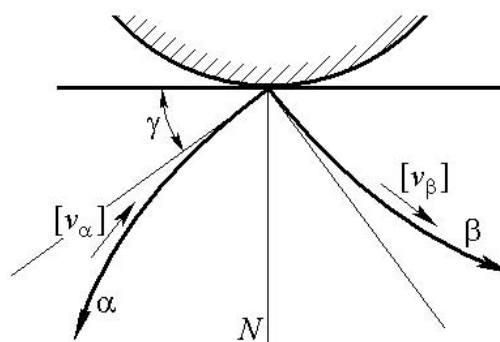


Рис. 6.31. Изменение направления разрыва скорости в точке пересечения линии скольжения с контуром инструмента

$$\left. \begin{aligned} [v_\beta] \cos \gamma - v_\alpha \sin \gamma &= 0; \\ \frac{[v_\beta]}{v_\alpha} &= \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned} \right\}$$

(6.67)

При отсутствии трения угол $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} \gamma = 1$. В этом случае разрыв скорости при отражении не изменяется.

Методика решения задач плоского пластического течения.

Решение задач плоской деформации включает следующие этапы:

1. Построение поля или сетки линий скольжения, удовлетворяющей граничным условиям в напряжениях, начиная с определенных граничных поверхностей и задаваясь линиями скольжения, отделяющими жесткую область от пластической.

2. Получение поля скоростей посредством поля линий скольжения и некоторых данных граничных условий в скоростях. При этом проверяется соответствие остальным граничным условиям в скоростях.

3. Проверку выполнения условий положительности мощности пластической деформации в любой точке пластически деформируемой области.

4. Обеспечение выполнения условия, требующего, чтобы напряжения в недеформируемой области не превышали предела текучести.

Если условия, сформулированные в пунктах 2 и 4, не выполняются, то поле линий скольжения необходимо построить заново, выбрав новую жесткопластическую границу, от которой начинается построение.

В теории пластичности показывается, что такой границей между жесткой и пластической областями может быть либо линия скольжения, либо огибающая линии скольжения.

Экспериментальное изучение течения металла дает возможность предположить приемлемую форму жесткопластической границы. При построении поля линий скольжения используются теоремы Генки.

Угол, который образует линия скольжения с контуром, определяется граничными условиями, данными в напряжениях. Например, если контур инструмента свободен от напряжений, то линии скольжения подходят к нему под углом 45° , если же он абсолютно шероховатый, т.е. на нем $\tau_k = k$, то линии скольжения образуют с ним углы 0 и 90° .

Распределение напряжений внутри пластической области находят с помощью соотношений (6.45) и (6.41). Распределение скоростей, соответствующих полю линий скольжения, получают построением годографа.

В пластически деформируемом материале могут существовать линии (поверхности) разрыва скоростей; на их сторонах тангенциальные компоненты скорости имеют конечный разрыв, который остается постоянным вдоль линии разрыва. Эти линии являются линиями скольжения; они не совпадают с линиями разрыва напряжений.

Большинство решений методом линий скольжения, опубликованных в литературе, не содержат проверки знака мощности пластической деформации, а также распределения напряжений в предполагаемой недеформируемой области. Такое решение следует считать неполным. Если мощность пластической деформации во всей деформируемой области положительна, а напряженное состояние в предполагаемой жесткой области не исследовалось, то в этом случае силовые параметры процесса можно считать верхними оценками.

Определение деформаций при стационарных процессах течения. При установившемся плоском течении с помощью годографов линий тока (годографов траекторий) можно получить количественную оценку значения интенсивности деформаций в любой точке на линии тока. Построение линии тока в физической плоскости сводится к решению уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (6.68)$$

и может быть выполнено графическим и численным методами.

Построение значительно облегчается тем, что заранее известно положение точек входа в пластическую область и выхода из нее. Одновременно с построением линии тока можно найти ее отображение на годографе скоростей, т.е. построить годограф линии тока.

На рис. 6.32, *а* в поле линий скольжения в физической плоскости x, y показан отрезок линии тока s , а на рис. 6.32, *б* – годограф этой линии тока l в плоскости скоростей v_x и v_y .

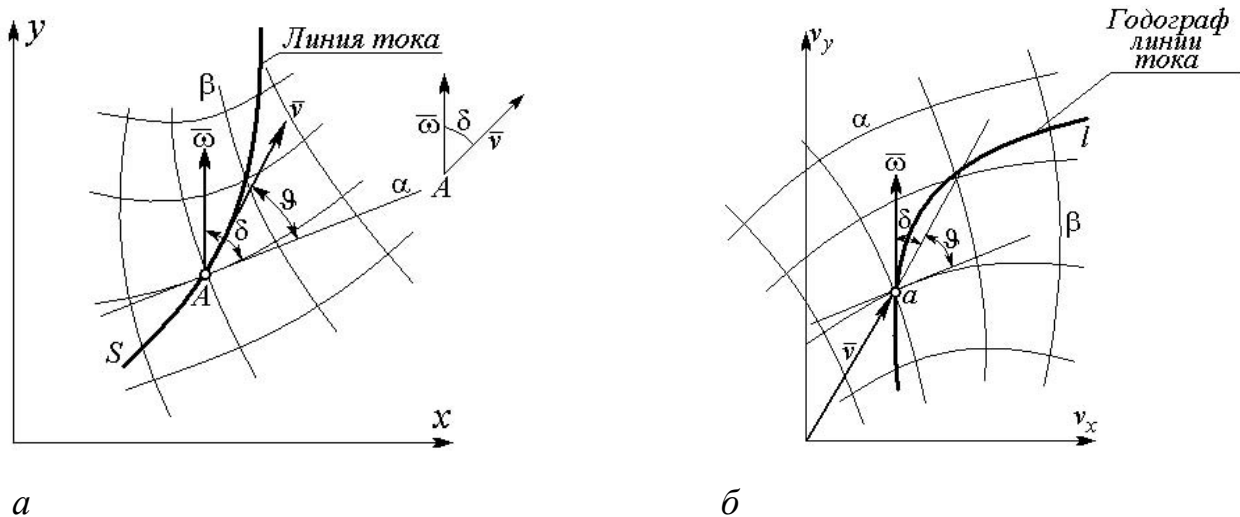


Рис. 6.32. Поле линий скольжения в физической плоскости x, y (*а*) и годограф линии тока (*б*)

Пусть \bar{v} – текущее значение скорости течения точки A пластической области на линии тока; ϑ – угол между положительным направлением α -линии и направлением скорости, отсчитываемый против часовой стрелки.

На годографе линии тока в плоскости скоростей точке A соответствует точка a . Обозначим δ угол, отсчитываемый против часовой стрелки от направления скорости \bar{v} до касательной к годографу линии тока, т.е. направления ускорения $\bar{\omega}$.

Линейная скорость деформации в направлении линии тока, отвечающая текущему положению точки A , равна:

$$\dot{e}_v = \frac{\partial v}{\partial s_v} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s_v} = \frac{\omega_v}{v}, \quad (6.69)$$

где $\omega_v = \omega \cos \delta$ – проекция полного ускорения на направление скорости.

Теперь будем иметь

$$\dot{e}_v = \frac{\omega \cos \delta}{v}. \quad (6.70)$$

Воспользуемся круговой диаграммой Мора для скоростей деформаций в случае чистого сдвига (рис. 6.33, *а*). Принимая во внимание, что γ – угол между первым главным направлением скоростей деформаций и направлением скорости (рис. 6.33, *б*), определяем

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_v &= \frac{\dot{I}}{2} |\cos 2\gamma|; \quad \gamma = \vartheta - \frac{\pi}{4}; \\ \dot{I} &= 2 \left| \frac{\dot{e}_v}{\sin 2\vartheta} \right| = 2 \left| \frac{\omega \cos \delta}{v \sin 2\vartheta} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

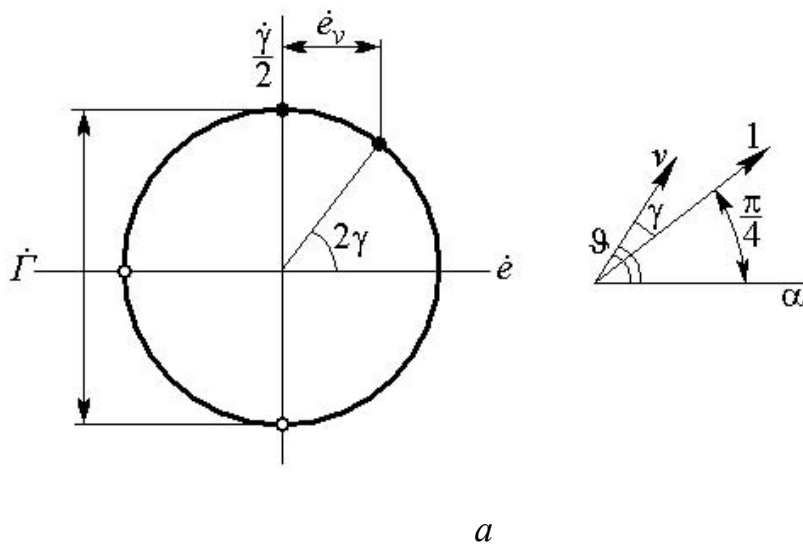


Рис. 6.33. Круговая диаграмма Мора для скоростей деформаций в случае чистого сдвига

Путь, который проходит точка a вдоль линии годографа при движении точки A вдоль линии тока, обозначим l , тогда

$$dl = \omega dt. \quad (6.72)$$

Интенсивность деформации сдвига в любой точке на линии тока при установившемся течении равна:

$$\Gamma = \int_{t_0}^t \dot{\Gamma} dt, \quad (6.73)$$

где t_0 – время, соответствующее начальному положению этой точки на границе между жесткой и пластической областями, а t – текущее время.

Переходя в выражении (6.73) к интегрированию вдоль годографа линии тока, с помощью соотношений (6.71) и (6.72) получаем

$$\Gamma = 2 \int \left| \frac{\cos \delta}{v \sin 2\vartheta} \right| dl. \quad (6.74)$$

Так как из условия ортогональности линий скольжения в физической плоскости и их отображений в плоскости скоростей угол ϑ может быть определен в плоскости скоростей путем отсчета против часовой стрелки от направления годографа линии β до направления скорости v , то все величины, входящие в уравнение (6.74), могут быть определены в плоскости скоростей.

Задача о волочении полосы через гладкую клиновую матрицу.

Распределение напряжений и силовые параметры процесса. Пусть полоса толщиной h_0 в результате волочения через гладкую клиновую матрицу с углом 2α уменьшает свою толщину до размера h_1 (рис. 6.34).

Рассмотрим установившуюся стадию процесса. Предположим, что поверхность полосы остается недеформированной, пока не достигнет матрицы. Принимая давление q на матрицу постоянным при малых степенях деформаций, в качестве исходной линии скольжения берем отрезок прямой линии AC , расположенной к стенке матрицы под углом 45° . Решение смешанной задачи определяет область ABC . Области ACD и BCE можно продолжить насколько это необходимо.

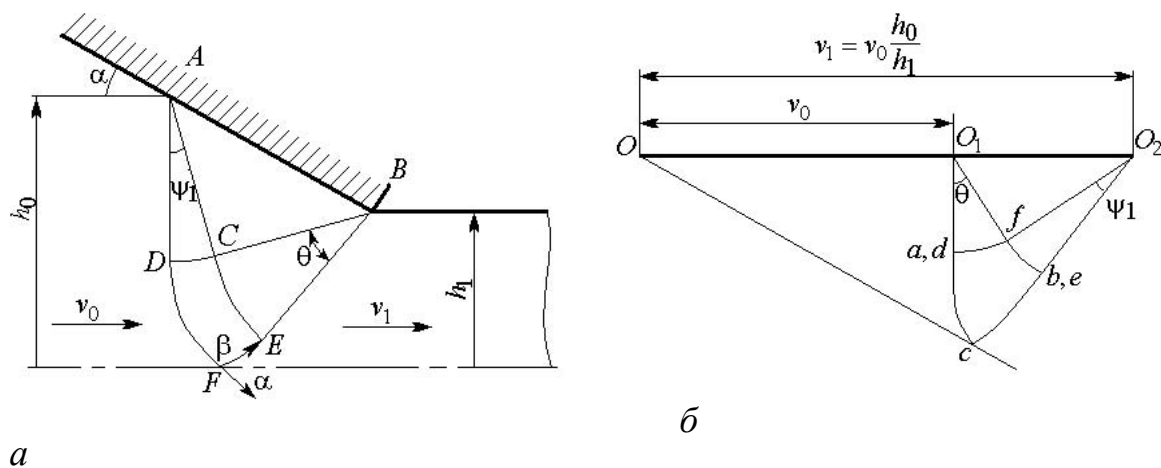


Рис. 6.34. Поле линий скольжения при волочении полосы через гладкую матрицу при малых степенях деформации (а) и годограф скоростей течения материала (б)

Отрезки линий скольжения CD и CE определяют область $DCEF$ (задача Римана). Так как пластическая зона должна проходить сквозь всю толщину металла, то точка F лежит на осевой, и, следовательно, линии скольжения должны быть наклонены к осевой под углом 45° . Это обстоятельство накладывает ограничение на углы ψ_1 и θ :

$$\theta - \psi_1 = \alpha. \quad (6.75)$$

Для определения напряжений в пластической области одно из напряжений, например среднее напряжение в точке F , обозначается σ_0 . С помощью интегралов Генки можно вычислить σ и φ в любой точке пластической области через σ_0 . Величина σ_0 устанавливается из условия, что продольная компонента полной силы вдоль ADF равна нулю. Определив σ_0 , нетрудно найти напряжения в любой

точке пластической области, а также давление на матрицу q и напряжение волочения $t = qr/1 - r$, где r – редукция, определяемая по выражению

$$r = 1 - \frac{h_1}{h_0}. \quad (6.76)$$

Указанное выше поле справедливо до редукции

$$r = \frac{2 \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha}, \quad (6.77)$$

т.е. до редукций, когда $\psi_1 = 0$, $\theta = \alpha$. При этом поле линий скольжения принимает вид, показанный на рис. 6.35.

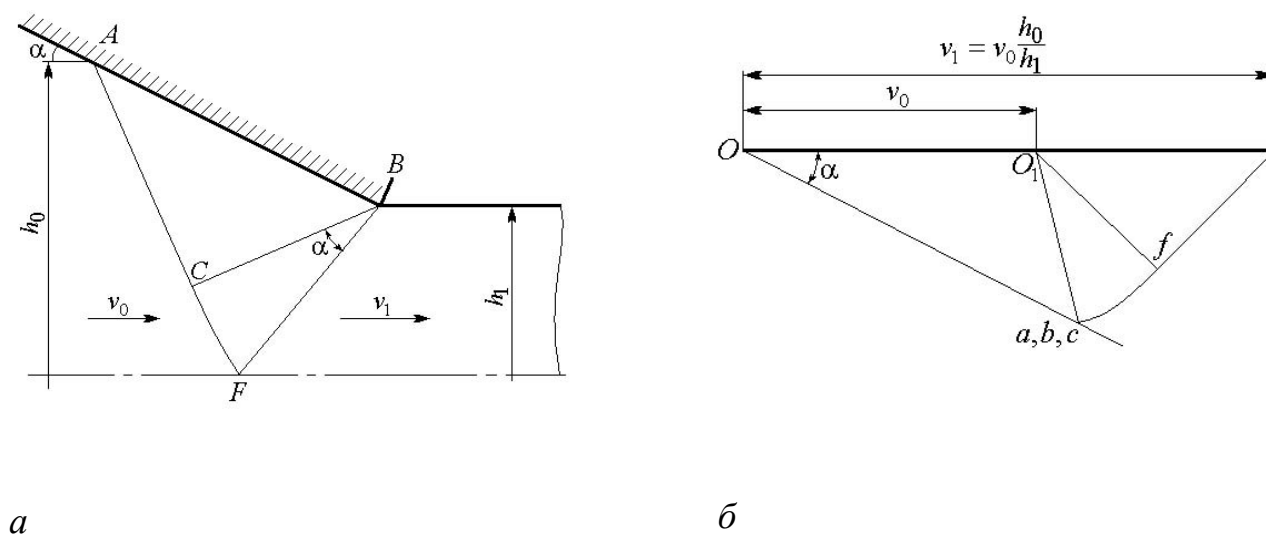


Рис. 6.35. Простейшее поле линий скольжения при волочении полосы через гладкую матрицу (а) и годограф скоростей течения материала (б)

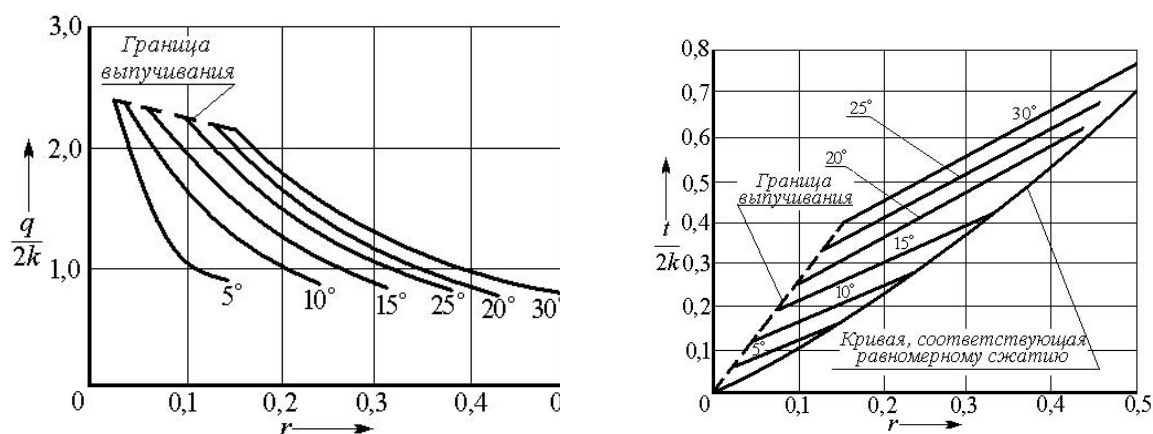
Для этого поля находим точные аналитические выражения для напряжения волочения и давления на матрицу:

$$\frac{t}{2k} = \frac{2(1 + \alpha) \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha}; \quad \frac{q}{2k} = \frac{1 + \alpha}{1 + 2 \sin \alpha}. \quad (6.78)$$

Волочение становится невозможным, когда степень деформации настолько велика, что среднее растягивающее напряжение, вычисленное в протянутом листе, превышает $2k$. Когда степень деформации мала, давление на матрицу может быть настолько большим, что поверхность полосы перед матрицей становится пластической раньше, чем достигнет ее. Это имеет место, когда

$$q = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} - \alpha \right). \quad (6.79)$$

На рис. 6.36 представлены графики зависимости давления на матрицу и напряжения волочения от редукции.



а

б

Рис. 6.36. Зависимости давления на матрицу (а)

и напряжения волочения (σ) от редукции

При степенях деформаций, больших той, которая определяет простейшее поле линий скольжения (см. рис. 6.35), естественно ожидать,

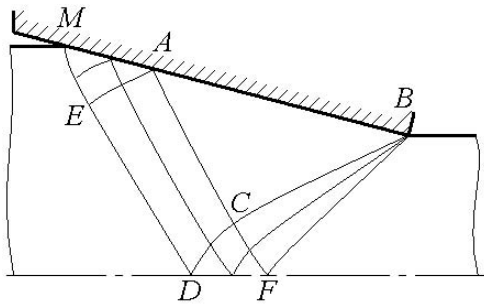


Рис. 6.37. Поле линий скольжения

при волочении полосы

при значительных степенях

деформации, когда разрыв

касательной составляющей скорости
вдоль BF

отсутствует

в областях $EACD$, CDF , ABC , BCF . Решение возможно, если

скорость, вычисленная на линии BF , совместима с перемещением протянутого листа как жесткого тела. Для этого поля разрыв касательной составляющей скорости распространяется вдоль линий скольжения $MEDCB$; разрыв касательной составляющей скорости вдоль BF отсутствует.

Для еще больших степеней деформаций поле линий скольжения будет иметь вид, показанный на рис. 6.38.

что поле будет иметь вид, показанный на рис. 6.37.

Кинематика течения. Поля линий скольжения (см. рис. 6.34, 6.35 и 6.37), полностью удовлетворяют всем граничным условиям для скоростей.

В последнем случае определение скоростей может быть начато в области MEA , где имеется

два граничных условия, и продолжено последовательно в об-

Оно является естественным продолжением поля на рис. 6.37. Однако для этого поля разрыв скорости, распространяющийся вдоль линий скольжения $NPRS$ от входа в матрицу, оканчивается в точке S на выходной линии скольжения BF , что несовместимо с перемещением протянутого листа как жесткого тела.

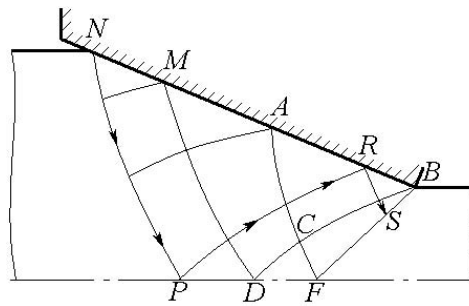


Рис. 6.38. Поле линий скольжения при волочении полосы при больших деформациях, когда разрыв касательной составляющей скорости останавливается в точке S

Решение будет правильным, если разрыв касательной составляющей скорости оканчивается только в выходном углу матрицы. Это имеет место для некоторых степеней деформаций и углов матрицы.

В противном случае решение задачи является статически допустимым и согласно теореме об экстремальных принципах для жесткопластического тела вычисленное напряжение волочения соответствует нижней оценке напряжения по отношению к действительному.

Построение годографа скоростей для простейшего поля линий скольжения (см. рис. 6.35) выполняется в следующем порядке. Из точки O откладываются вектор OO_1 , равный скорости \bar{v}_0 полосы перед входом в матрицу, и вектор OO_2 , равный скорости $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 \left(\frac{a_0}{h_1} \right)$ полосы после выхода из матрицы.

Вдоль линий скольжения ACF и FB имеет место разрыв касательной составляющей скорости, вызванный резким изменением направления скорости в точке A при встрече полосы с матрицей. Этот

разрыв касательной составляющей скорости не исчезает и постоянен по величине в соответствии с уравнениями Гейрингера. В точке F касательная составляющая скорости испытывает разрыв дважды: при пересечении линий скольжения CF и FB . Зная скорость материала слева и справа от точки F , можно легко найти точку f на годографе, которая характеризует величину и направление скорости материальной частицы в точке F после пересечения линии скольжения CF . Эта скорость мгновенно меняется на \bar{v}_1 после пересечения линии скольжения BF . Вдоль ACF направление разрыва касательной составляющей меняется, что на годографе изображается дугой окружности fa . Отрезок Oa на годографе скоростей параллелен контуру матрицы AB . Построенный годограф дает полное представление о характере течения материала.

Рассмотрим вопрос о построении годографа скоростей для поля линий скольжения, изображенного на рис. 6.34, *a*. Построение начинается с точки F , в которой известны скорости слева (v_0) и справа (v_1), а также направление линий скольжения. Из точек O_1 и O_2 годографа проводят прямые, параллельные касательным к линиям скольжения в точке F , которые определяют точку f (см. рис. 6.34, *b*). Далее описывают дуги окружности fb и fa так, чтобы отрезок O_1a был параллелен AD , а O_2b – BE . Дальнейшее построение годографа в области $adfbc$ выполняется аналитически численно с помощью уравнений Гейрингера, записанных в конечных разностях, или графически с использованием свойства ортогональности линий скольжения в физической плоскости и плоскости годографа.

Точность полученного построения проверяется из условия параллельности отрезка Oc на годографе линии AB в физической плоскости.

Аналогичное построение выполняется и для поля линий скольжения, изображенного на рис. 6.39, *a*.

Из точки O на годографе скоростей откладывается вектор OO_1 , равный v_0 . Так как в точке D направление течения материала резко меняется от горизонтального до параллельного DO , то скорость в точке D определяется как точка пересечения линии Od , параллель-

ной OD , и линии O_1d , параллельной касательной к линии скольжения DE в точке D , на годографе скоростей.

Поскольку величина разрыва касательной составляющей остается неизменной вдоль DE , то из точки O_1 проводится дуга окружности de , причем отрезок O_1e параллелен направлению касательной к линии скольжения DE в точке E . Пересечение линии скольжения EO приводит к разрыву касательной составляющей скорости, и скорость в точке E становится горизонтальной по направлению, что дает возможность определить второе положение точки e на линии годографа Ob .

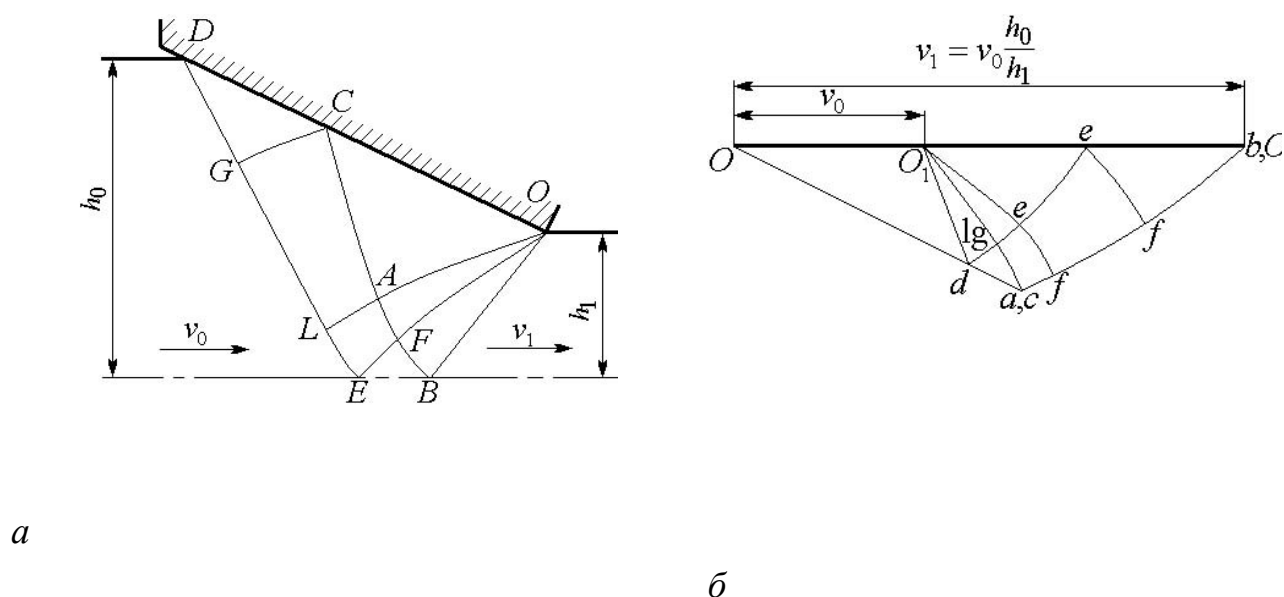


Рис. 6.39. Поле линий скольжения (а) и годограф скоростей (б)

Дальнейшее построение годографа выполняется аналитически с помощью уравнения Гейрингера в конечных разностях или графически с использованием свойств ортогональности линий скольжения физического поля и годографа скоростей (рис. 6.39, б).

Точность полученного решения контролируется условием

$$Ob = v_0 \left(\frac{h_0}{h_1} \right).$$

Деформация и коэффициент полезного действия. Если бы полоса при прохождении через матрицу равномерно сжималась, то напряжение при волочении составляло бы $t = 2k \ln \frac{h_0}{h_1}$ и было бы равно идеальной работе на единицу объема. Однако равномерное сжатие затруднительно из-за давления со стороны жесткого материала.

Различие между кривой, соответствующей равномерному сжатию, и сплошными кривыми (см. рис. 6.36) определяет бесполезную работу, расходуемую на искажения, которые не способствуют окончательному уменьшению толщины полосы. Когда обжатие мало, а угол матрицы большой, то коэффициент полезного действия падает до 50 %. Когда обжатие большое, то для каждого угла матрицы кривые стремятся приблизиться к кривой равномерного сжатия, коэффициент полезного действия возрастает.

Учет упрочнения. Когда трение на матрице отсутствует, то средняя пластическая работа на единицу объема равна напряжению волочения t .

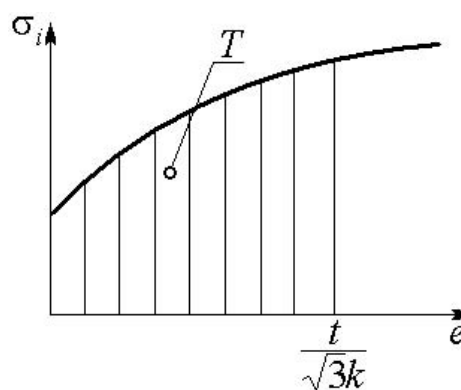


Рис. 6.40. Кривая упрочнения

С другой стороны, она равна $k\sqrt{3} \int de_i$. Поэтому средняя интенсивность деформации составляет $t/k\sqrt{3}$.

Предположим, что полосе сообщается одна и та же средняя интенсивность деформации $t/k\sqrt{3}$. Напряжение волочения с учетом упрочнения T равно площади под кривой $\sigma_i - e_i$ до

деформации, равной $t/k\sqrt{3}$ (рис. 6.40).

Учет сил трения на матрице. Если коэффициент трения $\mu \leq 0,1$, Р. Хилл предлагает для приближенного учета трения принять

$$q' = q; \quad t' = 1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha t,$$

где q', t' и q, t – давление на матрицу и напряжение волочения с учетом и без учета трения соответственно.

Для данного обжатия влияние трения на силу волочения уменьшается с увеличением угла матрицы, а величина бесполезной работы возрастает. Поэтому для этого обжатия и коэффициента трения имеется оптимальный угол матрицы, для которого сила волочения является наименьшей. Например, для $\mu = 0,05$ найдено, что зависимость α от r при $r < 0,5$ представляется в виде $\alpha^\circ = 40r$; для $\mu = 0,1$ $\alpha^\circ = 44r$.

Внедрение плоского штампа в полубесконечную среду. Пусть гладкий штамп начинает внедряться в полубесконечную пластическую среду. Поле линий скольжения, предложенное Л. Прандтлем, состоит из треугольников, которые соединены централизованными веерами (рис. 6.41, *a*). Это поле линий скольжения удовлетворяет всем граничным условиям для напряжений. Рассмотрим α -линию ba . Определим σ_{ya} в точке a и, следовательно, величину давления внедрения штампа, так как оно постоянно по всему штампу.

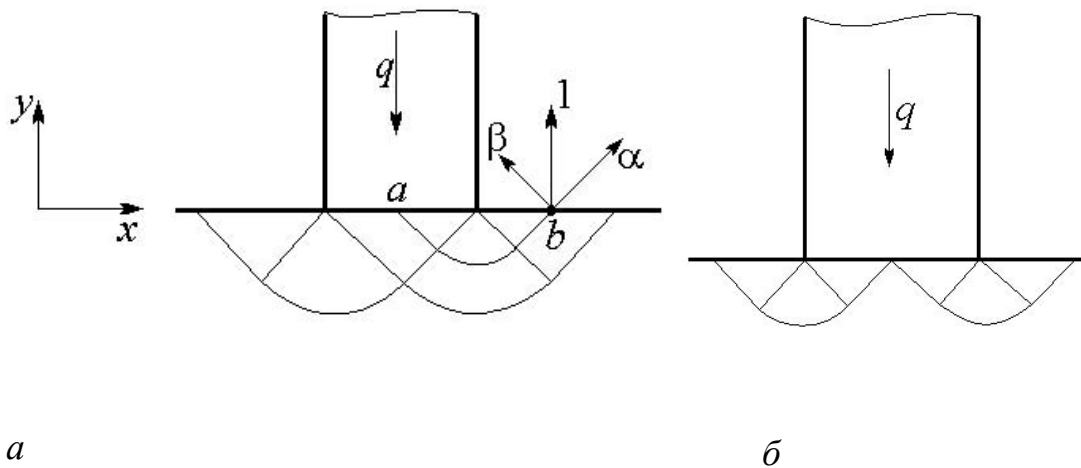


Рис. 6.41. Поля линий скольжения при внедрении плоского гладкого штампа в полубесконечную пластическую среду, предложенные Л. Прандтлем (а) и Р. Хиллом (б)

В точке b $\sigma_\theta = -k$; $\varphi_\theta = \frac{\pi}{4}$.

Поэтому $\xi_\theta = \frac{\sigma_\theta}{2k} - \varphi_\theta = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Вдоль α -линии параметр $\xi = \text{const}$, т.е.

$$\xi_a = \frac{\sigma_a}{2k} - \varphi_a; \quad \varphi_a = -\frac{\pi}{4}; \quad \frac{\sigma_a}{2k} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}; \quad \sigma_a = -2k \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Найдем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ya} &= \sigma_a + k \sin 2\varphi_a = -2k \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - k = -2k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right); \\ q_a &= -\sigma_{ya} = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

В литературе известны другие конструкции полей линий скольжения под штампом в пластической области, например поле,

предложенное Р. Хиллом (рис. 6.41, б). Однако удельная сила внедрения по величине та же.

Плоская осадка полосы шероховатыми плитами. Рассмотрим начало осадки полосы толщиной $2h$ и шириной $2l$ между двумя шероховатыми плитами (рис. 6.42). Предположим, что на контактных поверхностях реализуются условия $\tau_k = \pm k$.

Построение поля скольжения изучалось еще Л. Прандтлем, в дальнейшем эту задачу решали В.В. Соколовский, Р. Хилл и др.

Рассмотрим область I , примыкающую к свободной от напряжений границе AB $\left(\tau_{xy} = 0, \sigma_x = 0 \right)$. В этой области имеем краевую задачу Коши. Так как линия AB прямая, то к ней примыкает область ABC равномерного напряженного состояния, в которой AC – α -линия скольжения; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; $\sigma = -k$; $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = -2k$. К области равномерного сжатия примыкают области простого напряжения состояния – центрированные веера ACD и BCE с центрами в особых точках A и B .

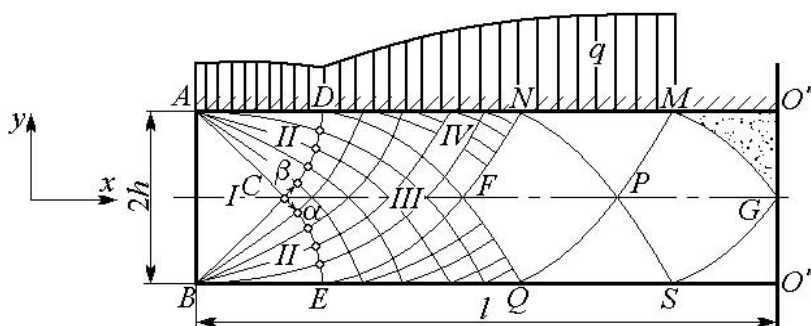


Рис. 6.42. Схема процесса плоской осадки полосы шероховатыми плитами

В соответствии с условием на поверхности контакта эти поля могут быть продолжены до границы AD и BE . Найдем напряжение σ_y в точке D . Для этого используем интеграл пластичности Генки:

$$\frac{\sigma_D}{2k} + \varphi_D = \frac{\sigma_c}{2k} + \varphi_c.$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi_D = 0; \quad \varphi_c = -\frac{\pi}{4}; \quad \sigma_c = -k,$$

определим

$$\sigma_D = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Так как

$$\sigma_{yD} = \sigma_D + k \sin 2\varphi_D \quad \text{и} \quad \varphi_D = 0,$$

$$\text{то} \quad \sigma_{yD} = \sigma_D = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

По известному углу φ аналогично могут быть вычислены величины σ , σ_x , σ_y , τ_{xy} в любой точке области II поля линий скольжения.

Дальнейшее построение поля линий скольжения в области III выполняется путем решения краевой задачи Римана. На двух линиях скольжения CD и CE известны σ и φ . Координаты сетки линий скольжения и значения в них σ и φ вычисляются, например, по рекуррентным формулам (6.56), (6.57) и (6.59) при соответствующей выбранной базе сети $\Delta\varphi$.

В области DFN имеем смешанную краевую задачу (вдоль DN задан угол $\varphi = 0$, а на линии скольжения DF – значения σ и φ , известные из решения предыдущей задачи).

Построение продолжается до тех пор, пока поле не достигнет оси симметрии $O''O''$. В силу симметрии на линии $O''O''$ касательные напряжения равны нулю. Следовательно, условие $\tau_k = k$ на линии контакта не может выполняться вблизи середины слоя. Здесь возникает жесткая зона, ограниченная линией контакта и линией скольжения MG . Распределение давлений на MO'' остается неопределенным, и можно лишь вычислить среднее давление по напряжениям, действующим вдоль линии MG . Рассматриваемое построение возможно, если точка F не попадает по другую сторону оси симметрии $O''O''$. Как показывают вычисления, это условие будет выполняться

при $\frac{l}{h} > 3,64$. На рис. 6.42 сплошной линией нанесено распределение давления q на поверхности контакта.

Построенное поле линий скольжения должно быть согласовано с соответствующим ему полем скоростей. В силу симметрии $u = v$ на линии CG ; на линии AO'' имеем краевое условие $v_y = v_0$. Поскольку жесткая зона в средней части смещается в вертикальном направлении со скоростью v_0 , а нормальная составляющая скорости v вдоль α -линии скольжения MG , разделяющей жесткую и пластическую области, непрерывна, то на ней $v = -v_0 \cos \varphi$. Интегрируя уравнение Гейрингер (6.65) и определяя произвольную постоянную по усло-

вию $u = v$ в точке G , для которой $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, находим на границе MG вторую составляющую скорости:

$$u = -v_0 \left(\sqrt{2} + \sin \varphi \right).$$

При переходе через линию раздела MG тангенциальная составляющая скорости испытывает скачок величиной $v_0 \sqrt{2}$. По вычисленным значениям u, v строим поля скоростей, продвигаясь последовательно справа налево до тех пор, пока не достигнем линии CD , при этом скорости на CD определяются единственным образом.

Построение поля скоростей осуществляется в силу симметрии задачи для верхней левой части полосы путем последовательного решения смешанных краевых задач. Нетрудно показать, что область ACB движется влево с постоянной скоростью, т.е. в процессе осадки боковая поверхность полосы не искажает своей прямолинейной формы.

Особенности решения задач плоского пластического течения при непередельном трении на контактных границах. Недостаточная изученность механизма взаимодействия пластически деформируемого металла и инструмента при обработке металлов давлением приводит к необходимости введения различных гипотез относительно описания связи между касательными τ_n и нормальными σ_n компонентами контактного напряжения (закона трения). Рассмотренные выше задачи проанализированы в предположении, что касательное

контактное напряжение постоянно по величине и равно либо нулю ($\tau_n = 0$), либо своей максимальной величине ($|\tau_n| = k$). Рассмотрим особенности решения задач пластического течения в предположении справедливости закона Амонтона – Кулона, устанавливающего линейную связь между компонентами контактного напряжения в виде

$$\tau_n = \pm \mu \sigma_n, \quad (6.81)$$

где μ – коэффициент кулонова трения.

Условие текучести накладывает ограничение на величину контактного касательного напряжения: $|\tau_n| \leq k$. В тех случаях, когда касательное напряжение не достигает своей предельной величины и справедлив закон кулонова трения (6.81), часто говорят, что реализуется непредельное трение.

Решение задач плоского пластического течения методом линий скольжения (характеристик) сводится к построению сетки линий скольжения и вычислению в ее узловых точках величин σ и φ , при этом должны быть удовлетворены все граничные условия в напряжениях и скоростях.

Установим связь между этими параметрами на контактной границе, на которой реализуется условие непредельного трения (6.81).

Если ввести угол ϑ , отсчитываемый против часовой стрелки, между осью x и касательной к границе (рис. 6.43), то формулы (6.52) для контактных нормальной и касательной компонент напряжений запишутся в виде

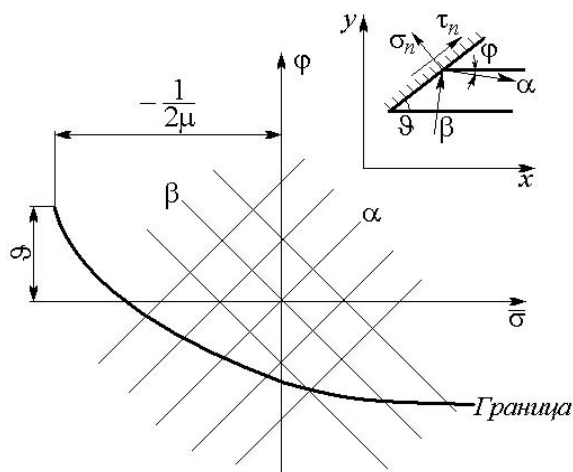


Рис. 6.43. Схема плоского пластического течения при непредельном трении

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma + k \sin 2(\varphi - \vartheta) \\ \tau_n &= -k \cos 2(\varphi - \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

Используя соотношения (6.81) и (6.82), находим выражение, устанавливающее связь между φ и σ на границе:

$$\varphi = \vartheta - \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{1}{1 + \mu^2} \left[\sqrt{1 + \mu^2} \sqrt{1 - 4\bar{\sigma}^2} + 2\mu^2 \bar{\sigma} \right] \right\}, \quad (6.83)$$

где $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{2k}$ – безразмерная характеристика среднего напряжения.

В результате ограничения $|\tau_n| \leq k$ приходим к выражению

$$\bar{\sigma} \geq -1/\mu \quad (6.84)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную плоскость $(\bar{\sigma}, \varphi)$. В этой плоскости зависимость (6.83) при фиксированном значении μ изобразится некоторой кривой (см. рис. 6.43), а линии скольжения α и β в силу интегралов Генки (6.45) будут представлены системой ортогональных прямых, наклоненных к осям координат под углом $\pm \frac{\pi}{4}$.

Если, используя имеющиеся в нашем распоряжении данные, определить постоянные в интегралах Генки (выделить систему линий скольжения) и отобразить поле линий скольжения в плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$ вместе с границей, то можно найти $\bar{\sigma}$ и φ в любой точке контактной границы и пластической области.

Рассмотрим пример прессования полосы через клиновую матрицу с углом 2ϑ , на контактной поверхности которой задан коэффициент трения, равный μ . При определенной степени деформации (редукции) r конструкция поля линий скольжения имеет вид, показанный на рис. 6.44.

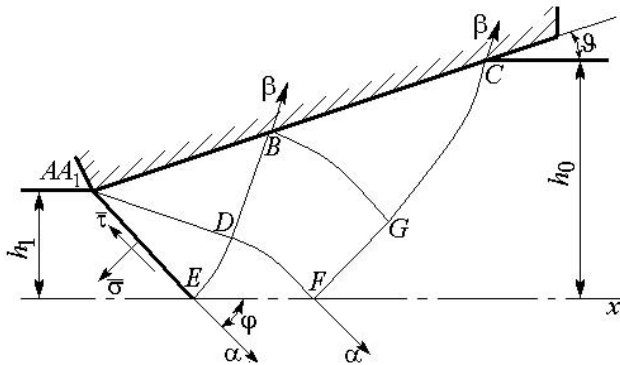


Рис. 6.44. Конструкция поля линий скольжения при прессовании полосы через клиновую матрицу

Вследствие того что на оси симметрии касательная компонента напряжения отсутствует,

$$\varphi_E = \varphi_F = -\frac{\pi}{4}.$$

Так как к материалу, вышедшему из зоны развитого пластического течения (левее AE), никаких сил не приложено, то

$$-\bar{\sigma}_{AE} l_{AE} \sin \varphi - \bar{\tau}_{AE} l_{AE} \cos \varphi = 0. \quad (6.85)$$

Так как $\bar{\tau}_{AE} = \frac{k}{2k} = 0,5$; $|\varphi| = \frac{\pi}{4}$, имеем $\bar{\sigma}_{AE} = -0,5 |\operatorname{ctg} \varphi| = -0,5$.

Таким образом, на основании рассмотрения поля линий скольжения устанавливаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_E = \varphi_A = -\frac{\pi}{4}; & \quad \bar{\sigma}_E = \bar{\sigma}_A = -0,5; \\ \varphi_F = \varphi_G = -\frac{\pi}{4}; & \quad \bar{\sigma}_F = \bar{\sigma}_G; \\ \varphi_D = \varphi_B; & \quad \bar{\sigma}_D = \bar{\sigma}_B; \\ \varphi_{A_1} = \varphi_D; & \quad \bar{\sigma}_{A_1} = \bar{\sigma}_D. \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Построение в плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$ начинается с нанесения кривой, описанной уравнением (6.83), отображающей контактную границу A_1BC , и прямой $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, отображающей осевую (рис. 6.45).

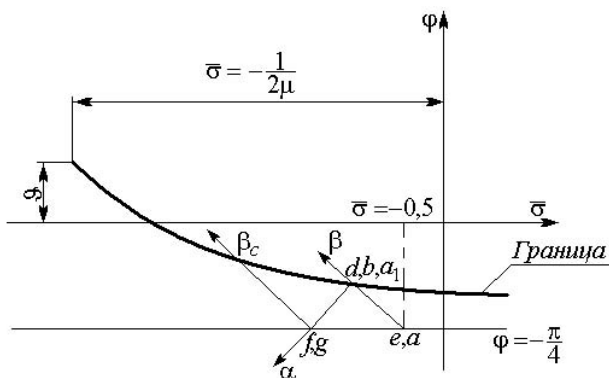


Рис. 6.45. Построение физической плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$

Соотношения (6.86) позволяют определить положение совпадающих друг с другом в плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$ точек a и e поля характеристик, с которых непосредственно осуществляется построение в этой плоскости.

Прямая, отображающая характеристику EDB семейства β , проходит через точку e под углом 45° к оси $\bar{\sigma}$, а точка ее пересечения с кривой, отображающей границу матрицы, однозначно определяет значения $\bar{\sigma}_D = \bar{\sigma}_{A_1} = \bar{\sigma}_B$; $\varphi_D = \varphi_{A_1} = \varphi_B$ (точки a_1, d, b).

Следует отметить, что отображение характеристики EDB (edb) направлено от точки e вверх, поскольку угол φ вдоль нее возрастает. Через точку (d, b, a_1) проходят отображения a_1df и bg α -характеристик ADF и BG под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси $\bar{\sigma}$. Направление отображений этих характеристик от точки (d, b, a_1) вниз обусловлено тем, что вдоль этих характеристик угол φ убывает. Пересечение отображения этих характеристик с прямой $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ($\varphi_F = \varphi_G = -\frac{\pi}{4}$) определяет положение точек f и g в плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$, и, следовательно, $\bar{\sigma}_F = \bar{\sigma}_G$. Отметим, что отображения характеристик BG и A_1DF в плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$ совпадают.

Через точку (f, g) проходит прямая (fgc) , отображающая характеристику FGC семейства β , под углом $-\frac{\pi}{4}$ к оси $\bar{\sigma}$. Пересечение ее с кривой, отображающей контактную границу, определяет значения $\bar{\sigma}_c$ и φ_c . Выполнив построение отображения сетки характеристик в плоскости $(\bar{\sigma}, \varphi)$ с определенным шагом $\Delta\varphi$ указанным выше способом, можно определить значения $\bar{\sigma}$ и φ во всех точках контактной границы, по этим значениям построить сетку характеристик в физической плоскости (x, y) и провести анализ напряженно-деформированного состояния материала при прессовании полосы через матрицу с непределельным трением.

Примеры решения задач

Задача 6.4.1. Определить давление, необходимое для плоского прессования через прямую матрицу ($\alpha = 90^\circ$) с обжатием $r = 0,5$.

Решение. Рассмотрим схему процесса и поле линий скольжения (рис. 6.46). Примем (в соответствии с экспериментом), что в углах матрицы образуются жесткие треугольные зоны. Считаем, что трение на контактной поверхности между заготовкой и контейнером отсутствует. Поле линий скольжений состоит из двух центрированных ве-ров, поскольку величина $r = 1/2$, $\angle AOB = \angle OA'B' = 90^\circ$, отрезки AO , $A'O$, $A'B'$, AB равны между собой.

Выясним, насколько предложенное поле линий скольжений удовлетворяет граничным условиям в напряжениях. Во-первых, из-за отсутствия трения линии AB и $A'B'$ должны подходить к стенке контейнера под углом 45° (как показано на рис. 6.46). Во-вторых, из-за принятых жестких зон линии AB и $A'B'$ должны быть линиями скольжения.

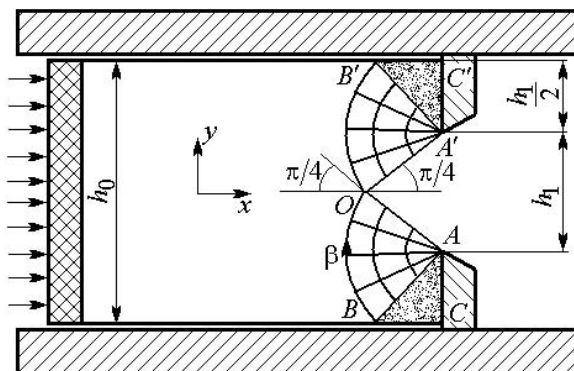


Рис. 6.46. Схема процесса плоского прессования через прямую матрицу и поле линий скольжения

Наконец, горизонтальная плоскость симметрии является главной плоскостью, на которой отсутствуют сдвиги, поэтому граничные линии веерообразных зон должны пересекать горизонтальную ось симметрии под углом 45° .

Таким образом, принятое поле линий скольжений удовлетворяет граничным условиям в напряжениях, распределение напряжений можно найти из соотношений вдоль характеристик (6.45).

Исходным для определения поля напряжений является то обстоятельство, что результирующая осевая сила, действующая на границе $A'OA$, отсутствует, если полоса справа от этой границы находится в равновесии. Рассмотрим сектор AOB (см. рис. 6.46). Согласно уравнениям (6.45), напряжения вдоль прямой линии AO и других

радиальных линий не изменяются. Поскольку сила на границе AO равна нулю, то вдоль нее напряжение $\sigma_x \big|_{AO} = 0$. Кроме того, поскольку α -линия AO пересекает ось под углом $\varphi_0 = -\pi/4$, то напряжение $\tau_{xy} = 0$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\sigma_x \big|_{AO} = 0; \quad \sigma_y \big|_{AO} = -2k; \quad \sigma_{AO} = \sigma_{\rho} = -k.$$

Согласно соотношениям, вдоль β -характеристики OB

$$\sigma_0 + 2k \varphi_0 = \sigma + 2k \varphi = \text{const.}$$

Отсюда

$$\sigma = \sigma_0 + 2k \varphi_0 - \varphi = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi \right).$$

Среднее давление на α -линии AB будет следующим:

$$\sigma_{AB} = \sigma_B = -k \left[1 + \frac{\pi}{2} + 2 \varphi_B \right] = -k \left[1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = -k (1 + \pi),$$

поскольку $\varphi_{AB} = \varphi_B = \frac{\pi}{4}$.

Компоненты тензора напряжений на AB найдем по формулам (6.41):

$$\sigma_x \big|_{AB} = \sigma_{AB} - k \sin 2\varphi \big|_{AB} = -k (1 + \pi);$$

$$\sigma_y \big|_{AB} = \sigma_{AB} + k \sin 2\varphi \big|_{AB} = -k \pi;$$

$$\tau_{xy} \big|_{AB} = k \cos 2\varphi \big|_{AB} = 0.$$

Сила прессования (на рис. 6.46 – слева) уравнивается противоположно направленной силой, которая передается через границу $BAOA'B'$. Поскольку результирующая сила через границу AOA' отсутствует, то уравнивающая сила создается за счет действия напряжения $\sigma_x \big|_{AB}$ на плоскостях матрицы AC и $A'C'$.

Поэтому

$$p h_0 = \sigma_{x \ AB} h_0 - h_1$$

или

$$p = r \sigma_{x \ AB},$$

где

$$r = 1 - \left(\frac{h_1}{h_0} \right).$$

Для процесса прессования (см. рис. 6.46), $r = 1/2$, поэтому давление p определяется по формуле

$$p = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.87)$$

Задача 6.4.2. Определить удельную силу волочения полосы t через гладкую матрицу под углом θ и давление на матрицу q при обжатии r .

Решение. Для поля (рис. 6.47) справедливо следующее геометрическое соотношение:

$$r = 1 - \frac{h_1}{h_0} = \frac{2 \sin \theta}{1 + 2 \sin \theta}.$$

В треугольных областях ABC и $A'B'C'$ имеет место равномерное напряженное состояние. Так как сила волочения равна продольной компоненте силы давления на матрицу, то

$$q (h_0 - h_1) = t h_1, \quad \text{или} \quad q = t \frac{1-r}{r}.$$

Учтем, что вдоль AO и OA' компоненты напряжений постоянны. В частности, $\sigma_{xAO} = t$, $\tau_{xy} = 0$. С другой стороны, в соответствии с выражениями (6.41) имеем

$$\sigma_{xA'O} = \sigma_0 - k \sin 2\varphi_0 = \sigma_0 + k,$$

так как

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

Определим среднее напряжение в точке B с использованием выражений (6.45):

$$\sigma_B = \sigma_0 + 2k \overbrace{(\varphi_B - \varphi_0)}^{\theta} = \sigma_0 - 2k\theta.$$

Известно, что нормальное давление на матрицу связано со средним напряжением и углом φ соотношением

$$q = -\sigma_n = -\sigma_B + k \sin 2 \overbrace{(\varphi_B - \psi_1)}^{\theta},$$

где ψ_1 – угол между нормалью к образующей матрицы и осью x .

В нашем случае на линии AC

$$\varphi_B = -\frac{\pi}{4} - \theta; \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

поэтому

$$q = -\sigma_B + k = -\sigma_0 + 2k\theta + k = -t + 2k \overbrace{(+\theta)}^{\theta}$$

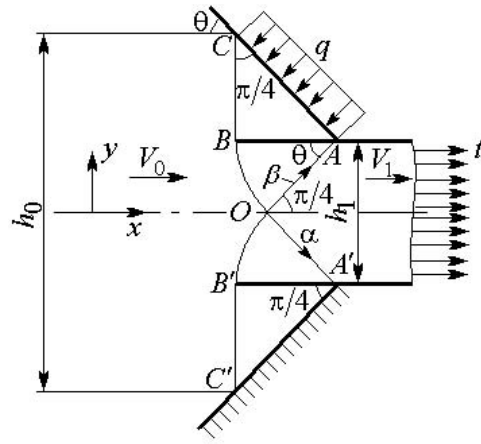


Рис. 6.47. Схема процесса волочения полосы через гладкую матрицу и поле линий скольжения

Учитывая, что $q = t \frac{1-r}{r}$, определяем значения $\frac{t}{2k}$ и $\frac{q}{2k}$:

$$\frac{t}{2k} = \frac{1+\theta}{1+2\sin\theta}; \quad \frac{q}{2k} = \frac{1+\theta}{1+2\sin\theta}.$$

Подставим в предыдущие выражения $r = \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$.

Окончательно получим

$$\frac{t}{2k} = \frac{2}{1+2\sin\theta} \frac{1+\theta}{1+2\sin\theta}; \quad \frac{q}{2k} = \frac{1+\theta}{1+2\sin\theta}. \quad (6.88)$$

Задача 6.4.3. Определить удельную силу обратного выдавливания

в условиях плоской деформации гладким инструментом с обжатием $r = 0,5$.

Решение. На рис. 6.48 показано поле линий скольжения, соответствующее данному случаю.

Так как на линии OB

$$\sigma_x = 0, \quad \varphi_B = -\frac{\pi}{4},$$

то

$$\sigma_B = -k.$$

Используя соотношение

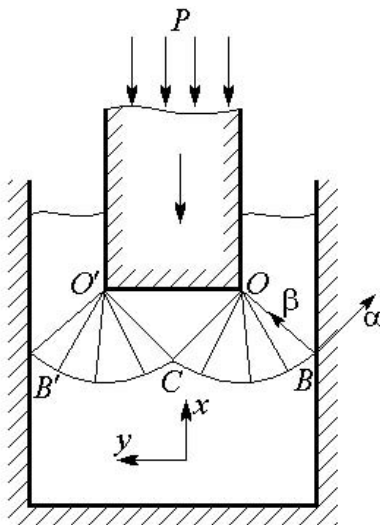


Рис. 6.48. Схема процесса обратного выдавливания в условиях плоской деформации гладким инструментом и поле линий скольжения

(6.45) вдоль α -линии и учитывая,

что

$$\varphi_c = -\frac{3}{4}\pi,$$

найдем σ_c :

$$\sigma_c = \sigma_B - 2k \varphi_B - \varphi_c = -k(1 + \pi).$$

На основании формул (6.41) имеем

$$\sigma_{xc} = \sigma_c - k \sin 2\varphi_c = -k(1 + \pi) - k = -2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда удельная сила процесса

$$q = -\sigma_{xc} = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Задания для самоконтроля

1. Каковы возможности применения метода линий скольжения (характеристик)?
2. Изложите сущность метода линий скольжения (характеристик).
3. Приведите примеры процессов обработки металлов давлением, когда реализуется плоская деформация.
4. Перечислите свойства линий скольжения как физических линий.
5. Запишите выражения для определения компонент напряжений через среднее напряжение и угол между α -линией скольжения и осью x .
6. Дайте определение характеристики системы уравнений равновесия и приведите уравнения характеристик и соотношения между средним напряжением σ и углом α – характеристики с осью x .

7. Перечислите основные свойства линий скольжения как характеристических линий.

8. Каким образом формулируются граничные условия на контактных границах заготовки и инструмента для среднего напряжения σ и угла φ ?

9. Опишите постановку трех краевых задач: Коши, Римана и смешанной – при анализе напряженного и деформированного состояния плоской деформации.

10. Изложите сущность численных методов решения краевых задач.

11. В чем заключается постановка задачи по определению скоростей течения материала при плоской деформации?

12. Какими свойствами обладают поля скоростей и как они используются при построении годографов скоростей?

13. Опишите содержание этапов решения задач плоского пластического течения.

14. Изложите порядок оценки деформированного состояния при стационарном плоском течении материала при обработке металлов давлением.

15. Опишите решение вопроса по распределению напряжений, сил и кинематику течения материала при волочении полосы через гладкую клиновую матрицу.

16. Каким образом можно учесть упрочнение и силы трения на матрице при определении силы волочения?

17. Изобразите поле линий скольжения при внедрении плоского гладкого штампа в полубесконечную среду и опишите подход к определению удельной силы.

18. Приведите поле линий скольжения при плоской осадке полосы шероховатыми плитами и покажите, каким образом можно определить величины напряжений и силовые режимы.

19. Опишите подход к решению задач плоского пластического течения при непределельном трении на контактных границах.

20. Каким образом строится вспомогательная плоскость и как она используется при определении напряжений на примере прессования полосы через клиновую матрицу, на контактной поверхности которой задан коэффициент трения?

6.5. Метод баланса работ (мощности)

Основное энергетическое уравнение. Рассмотрим некоторое тело, занимающее объем W , ограниченный поверхностью $s = s_F + s_V$. На части поверхности тела s_F заданы силы на единицу поверхности \bar{F}_n с проекциями на оси координат X_n, Y_n, Z_n , которые кратко обозначим X_{ni} . На части поверхности s_V задана скорость \bar{v}_0 с составляющими на оси координат v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} или v_{0i} . Предположим, что объемные силы отсутствуют.

Рассмотрим поле напряжений $\sigma_{ij} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (6.89')$$

заданным граничным условиям на поверхности тела s_F

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= X_n; \\ \tau_{yx} l + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n &= Y_n; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_{zz} n &= Z_n, \end{aligned} \right\} \quad (6.90)$$

или

$$\sigma_{ij}n_j = X_{ni}, \quad (6.90')$$

и не превосходящих предела текучести

$$T \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \leq k. \quad (6.91)$$

Сокращенная запись неравенства (6.91) имеет вид

$$T \equiv \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \leq k, \quad (6.91')$$

где s_{ij} – компоненты девиатора напряжений.

В дальнейшем такое поле напряжений будем называть статически допустимым. Рассмотрим непрерывное поле скорости $\bar{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, или \mathbf{v} , удовлетворяющее условию несжимаемости и заданным граничным условиям в скоростях на S_V :

$$v_i = v_{oi}. \quad (6.92)$$

Этому полю скоростей соответствуют компоненты скорости деформации:

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \dot{e}_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \dot{e}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \dot{e}_{xy} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); & \dot{e}_{yz} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \\ \dot{e}_{zx} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

В сокращенной записи:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.93')$$

Это поле скоростей течения называется кинематически возможным. Введенные поля напряжений и скоростей в остальном произвольны и не связаны между собой.

Конфигурация тела либо мало отличается от первоначальной, либо характеризует известное текущее состояние.

Вычислим мощность внешних сил, приложенных к деформируемому телу:

$$\begin{aligned} N_e = \iint_s (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) ds = \iint_s [\sigma_{xx} l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n] v_x + \\ + (\tau_{yx} l + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n) v_y + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_{zz} n) v_z ds. \end{aligned} \quad (6.94)$$

После перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} N_e = \iint_s [\sigma_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z] \underline{\hat{l}} + [\tau_{yx} v_x + \sigma_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z] \underline{\hat{m}} + \\ + [\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \sigma_{zz} v_z] \underline{\hat{n}} ds. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Воспользуемся формулой преобразования поверхностного интеграла в объемный Гаусса – Остроградского:

$$\begin{aligned} \iint_s [P \underline{\hat{e}}_{,y,z} \underline{\hat{l}} + Q \underline{\hat{e}}_{,y,z} \underline{\hat{m}} + R \underline{\hat{e}}_{,y,z} \underline{\hat{n}}] ds = \\ = \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dW. \end{aligned} \quad (6.96)$$

После использования преобразования поверхностного интеграла (6.95) в объемный Гаусса – Остроградского, дифференциальных уравнений равновесия (6.89) и соотношений (6.93) запишем (6.94) в виде

$$N_{\epsilon} = \iiint_W \left(\sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yx} \dot{\gamma}_{yx} + \tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} \right) dW. \quad (6.97)$$

Указанные выше преобразования в сокращенной тензорной записи будут иметь вид

$$\begin{aligned} N_{\epsilon} &= \int_s X_{ni} v_i ds = \int_s \sigma_{ij} n_j v_i ds = \int_s \sigma_{ij} v_j n_i ds = \int_W v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dW + \int_W \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dW = \\ &= \int_W \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dW. \end{aligned} \quad (6.97')$$

Для действительных полей напряжений σ_{ij} , скоростей течения v_i и скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ напряжения и скорости деформаций связаны соотношениями Сен-Венана – Мизеса и удовлетворяют условиям равновесия и сплошности.

В этом случае соотношение (6.97) указывает на то, что мощность внешних сил равна мощности пластической деформации:

$$N_{\epsilon} = N_q. \quad (6.97'')$$

Выражение (6.97'') известно как основное энергетическое уравнение. В теории пластичности доказывается, что, во-первых, это уравнение обобщается на случай, когда тело имеет жесткие области, во-вторых, на случай разрывных полей напряжений.

При наличии поверхностей разрыва скоростей s_p основное энергетическое уравнение (6.97') следует записать в виде

$$\int_s X_{ni} v_i ds = \int_W \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dW + \int_{s_p} \tau \llbracket \underline{d} \rrbracket ds_p, \quad (6.98)$$

где τ – касательное напряжение на поверхности разрыва скорости (для действительного поля напряжений и скоростей $\tau = k$); $[\bar{v}]$ – скачок тангенциальной составляющей скорости.

В случае плоского напряженного состояния возможен также разрыв нормальной составляющей скорости на линии разрыва. В связи с этим вместо второго слагаемого в правую часть основного уравнения (6.98) следует включить величину

$$kh \int [\bar{v}] \sqrt{1 + 3 \sin^2 \gamma} dl_p, \quad (6.99)$$

где dl_p – элемент линии разрыва; $[\bar{v}]$ – величина вектора разрыва скорости; γ – угол наклона вектора разрыва скорости к линии l_p ; h – толщина пластинки.

При $\gamma = \frac{\pi}{2}$ относительное скольжение отсутствует и происходит лишь утонение заготовки; при $\gamma = 0$ происходит только проскальзывание. Для действительного поля скоростей в силу справедливости уравнений Сен-Венана – Мизеса в соотношениях (6.97') и (6.98) следует принять

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_i \dot{\epsilon}_i = TN, \quad (*)$$

где $\sigma_i, T, \dot{\epsilon}_i, N$ – соответственно интенсивности нормальных и касательных напряжений и скоростей деформации.

В случае неупрочняющегося материала $\sigma_i = \sigma_s, T = k$, где σ_s и k – константы материала. Если при выводе основного

энергетического соотношения (6.97') вместо поля скоростей v_i рассматривать действительное поле перемещений u_i , то нетрудно показать, что

$$\int_s X_{ni} u_i ds = \int_w \sigma_{ij} e_{ij} dW \quad (6.100)$$

или

$$A_g = A_q. \quad (6.100')$$

Иными словами, при пластической деформации работа внешних сил A_g на соответствующих перемещениях равна работе внутренних сил A_q .

Работа внешних сил A_g включает в себя работу активных деформирующих сил A_a и работу сил трения A_t , которая по знаку противоположна работе активных сил, поэтому

$$A_a - A_t = A_q. \quad (6.101)$$

Это – основное уравнение метода баланса работ.

Следует заметить, что для действительного поля перемещений в силу справедливости уравнений Гука – Генки в соотношении следует принять аналогичное (*)

$$\sigma_{ij} e_{ij} = \sigma_i e_i = T\Gamma,$$

где e_i , Γ – соответственно интенсивности нормальных и сдвиговых деформаций. Если материал не упрочняется, то $\sigma_i = \sigma_s$, $T = k$,

где σ_s и k – константы. При наличии поверхностей разрывов перемещений следует учитывать дополнительную работу деформации, затрачиваемую на этих поверхностях. В этом случае справедливы соотношения, аналогичные (6.98) и (6.99).

Работа сил контактного трения в общем случае представится следующим образом:

$$A_t = \tau_k \iint_s \sqrt{\sum_i u_i^2} ds.$$

Уравнение (6.101) переписется в виде

$$A_a = \iiint_W \sigma_i e_i dW + \tau_k \iint_s \sqrt{\sum_i u_i^2} ds. \quad (6.101')$$

Во многих случаях работу активных сил можно рассчитать как произведение полной силы на перемещение инструмента: $A_a = P\Delta h$ (Δh – перемещение инструмента). Тогда полная сила определится по выражению

$$P = \frac{1}{\Delta h} \left[\iiint_W \sigma_i e_i dW + \tau_k \iint_s \sqrt{\sum_i u_i^2} ds \right].$$

Задача об осадке цилиндрической заготовки. Определим силу P , необходимую для начала осадки цилиндрической заготовки

диаметром d и высотой h . Предполагаем, что процесс осадки осуществляется при температуре горячей обработки, а на контактных поверхностях касательное напряжение принимает постоянное значение ($\tau_k = \text{const}$).

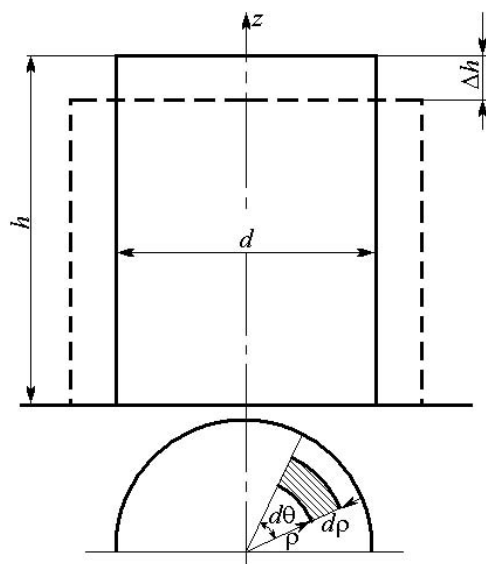
Пусть в результате однородной деформации цилиндра его высота уменьшится на величину Δh (рис. 6.49).

Работа внешних активных сил равна:

$$A_a = P\Delta h. \quad (6.102)$$

Работа деформации определяется как

$$A_q = \sigma_s \iiint e_i \rho d\rho d\theta dz. \quad (6.103)$$



Работа сил трения на двух торцах:

$$A_t = 2\tau_k \int_0^{2\pi} \int_0^{0,5d} u_\rho \rho d\rho d\theta, \quad (6.104)$$

где u_ρ – перемещение материала в радиальном направлении.

Вычисление интегралов (6.103) и (6.104) может быть выполнено после определения функций e_i и u_ρ .

В силу предположения об однородности деформации компонента деформации e_z постоянна:

РИС. 6.49. СХЕМА К АНАЛИЗУ ОСАДКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ

$$e_z = -\frac{\Delta h}{h} = \text{const.} \quad (6.105)$$

Условие несжимаемости материала в цилиндрической системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + e_z = 0. \quad (6.106)$$

Перепишем его как

$$\frac{\partial (\rho u_\rho)}{\partial \rho} - \frac{\Delta h \rho}{h} = 0.$$

После интегрирования будем иметь

$$u_\rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} \rho + \frac{f(\rho)}{\rho}.$$

При $\rho = 0$ $u_\rho = 0$, поэтому $f(\rho) = 0$.

Таким образом,

$$u_\rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} \rho; \quad e_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h};$$

$$e_\theta = \frac{u_\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}; \quad e_i = \frac{\Delta h}{h}.$$

Подставим найденные величины в соотношение (6.101):

$$P \Delta h = \sigma_s \frac{\Delta h}{h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{d}} \rho d\rho d\theta dz + \tau_k \frac{\Delta h}{h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho^2 d\rho d\theta,$$

отсюда

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \left(\sigma_s + \frac{1}{3} \tau_k \frac{d}{h} \right)$$

или

$$p = \sigma_s + \frac{1}{3} \tau_k \frac{d}{h}. \quad (6.107)$$

Формула (6.107) известна как формула Зибеля.

Метод баланса работ деформации особенно полезен в тех случаях, когда реализуется однородная деформация: перемещения, скорости перемещений оказываются линейными функциями, их легко получить из граничных условий на контактной поверхности заготовки и условия постоянства объема. В этом заключается основная трудность использования данного метода. В другом случае необходимо применить вариационный метод, который, в отличие от метода работ, позволяет определить не только полную и удельную силу, но и распределение напряжений и деформаций по объему тела, а также форму тела после деформации с учетом неравномерности деформаций.

Задания для самоконтроля

1. Дайте понятие статически допустимого поля напряжений.
2. Каким условиям удовлетворяет кинематически возможное поле скоростей?

3. Напишите основное энергетическое уравнение (баланса мощности и работ):

а) при непрерывном поле скоростей и деформаций;

б) при разрывном поле скоростей и деформаций.

4. Приведите основное энергетическое уравнение (баланса мощности и работ) в случае плоской деформации:

а) при непрерывном поле скоростей и деформаций;

б) при разрывном поле скоростей и деформаций.

5. Напишите основное энергетическое уравнение (баланса мощности и работ) в случае плоского напряженного состояния заготовки:

а) при непрерывном поле скоростей и деформаций;

б) при разрывном поле скоростей и деформаций.

6. Сущность подхода к определению силовых режимов осадки цилиндрической заготовки по методу баланса работ.

6.6. Экстремальные принципы жесткопластического тела. Верхние и нижние оценки силы деформирования

Минимальные свойства действительного поля скоростей и максимальные свойства действительного напряженного состояния. Пусть σ_{ij} , \dot{e}_{ij} , v_i – действительные значения компонент тензора напряжений, тензора скоростей деформаций и вектора скоростей перемещений. При этом напряжения и скорости деформаций связаны соотношениями Сен-Венана – Мизеса и удовлетворяют условиям равновесия и сплошности. По отношению к этому действительному состоянию справедливо основное энергетическое уравнение (6.98).

Наряду с действительным состоянием рассмотрим другое, кинематически возможное поле скоростей v'_i . Этому полю скоростей по формулам Коши (6.93') отвечают скорости деформаций e'_{ij} , которым согласно соотношениям Сен-Венана – Мизеса соответствует

девиатор напряжений s'_i . Напряжениям s'_{ij} по формулам (6.90) соответствуют некоторые поверхностные силы X'_{ni} (с точностью до среднего напряжения). Пусть кинематически возможное поле скоростей v'_i разрывно на некоторых поверхностях s'_p .

Сопоставим действительное поле скоростей v_i с кинематически возможным v'_i . По отношению к действительному распределению напряжений σ_{ij} и кинематически возможному полю скоростей v'_i основное энергетическое уравнение (6.98) применимо и переписывается в следующем виде:

$$\int_W \sigma_{ij} \dot{e}'_{ij} dW - \int_s X_{ni} v'_i ds + \int_{s'_p} \tau \bar{d}s'_p = 0. \quad (6.108)$$

Тензоры напряжений и скоростей деформаций σ_{ij} , \dot{e}_{ij} , \dot{e}'_{ij} можно представить векторами в девятимерном пространстве напряжений, причем в силу соотношений Сен-Венана – Мизеса векторы σ_{ij} и \dot{e}_{ij} параллельны, и их скалярное произведение $\sigma_{ij} \dot{e}_{ij}$ будет равно произведению модулей:

$$\sigma_{ij} \dot{e}_{ij} = s_{ij} \dot{e}_{ij} = TH = kH. \quad (6.109)$$

Выражение $\sigma_{ij} \dot{e}'_{ij}$ представляет собой произведение непараллельных векторов:

$$\sigma_{ij} \dot{e}'_{ij} = s_{ij} \dot{e}'_{ij} \leq TH' = kH'. \quad (6.110)$$

Знак равенства выполняется только в том случае, если кинематически возможное поле скоростей совпадает с действительным.

Подставляя в уравнение (6.108) вместо произведения $\sigma_{ij}\dot{e}'_{ij}$ большую величину kH' , получаем

$$k \int_W H' dW - \int_s X_{ni} v'_i ds + \int_{s'_p} \tau \bar{d}s'_p \geq 0. \quad (6.111)$$

Следует отметить, что $\tau \bar{d}s'_p \leq k \bar{d}s'_p$. Поэтому такая замена еще более усилит неравенство (6.111).

Для действительного поля скоростей выражение, аналогичное неравенству (6.111), равно нулю. Следовательно,

$$k \int_W H dW - \int_{s_F} X_{ni} v_i ds_p + k \int_{s_p} \bar{d}s_p \leq k \int_W H' dW - \int_{s_F} X_{ni} v'_i ds + k \int_{s'_p} \bar{d}s'_p. \quad (6.112)$$

Равенство выполняется только в том случае, когда кинематически возможное поле v'_i совпадает с действительным v_i .

Выражение

$$N_q = k \int_W H dW - \int_{s_F} X_{ni} v_i ds + k \int_{s_p} \bar{d}s \quad (6.113)$$

называют полной мощностью деформируемого тела.

Итак, первый экстремальный принцип теории пластичности жесткопластического тела формулируется следующим образом: полная мощность достигает абсолютного минимума для действительного поля скоростей.

Левая часть выражения (6.113) определяет мощность внешних сил на поверхности с заданными граничными условиями для скоростей

$$\int_{S_v} X_{ni} v_{oi} ds.$$

Поэтому среди всех кинематически допустимых полей скоростей течения действительным полем будет то, для которого мощность внешних сил на заданных скоростях примет минимальное значение.

Если при определении внешних сил, необходимых для осуществления процесса пластического формоизменения, было использовано кинематически допустимое поле скоростей (не были удовлетворены статические условия, например, дифференциальные уравнения равновесия), то в этом случае вычисленная мощность внешних сил больше мощности сил действительного поля скоростей, т.е. получаем верхнюю оценку силы процесса.

Аналогичным способом доказывается второй экстремальный принцип теории пластичности жесткопластического тела, устанавливающий максимальные свойства действительного напряженного состояния: мощность действительных поверхностных сил на заданных скоростях больше мощности, развиваемой поверхностными силами, соответствующими любой другой статически возможной системе напряжений текучести.

Второй экстремальный принцип указывает, что необходимая для пластического формоизменения мощность поверхностных сил, определенная с помощью произвольно выбранного статически допустимого, т.е. удовлетворяющего дифференциальным уравнениям равновесия внутри тела и граничным условиям на его поверхности, поля напряжений в состоянии текучести материала на действительных скоростях всегда будет меньше действительной мощности формоизменения.

Использование кинематически допустимых полей скоростей и статически допустимых полей напряжений позволяет получить верхнюю и нижнюю оценки мощности поверхностных сил пластического формоизменения.

Из нескольких возможных вариантов кинематически допустимых полей скоростей лучшим следует считать тот, который приводит к меньшим значениям нагрузки, необходимой для формоизменения, а из нескольких возможных вариантов статически допустимых полей напряжений – тот, который приводит к наибольшим значениям нагрузки.

Первый экстремальный принцип теории пластичности используется в практике вычисления сил процессов пластического формоизменения в силу своей простоты и того обстоятельства, что вычисленная сила больше действительной и позволяет более правильно выбирать параметры технологического оборудования.

Второй экстремальный принцип теории пластичности не нашел широкого применения в практике расчета силовых параметров процессов прежде всего в силу большой громоздкости вычислений.

Рассмотрение допустимого поля перемещений u_i , вместо кинематически возможного поля скоростей v_i , приводит к экстремальным принципам теории жесткопластического тела в другой формулировке. В частности, первый экстремальный принцип формулируется следующим образом: при пластической деформации действительным перемещениям соответствует минимум полной энергии деформируемого тела.

Полная энергия деформируемого тела \mathcal{E}_q определяется по выражению

$$\mathcal{E}_q = k \int_W \Gamma dW - \int_{s_F} X_{ni} u_i ds + k \int_{s_p} \bar{l} ds. \quad (6.114)$$

Указанный выше экстремальный принцип может быть непосредственно обнаружен путем использования вариационного уравнения Лагранжа и исследования знака второй вариации полной энергии деформируемого тела.

В процессах обработки металлов давлением обычно известно движение деформирующего инструмента и его конфигурация. Вследствие этого можно считать, что задана составляющая перемещения частиц металла, находящихся на контактной поверхности, перпендикулярная к поверхности инструмента u_n . Из внешних сил, действующих со стороны инструмента на металл, имеют место силы нормального давления p_n и силы трения τ . Силы трения действуют в плоскости, касательной к поверхности инструмента, и направлены в сторону, противоположную скольжению металла по поверхности инструмента u_τ . Поэтому

$$\int_{S_F} X_{ni} u_i ds = - \int_{S_F} \tau u_\tau ds.$$

Это выражение следует учитывать в расчетах.

Метод верхней оценки сил пластического формоизменения.

Данный метод основан на первом экстремальном принципе жесткопластического тела, устанавливающим минимальные свойства действительного поля скоростей. Относительная простота этого метода обусловила его широкое применение для анализа силовых параметров операций обработки металлов давлением.

Сущность метода состоит в выборе кинематически допустимого поля скоростей, удовлетворяющего граничным условиям в скоростях и условию несжимаемости материала, и определении с его помощью

величины мощности внешних сил и сил, необходимых для пластического формоизменения.

Использование модели жесткопластического тела приводит к тому, что выбираемое кинематически возможное поле скоростей неизбежно содержит разрывы скоростей, по крайней мере, на поверхностях, разделяющих жесткие и пластические области деформируемого тела. Вследствие этого применение разрывных полей скоростей в последнее время получило широкое распространение для построения верхнеоценочных решений.

Деформируемое тело (его пластическая область) разбивается на блоки, внутри каждого из которых задается удовлетворяющее граничным условиям и условию несжимаемости распределение скоростей.

Значительное упрощение может быть достигнуто при анализе задач плоской деформации, когда можно осуществить разбиение деформируемого тела на жесткие блоки и рассматривать лишь их относительные перемещения, т.е. предположить, что деформация внутри блоков не происходит и имеет место только на линиях разрыва скоростей – на границах блоков. Пренебрежение деформациями внутри блоков оправдывается экспериментально установленным фактом, что в случае плоской деформации доля деформации в зонах раздела жестких и пластических областей, т.е. на линиях разрыва скоростей, достигает 80 % от суммарной накопленной деформации. Следует заметить, что скорости жестких блоков должны удовлетворять граничным условиям и условию несжимаемости.

Такой подход позволяет определить мощность плоского формоизменения как сумму мощностей касательных напряжений на линиях разрыва скорости:

$$N_q = \sum l_{ij} \tau_{ij} [v_{ij}], \quad (6.115)$$

где l_{ij} , τ_{ij} , $[v_{ij}]$ – соответственно длина линии разрыва скорости, величина касательного напряжения и величина разрыва касательной составляющей скорости на границе i -го и j -го блоков.

Контактные границы инструмента и материала также рассматриваются как линии разрыва скорости, на которых действует касательное напряжение $\tau_k = m_s k$, где m_s – коэффициент прандтлева трения, который изменяется в пределах $0 \leq m \leq 1$. В дальнейшем принимается, что на границах блоков (кроме контактных границ) действует максимальное касательное напряжение $\tau_{ij} = k$. Значения величин l_{ij} и $[v_{ij}]$ полностью определяются выбором кинематически возможного поля.

Приравнивая мощность пластического формоизменения к мощности внешней нагрузки, нетрудно установить потребную для деформации силу.

Верхняя оценка сил плоского формоизменения в клиновых матрицах. *Выбор кинематически возможного поля скоростей.* Кинематически возможное поле скоростей, с помощью которого может быть произведен расчет необходимой для формоизменения силы, должно удовлетворять условию несжимаемости материала и граничным условиям в скоростях.

Последние условия могут быть сформулированы следующим образом:

а) материал, входящий в матрицу, движется относительно ее со скоростью v_1 в направлении, совпадающем с осью симметрии матрицы;

б) в зоне, прилегающей к матрице, материал движется параллельно контактной границе (условие непроницаемости контура матрицы);

в) материал, выходящий из матрицы, движется в направлении, совпадающем с осью симметрии матрицы.

Если ширина полосы на входе в матрицу равна h_0 , а после выхода из матрицы – h_1 , то условие несжимаемости требует, чтобы скорость материала, выходящего из матрицы,

$$v_3 = v_1 \frac{h_0}{h_1}.$$

Существует достаточно много различных кинематически возможных полей скоростей, удовлетворяющих этим условиям. Так, нетрудно убедиться, что разрывные поля скоростей, представленные на рис. 6.50, *а*, *б*, удовлетворяют всем необходимым условиям.

При отсутствии разрыва нормальной компоненты скорости в результате перехода линии разрыва скорости, линии годографа скоростей, изображающие разрывы скоростей $[v_{ij}]$, параллельны линиям разрыва l_{ij} . Каждому фиксированному положению точек *A* и *B* разрывных полей скоростей будут соответствовать свои вполне

определенные значения мощности пластического формоизменения и необходимой внешней нагрузки.

Для иллюстрации применения метода рассмотрим самую простую конструкцию разрывного поля скоростей (рис. 6.50, в).

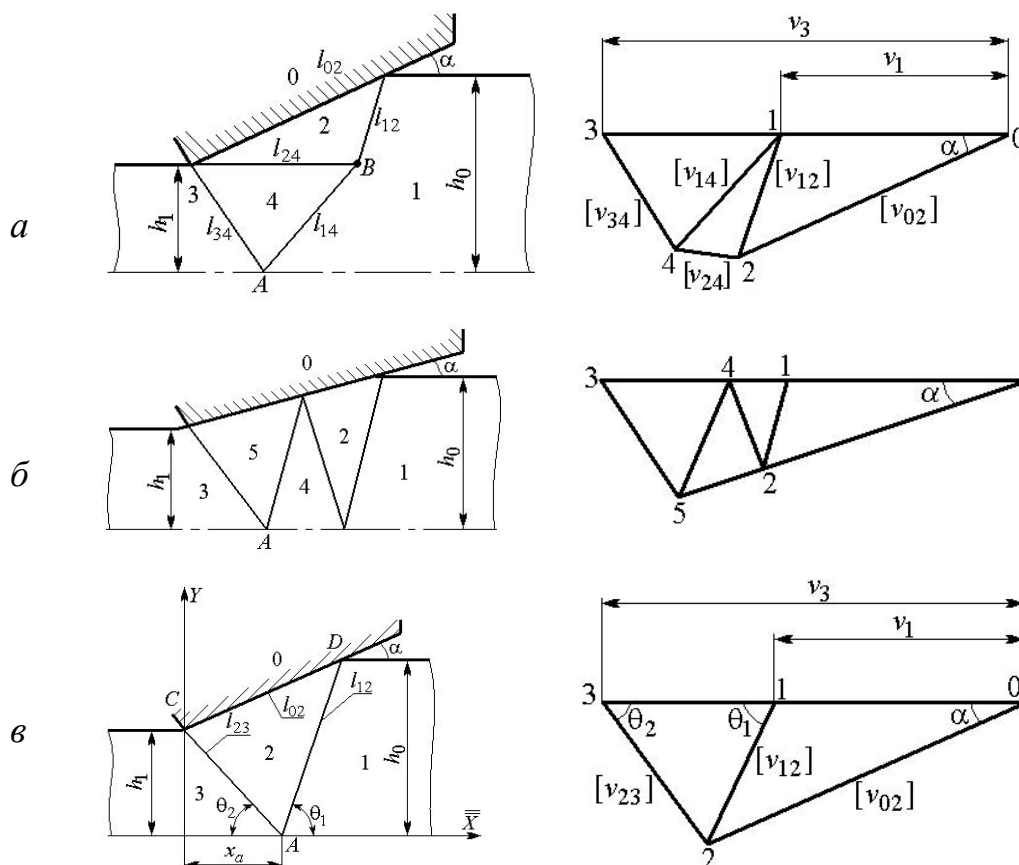


Рис. 6.50. Схема плоского формоизменения полосы в клиновой матрице

Определение силы формоизменения. Найдем мощность внешней нагрузки (удельную силу p) для осуществления процесса плоского формоизменения. В случае волочения полосы нагрузка прикладывается к части материала, выходящего из матрицы:

$$N_g = p h_1 v_3;$$

в случае прессования – к части материала, входящего в матрицу:

$$N'_g = p' h_0 v_1.$$

Так как
$$v_3 = v_1 \frac{h_0}{h_1},$$

то $N_g = N'_g$, $p = p'$, т.е. удельная сила процессов плоского формоизменения не зависит от схемы приложения нагрузки.

Определим мощность внутренних сил (мощность пластического формоизменения), которая складывается из мощностей, развиваемых касательными напряжениями на линиях разрыва скоростей, поскольку внутри блоков отсутствуют деформации:

$$N_q = \sum \tau_{ij} l_{ij} = k l_{12} + k l_{23} + m_s k l_{02}.$$

Приравнивая мощность внешних сил к мощности пластического формоизменения, находим выражения для определения потребной удельной силы процесса:

$$p = \frac{1}{h_0 v_1} (k l_{12} + k l_{23} + m_s k l_{02}). \quad (6.116)$$

Входящие в эту формулу значения длин линий разрыва скорости и величин разрывов скорости можно выразить следующим образом (см. рис. 6.50, в):

$$\left. \begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{h_0^2 + [h_0 - h_1 \operatorname{ctg} \alpha - x_A]^2}; & l_{23} &= \sqrt{h_1^2 + x_A^2}; \\ l_{02} &= \frac{h_0 - h_1}{\sin \alpha}; & v_{12} &= \frac{v_1 \sin \alpha}{\sin \theta_1 - \alpha}; \\ v_{23} &= \frac{v_1 \sin \alpha \sin \theta_1}{\sin \theta_1 - \alpha \sin \theta_2}; & v_{02} &= \frac{v_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_1 - \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (6.117)$$

$$\text{где } \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{h_0}{h_0 - h_1 \operatorname{ctg} \alpha - x_A}; \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{h_1}{x_A}.$$

При заданных значениях h_0, h_1, m, α в приведенные выражения входит только один параметр x_A , от величины которого зависит значение p . Этот параметр необходимо выбрать таким образом, чтобы значение p стало минимальным.

Минимизация оценки удельной силы. Для определения значения параметра x_A , которому будет соответствовать минимальная величина удельной силы p , необходимо найти минимум функции $p = p(x_A)$, т.е. решить уравнение

$$\frac{dp}{dx_A} = 0,$$

где p определяется выражением (6.116).

Решение этого уравнения и подстановка найденного значения x_A в выражение (6.116) приводит к формуле для определения удельной силы:

$$p = 2k \left\{ \frac{h_0/h_1 + 1}{\sqrt{h_0/h_1}} \sqrt{1 + m_s \frac{h_0/h_1 - 1}{h_0/h_1 + 1}} \operatorname{cosec} \alpha - 2 \operatorname{ctg} \alpha \right\}. \quad (6.118)$$

Полученное выражение дает лучшую верхнюю оценку удельной силы для выбранной конструкции разрывного поля скоростей. Следует указать и на возможность дальнейшего улучшения верхней оценки удельной силы путем использования более сложных конструкций разрывного поля. Например, в области малых степеней деформаций и достаточно больших углов матрицы верхнюю оценку можно улучшить, применяя конструкцию поля (см. рис. 6.50, *a*), а в области больших обжатий и малых углов матрицы α улучшение верхней оценки удельной силы достигается рассмотрением конструкции поля (см. рис. 6.50, *б*), содержащей несколько областей, прилежащих к контактной границе.

Выбор матрицы, обеспечивающей минимальную силу формоизменения. Анализ полученной формулы для определения удельной силы процесса (6.118) позволяет установить угол матрицы, обеспечи-вающей его минимальное значение для пластического формоизменения при заданных значениях h_0 , h_1 и m . Значение такого угла определяется из решения уравнения $\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0$, где p находится из выраже-
ния (6.118).

Решение этого уравнения приводит к следующей зависимости для определения угла матрицы, обеспечивающего минимальную удельную силу формоизменения:

$$\alpha = \arccos \frac{2\sqrt{h_0/h_1}}{\left(\frac{h_0}{h_1} + 1 \right) \sqrt{1 + m_s \frac{h_0/h_1 - 1}{h_0/h_1 + 1}}}.$$

Следует заметить, что угол матрицы, обеспечивающий минимум силы процесса формоизменения, существенно зависит от степени деформации и условий контактного трения и увеличивается с их ростом.

Сопоставление полученных приближенных результатов анализа силовых параметров с экспериментальными данными показывает приемлемое количественное соответствие.

Особенно целесообразно получение верхнеоценочных решений в тех случаях, когда точное решение задачи неизвестно.

Метод Ритца. *Сущность метода.* Первый экстремальный принцип теории пластичности жесткопластического тела позволяет использовать элементы вариационного исчисления при анализе силовых параметров процессов обработки металлов давлением. При этом сущность решения задачи сводится к отысканию таких функций для перемещений (скоростей течения), которые сообщили бы функционалу полной энергии (мощности) деформируемого тела минимальное значение.

Широкое применение в практике расчетов получил прямой метод Ритца. Сущность этого метода заключается в том, что искомые минимизирующие функции предварительно задаются в виде бесконечных рядов, состоящих из некоторых известных функций, удовлетворяющих физическим условиям данной задачи (хотя бы некоторым граничным условиям в переменных) и получивших название «подходящих», и неизвестных варьируемых коэффициентов (параметров), определяемых из принципа минимума полной энергии (мощности) пластической деформации. Согласно методу Ритца, искомые функции для компонент перемещений (скоростей) запишем как

$$\begin{aligned}
 u_x(x) &= \sum a_i f_i(x, y, z); & u_y(y) &= \sum b_i \varphi_i(x, y, z); \\
 u_z(z) &= \sum c_i \psi_i(x, y, z), & &
 \end{aligned}
 \tag{6.119}$$

где f_i, φ_i, ψ_i – «подходящие» функции, a_i, b_i, c_i – варьируемые параметры.

Далее определяются компоненты деформаций e_{ij} (скорость деформации \dot{e}_{ij}), интенсивность деформации e_i (интенсивность скорости деформации \dot{e}_i), полная энергия \mathcal{E}_q (мощность N_q) деформации.

Выражение для полной энергии (мощности) деформации зависит от формы и размеров деформируемого тела, свойств металла, условий контактного трения и варьируемых параметров a_i, b_i, c_i .

Согласно принципу минимума полной энергии (мощности) деформации, поле перемещений (скоростей) должно быть таким, чтобы полная энергия (мощность) деформации была минимальной. Поэтому варьируемые параметры определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_q}{\partial a_i} \left(\frac{\partial N_q}{\partial a_i} \right) = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_q}{\partial b_i} \left(\frac{\partial N_q}{\partial b_i} \right) = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_q}{\partial c_i} \left(\frac{\partial N_q}{\partial c_i} \right) = 0. \quad (6.120)$$

Количество получаемых при этом алгебраических уравнений всегда равно количеству искомых параметров a_i, b_i, c_i . Вычислив полную энергию (мощность) деформирования, можно определить силу процесса из условия равенства ее работы (мощности) внешним активным силам.

Метод Ритца использовали в своих работах И.Я. Тарановский, А.А. Поздеев, В.Л. Колмогоров, О.А. Ганаго и др.

Плоская осадка полосы. Рассмотрим осадку полосы шириной b , высотой h и длиной l между верхней подвижной и нижней неподвижной плитами. Длина заготовки $l \gg b$, т.е. задача плоская. Задача решается в следующем порядке:

1. Выбор подходящей функции.

В поперечном сечении боковая поверхность заготовки принимает форму, близкую параболической. Исходя из этих соображений и граничных условий, можно принять

$$v_x = \frac{v_0}{h} x + ax \left(1 - \frac{x^2}{3h^2} \right) \left(1 - \frac{3z^2}{h^2} \right). \quad (6.121)$$

Здесь первый член найден из условия равномерной деформации, второй – содержит варьируемый параметр a . Если $a = 0$, то $v_x = c$ при любых значениях z . С увеличением значения z величина скорости v_x убывает по параболической зависимости, которая определяется множителем $\left(1 - \frac{3z^2}{h^2} \right)$. Найдем функцию v_z из соотношения

$$v_z = - \int \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + c,$$

которое следует из условия плоской деформации.

Подставив функцию v_x , получим

$$v_z = -\frac{v_0}{h}z - az \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right). \quad (6.122)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям $v_z = 0$ при $z = 0$ и $v_z = -v_0$ при $z = h$.

2. Определение компонент тензора скоростей деформации \dot{e}_{ij} , интенсивности скоростей деформации \dot{e}_i .

Эти величины рассчитываются по формулам (3.24) и (3.27):

$$\begin{aligned} \dot{e}_x = -\dot{e}_z &= \frac{v_0}{h} + a \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right); \quad \dot{e}_y = 0; \quad \dot{e}_{xy} = \dot{e}_{yz} = 0; \\ \dot{e}_{xz} &= -6a \frac{xz}{h^2} \left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right) + 2a \frac{xz}{b^2} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right); \\ \dot{e}_i &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{4v_0^2}{h^2} 4a^2 \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^2 \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) + 8a \frac{v_0}{h} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) + 36a^2 \frac{x^2 z^2}{h^4} \left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right) + \right. \\ &\left. + 4a^2 \frac{x^2 z^2}{b^4} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)^2 - 24a^2 \frac{x^2 z^2}{b^2 h^2} \left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (6.123) \end{aligned}$$

3. Составление и решение системы (6.120) для определения варьируемых параметров a_i .

В нашем случае функции (6.121) и (6.122) содержат один варьируемый параметр. Поэтому система приводит к одному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\iiint_W \sigma_s \dot{e}_i dW + \iint_s \tau_k v_x ds \right] = 0; \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \iiint \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \left[\frac{4v_0^2}{h^2} + 4a^2 \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{3z^2}{h^2} \right) + 8a \frac{v_0}{h} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{3z^2}{h^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 36a^2 \frac{x^2 z^2}{h^4} \left(1 - \frac{x^2}{3b^2} \right)^2 + 4a^2 \frac{x^2 z^2}{b^4} \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right)^2 - 24a^2 \frac{x^2 z^2}{b^2 h^2} \left(1 - \frac{x^2}{3b^2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \right]^{1/2} dW + \right. \\ & \left. + l \int_0^b \tau_k \left[\frac{V_0}{h} x + ax \left(1 - \frac{x^2}{3b^2} \right) \left(1 - \frac{3z^2}{h^2} \right) \right] dx = 0. \quad (6.125) \right. \end{aligned}$$

Воспользуемся приемом приближенного вычисления интеграла

$$\iiint_W \sigma_s \frac{\partial \dot{e}_i}{\partial a_i} dW.$$

Для любой функции \dot{e}_i имеем $\frac{\partial}{\partial a_i} \left[\dot{e}_i \right] = 2e_i \frac{\partial}{\partial a_i} \dot{e}_i$.

Отсюда $\frac{\partial \dot{e}_i}{\partial a_i} = \frac{1}{2\dot{e}_i} \frac{\partial \left[\dot{e}_i^2 \right]}{\partial a_i}$. Во многих процессах ОМД

значение \dot{e}_i в каждой точке несильно отличается от среднего \dot{e}_{icp} , рассчитанного в предположении равномерной деформации. Из этого следует

$$\iiint_W \sigma_s \frac{\partial \dot{e}_i}{\partial a_i} dW = \frac{1}{2\dot{e}_{icp}} \iiint \sigma_s \frac{\partial \dot{e}_i^2}{\partial a_i} dW. \quad (6.126)$$

Для осадки полосы уравнение (6.124) сводится к уравнению

$$\frac{1}{2\dot{e}_{icp}} \iiint_W \sigma_s \frac{\partial \dot{e}_i^2}{\partial a_i} dW + \iint_s \tau_k v_k ds = 0. \quad (6.127)$$

Здесь $\dot{e}_{icp} = \frac{2v_0}{\sqrt{3}h}$ рассчитываем по уравнению (6.123) при $a=0$;

значение \dot{e}_i^2 берем из выражения (6.123); v_x – из уравнения (6.121).

Вычисляя почленно, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\dot{e}_{icp}} \iiint \sigma_s \frac{\partial \dot{e}_i^2}{\partial a} dW &= \frac{\sqrt{3}h}{4v_0} \int_0^b \int_0^1 \int_0^h \sigma_s \frac{\partial \dot{e}_i^2}{\partial a} dx dy dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \frac{h}{v_0} abh \left(0,213 + 0,64 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2} \right); \\ \iint \tau_k \frac{\partial}{\partial a} v_x ds &= \int_0^b \int_0^1 m_s \tau_s \frac{\partial v_x}{\partial a} dx dy = -0,833 m_s \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} b^2. \end{aligned}$$

Здесь $\tau_k = m_s \tau_s$.

Суммируем и решаем полученное уравнение относительно a :

$$a = \frac{v_0}{h} \frac{0,416 m_s \frac{b}{h}}{0,213 + 0,648 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2}}. \quad (6.128)$$

Для каждого момента деформации t считаем заданными v_0, m_s ; текущую высоту заготовки определяем по формуле $h = h_0 - \int_0^t v_0 dt$, ширину b находим из условия постоянства объема. Таким образом, имея v_0, m_s, h, b , вычисляем a , затем по формулам (6.121) и (6.122) – функции скоростей v_x, v_z . Силу процесса находим по формуле

$$P = \frac{1}{v_0} \left[\iiint_W \sigma_s \dot{\epsilon}_i dW + \iint_s m_s \tau_s v_x ds \right]. \quad (6.129)$$

Метод конечных элементов. *Сущность метода.* Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал широкое признание как эффективный метод решения краевых задач математической физики.

Популярность метода объясняется простотой его физической интерпретации и математической формулировки, гибкостью численного алгоритма, приспособленного для реализации на ЭВМ. В основе МКЭ лежит идея замены непрерывной функции ее дискретной моделью. Вся исследуемая область функции разбивается на конечное число элементов, соединенных в узловых точках; рассматриваемая функция локально аппроксимируется на каждом конечном элементе непрерывными функциями, определяющими искомую величину через ее значения в узлах. МКЭ позволяет найти скорости, перемещения, деформации, скорости деформаций, напряжения в каждой узловой точке исследуемой области и в любой точке деформируемого тела.

К основным этапам решения задачи с применением МКЭ относятся:

- 1) дискретизация области (разбиение на конечное число элементов);
- 2) локальная аппроксимация функции на отдельном элементе;
- 3) глобальная аппроксимация функции кусочно-полиномиальными функциями, определенными на всей области;
- 4) составление системы линейных алгебраических уравнений с применением метода Рунге или метода Галеркина;
- 5) решение этой системы относительно узловых значений;
- 6) вычисление искомых величин в элементе.

Если в рассматриваемом методе в качестве неизвестных рассматриваются перемещения и скорости в узлах области, то такой подход получил название метода перемещений, если же напряжения – метода сил.

Первый метод аналогичен методу верхней оценки, так как рассматриваются кинематически возможные поля скоростей, а второй – методу нижней оценки, поскольку используются статически возможные поля напряжений. Наибольшее распространение получил метод перемещений.

Дискретизация области и конечные элементы. Процедура дискретизации области включает:

- а) разбиение тела на конечные элементы – непересекающиеся под-области;
- б) нумерацию элементов и узлов (рис. 6.51).

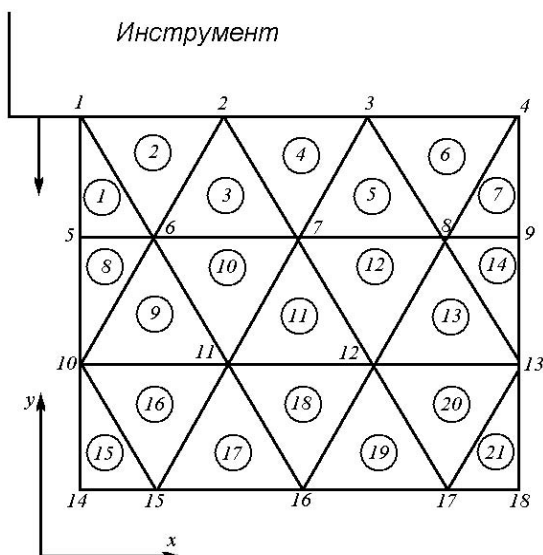


Рис. 6.51. Схема разбивки
пластической области линейными
треугольниками с тремя узлами

Разбиение области на элементы сводится к заданию числа, размеров и формы элементов. При этом используются одно-, двух- и трехмерные элементы: отрезки прямых, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, тетраэдры, призмы и такие же элементы с криволинейными сторонами, которые образуются за счет введения промежуточных узлов на стороне, но узлы при этом соединены прямолинейно. Наибольшее практическое применение получили симплекс-элементы. К ним относятся линейный одномерный элемент с двумя узлами, линейный треугольник с тремя узлами и линейный тетраэдр с четырьмя узлами. Размеры отдельных элементов могут варьироваться в зависимости от градиентов изменения искомых величин. При дискретизации области с применением симплекс-элементов необходимо стремиться, чтобы треугольники были равносторонними, а тетраэдры – правильными.

Локальная аппроксимация искомой функции на конечном элементе. В качестве примера рассмотрим треугольный элемент в условиях плоской деформации с узлами i , j , m (рис. 6.52). Узлы нумеруются, начиная с i -го узла, против часовой стрелки. Толщина

элемен-

та – S , площадь – A . За неизвестные примем скорости перемещений U и V внутри элемента в направлении координат x и y .

Обозначим компоненты скоростей в узлах следующим образом:

(u_i, v_i) , (u_j, v_j) , (u_m, v_m) .

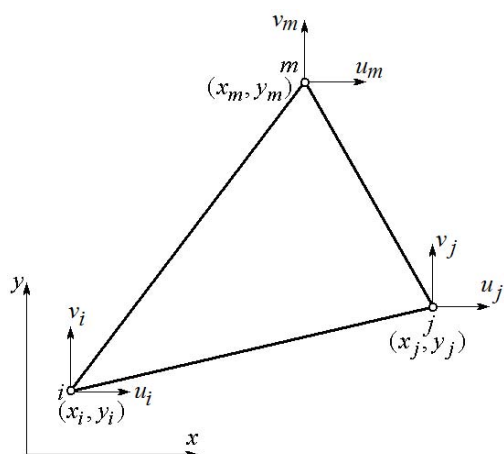


Рис. 6.52. Треугольный элемент в условиях плоской деформации

Простейшими функциями скоростей перемещений будут линейные полиномы

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ V &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Коэффициенты α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , α_6 определяются путем подстановки в эти уравнения скоростей и координат узловых точек:

$$\begin{aligned}
u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i; \\
u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j; \\
u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m
\end{aligned}
\tag{6.131}$$

и решения этих уравнений относительно α_i :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2A; \\
\alpha_2 &= (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2A; \\
\alpha_3 &= (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2A,
\end{aligned}
\tag{6.132}$$

где A – площадь треугольника ijm :

$$A = (x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_i y_m - x_m y_j) / 2, \tag{6.133}$$

а величины a_i, b_i и c_i определены выражениями

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j. \tag{6.134}$$

Другие коэффициенты получаются путем циклической перестановки индексов. Аналогично можно определить коэффициенты $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Компоненты скорости перемещения внутри конечного элемента можно выразить через компоненты узловых скоростей перемещения с помощью выражений

$$\begin{aligned}
U &= \{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m\} / 2A; \\
V &= \{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m\} / 2A. \tag{6.135}
\end{aligned}$$

Требование непрерывности скорости на границе между двумя смежными элементами удовлетворяется автоматически, поскольку скорости изменяются непрерывно вдоль границы между двумя узловыми точками в обе стороны.

Соотношения (6.135) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} U &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m; \\ V &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m, \end{aligned} \quad (6.135')$$

где N_i , N_j , N_m получили названия функций формы. Можно показать, что функции формы удовлетворяют следующим требованиям: $N_i = 1$ в узле i и $N_i = 0$ в узлах j и m ; $N_j = 1$ в узле j и $N_j = 0$ в узлах i и m ; $N_m = 1$ в узле m и $N_m = 0$ в узлах i и j .

В МКЭ более удобна матричная форма записи соответствующих выражений. Применив ее, перепишем выражение (6.135') в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (6.135'')$$

или в компактной форме:

$$\{V\} = [N]\{v\}, \quad (6.135''')$$

где $\{V\}^T = [U \ V]$; $\{v\}^T = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_m \ v_m]$.

Здесь использована следующая матричная символика: $\begin{Bmatrix} \end{Bmatrix}$ – вектор-столбец; $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ – матрица или вектор-строка; верхний индекс T после матричных скобок означает операцию транспонирования.

В практике решения задач в плоской постановке могут использоваться полиномиальные функции второго, третьего и более высоких порядков. Для этого необходимо применить элемент с большим (чем три) числом узлов, называемый *комплекс-элементом*. Может найти применение *мультикс-элемент*. Границы такого элемента (прямоугольника) должны быть параллельны координатным осям. Если это прямоугольник с четырьмя узлами, то может быть использован интерполяционный полином следующего вида:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy.$$

Увеличение числа узлов и повышение порядка элементов (порядок элемента – величина, на единицу меньшая числа узлов на стороне применяемого элемента) позволяет существенно уменьшить число элементов для получения достаточно точного решения. Вместе с тем для рассмотрения тела сложной формы при дискретизации области могут быть использованы криволинейные элементы.

Скорости деформаций. В задачах плоской деформации компоненты скорости малых деформаций определяются как

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (6.136)$$

При подстановке уравнений (6.135) в соотношения (6.136) получим компоненты скорости деформации треугольного элемента, выраженные через узловые скорости перемещения:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2A; \\ \dot{e}_y &= (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) / 2A; \\ \dot{\gamma}_{xy} &= (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m + b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) / 2A. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Поскольку компоненты скорости деформации не содержат переменных x и y , то их значения постоянны по всему элементу.

Уравнения (6.137) можно записать в матричном виде:

$$\{\dot{e}\} = [B]\{v\}, \quad (6.137')$$

$$\text{где } \{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}; \quad [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}; \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}.$$

(6.137'')

Скорость средней деформации изменения объема элемента \dot{e}_w при плоской деформации рассчитывается следующим образом:

$$\dot{e}_w = \dot{e}_x + \dot{e}_y = (b_i u_i + c_i v_i + b_j u_j + c_j v_j + b_m u_m + c_m v_m) / 2A. \quad (6.138)$$

Скорость изменения объема элемента (объем $W = AS$) равна:

$$\dot{W} = \dot{\epsilon}_w W = \dot{\epsilon}_w (AS). \quad (6.139)$$

Особенности использования МКЭ для жесткопластического тела. При анализе процессов ОМД, характеризующихся развитыми пластическими деформациями, для упрощения решения задачи часто используется модель жесткопластического тела, поскольку в этом случае упругими деформациями можно пренебречь. При таком походе напряжения в жесткой зоне определить нельзя. Кроме того, для несжимаемого материала среднее напряжение не связано с компонентами скорости деформации, и можно только определить компоненты девиатора напряжений по соотношениям Сен-Венана – Леви – Мизеса. Для того чтобы преодолеть эти трудности, предлагаются различные усовершенствования, например, пользуясь полученным полем скоростей, можно вычислить напряжения интегрированием уравнения равновесия с учетом граничных условий для напряжений, как это делается в методе визиопластичности. Гидростатическое давление (среднее напряжение) можно найти, используя метод множителей Лагранжа. Напряжения можно определить непосредственно из оптимального поля скоростей, используя понятие слегка сжимаемого материала.

Основные соотношения и уравнения. Рассмотрим в качестве модели реального тела тело из жесткопластического материала, удовлетворяющего условию пластичности Губера – Мизеса:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_s. \quad (6.140)$$

В соответствии с теорией пластического течения Сен-Венана – Леви – Мизеса скорости деформаций связаны с компонентами девиатора напряжений соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} s_x = \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \dot{\gamma}_{xy} &= 3 \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ \dot{e}_y &= \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} s_y = \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \left[\sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \dot{\gamma}_{yz} &= 3 \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ \dot{e}_z &= \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} s_z = \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \dot{\gamma}_{zx} &= 3 \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Здесь \dot{e}_i – интенсивность скорости деформаций:

$$\dot{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{e}_x - \dot{e}_y)^2 + (\dot{e}_y - \dot{e}_z)^2 + (\dot{e}_z - \dot{e}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \quad (6.142)$$

Уравнения (6.141) удовлетворяют условию несжимаемости

$$\dot{e}_W = \dot{e}_x + \dot{e}_y + \dot{e}_z = 0. \quad (6.143)$$

Напряжения выражаются через скорости деформации с помощью гидростатического давления:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= s_x + \sigma = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_x + \sigma; & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y &= s_y + \sigma = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_y + \sigma; & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{yz}; \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$\sigma_z = s_z + \sigma = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_z + \sigma; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{zx}.$$

Поскольку гидростатическое давление не связано со скоростью деформации, то нормальное напряжение нельзя определить однозначно, кроме случая, когда гидростатическое давление или одно из нормальных напряжений являются заданными.

Предположим, что объем тела – W , а площадь поверхности s состоит из частей s_v и s_F . Скорости определены на s_v , внешние силы – на s_F . Любое поле скоростей, удовлетворяющее условию несжимаемости и граничным условиям в скоростях на границе s_v , является кинематически возможным.

Первый экстремальный принцип жесткопластического тела формулируется следующим образом: среди всех кинематически допустимых полей скоростей истинное решение обеспечивает абсолютный минимум функционала:

$$\Phi = \int_W \sigma_i \dot{e}_i dW - \int_{s_F} x_{ni} u_i ds. \quad (6.145)$$

Выражение (6.145) называют полной мощностью деформируемого тела. Здесь предполагается, что отсутствует поверхность разрыва скоростей. Первый член функционала (6.145) есть скорость рассеяния энергии пластической деформации, второй член – мощность внешних сил. Из этого принципа следует, что точное поле скоростей можно определить путем минимизации функционала (6.145). Используем конечные элементы для нахождения поля скоростей.

Принимая во внимание выражения (6.137') и (6.142), можно записать первый и второй члены функционала (6.145) для каждого элемента через скорости в узлах:

$$\Phi_1^{(e)} = \int \sigma_i \dot{\epsilon}_i(u_1, u_2, \dots, u_n) dW^{(e)}; \quad (6.146)$$

$$\Phi_2^{(e)} = -F_i u_i \text{ в узлах на } s_F. \quad (6.147)$$

Заметим, что Φ – нелинейная функция узловых скоростей.

Окончательное представление функционала (6.145) через скорости в узлах элемента будет иметь вид

$$\Phi = \sum_{\text{элемент}} \int \sigma_i \dot{\epsilon}_i(u_1, u_2, \dots, u_n) dW - \sum_{\text{узел на } s_F} F_i u_i. \quad (6.148)$$

Условие несжимаемости каждого элемента можно выразить через скорости в узлах:

$$\dot{W} = \dot{\epsilon}_W W = \sum h_k v_k = 0, \quad (6.149)$$

где $\dot{\epsilon}_W$ – скорость средней деформации изменения объема элемента, т.е.

$$\dot{W} = S(b_i u_i + c_i v_i + b_j u_j + c_j v_j + b_m u_m + c_m v_m) / 2 = 0. \quad (6.149')$$

Таким образом, задача формулируется следующим образом: найти набор скоростей узлов, минимизирующих нелинейный функционал (6.148), при заданных линейных ограничениях уравнения (6.149) и граничных условиях в скоростях.

Минимизация функционала. Составление системы линейных алгебраических уравнений и ее решение. Минимизация функционала (6.148) при заданных линейных ограничениях уравнения (6.149) вызывает значительные трудности ввиду нелинейности входящих в него выражений. Применяв специальные методы линеаризации, можно свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений, что при практическом применении МКЭ гораздо удобнее.

Предположим, что мы имеем набор скоростей узлов, аппроксимирующих точное решение u_{01}, u_{02}, \dots . Их часто называют затравочным полем скоростей. Можно получить оптимальное решение, добавляя к ним небольшие скоростные поправки du_1, du_2 и т.д.

Линеаризованные функции Φ и ограничения имеют вид

$$\Phi = \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right)_0 du_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right)_0 du_2 + \dots; \quad (6.150)$$

$$\dot{W} = \sum h_k u_{0k} + \sum h_k du_k = 0, \quad (6.151)$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right)_0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right)_0, \dots$ и Φ_0 – значения, вычисленные с помощью

затравочного поля скоростей.

К затравочным значениям прибавляют поправки, полученные методом линейного программирования. Новые значения скоростей, в свою очередь, используют в качестве затравочных на следующем шаге итерации. Эта процедура продолжается до тех пор, пока поправки не обратятся в нуль.

Можно свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений, что при практическом применении МКЭ гораздо удобнее. Рассмотрим некоторые из них.

Процесс минимизации функционала значительно упрощается, если требование несжимаемости материала будет непосредственно введено в функционал. Эта идея получила реализацию в виде метода функций штрафа и метода множителей Лагранжа.

Согласно методу функций штрафа, задача нахождения минимума функционала $\Phi(u_i)$ при наличии ограничивающих условий $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ эквивалентна минимизации нового функционала:

$$\psi_1(u_i) = \Phi(u_i) + \alpha_1 \int_W \dot{\epsilon}_{ii}^2 dW, \quad (6.152)$$

где α_1 – параметр штрафа – достаточно большое положительное число. Если в каком-либо из элементов $\dot{\epsilon}_{ii}$ отлично от нуля, то за счет большого значения α общее значение функционала резко возрастает. Чем больше берется значение α , тем лучше удовлетворяется условие несжимаемости. Следует отметить, что введение нового члена в функционал не приводит к увеличению числа неизвестных функций.

Согласно методу множителей Лагранжа, модифицированный функционал имеет вид

$$\psi_2(u_i, \lambda_p) = \Phi(u_i) + \lambda_p \int \dot{\epsilon}_{ii}^2 dW, \quad (6.153)$$

где λ_p – множители Лагранжа, являющиеся неизвестными функциями для каждого элемента. Преимущество этого метода перед методом функций штрафа заключается в том, что величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, совпадают с компонентами гидростатического давления в элементе,

но при этом возрастает количество неизвестных функций, что усложняет решение задачи.

Остановимся на методах минимизации функционалов (6.152) и (6.153). Простым, но отнимающим много времени является метод последовательных приближений, т.е. изменение скоростей узлов в направлении, соответствующем меньшему значению функционала. Этот метод получил название метода локальных вариаций.

Другим, более удачным является метод, суть которого заключается в следующем: поскольку новый функционал свободен от прежних ограничений, то его можно продифференцировать по скоростям узлов и результат приравнять к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_n} &= f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0. \end{aligned} \tag{6.154}$$

Здесь $\psi = \psi_1$ или $\psi = \psi_2$.

Полученную систему нелинейных уравнений можно решать методом итераций. С помощью затравочных скоростей и поправок к ним линеаризуют уравнения для f_1, f_2, \dots, f_n :

$$\begin{aligned} f_1 &= (f_1)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right)_0 du_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right)_0 du_2 + \dots, \\ f_2 &= (f_2)_0 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right)_0 du_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right)_0 du_2 + \dots, \end{aligned} \tag{6.155}$$

где $(f_1)_0, (f_2)_0, \dots$ и $\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_0, \dots$ – величины, вычисленные с

помощью затравочного поля скоростей.

Решая линеаризованные уравнения, определяем поправки для скоростей. Используя новое поле скоростей в качестве затравочного, продолжаем итерации, пока результат не сойдется.

Определение напряжений. Метод интегрирования. Напряжения в очаге пластической деформации можно определить путем интегрирования дифференциального уравнения равновесия, если известны компоненты девиатора напряжений и гидростатическое напряжение. Компоненты девиатора напряжений определяют с помощью найденного поля скоростей течения по соотношениям Сен-Венана – Леви – Мизеса. В случае плоской деформации из уравнений равновесия следует

$$\sigma_k = - \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_0} dy + \sigma_{k_0}; \quad (6.$$

$$\sigma_k = - \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial s_x}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_0} dx + \sigma_{k_0}, \quad 156)$$

где σ_{k_0} – известное значение в точке $x = x_0, y = y_0$.

Метод множителей Лагранжа. Минимизация функционала (6.148) при ограничениях (6.149) равносильна минимизации функционала (6.153) и приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial u_n} = 0; \quad (6. \quad 157)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \lambda_1} = 0; \dots \frac{\partial \psi_2}{\partial \lambda_m} = 0$$

относительно $n + m$ неизвестных $u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Функция ψ_2 в этом случае имеет вид

$$\psi_2 = \sum_k \left(\int_{\text{элементы}} \sigma_i \dot{\epsilon}_i dV \right)_k - \sum_{e \text{ элементы на } s_f} (F_i u_i)_e + \sum_{\text{элементы}} \lambda_k \dot{W}_k. \quad (6.158)$$

Поэтому имеем систему уравнений

$$f_1(u_1, u_2, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = F_1; \quad f_2 = F_2, \dots, f_n = F_n; \quad (6.$$

$$\dot{W}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n) = 0; \quad \dot{W}_2 = 0, \dots, \dot{W}_m = 0. \quad 159)$$

Система уравнений (6.159) решается методом последовательных приближений с помощью затравочного поля скоростей и поправок к ним (полученных из линейной системы уравнений). Характерная черта этого метода – равенство множителей Лагранжа компонентам гидростатического давления при достижении функционалом минимума. Зная гидростатическое давление и девиаторы напряжений, вычисленные по найденному полю скоростей, определяют напряжения.

Метод сжимаемости. Рассмотрим условие пластичности в форме

$$\sigma_i^* = \sqrt{0,5\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\} + \alpha_2 \sigma_k^2}.$$

(6.160)

Это условие пластичности учитывает влияние гидростатического давления. При α_2 , равном нулю, уравнение (6.160) совпадает с условием пластичности Мизеса. Принимая во внимание это условие пластичности, напряжения можно выразить через скорости деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^*}{\dot{e}_i^*} \left\{ \dot{e}_x + \left(\frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right) \dot{e}_v \right\}; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i^*}{3\dot{e}_i^*} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^*}{\dot{e}_i^*} \left\{ \dot{e}_y + \left(\frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right) \dot{e}_v \right\}; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i^*}{3\dot{e}_i^*} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \sigma_z &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^*}{\dot{e}_i^*} \left\{ \dot{e}_z + \left(\frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right) \dot{e}_v \right\}; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i^*}{3\dot{e}_i^*} \dot{\gamma}_{zx},\end{aligned}\tag{6.161}$$

где \dot{e}_i^* – интенсивность скоростей деформаций:

$$\dot{e}_i^* = \sqrt{\frac{2}{9} \{ (\dot{e}_x - \dot{e}_y)^2 + (\dot{e}_y - \dot{e}_z)^2 + (\dot{e}_z - \dot{e}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \}} + \frac{\dot{e}_v^2}{\alpha_2}.$$

(6.162)

Из-за чувствительности условия пластичности к гидростатическому давлению материал при пластической деформации претерпевает изменение объема. Благодаря этому можно вычислить непосредственно напряжения, зная скорости деформаций. Рекомендуется брать α меньше 0,01.

Вариационное уравнение записывается в таком же виде, как и уравнение (6.145), только вместо σ_i и \dot{e}_i подставляется σ_i^* и \dot{e}_i^* :

$$\Phi^* = \int_V \sigma_i^* e_i^* dV - \int_{s_F} x_{n_i} u_i ds. \quad (6.163)$$

Минимизация функционала проводится без использования условия постоянства объема:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial u_2} = 0; \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial u_n} = 0. \quad (6.164)$$

Решение этой системы уравнений осуществляется так же, как и в предыдущих случаях.

Примеры использования МКЭ для анализа процессов обработки давлением

1. Раздача тонкостенной цилиндрической трубы внутренним давлением

Рассмотрим бесконечно длинную трубу радиусом R_0 и толщиной стенки s_0 , нагруженную внутренним давлением p . Из уравнения равновесия элемента трубы следует:

$$\frac{\sigma_\theta}{R_0} = \frac{p}{s_0}. \quad (6.165)$$

Так как деформация – плоская (труба бесконечно длинная), то $\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s = 2k$, где σ_s – предел текучести материала; k – пластическая постоянная.

С учетом этого получим

$$\frac{P}{\sigma_s} = 2s_0 / \sqrt{3}R_0. \quad (6.166)$$

Пусть $R_0 = 100$ мм, а $s_0 = 2$ мм.

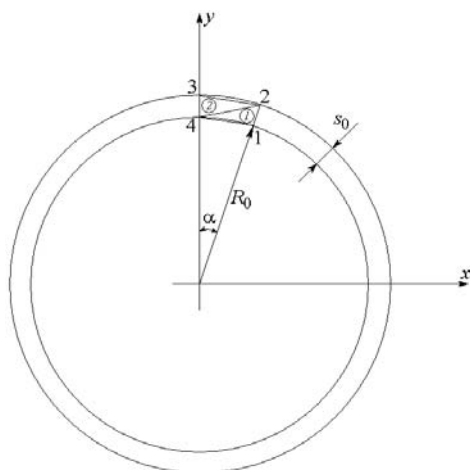
Тогда

$$\frac{P}{\sigma_s} = 0,0231$$

Теперь решим эту задачу методом конечных элементов.

Поскольку задачу можно рассматривать в плоской постановке, то достаточно взять элемент кольца толщиной s_0 , заключенный между двумя соседними радиусами, расположенными под углом α (рис. 6.53). Рассмотрим два выделенных треугольных элемента. Обозначим компоненты узловых скоростей в направлении оси x через u_i , а в направлении оси y – через v_i , где i – номер узла.

Определим компоненты узловых скоростей, считая, что оболочка равномерно раздается с единичной скоростью в радиальном направлении.



Для этого сначала найдем координаты узловых точек и компоненты скоростей в точках 1, 2, 3, 4, приняв угол $\alpha = 1^\circ$:

$$x_1 = R_0 \sin \alpha = 1,7452;$$

$$y_1 = R_0 \cos \alpha = 99,9848;$$

Рис. 6.53. Элемент кольца,
заключенный между двумя
соседними радиусами

$$\begin{aligned}x_3 &= 0; & y_3 &= 102; \\x_2 &= (R_0 + s_0) \sin \alpha = 1,7801; \\y_2 &= (R_0 + s_0) \cos \alpha = 101,9845; & x_4 &= 0; \\y_4 &= 100; & u_1 &= 1 \sin \alpha = 0,0175; \\v_1 &= 1 \cos \alpha = 0,9998; & u_4 &= 0; & v_4 &= 1.\end{aligned}$$

В узлах 2 и 3 известны скорости $u_2 = v_2 \operatorname{tg} \alpha$ и $u_3 = 0$. Определим неизвестные скорости v_2 и v_3 .

Для первого элемента – по формулам (6.134):

$$\begin{aligned}a_1 &= x_2 y_4 - x_4 y_2 = 178,010; & b_1 &= y_2 - y_4 = 1,9845; & c_1 &= x_4 - x_2 = -1,7801; \\a_2 &= x_4 y_1 - x_1 y_4 = -174,52; & b_2 &= y_4 - y_1 = 0,015; & c_2 &= x_1 - x_4 = 1,7801; \\a_4 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = -0,00001; & b_4 &= y_1 - y_2 = -1,9997; & c_4 &= x_2 - x_1 = 0,0349; \\A_1 &= 1,7402 - \text{вычисляется по формуле (6.133)}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом для второго элемента найдем:

$$\begin{aligned}a_2 &= x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0; & b_2 &= y_3 - y_4 = 2; & c_2 &= x_4 - x_3 = 0; \\a_3 &= x_4 y_2 - x_2 y_4 = 178,0104; & b_3 &= y_4 - y_2 = -1,9845; & c_3 &= x_2 - x_4 = 1,7801; \\a_4 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 = 181,5704; & b_4 &= y_2 - y_3 = -0,0155; & c_4 &= x_3 - x_2 = -1,7801; \\A_2 &= 1,7801.\end{aligned}$$

Для определения неизвестных компонент v_2 и v_3 имеем два линейных алгебраических уравнения, представляющих собой условие несжимаемости каждого элемента (6.149').

Решая эти уравнения, находим $v_2 = 0,9798$, $v_3 = 0,9808$. В данном примере не потребовалось использовать итерационную процедуру для нахождения скоростей.

По формулам (6.137) рассчитываем для элементов: $\dot{e}_{x_1} = 0,0099964$, $\dot{\gamma}_{xy1} = -0,000523$, $\dot{e}_{x_2} = 0,0096080$, $\dot{\gamma}_{xy2} = 0,00006045$.

Используя (6.142) с учетом $\dot{e}_y = \dot{e}_x$; $\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{e}_z = 0$, найдем $\dot{e}_{i1} = 0,01153$, $\dot{e}_{i2} = 0,01130$.

Рассмотрим функционал (6.148). Для действительного поля скоростей кинематики он обращается в нуль. Если приравнять его к нулю для предложенного поля скоростей, получим верхнюю оценку давления:

$$\sigma_s (\dot{e}_{i1} A_1 + \dot{e}_{i2} A_2) = plv_4;$$

$$l = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} = 1,7452.$$

Отсюда

$$\frac{P}{\sigma_s} = 0,02332.$$

Сравнивая полученное численное решение с аналитическим, видим, что они различаются на 1 %.

2. Осадка цилиндрической заготовки

Задача решается в осесимметричной постановке с использованием метода функций штрафа [см. ф. (6.152)]. Напряжение трения на поверхностях касания заготовки и инструмента τ_k представлено на осно-ве модели Прандтля с помощью выражения $\tau_k = m_s \sigma_s / \sqrt{3}$, где σ_s

– сопротивление материала пластической деформации; m_s – фактор трения ($0 \leq m_s \leq 1$). При формулировке математической модели процесса осадки функционал (6.152) дополняется соответствующим членом. В результате решение задачи осуществляется путем минимизации функционала вида

$$\Phi = \int_W \sigma_i \dot{\epsilon}_i dW + \alpha_1 \int_W \epsilon_{ii}^2 dW + \int_{s_\tau} \tau_k |v_{s_i}| ds \Rightarrow \min, \quad (6.152')$$

где в дополнение к указанным выше величинам обозначено: v_{s_i} – компоненты вектора скорости относительного скольжения инструмента и заготовки вдоль поверхности s_τ , где имеет место напряжение трения; α_1 – большое положительное число ($\alpha_1 = 10^5 \dots 10^7$).

Применив изложенную выше технологию аппроксимации с помощью МКЭ, получим разрешающую систему алгебраических уравнений задачи.

В частности, после подстановки выражений (6.135'''), (6.137') и (6.142) – для осесимметричного случая – в выражение (6.152') и применения процедуры линеаризации получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$[A] \{U\} = R,$$

$$\text{где } [A] = \sum_{e=1}^E \left\{ \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^e}{\epsilon_{ii}^e} \int [K_{\epsilon\epsilon}^e] dW + 2\alpha_1 \int [P^e]^T [C] [C]^T [P^e] dW \right\};$$

$$R = \sum_{h=1}^H \int [N_1^h]^T [q] d\Omega; \quad \epsilon_{ii}^e = \left(\frac{2}{3} [C]^T [K_{\epsilon\epsilon}^e] [C] \right)^{0,5};$$

$\mathbf{K}_{эл}^e = \mathbf{B}^e T \mathbf{P} \mathbf{B}^e$; E – общее число элементов; H – число элементов, к сторонам которых приложено напряжение трения; \mathbf{v} – вектор-столбец узловых скоростей перемещений для всей области решения задачи; \mathbf{v} – вектор-столбец узловых скоростей перемещений

для конечного элемента в соответствии с выражением (6.137'');

матрица \mathbf{B} задается выражением (6.137'');

$$\text{матрица } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ (для осесимметричной задачи);}$$

матрица \mathbf{N}_1 отличается от \mathbf{N} , заданной выражением (6.135''), тем, что в узлах, не принадлежащих границе, ее члены равны нулю; $\mathbf{e}_t = [1 \ 1 \ 0]$. Индекс $t - 1$ обозначает величину, взятую с предыдущего шага вычислений.

Задача решается поэтапно (пошаговым методом). На каждом шаге решения принимается $\sigma_i = \sigma_s$. Соответствующая модель реологического поведения материала (уравнение состояния): $\sigma_s = \sigma_s(e_H, \dot{e}_i, \dots)$, где e_H – накопленная деформация; \dot{e}_i – интенсивность скоростей деформации (могут быть учтены и другие факторы, влияющие на упрочнение материала), – определяется на основе экспериментов на растяжение, сжатие и т.д.

Кинематические граничные условия для данной задачи задаются следующим образом. Из условия симметрии рассматривается 1/4 часть меридионального сечения заготовки, поэтому в узлах конечных элементов, расположенных на вертикальной оси, горизонтальные скорости равны нулю, а в узлах, расположенных на

горизонтальной оси, вертикальные скорости равны нулю. На торцевой поверхности заготовки скорости перемещения узлов равны скорости деформирования.

При анализе процессов, протекающих в условиях сверхпластичности (СП), важно, чтобы скорости деформации в очаге пластической деформации в процессе всего периода деформирования находились в заранее заданном, достаточно узком диапазоне изменения, соответствующем эффекту СП. Этого можно добиться, изменяя соответствующим образом скорость хода рабочего инструмента штампа. Наличие трения задает неравномерность скоростей деформации, что приводит к тому, что скорости деформации не во всех точках очага пластического течения соответствуют диапазону сверхпластичности $\dot{\epsilon}_{cn}^{\min} \leq \dot{\epsilon}_{cn} \leq \dot{\epsilon}_{cn}^{\max}$. Поэтому ставится задача построить такие технологические режимы процесса формоизменения заготовки, чтобы условие СП по скоростям деформации выполнялось как можно в большем объеме заготовки или, как минимум, в наиболее критических зонах.

Решалась задача осадки в состоянии СП цилиндрической заготовки из инструментальной стали Р6М5 [31].

Уравнение состояния, являющееся моделью реологического поведения материала в условиях СП, было получено на основе обработки результатов экспериментов по осаживанию цилиндрических образцов в заданных температурно-скоростных полях с использованием метода планирования эксперимента.

Для стали Р6М5 была получена зависимость сопротивления материала пластической деформации от скорости деформации и температуры в виде полиномиальной зависимости.

Обработка результатов экспериментальных исследований позволила установить температурно-скоростные условия максимального проявления эффекта СП для стали Р6М5: $T = 800 \dots 830 \text{ } ^\circ\text{C}$, $\dot{\epsilon}_i = 0,002 \dots 0,0059 \text{ c}^{-1}$.

Моделирование процесса осадки выполнялось для заготовки с начальной высотой $h_{нач} = 15 \text{ мм}$ и диаметром $D = 10 \text{ мм}$.

На рис. 6.54 приведена картина искажения структурных линий, наложенных на сетку конечных элементов, дающая представление о развитии кинематики процесса при осаживании заготовки до степени деформации $\Delta h = [(h_{нач} - h_{тек}) / h_{нач}] \cdot 100 \% = 80 \%$.

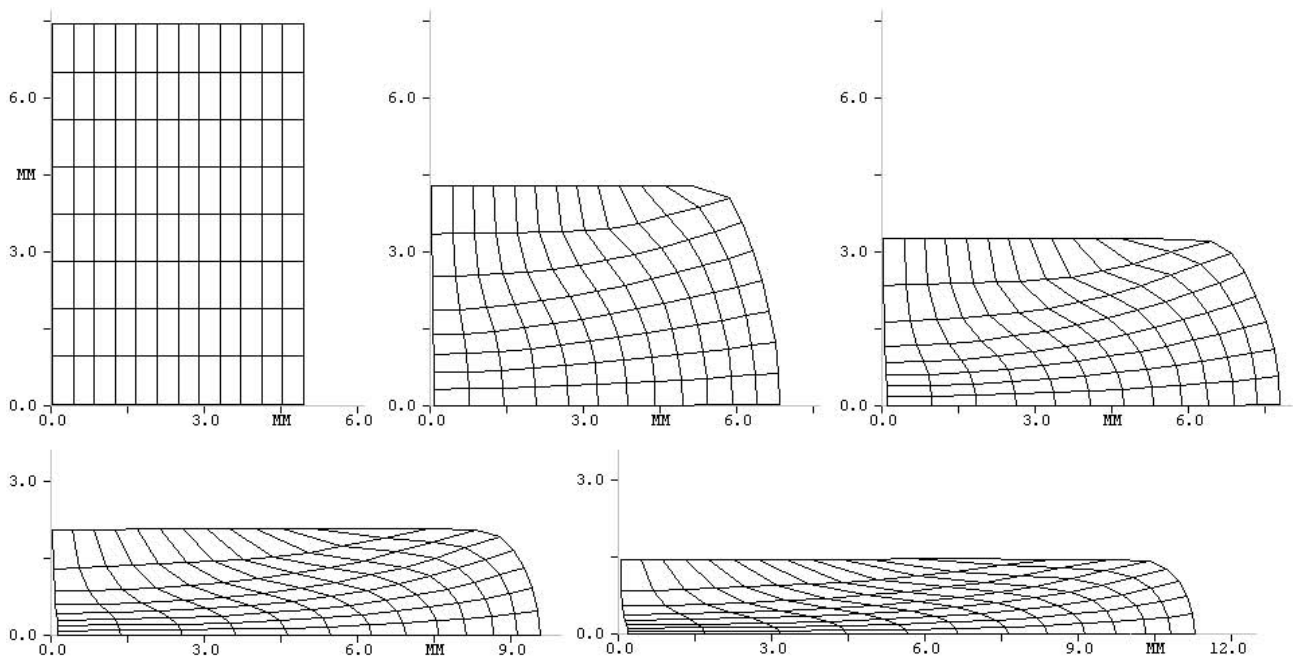


Рис. 6.54. Искажения структурных линий в процессе осадки заготовки

Распределение скоростей деформации внутри объема неравномерно, что следует из рис. 6.55, на котором темным цветом закрашены области, в которых соблюдается указанное выше условие СП. Незакрашенные области – это зоны либо повышенных, либо пониженных скоростей деформации.

Характер изменения скорости деформирования сказывается решающим образом на распределении скоростей деформаций и, соответственно, на объеме области сверхпластической деформации, а также динамике ее изменения. Если задать величину скорости деформирования U_d постоянной и равной, например, среднему значению из показанного диапазона ее изменения, то режим СПД наблюдается только при небольших степенях деформации ($\Delta h < 40\%$). При больших степенях деформации состояние СП имеет место только в незначительной части заготовки и полностью исчезает при $\Delta h > 60\%$.

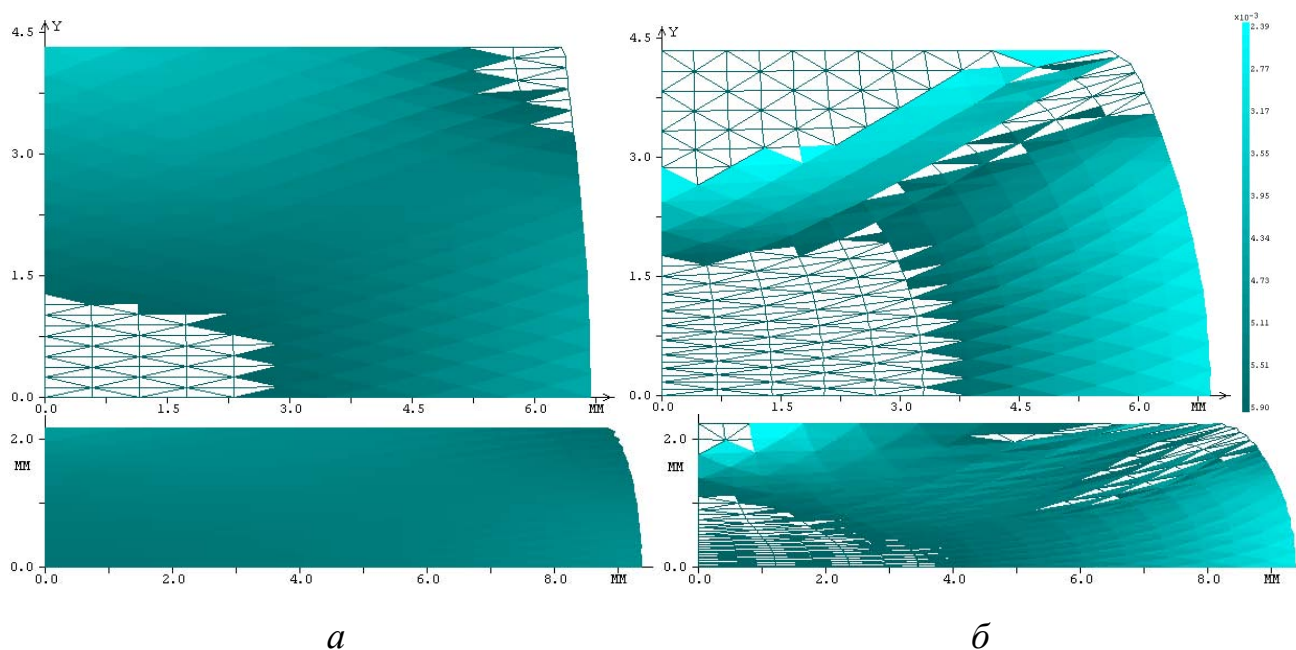


Рис. 6.55. Распределение области сверхпластического течения в меридиональном сечении заготовки при степени деформации 40 и 70 %:
 $a - m_s = 0,1$; $b - m_s = 0,9$

Таким образом, математическое моделирование с применением МКЭ позволяет выявить подробный характер распределения скоростей деформации и других параметров процесса на любой стадии деформирования и выбрать оптимальный режим штамповки заготовок различной конфигурации. Это особенно актуально при разработке новых технологических процессов ОМД.

Примеры использования метода верхних оценок сил в процессах обработки металлов давлением

Задача 6.6.1. Найти силу осадки пластически однородной полосы между двумя жесткими плитами, сближающимися со скоростями v_1 . Известны размеры полосы b и h , а также предел текучести материала полосы при сдвиге κ . Схема процесса осадки пластически однородной полосы и кинематически допустимое поле скоростей показаны на рис. 6.56.

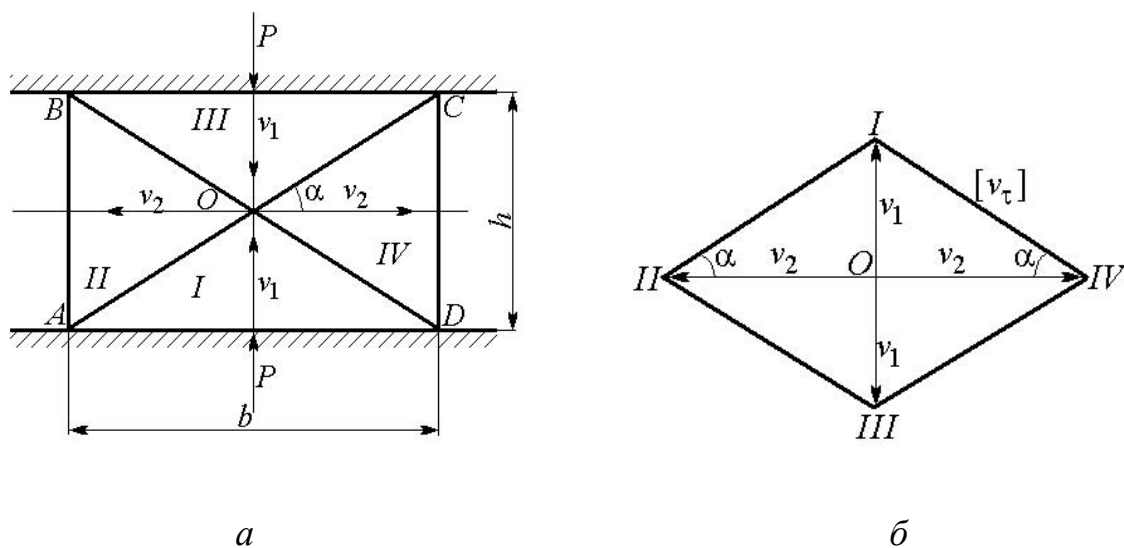


Рис. 6.56. Схема процесса осадки (а) и годограф скоростей (б)

Решение. Предполагаем, что длина a полосы значительно больше ширины b и толщины h , т.е. $a \gg b, a \gg h$, так что деформацию можно считать плоской. В поперечном сечении линии OA, OB, OC, OD являются линиями разрыва скоростей (следами плоскостей разрыва, перпендикулярными к плоскости чертежа).

В силу условия несжимаемости на этих линиях непрерывны нормальные составляющие скоростей, а разрывы касательных составляющих, как это следует из годографа скоростей (см. рис. 6.56, б), определяется следующим образом:

$$v_{\tau} = \frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{h} \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Длина любой линии разрыва

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Определим суммарную мощность разрыва:

$$N_q = 4k \int_{\tau} \bar{l} a = 2k v_1 a \frac{b^2 + h^2}{h}. \quad (6.167)$$

Мощность внешних сил

$$N_e = 2P v_1 = 2qabv_1,$$

где P и q – сила и удельная сила осадки полосы.

По теореме о верхних оценках

$$N_e \leq N_q.$$

Отсюда

$$q \leq k \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right),$$

т.е. верхняя оценка q^* удельной силы осадки составляет:

$$q^* = k \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right). \quad (6.168)$$

Определяются верхние оценки силы и мощности осадки:

$$P^* = q^* ab; \quad N^* = 2P^* v_1. \quad (6.169)$$

Задача 6.6.2. Найти силу вдавливания жесткого плоского штампа в пластическое полупространство (рис. 6.57).

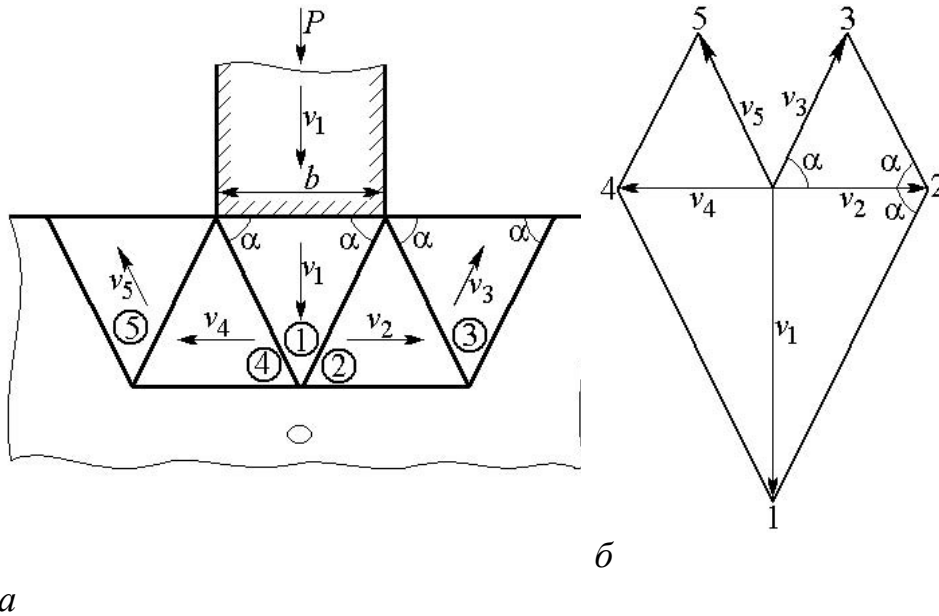


Рис. 6.57. Схема процесса вдавливания, кинематически допустимое поле скоростей (а) и годограф скоростей (б)

Деформацию считаем плоской. Предел текучести материала при сдвиге равен k .

Решение. Поле скоростей характеризуется единственным параметром – углом α , подлежащим определению из условия минимума мощности деформации.

Из годографа скоростей (рис. 6.57, б) следует:

$$v_2 = v_{\tau 02} = v_4 = v_{\tau 04} = v_1 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$v_{\tau 12} = v_{\tau 14} = v_1 \operatorname{cosec} \alpha;$$

$$v_3 = v_{\tau 03} = v_5 = v_{\tau 05} = v_{\tau 23} = v_{\tau 45} = \frac{v_1}{2} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Определяем длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{14} = l_{23} = l_{45} = l_{03} = l_{05} = \frac{b}{2} \sec \alpha; \\ l_{02} = l_{04} = b.$$

Находим мощность разрыва:

$$N_q = ka(l_{12} v_{\tau 12} + l_{14} v_{\tau 14} + l_{23} v_{\tau 23} + l_{45} v_{\tau 45} + \\ + l_{02} v_{\tau 02} + l_{04} v_{\tau 04} + l_{03} v_{\tau 03} + l_{05} v_{\tau 05}) = \\ = 2kabv_1 (3 + \cos 2\alpha) \operatorname{cosec} 2\alpha,$$

где a – размер штампа в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка.

Мощность внешних сил

$$N_e = P v_1 = qabv_1.$$

По теореме о верхних оценках получаем

$$q^* = 2k (3 + \cos 2\alpha) \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

Угол α , при котором q^* имеет минимум, найдем из уравнения

$$\frac{dq^*}{d\alpha} = 0,$$

получающего после преобразований вид

$$1 + 3\cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда следует

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}; \quad 2\alpha = 109^\circ 30'; \quad \alpha = 54^\circ 45';$$
$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Легко проверить, что при найденном значении

$$\frac{d^2 q^*}{d\alpha^2} > 0,$$

что соответствует минимуму q^* .

Верхняя оценка удельной силы при этом равна:

$$q^* = 4\sqrt{2}k = 5,64k, \quad (6.170)$$

что лишь на 9,8 % превышает точное значение

$$q = \frac{2}{\sqrt{3}}k = 5,14k,$$

найденное впервые Л. Прандтлем.

Верхние оценки силы и мощности вдавливания штампа в пластическое полупространство находятся по формулам

$$P^* = q^* ab; \quad N^* = P^* v_1, \quad (6.171)$$

где $q^* = 4\sqrt{2}k = 5,64k$.

Задача 6.6.3. Найти силу закрытой прошивки полосы (рис. 6.58) пуансоном, перемещающимся относительно контейнера со скоростью v_1 . Предел текучести материала полосы при сдвиге равен k . Геометрические размеры инструмента известны. Трением можно пренебречь.

Решение. Кинематически допустимое поле скоростей в этом случае зависит от параметра h , физический смысл которого состоит в том, что h определяет глубину проникновения пластической деформации.

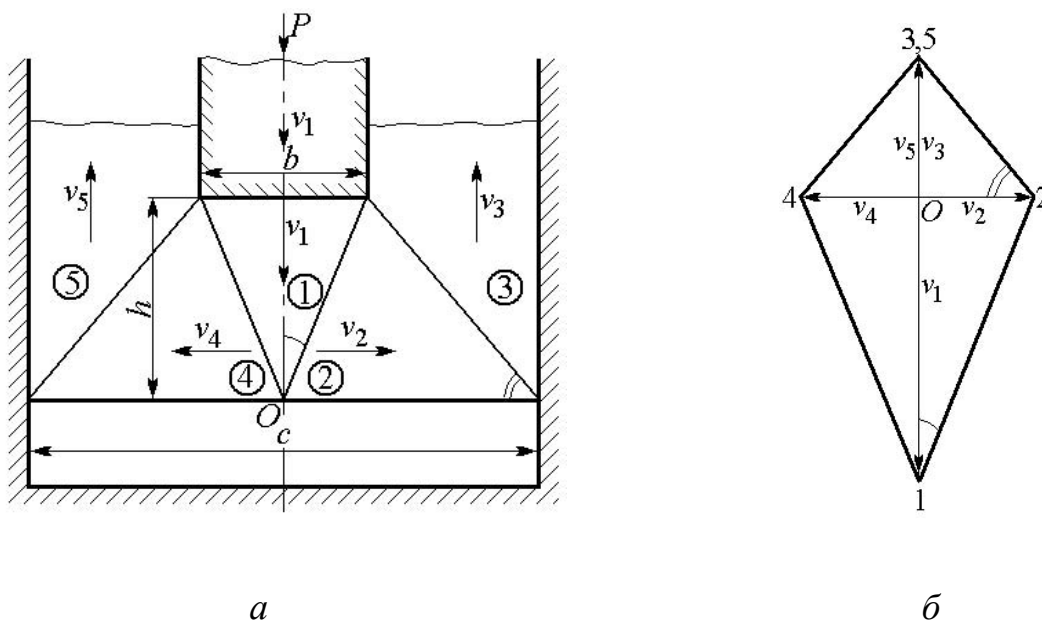


Рис. 6.58. Схема процесса закрытой прошивки полосы (а) и годограф скоростей (б)

Из годографа скоростей (рис. 6.58, б) следует:

$$v_2 = \tau_{02}^- = v_4 = \tau_{04}^- = \frac{b}{2h} v_1; \quad v_3 = v_5 = \frac{b}{c-b} v_1;$$

$$\tau_{12}^- = \tau_{14}^- = \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2h} v_1; \quad \tau_{23}^- = \tau_{45}^- = \frac{b\sqrt{(c-b)^2 + 4h^2}}{2h(c-b)} v_1.$$

Определяем длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{14} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4h^2}; \quad l_{23} = l_{45} = \frac{1}{2} \sqrt{(c-b)^2 + 4h^2}; \quad l_{02} = l_{04} = \frac{c}{2}.$$

Находим мощность разрыва:

$$N_q = ka(l_{12} \tau_{12}^- + l_{14} \tau_{14}^- + l_{23} \tau_{23}^- + l_{45} \tau_{45}^- + l_{02} \tau_{02}^- + l_{04} \tau_{04}^-) = kacv_1 \left(\frac{b}{h} + \frac{2h}{c-b} \right),$$

где a – размер в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка.

Мощность внешних сил

$$N_e = P v_1 = qabv_1.$$

По теореме о верхних оценках получаем

$$q^* = \frac{kc}{b} \left(\frac{b}{h} + \frac{2h}{c-b} \right).$$

Наилучшая (наименьшая) верхняя оценка соответствует значению параметра h , определяемого из уравнения

$$\frac{dq^*}{dh} = \frac{kc}{b} \left(-\frac{b}{h^2} + \frac{2}{c-b} \right) = 0.$$

Отсюда

$$h = \sqrt{\frac{b(c-b)}{2}}.$$

Подставляя это значение h в формулу для q^* , окончательно получаем

$$q^* = \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{x-1}} k; \quad x = \frac{c}{b}. \quad (6.172)$$

Верхние оценки силы и мощности находятся по формулам (6.172), куда вместо q^* подставляется величина, рассчитанная по формуле (6.173).

Задания для самоконтроля

1. Сформулируйте первый экстремальный принцип жесткопластического тела о минимальных свойствах действительного поля скоростей.

2. Сформулируйте второй экстремальный принцип жесткопластического тела о максимальных свойствах действительного напряженного состояния.

3. Изложите сущность метода верхних оценок сил пластического формоизменения.

4. Укажите особенности метода верхних оценок сил применительно к плоскому деформированному состоянию.

5. Опишите подход к выбору кинематически возможных полей скоростей, определению сил формоизменения, минимизации удельной силы, выбору матрицы, обеспечивающей минимальную силу деформирования при верхней оценке сил плоского формоизменения в клиновой матрице.

6. Сущность метода Ритца.

7. Напишите основное энергетическое уравнение для определения варьируемых параметров.

8. Метод конечных элементов. Сущность МКЭ и его возможности.

9. Перечислите основные этапы решения задачи с применением МКЭ.

10. Что означает дискретизация области и какие конечные элементы применяются?

11. Как осуществляется локальная аппроксимация искомой функции на конечном элементе?

12. Запишите выражение скоростей u и v в глобальных узлах.

13. Как записать уравнения для определения компонент скоростей деформации в матричном виде?

14. Как определяется скорость изменения объема при плоской деформации?

15. Перечислите особенности использования МКЭ для жесткопластического тела.

16. Укажите основные соотношения и уравнения жесткопластического материала (σ_i , $\dot{\epsilon}_i$), уравнения связи компонент напряжения и компонент скоростей деформаций, их обратную связь и выражение функционала мощности пластической деформации в предположении отсутствия поверхностей разрыва скоростей течения.

17. Запишите глобальное представление функционала пластической деформации.

18. Сущность методов минимизации функционала.

19. В чем состоит минимизация функционала методами функций штрафа и множителей Лагранжа?

20. Как определяются напряжения в очаге деформаций методом интегрирования, методом множителей Лагранжа и методом сжимаемости материала?

Глава 7. МЕДЛЕННОЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Одной из проблем, стоящей перед машиностроением, является повышение эффективности и конкурентоспособности процессов изготовления изделий из металлов и сплавов методами обработки давлением.

Конструкции изделий ответственного назначения определяют применение высокопрочных и малопластичных материалов и изготовление деталей и узлов со специальными, зависящими от условий эксплуатации характеристиками. Формирование характеристик изделий закладывается прежде всего процессами обработки давлением в режимах деформирования с нагревом, когда значительно проявляются пластические и вязкие свойства материалов. К эффективным технологическим процессам относится медленное изотермическое формоизменение. В основу процессов положена способность материалов в определенных температурно-скоростных условиях к вязкому или вязкопластическому течению материала, что обеспечивает большие конечные деформации при сравнительно малых внешних силах и высокую точность получаемых геометрических форм.

Рассмотрим деформирование изотропного материала в условиях кратковременной ползучести.

Под кратковременной ползучестью будем понимать медленное деформирование в условиях вязкого (ползучего) течения при скоростях деформации порядка $10^{-3} \dots 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ и времени формоизменения от одной минуты до одного часа и более; упругими составляющими деформации пренебрегаем. Считаем, что если величина интенсивности напряжений σ_i меньше некоторой величины σ_{i0} , соответствующей интенсивности степени деформации e_{i0} при интенсивности скорости деформации \dot{e}_{i0} , то процесс деформирования будет протекать в условиях вязкого течения материала (деформации ползучести). Величину σ_{i0} , разделяющую вязкое и вязкопластическое течения, будем наз-

начать в зависимости от механических свойств материала при заданной температуре деформирования и чувствительности материала к деформационному упрочнению при соответствующей скорости деформации $\dot{\epsilon}_{i0}$.

7.1. Уравнения механического состояния изотропного материала. Связь скоростей деформации ползучести с напряжениями

Анализ процессов горячего формоизменения металлов связан с привлечением уравнений состояния механики нелинейно-вязких сред. Нелинейные уравнения механического состояния и построенные на них аналитические методы расчета достаточно широко разработаны для анализа поведения под нагрузками элементов конструкций, работающих при высоких температурах, Ю.Н. Работновым, А.А. Ильюшиным, Н.Н. Малининым, Л.М. Качановым, М.А. Колтуновым и другими учеными.

Для теоретического анализа процессов горячего деформирования эффективно использование технических теорий ползучести. Ряд расчетных методов, построенных на этих теориях, развит Н.Н. Малининым и К.И. Романовым [21, 22, 30]. Методы расчета некоторых процессов заготовительно-металлургического производства на основе нелинейной теории наследственности разработаны А.А. Поздеевым, В.И. Тарновским, В.И. Еремеевым, В.С. Баакашвили.

Уравнения теории наследственности учитывают влияние истории нагружения, эффекты обработки, связанные с протеканием упрочнения и разупрочнения. Однако использование этих уравнений ввиду их сложности ограничено.

Остановимся на уравнениях состояния технических теорий ползучести, являющихся их обобщением на случай неоднородного напряженного состояния, которые нашли широкое применение при анализе процессов обработки металлов давлением в режиме ползучести.

Для анализа процессов изотермической штамповки изотропных материалов при медленном деформировании используют уравнения состояния теории ползучести в следующих вариантах:

– теория старения

$$\sigma_i = Ae_i^m \left[1 - \lambda C \left(\frac{1}{m+1} - \frac{\lambda t}{m+2} \right) t \right] = Ae_i^m K(t); \quad (7.1)$$

– теория течения

$$de_i = B\sigma_i^n dt; \quad (7.2)$$

– теория упрочнения

$$\sigma_i = \left[\frac{1}{\alpha} \left(\int de_i \right)^\beta \right]^{1/\nu} \quad \text{или} \quad \sigma_i = ke_i^m \dot{e}_i^n; \quad (7.3)$$

– теория кратковременной ползучести

$$\dot{e}_i = \dot{\sigma}_i f_1 \sigma_i + f_2 \sigma_i; \quad (7.4)$$

– кинетическая теория ползучести со структурным параметром повреждаемости

$$\dot{e}_i = \frac{B\sigma_i^n}{(1 - \omega_e)^m}; \quad d\omega = \frac{de_i}{e_{i_{np}}}; \quad (7.5)$$

– энергетическая теория ползучести и повреждаемости

$$\dot{e}_i = \frac{B\sigma_i^n}{(1 - \omega_A)^m}; \quad d\omega = \frac{\sigma_i de_i}{A_{np}}; \quad (7.6)$$

где σ_i , e_i и \dot{e}_i – интенсивность напряжений, деформаций и скорость деформации соответственно; $A, B, m, n, \alpha, \beta, \nu, k$ – константы материала, зависящие от температуры; $e_{i_{np}}, A_{np}$ – предельная интенсивность деформации и удельная работа разрушения при вязком течении (ползучести материала); ω_e, ω_A – повреждаемость по деформационной и энергетической моделям разрушения соответственно.

Уравнения механического состояния со структурным параметром, определяющим повреждаемость, позволяют произвести оценку условий разрушения деформируемой заготовки. В процессах горячего деформирования развитие ползучести и накопление повреждаемости идет совместно. Кинетика разрушения чувствительна к напряженному состоянию, а последнее зависит от уровня накопления повреждений. Разрушение представляется как необратимый процесс накопления повреждений по объему, а за меру разрушения принимается некоторый параметр ω . При $t=0$ $\omega=0$, при $t=t_p$ $\omega=1$ (t_p – время разрушения).

При построении уравнений состояния с учетом параметра разрушения принимается во внимание, что при испытании на ползучесть установлены две группы материалов. Одна группа – материалы, у которых деформация, принимаемая за меру повреждаемости к моменту разрушения, является постоянной величиной независимо от напряжения. Другая группа – материалы, у которых удельная рассеянная энергия при ползучести остается постоянной. Она принимается за меру повреждаемости.

Следует остановиться на областях применения указанных уравнений состояния. Процесс медленного изотермического деформирования в условиях полугорячего объемного и листового формоизменения сопровождается пластическим упрочнением и разупрочнением, связанным с ползучестью материала. Уравнение теории старения (7.1) отражает поведение материала в этих условиях. В процессах изотермической штамповки деформирование практически не сопровождается упрочнением, зависимость от истории нагружения ничтожна, и напряжения определяются скоростью деформации в рассматриваемый момент времени. Течение металла подобно поведению нелинейно-вязкого тела. В этом случае для анализа операций рационально использование уравнения теории течения (7.2), которая хорошо согласуется с экспериментальными данными при высоких уровнях температур и напряжений. При ряде операций, в частности при операциях горячей калибровки, деформации невелики, и развивается деформационное упрочнение, связанное с начальной стадией ползучести. Таким процессам штамповки могут соответствовать уравнения теории упрочнения (7.3) и кратковременной ползучести (7.4). Более обобщенными являются кинетические уравнения состояния (7.5) со структурными

параметрами и уравнение энергетической теории ползучести (7.6). В рамках феноменологической теории они могут учитывать процессы упрочнения и разупрочнения, накопление повреждений и другие факторы, т. е. приобретать универсальность в соответствии с конкретными процессами деформирования.

Теорию ползучести, как и пластичности, связывают с гипотезой о существовании потенциала скоростей деформации и ассоциированным законом течения материала в рамках теории течения. Поскольку деформации ползучести являются в основном необратимыми (упругими деформациями пренебрегают), для случая неодносного напряженного состояния обычно принимается применимость основных гипотез теории пластичности. Допустим, что материал изотропен, изменение объема в процессе ползучести не происходит, упрочнение изотропно. Уравнения зависимости компонент скоростей деформаций ползучести от компонент напряжений имеют такой же вид, как в теории течения при пластической деформации:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 3\dot{\epsilon}_i \frac{\epsilon_{ij} - \delta_{ij}\sigma_i}{2\sigma_i}, \quad (7.7)$$

где $\dot{\epsilon}_i$ – интенсивность скоростей деформации ползучести для несжимаемого тела; σ_i – интенсивность напряжений;

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2)}; \quad (7.8)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_x - \sigma_y^2 + \epsilon_y - \sigma_z^2 + \epsilon_z - \sigma_x^2 + 6(\epsilon_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (7.9)$$

Полная система уравнений для определения компонент тензоров напряжений, скоростей деформаций и компонент скоростей перемещений содержит уравнения равновесия (движения), геометрические уравнения Коши, соотношения между напряжениями и скоростями деформаций (деформациями) и уравнения состояния. Эта система уравнений должна решаться при тех или иных граничных условиях в напряжениях и скоростях течения. В качестве основных допущений принимаются постоянство температур в рассматриваемом объеме и однородность механических свойств. Получение точных решений затруднительно. Сложности возникают при анализе течения

реомных тел. Упрощающие предпосылки связаны с идеализацией процессов деформирования и введением соответствующих расчетных схем.

Упрощение достигается, в частности, за счет схем плоской деформации, плоского напряженного состояния или осевой симметрии, допущений радиального течения, условия простого нагружения, гипотезы единой кривой упрочнения, наложения упрощающих допущений на трение, линеаризации выражения интенсивности напряжений и др. На определенных схематизациях построены различные методы теоретического анализа.

7.2. Определяющие соотношения для анизотропного материала

Рассмотрим эти соотношения в рамках теории течения [уравнения состояния (7.2), (7.5), (7.6)]. Введем потенциал скоростей деформации анизотропного тела при кратковременной ползучести, как в случае теории пластического течения анизотропного материала, в виде

$$2f \equiv H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2, \quad (7.10)$$

где H, F, G, N, L, M – параметры анизотропии при кратковременной ползучести; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; x, y, z – главные оси анизотропии.

Согласно ассоциированному закону течения, зависимости скоростей деформации от напряжений запишутся так:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.11)$$

Выражения для интенсивности напряжений и скоростей деформаций имеют вид (7.8) и (7.9).

Введем обозначения:

$$R_x = H/G, \quad R_y = H/F, \quad R_{xy} = N/G, \\ R_{yz} = L/G, \quad R_{zx} = M/G. \quad (7.12)$$

Величина коэффициента пропорциональности λ может быть найдена по выражению

$$\lambda = 3R_y \dot{\epsilon}_i / [2(R_x + R_x R_y + R_y) G \sigma_i]. \quad (7.13)$$

Зависимости скоростей деформаций от напряжений (7.11) с учетом (7.12) и (7.10) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= 3R_y \dot{\epsilon}_i \left[\frac{R_x (\sigma_x - \sigma_y) + \sigma_x - \sigma_z}{R_x + R_x R_y + R_y} \right] \dot{\sigma}_i \\ \dot{\epsilon}_y &= 3R_x \dot{\epsilon}_i \left[\frac{R_y (\sigma_y - \sigma_z) + R_y (\sigma_y - \sigma_x)}{R_x + R_x R_y + R_y} \right] \dot{\sigma}_i \\ \dot{\epsilon}_z &= 3\dot{\epsilon}_i \left[\frac{R_y (\sigma_z - \sigma_x) + R_x (\sigma_z - \sigma_y)}{R_x + R_x R_y + R_y} \right] \dot{\sigma}_i \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= 3R_y R_{xy} \dot{\epsilon}_i \tau_{xy} / \left[R_x + R_x R_y + R_y \right] \dot{\sigma}_i \\ \dot{\epsilon}_{yz} &= 3R_y R_{yz} \dot{\epsilon}_i \tau_{yz} / \left[R_x + R_x R_y + R_y \right] \dot{\sigma}_i \\ \dot{\epsilon}_{zx} &= 3R_y R_{zx} \dot{\epsilon}_i \tau_{zx} / \left[R_x + R_x R_y + R_y \right] \dot{\sigma}_i \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Приведенные выше соотношения могут быть использованы для анализа процессов деформирования, протекающих в условиях кратковременной ползучести ортотропного материала (вязкого течения материала).

Уравнение связи между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью скоростей деформации $\dot{\epsilon}_i$ записывается следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_i^c = B (\sigma_i / \sigma_{i0})^n \quad \text{или} \quad \sigma_i = \sigma_{i0} \left(\dot{\epsilon}_i^c / B \right)^{1/n}, \quad (7.15)$$

где B , n – константы кривой ползучести.

Для использования этих выражений необходимо иметь информацию о параметрах уравнений состояний при кратковременной ползучести (7.15), характеристиках анизотропии механических свойств материала в условиях кратковременной ползучести.

7.3. Феноменологические модели разрушения

В данном разделе рассмотрены деформационный и энергетический критерии разрушения анизотропного материала при кратковременной ползучести.

Принимается, что при вязком деформировании e_{inp}^c и A_{np}^c – практически постоянные величины. Кроме того, учитывается ориентация первой главной оси напряжений относительно главных осей анизотропии, определяемых углами α , β , γ . Влияние параметра

вида напряженного состояния на величины e_{inp} и A_{np} не учитывается, так как такая информация при горячей обработке практически отсутствует.

Предлагается условие деформируемости материала при вязком течении без разрушения записать в виде

$$\omega_e^c = \int_0^t \frac{\dot{e}_i^c dt}{e_{inp}^c} < 1, \quad (7.16)$$

если справедлив деформационный критерий разрушения, и в виде

$$\omega_A^c = \int_0^t \frac{\sigma_i \dot{e}_i^c dt}{A_{np}^c} < 1, \quad (7.17)$$

если справедлив энергетический критерий разрушения.

Здесь ω_e^c и ω_A^c – повреждаемость материала при вязкой деформации по деформационной и энергетической моделям разрушения соответственно;

$$e_{inp}^c = e_{inp}^c(\alpha, \beta, \gamma);$$

$$A_{np}^c = A_{np}^c(\alpha, \beta, \gamma).$$

Интегрирование ведется вдоль траектории рассматриваемых элементарных объемов.

Допустим, что зависимости интенсивности деформации в момент разрушения e_{inp}^c и удельной работы разрушения A_{np}^c от указанных выше параметров в области деформации ползучести могут быть представлены в виде

$$e_{inp}^c = D f_2^c(\alpha, \beta, \gamma); \quad (7.18)$$

$$A_{np}^c = D' f_4^c(\alpha, \beta, \gamma); \quad (7.19)$$

где α, β, γ – косинусы углов, определяющих ориентацию первой главной оси напряжений σ_1 относительно главных осей анизотропии x, y, z ; D, D' – константы материала.

Построение соотношений (7.18), (7.19) для исследуемых материалов связано со значительными затратами материальных ресурсов, времени экспериментатора и наличием уникальных

экспериментальных установок. Поставленная задача существенно упрощается, если использовать имеющиеся экспериментальные данные для различных материалов, предложенные, например, в работах [4, 5, 17, 18, 19, 20, 21, 30].

Экспериментальные результаты по деформируемости изотропных материалов при вязкой деформации позволяют выбрать константы D и D' в законах деформируемости анизотропного тела.

В этой связи предлагается константы D и D' выбирать в соответствии с родом материала (алюминиевые, медные, титановые сплавы, стали, высоколегированные стали и т.д.), а уточнение функциональных зависимостей e_{inp}^c или A_{np}^c осуществлять с помощью функций $f_2^c(\alpha, \beta, \gamma)$, $f_4^c(\alpha, \beta, \gamma)$, которые могут быть определены путем одноосного растяжения образцов, вырезанных под углами 0, 45 и 90° к направлению прокатки при деформации ползучести.

Учет анизотропии механических свойств материала заготовки в области вязких деформаций будем осуществлять с помощью функций

$$f_2^c(\alpha, \beta, \gamma), \quad f_4^c(\alpha, \beta, \gamma),$$

которые выбираем в следующей форме соответственно:

$$f_2^c(\alpha, \beta, \gamma) = b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos \beta + b_3 \cos \gamma; \quad (7.20)$$

$$f_4^c(\alpha, \beta, \gamma) = b'_0 + b'_1 \cos \alpha + b'_2 \cos \beta + b'_3 \cos \gamma, \quad (7.21)$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 и b'_0, b'_1, b'_2, b'_3 – константы материала, которые определяются из опытов на растяжение образцов в условиях плоского напряженного состояния.

Таким образом, для расчета предельной величины степени деформации в области вязкого течения:

$$e_{inp}^c = D(b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos \beta + b_3 \cos \gamma). \quad (7.22)$$

При рассмотрении критерия разрушения в энергетической постановке предельная величина удельной работы разрушения в области вязкой деформации может быть вычислена по аналогичным формулам с заменой буквенного коэффициента b_i на соответствующий ему коэффициент b'_i , например:

$$A_{np}^c = D' b'_0 + b'_1 \cos \alpha + b'_2 \cos \beta + b'_3 \cos \gamma . \quad (7.23)$$

Экспериментальные исследования показали [17, 21, 34], что повреждаемость имеет место даже при малых деформациях и, безусловно, она оказывает влияние на напряженное и деформированное состояния заготовки.

В связи с этим целесообразно в уравнения состояния (7.15) при вязком течении материала ввести повреждаемость.

В случае вязкого течения материала уравнение состояния для группы материалов, подчиняющихся энергетической теории ползучести и повреждаемости, может быть записано в виде

$$\dot{\epsilon}_i^c = \frac{B \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i_0}} \right)^n}{\left(1 - \omega_A^c \right)^m}; \quad \dot{\omega}_A^c = \frac{\sigma_i \dot{\epsilon}_i^c}{A_{np}^c}, \quad (7.24)$$

а применительно к группе материалов, подчиняющихся кинетическим уравнениям ползучести и повреждаемости:

$$\dot{\epsilon}_i^c = B \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i_0}} \right)^n \frac{1}{\left(1 - \omega_e^c \right)^m}; \quad \dot{\omega}_e^c = \frac{\dot{\epsilon}_i^c}{e_{inp}^c}, \quad (7.25)$$

где m – константа материала.

Введение повреждаемости в определяющие соотношения ползуче-пластического течения усложняет задачу анализа напряженного и деформированного состояний и требует одновременного расчета как компонент напряжений, скоростей течения и деформаций, интенсивности деформации или удельной работы деформации, так и повреждаемости в области вязкой деформации, однако позволяет получить более реальную картину формоизменения.

В частности, в случае изотропного тела в выражениях $f_2^c(\alpha, \beta, \gamma)$ и $f_4^c(\alpha, \beta, \gamma)$ необходимо положить

$$f_2^c(\alpha, \beta, \gamma) = f_4^c(\alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

7.4. Свободное деформирование длинной листовой заготовки из анизотропного материала

В корпусных конструкциях летательных аппаратов применяют радиаторные панели из титановых и алюминиевых сплавов, которые устанавливают по внутренним и наружным поверхностям корпусов

приборных и специальных отсеков, где необходимо поддерживать заданный температурный режим. Конструктивно радиаторная панель представляет собой два беззазорно соединенных листа с каналами между ними для циркуляции теплоносителя. Профиль сечения канала имеет заданную геометрию – круглую или прямоугольную в сечении канала, а сам канал может быть одно- или двухсторонним. Технологический процесс изготовления радиаторных панелей состоит в выполнении на одной позиции обработки последовательно операций диффузионной сварки давлением газа двух листов и горячего формообразования каналов газом, подаваемым между листами.

Ниже приведены результаты теоретического анализа процесса изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной заготовки из анизотропного материала в условиях кратковременной ползучести в предположении неравномерного изменения толщины стенки.

Напряженное и деформированное состояние оболочки.

Рассмотрим свободную формовку длинной прямоугольной оболочки (мембраны), закрепленной вдоль длинной стороны.

Листовой материал принимается ортотропным с коэффициентами анизотропии $R_x = H/G$; $R_y = H/F$. Главные оси анизотропии – x , y , z .

Мембрана шириной $2a$, толщиной s нагружается давлением p , изменяющимся во времени по закону $p = p_0 + a_p t^{n_p}$ (рис. 7.1). Направление длинных сторон заготовки совпадает с осью x (с направлением прокатки).

В этом случае главные оси напряжений совпадают с главными осями анизотропии.

Предполагается, что деформирование осуществляется в режиме кратковременной ползучести. Поскольку длина мембраны значительно превосходит ее ширину, то можно считать, что реализуется случай плоской деформации, т.е. $\dot{\epsilon}_x = 0$.

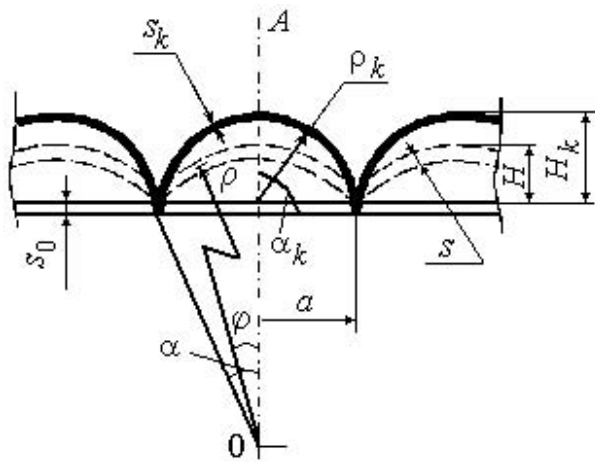


Рис. 7.1. Расчетная схема формоизменения

Рассматривая уравнения равновесия элемента мембраны (рис. 7.2) и принимая, что напряжения равномерно распределены по толщине заготовки, из равенства нулю суммы проекций сил, приложенных к элементу на нормаль z и касательную, получим

$$\sigma_y = \frac{p\rho}{s}; \quad d(\sigma_y s) = 0, \quad (7.26)$$

где σ_y – окружное напряжение; ρ – радиус кривизны срединной поверхности, s – толщина мембраны.

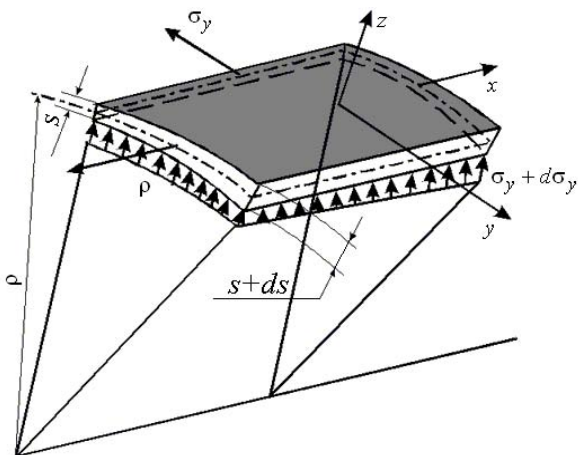


Рис. 7.2. Элемент, вырезанный из длинной узкой прямоугольной мембраны

Из второго уравнения системы (7.26) найдем

$$\sigma_y s = \text{const.} \quad (7.27)$$

Из соотношений (7.26) и (7.27) следует, что в случае равномерного давления ($p = \text{const}$) радиус кривизны срединной поверхности во всех ее точках один и тот же, т.е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с некоторым углом раствора 2α .

Радиальное напряжение, совпадающее по направлению с нормалью к срединной поверхности, для тонкой мембраны может быть приближенно принято равным нулю ($\sigma_z = \sigma_\rho \approx 0$), т.е. предполагаем, что реализуется плоское напряженное состояние.

Осевое напряжение в направлении длины мембраны определяем из условия $\dot{\epsilon}_x = 0$, при этом $\sigma_y = \sigma_\varphi$:

$$\sigma_x = \frac{R_x \sigma_\varphi}{1 + R_x} = \frac{R_x p \rho}{s(1 + R_x)}. \quad (7.28)$$

Интенсивность напряжений будет равна:

$$\sigma_i = D_1 \frac{p \rho}{s}, \quad (7.29)$$

$$\text{где } D_1 = \frac{1}{1 + R_x} \sqrt{\frac{3R_x(R_y + R_x) + R_y R_x}{2(R_x + R_x R_y + R_y)}}. \quad (7.30)$$

Перейдем к изучению деформаций, учитывая, что толщина мембраны изменяется вдоль дуги окружности. Приращение деформации в касательном к окружности направлении определяется по формуле

$$\dot{\epsilon}_\varphi dt = \frac{\rho + d\rho}{\rho} \frac{\varphi + d\varphi}{\varphi} - \rho\varphi = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\varphi}{\varphi}. \quad (7.31)$$

Скорость деформации вычисляется по выражению

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}, \quad (7.32)$$

где φ – текущий угол между вертикальной осью симметрии заготовки и радиусом-вектором, определяющим положение точки на срединной поверхности оболочки в данный момент.

Используя соотношение $\rho \sin \alpha = a$, определим

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\text{ctg } \alpha \dot{\alpha}. \quad (7.33)$$

Из рассмотрения рис. 7.3 можно найти

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{\sin \varphi \dot{\alpha}}{\varphi \sin \alpha}. \quad (7.34)$$

Окончательно уравнение (7.32) приводится к виду

$$\dot{e}_{\varphi} = \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi \sin \alpha} - \text{ctg } \alpha \right) \dot{\alpha}. \quad (7.35)$$

При деформации оболочки принимается, что на каждом этапе деформирования имеет место радиальное перемещение точки срединной поверхности относительно нового центра срединной поверхности в момент $t + dt$ (рис. 7.3), т.е. в направлении $\varphi + d\varphi$.

Используя условие несжимаемости

$$\dot{e}_{\varphi} + \dot{e}_{\rho} + \dot{e}_x = 0, \quad (7.36)$$

будем иметь

$$\dot{e}_{\varphi} = -\dot{e}_{\rho} = -\frac{\dot{s}}{s}. \quad (7.37)$$

Таким образом,

$$\frac{\dot{s}}{s} = -\frac{\sin \varphi}{\varphi} \frac{\dot{\alpha}}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \dot{\alpha}. \quad (7.38)$$

Интегрируя это уравнение по времени на этапе, получим

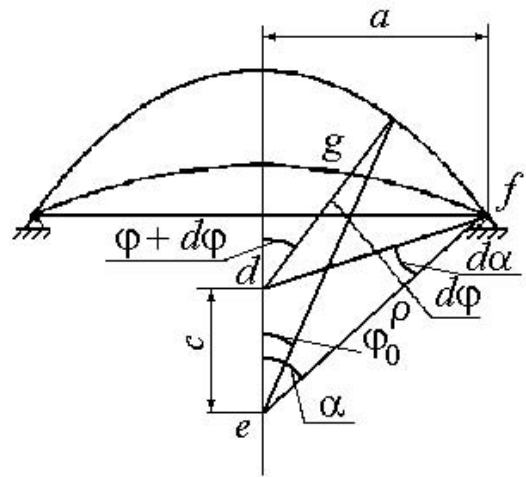


Рис. 7.3. Схема к расчету деформированного состояния срединной поверхности оболочки

$$s = s_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} e^{-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin \varphi d\alpha}{\varphi \sin \alpha}}, \quad (7.39)$$

где s_0 и α_0 – начальная толщина и угол на каждом этапе деформирования.

Следует иметь в виду, что величину угла φ необходимо определять по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + d\varphi; \quad d\varphi = \frac{\sin \varphi d\alpha}{\sin \alpha},$$

где φ_0 – начальный угол, характеризующий положение точки на каждом этапе деформирования.

Определим изменение толщины оболочки со временем деформации в центральной точке срединной поверхности оболочки при $\varphi = 0$. Для этого из выражения (7.39) при $\varphi \rightarrow 0$ получим с учетом, что $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$:

$$s = s_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2} / \cos^2 \frac{\alpha_0}{2}.$$

Так как $\alpha_0 = 0$, то

$$s = s_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (7.40)$$

Рассмотрим вопрос об изменении толщины оболочки от времени в месте ее закрепления, т.е. при $\varphi = \alpha$.

Из соотношения (7.39) следует, что

$$s = s_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \frac{\alpha_0}{\alpha}.$$

Поскольку $\alpha_0 = 0$, при предельном переходе $\alpha_0 \rightarrow 0$ получаем

$$s = s_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (7.41)$$

где h_0 – начальная толщина листовой оболочки.

Определим интенсивность скоростей деформации:

$$\dot{\epsilon}_i^c = C_1 \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \dot{\alpha}, \quad (7.42)$$

где $C_1 = \sqrt{2(R_x + R_x R_y + R_y)} [R_x R_y^2 + R_x R_y + R_x + R_x^2 + R_x^2 R_y^2]^{1/2}$:
 $:\sqrt{3} R_x R_y^{1/2} (R_x + R_y + 1)$. (7.43)

Силовые режимы и предельные возможности деформирования. Рассмотрим формоизменение оболочки из материала, подчиняющегося энергетической теории ползучести и повреждаемости, свойства которого в предположении, что $\sigma_i < \sigma_{i0}$, описываются уравнениями (7.24).

Подставив в первое из уравнений состояния материала (7.24) входящие величины σ_e и $\dot{\epsilon}_i$, получим

$$p^n dt = \frac{C_1 \sigma_{i0}^n (1 - \omega_A^c)^m s^n \sin \alpha^n \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi \sin \alpha} - \text{ctg } \alpha \right) d\alpha}{B D_1^n a^n}, \quad (7.44)$$

где s определяется по формуле (7.40).

Повреждаемость может быть найдена по второму соотношению (7.24):

$$\dot{\omega}_A^c = \frac{D_1 C_1 p a}{\sin \alpha s A_{np}^c} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi \sin \alpha} - \text{ctg } \alpha \right) \dot{\alpha}. \quad (7.45)$$

В нашем случае давление p равномерно распределено по поверхности оболочки, поэтому для расчета его величины во времени достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi = 0$. Кроме того, именно в этом направлении идет более интенсивное утонение толщины оболочки и накопление повреждаемости. При $\varphi \rightarrow 0$ уравнения (7.44) и (7.45) преобразуются следующим образом:

$$p^n dt = \frac{C_1 \sigma_{i0}^n (1 - \omega_A^c)^m s^n \sin \alpha^n \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \text{ctg } \alpha \right) d\alpha}{B D_1^n a^n}; \quad (7.46)$$

$$d\omega_A^c = \frac{D_1 C_1 p a}{\sin \alpha s A_{np}^c} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \text{ctg } \alpha \right) d\alpha. \quad (7.47)$$

Если формоизменение оболочки определяется давлением p , то система уравнений (7.46) и (7.47) решается совместно методом итераций, куда необходимо подставить $s = s_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Рассмотрим формоизменение оболочки из материала, подчиняющегося кинетическим уравнениям ползучести и повреждаемости (7.25).

Определим накопление повреждаемости ω_e^c . Для этого подставим выражение σ_i из первого уравнения состояния (7.25) во второе, получим значение

$$\dot{\omega}_e^c = \frac{k}{B} \dot{\epsilon}_i^c = \frac{k}{B} C_1 \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \text{ctg } \alpha \right) \dot{\alpha}, \quad (7.48)$$

которое справедливо при $\varphi = 0$.

Интегрируем это уравнение при начальных данных $t = 0, \omega_e^c = 0, \alpha = 0$:

$$\omega_e^c = \frac{k}{B} C_1 \ln \frac{1}{\cos^2 \alpha / 2}. \quad (7.49)$$

Угол α_* в момент разрушения найдем из уравнения (7.49) при $\omega_e^c = 1$:

$$\alpha_* = 2 \arccos e^{-B/(2kC_1)}. \quad (7.50)$$

Давление $p(t)$ может быть определено с использованием выражений (7.46) с заменой ω_A^c на ω_e^c и (7.49).

Задания для самоконтроля

1. Дайте понятие кратковременной ползучести.
2. Опишите повреждаемость материала при ползучести и меры ее оценки.
3. Запишите уравнения состояния материала при ползучести в случае неоднородного напряженного состояния.
4. Укажите области применения указанных выше теорий ползучести.
5. Запишите выражение для потенциала скоростей деформаций анизотропного материала и уравнения ассоциированного закона течения, зависимости скоростей деформаций от напряжений.

6. Опишите подход к построению феноменологических моделей разрушения при вязком (ползучем) течении материала.

7. Чем будут различаться феноменологические модели разрушения для изотропного и анизотропного материала?

8. В какой последовательности решается задача о свободном деформировании листовой заготовки из анизотропного материала?

Часть IV. ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

ДАВЛЕНИЕМ

Глава 8. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

8.1. Теория подобия и моделирование процессов обработки металлов давлением

Основные положения теории моделирования. Все новые и новые задачи, которые производство постоянно ставит перед инженерами, далеко не всегда поддаются теоретическим методам анализа. Физические явления, происходящие при обработке металлов давлением, сложны и приближенно описываются громоздкой системой дифференциальных уравнений. Решение этой системы уравнений в общем виде практически невозможно. Широкое использование современных методов теории пластичности (метода характеристик, вариационных методов и др.) до настоящего времени не привело к результатам, которые в достаточно полной мере удовлетворяли бы всем потребностям практики. Большинство из известных решений получаются в результате многочисленных допущений и математических упрощений и имеют частный, приближенный характер. Только умелое сочетание теоретических методов, эксперимента и знания особенностей данного производства позволяет инженеру своевременно и с высокой надежностью найти решения поставленных задач.

Для анализа процессов ОМД большое значение имеет лабораторный эксперимент. Обычно в условиях лаборатории изучаются особенности вновь создаваемых процессов, производится поиск оптимальных режимов деформации металлов. Но здесь возникает вопрос: каким образом можно перенести лабораторные данные, полученные на модели, на реальный (натурный) процесс? На этот вопрос дает ответ теория подобия и моделирования. Значительный вклад в решение этого вопроса внесли отечественные исследователи

В.М. Кирпичев,

А. Федерман, А.А. Гухман, П.Е. Жуковский, Л.И. Седов, А.А. Ильюшин, Э.С. Смирнов и др.

Всем понятны вопросы геометрического подобия: две геометрические фигуры подобны, если отношения их соответствующих размеров одинаковы. Если известен коэффициент подобия – масштаб, то простым умножением размеров одной геометрической фигуры (модели) на величину масштаба получаются размеры другой, ей подобной геометрической фигуры (натуры).

Механическое или вообще физическое подобие является обобщением геометрического подобия. Физические явления подобны, если по известным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом. Если при геометрическом моделировании пересчет осуществляется путем умножения размеров модели на масштаб, то при физическом моделировании, когда исследователя интересуют не геометрические размеры, а, например, силы, напряжения, работа, пересчет должен выполняться по определенным, более сложным правилам. В установлении правил пересчета и состоит задача моделирования.

Метод моделирования позволяет грамотно проводить экспериментальные исследования физических процессов. Этим методом можно на модели, уменьшенной или увеличенной по сравнению с натурой, иногда имеющей другую физическую природу, проводить качественное или количественное изучение процессов, протекающих в натуре, которая не всегда доступна для детального исследования, а в ряде случаев, когда создается новый процесс или оборудование, ее вообще нет.

Теория моделирования разрабатывается как в случае, когда процесс описывается известными дифференциальными уравнениями и соответствующими граничными условиями, так и когда процесс не имеет аналитического описания, с помощью анализа размерностей.

Существуют и специальные виды математического моделирования, при котором какие-либо физические процессы исследуют путем изучения аналогичных явлений, имеющих иное физическое содержание, но описываемых теми же математическими уравнениями. Это моделирование выполняется на вычислительных машинах непрерывного действия (аналоговых установках или моделирующих машинах) с использованием комплекса многих физических устройств – моделей, способных имитировать

разнообразные явления. Для математического моделирования наиболее удобны электрические модели.

Моделированием на основе теории подобия можно изучать:

- влияние деформации на изменение свойств и структуры металла;
- закономерности формоизменения металла;
- деформированное состояние металла в различных условиях обработки давлением;
- воздействие различных способов деформации на поведение деформируемого металла;
- влияние контактных условий на изменение свойств и поведения металла при его деформации;
- воздействие разных факторов на сопротивление деформации;
- распределение напряжений в очаге деформации и на контактных поверхностях и т.д.

Теоремы подобия. Необходимые и достаточные условия подобия сформулированы в трех основополагающих теоремах подобия [19].

Первая теорема определяет свойства, которыми должны обладать подобные явления. Она гласит, что если физические явления подобны друг другу, то все одноименные критерии подобия этих явлений имеют одинаковую величину.

Обозначая критерий через Π , получим для подобных явлений

$$\Pi = idem \text{ (подобно)}. \quad (8.1)$$

Критерии подобия – это независимые между собой безразмерные комплексы. Возведением в произвольную степень, умножением или делением друг на друга или на один из них, а также на постоянную величину можно получить иную систему критериев, но их число сохраняется. Первая теорема была доказана в 1848 году Ж. Бертраном.

Важно при этом отметить, что данные, полученные при исследовании какого-нибудь явления, могут быть перенесены только на явления, которые описываются одинаковыми уравнениями.

Вторая теорема подобия устанавливает, что, для того чтобы данные, полученные из опыта, можно было непосредственно распространить на подобные явления, эти данные следует обрабатывать в виде зависимости между критериями подобия. В связи с этим надо искать зависимость не между отдельными величинами, характеризующими явления, а между комплексами величин, представляющими критерии подобия.

Вторая теорема подобия утверждает, что всякое уравнение физического процесса может быть преобразовано в уравнение, выражающее однозначную связь между критериями подобия.

Уравнения, связывающие n физических величин, среди которых k величин имеют независимую размерность, всегда преобразуются к системе уравнений, в которую входят $n-k$ критериев подобия. Эта теорема была сформулирована и доказана А. Федерманом (1911 г.) и Ж. Букингемом (1914 г.).

Значение второй теоремы подобия состоит в том, что она позволяет находить критерии подобия и в тех случаях, когда уравнение связи неизвестно, но выяснены параметры исследуемого явления. Она получила название π -теоремы.

Третья теорема подобия сформулирована М.В. Кирпичевым и А.А. Гухманом. Согласно этой теореме, два явления подобны, если они описываются одной и той же системой уравнений, имеют подобные граничные условия (условие однозначности) и равные определяющие критерии подобия.

Первые две теоремы устанавливают соотношения между параметрами заведомо подобных явлений, третья – определяет признаки подобия явлений.

Если явление сложно и не удастся составить уравнение связи между параметрами процесса, то для поиска критериев подобия используются методы анализа размерностей. При этом необходимо определить систему размерностей и перечень параметров, существенных для процесса.

Формулы размерностей параметров преобразуются в степенные комплексы, и далее находится число и вид критериев подобия. Качество размерного анализа зависит от того, насколько правильно определены число и род параметров, существенных для процесса. Указаний, как подбирать эти параметры, теория размерностей не дает. Методы анализа размерностей не определяют достаточных условий подобия, что может привести к опасности чрезмерно широких обобщений.

Однако если исходные предпосылки сформулированы правильно, то анализ размерностей дает верные результаты.

Методы нахождения критериев подобия. Если физический процесс имеет математическое описание в виде системы исходных уравнений и условий однозначности, то критерии подобия могут быть получены методами подобных преобразований этой системы.

В случае моделирования пластической деформации необходимо рассмотреть полную систему дифференциальных уравнений теории пластичности и соответствующие граничные условия.

Моделирование процессов холодной штамповки. Основные уравнения. Формулировки граничных условий. Рассмотрим моделирование процесса холодной штамповки.

Для простоты примем, что материал обладает свойством идеальной пластичности. Ограничимся случаем изотермической деформации достаточно медленного течения.

Полная система дифференциальных уравнений теории пластического течения Леви – Мизеса включает в себя:

– *уравнения связи между напряжениями и скоростями деформации*

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma &= \frac{2\tau_s}{H} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \tau_{xy} &= \frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ \sigma_{yy} - \sigma &= \frac{2\tau_s}{H} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \tau_{yz} &= \frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \\ \sigma_{zz} - \sigma &= \frac{2\tau_s}{H} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \tau_{zx} &= \frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

или сокращенно
$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{2\tau_s}{H} \dot{e}_{ij}; \quad (8.2')$$

– уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma + \frac{2\tau_s}{H} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma + \frac{2\tau_s}{H} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma + \frac{2\tau_s}{H} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

или сокращенно
$$\left(\frac{2\tau_s}{H} \dot{e}_{ij} + \sigma \delta_{ij} \right)_j = 0; \quad (8.3')$$

– соотношения Коши

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \dot{e}_{xy} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ \dot{e}_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \dot{e}_{yz} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \\ \dot{e}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \dot{e}_{zx} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

или сокращенно
$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad (8.4')$$

– условие несжимаемости

$$\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz} = 0, \quad (8.5)$$

где
$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3};$$

$$H = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_{yy})^2 + (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_{zz})^2 + (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_{xx})^2} + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)};$$

\dot{e}_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций; v_i – скорость течения материала; τ_s – предел текучести на сдвиг.

Для определения девяти неизвестных σ_{ij} и v_i имеется девять уравнений, т.е. эта система уравнений является полной.

Сформулируем граничные условия. Пусть для определенности рассматривается моделирование операции осадки (рис. 8.1).

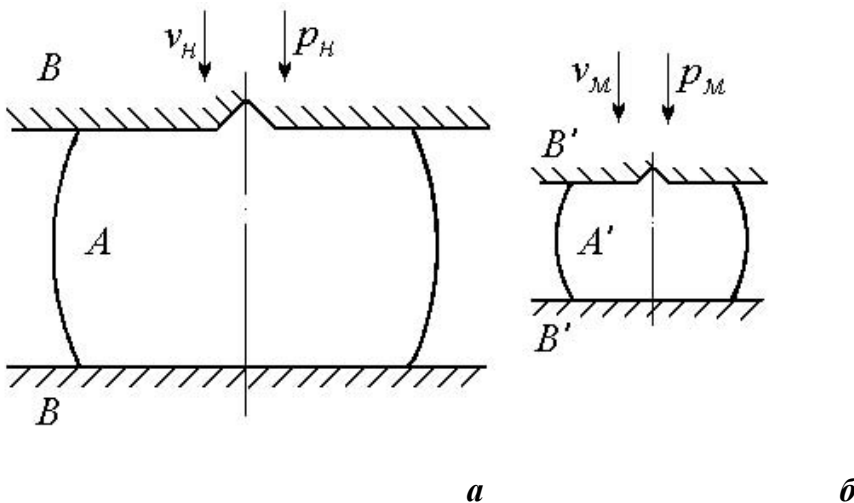


Рис. 8.1. Схема осадки заготовки произвольной формы к выводу условий подобия и моделирования: а – натуральный процесс; б – модель

Тогда граничные условия исследуемого процесса таковы: на свободной поверхности s_F

$$F_i^H = F_i^M = 0; \quad (8.6)$$

на контактной поверхности инструмента s_k

$$v_n^H = v_n^M, \quad \tau_k = m_s \tau_s. \quad (8.7)$$

Поверхность s_v , на которой задана скорость течения материала, а напряжения неизвестны, отсутствует.

Для получения критериев подобия приведем уравнения (8.2), (8.3), (8.6), (8.7) к безразмерному виду. Для этого необходимо все размерные переменные задачи привести к безразмерному виду, выбрав в качестве масштабов характерные параметры процесса. Например, введем:

безразмерные напряжения

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\tau_s}; \quad (8.8)$$

безразмерные скорости

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v}; \quad (8.9)$$

безразмерные координаты

$$\bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad (8.10)$$

где v – скорость движения верхнего штампа; l, b, h – соответственно длина, ширина, высота заготовки.

Уравнение связи между напряжениями и скоростями деформаций (8.2) теперь преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma} &= \frac{v \partial \bar{v}_x}{l \partial \bar{x}}; & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{v \partial \bar{v}_x}{b \partial \bar{y}} + \frac{v \partial \bar{v}_y}{l \partial \bar{x}}; \\ \bar{\sigma}_{yy} - \bar{\sigma} &= \frac{v \partial \bar{v}_y}{b \partial \bar{y}}; & \bar{\tau}_{yz} &= \frac{v \partial \bar{v}_y}{h \partial \bar{z}} + \frac{v \partial \bar{v}_z}{b \partial \bar{y}}; \\ \bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma} &= \frac{v \partial \bar{v}_z}{h \partial \bar{z}}; & \bar{\tau}_{zx} &= \frac{v \partial \bar{v}_z}{l \partial \bar{x}} + \frac{v \partial \bar{v}_x}{h \partial \bar{z}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad & \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \frac{v}{l} - \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \frac{v}{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \frac{v}{b} - \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} \frac{v}{h} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} \frac{v}{h} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \frac{v}{l} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \frac{v}{b} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} \frac{v}{l} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}} \frac{v}{h} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}} \frac{v}{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \frac{v}{l} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} \frac{v}{h} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned} \quad (8.12)$$

Вынесем из-под радикала множитель v/h , тогда формулы (8.11) и (8.12) приобретут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma} &= \frac{h \partial \bar{v}_x}{l \bar{H}}; & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h \partial \bar{v}_x}{b \partial \bar{y}} + \frac{h \partial \bar{v}_y}{l \partial \bar{x}}; \\ \bar{\sigma}_{yy} - \bar{\sigma} &= \frac{h \partial \bar{v}_y}{b \bar{H}}; & \bar{\tau}_{yz} &= \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{h \partial \bar{v}_z}{b \partial \bar{y}}; \\ \bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma} &= \frac{\partial \bar{v}_z}{\bar{H}}; & \bar{\tau}_{zx} &= \frac{h \partial \bar{v}_z}{l \partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

$$\text{где} \quad \bar{H} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{h}{l} - \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{h}{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{h}{b} - \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{h}{l} \right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{h}{b} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{h}{l} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{h}{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{h}{l} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.14)$$

Аналогично приведем уравнения равновесия (8.3) к безразмерному виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h}{l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\sigma} + \frac{h}{H} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{h}{b} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\frac{h}{b} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} + \frac{h}{l} \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}}}{2\bar{H}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\frac{h}{l} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}}{2\bar{H}} \right) &= 0; \\ \frac{h}{l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\frac{h}{b} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} + \frac{h}{l} \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}}}{2\bar{H}} \right) + \frac{h}{b} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{\sigma} + \frac{h}{H} \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{h}{b} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}}}{2\bar{H}} \right) &= 0; \\ \frac{h}{l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\frac{h}{l} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}}{2\bar{H}} \right) + \frac{h}{b} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{h}{b} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}}}{2\bar{H}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{\sigma} + \frac{\partial \bar{v}_z}{H} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Граничные условия в безразмерном виде будут:

на поверхности s_F

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} n_x + \bar{\tau}_{yx} n_y + \bar{\tau}_{zx} n_z &= 0; \\ \bar{\tau}_{xy} n_x + \bar{\sigma}_{yy} n_y + \bar{\tau}_{zy} n_z &= 0; \\ \bar{\tau}_{zx} n_x + \bar{\tau}_{yz} n_y + \bar{\sigma}_{zz} n_z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

на поверхности s_v

$$\bar{v}_x n_x + \bar{v}_y n_y + \bar{v}_z n_z = 0, \quad (8.17)$$

где n_i – направляющие косинусы нормали к поверхности инструмента.

Таким образом, решение краевой задачи, описывающей исследуемый процесс, должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (8.13), (8.15), а также граничным условиям (8.16) и (8.17), записанным в безразмерном виде.

Критерии подобия процессов холодной штамповки.
 Обозначим: α – решение рассматриваемой задачи относительно любой из искомых величин $\bar{\sigma}_{ij}$ или \bar{v}_i :

$$\alpha = \alpha \left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \frac{h}{l}, \frac{h}{b}, n_x, n_y, n_z, \Psi_n \right). \quad (8.18)$$

Сходственными точками природы и модели назовем такие точки, относительные координаты которых одинаковы:

$$\bar{x}_H = \bar{x}_M; \quad \bar{y}_H = \bar{y}_M; \quad \bar{z}_H = \bar{z}_M.$$

Основной закон подобия требует, чтобы напряженно-деформированное состояние ($\bar{\sigma}_{ij}$ и \bar{v}_i) в сходственных точках модели и природы было одинаково: $\alpha_H = \alpha_M$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы все аргументы функций (8.18) у природы и модели были одинаковы:

$$\left(\frac{h}{l} \right)_H = \left(\frac{h}{l} \right)_M; \quad \left(\frac{h}{b} \right)_H = \left(\frac{h}{b} \right)_M; \quad n_{x_H} = n_{x_M}; \quad n_{y_H} = n_{y_M};$$

$$(n_z)_H = (n_z)_M \quad - \text{ в любой сходственной точке природы и модели, } m_{sH} = m_{sM}.$$

Другими словами, природа и модель должны быть геометрически подобны, и должны быть одинаковы коэффициенты прандлева трения m_s .

Аргументы в выражении (8.18), кроме безразмерных координат, называются критериями подобия. Следует заметить, что моделирование необязательно осуществлять на том же материале.

Установленный закон подобия помогает рассчитать механические переменные натуре, если они известны в результате лабораторного эксперимента для модели.

Рассмотрим определение механической переменной – удельного давления на инструмент p . Условия подобия при моделировании соблюдены: натура и модель геометрически подобны, а коэффициенты трения m_s одинаковы. Тогда в сходственных точках

$$\bar{p}_H = \bar{p}_M \quad \text{или} \quad \frac{P_H}{2\tau_{s_H}} = \frac{\bar{P}_M}{2\tau_{s_M}},$$

т.е.
$$\frac{P_H}{P_M} = \frac{\tau_{s_H}}{\tau_{s_M}}. \quad (8.19)$$

Таким образом, удельные давления на инструмент натуре и модели относятся друг к другу так же, как и пределы текучести натуре и модели.

Для практических целей представляет большой интерес установление правил пересчета некоторых интегральных характеристик: силы деформации, мощности, работы и т.п.

Рассмотрим силу осадки (см. рис. 8.1):

$$P = \int_{s_k} f_z ds,$$

где s_k – поверхность соприкосновения штампа и заготовки; f_z – вертикальная составляющая полного напряжения на контактной площадке.

Согласно теореме о среднем: $P = f_{z_{cp}} \cdot s_k$, для натуре и модели можем записать:

$$P_H = f_{z_{cp}}^H \cdot s_{k_H}; \quad P_M = f_{z_{cp}}^M \cdot s_{k_M}.$$

Безразмерные напряжения в сходственных точках равны:

$$\frac{f_{z_{cp}}^H}{2\tau_{s_H}} = \frac{f_{z_{cp}}^M}{2\tau_{s_M}} \quad \text{или} \quad \frac{P_H}{P_M} = \frac{f_{z_{cp}}^H}{f_{z_{cp}}^M} \cdot \frac{s_{k_H}}{s_{k_M}} = \frac{\tau_{s_H}}{\tau_{s_M}} \cdot \frac{s_{k_H}}{s_{k_M}}.$$

Если материал модели и натуре одинаков, то
$$\frac{P_H}{P_M} = \frac{s_{k_H}}{s_{k_M}}.$$

Примем масштаб моделирования $m = \frac{l_n}{l_m} = \frac{b_n}{b_m} = \frac{h_n}{h_m}$, тогда

$$\frac{P_n}{P_m} = m^2. \quad (8.20)$$

Если материал модели и природы разный, то

$$\frac{P_n}{P_m} = m^2 \frac{\tau_{s_n}}{\tau_{s_m}}. \quad (8.21)$$

Рассмотрим мощность деформирования $N = P \cdot v$.

Соотношение мощностей деформации природы и модели с одинаковым пределом текучести будет следующее:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{P_n}{P_m} \cdot \frac{v_n}{v_m} = m^2 \frac{v_n}{v_m}.$$

Учитывая, что

$$\frac{v_n}{v_m} = \frac{\left(\frac{dh}{dt}\right)_n}{\left(\frac{dh}{dt}\right)_m} = \frac{dh_n}{dh_m} = m,$$

получим

$$\frac{N_n}{N_m} = m^3. \quad (8.22)$$

Таким образом, если модельные испытания проводились на том же материале, который подвергается в натуральных условиях обработке давлением, и геометрические размеры модели были в m раз меньше, чем природы, то сила на инструмент в природе будет в m^2 раз больше, чем в модели, при скорости природы в m раз больше, чем в модели, мощность обработки и затраты энергии будут в m^3 раз больше, чем в модели.

Формулы (8.19), (8.20), (8.22) известны в литературе по обработке металлов давлением под названием закона подобия при деформации геометрически подобных тел [19].

Моделирование скоростных процессов холодной пластической деформации. Рассмотрим случай моделирования скоростных процессов пластической деформации, материал будем считать идеально пластическим, скоростное упрочнение во внимание принимать не будем, процесс рассматриваем как изотермический, соответствующий холодной деформации.

Отличие полной системы уравнений для этой задачи от случая, рассмотренного выше, состоит в том, что вместо уравнений равновесия используются уравнения движения.

Например:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma + \frac{2\tau_s}{H} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_s}{H} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] = \rho \frac{dv_x}{dt}. \quad (8.23)$$

Начальные условия для определенности примем нулевыми. Введем безразмерные переменные по формулам (8.8) – (8.10), а также $\bar{t} = t/t_0$, где t_0 – некоторое характерное время. Удобно в качестве характерной скорости v принять скорость штампа в момент встречи с заготовкой v_0 , тогда t_0 можно принять равным, например, $t_0 = h/v_0$. Перейдя в уравнении (8.23) к безразмерным характеристикам, найдем, что наряду с критериями подобия, которые были установлены ранее, для выполнения подобия модельного эксперимента быстрого течения должен выполняться еще один критерий:

$$\frac{\rho v_0^2}{\tau_s} = idem. \quad (8.24)$$

При проектировании модельного эксперимента несложно выполнить требования о геометрическом подобии и равенстве коэффициентов трения для модели и натуре. Удовлетворить критерию (8.24) $\left(\frac{\rho v_0^2}{\tau_s} \right)_m = \left(\frac{\rho v_0^2}{\tau_s} \right)_n$ сложнее. Потребуем, чтобы выполнялось условие о геометрическом подобии с масштабом m во все время деформации. Тогда

$\frac{v_{0_n}^2}{v_{0_m}^2} = m^2$.

В этом случае масштаб моделирования, плотность и сопротивление деформации для модели и природы будут связаны между собой соотношением

$$m = \sqrt{\frac{\rho_m \cdot \tau_{s_n}}{\rho_n \cdot \tau_{s_m}}} \quad (8.25)$$

Масштаб моделирования не может быть любым, он должен быть выбран в соответствии с условием (8.25). Для того чтобы m был больше единицы, необходимо модельный материал выбрать «помягче», чем натура, и тяжелее. В этом отношении удобен для моделирования свинец и его сплавы. Моделирование скоростных процессов на материале природы невозможно, т.е. в этом случае масштаб моделирования равен единице.

Моделирование горячей пластической деформации. Рассмотрим вопрос моделирования горячей пластической деформации.

Принимаем течение медленным, учтем скоростное упрочнение металла и тепловой эффект. Нужно отметить, что материал, деформируемый в горячем состоянии, не подчиняется условию идеальной пластичности. В физических уравнениях связи напряжений и скоростей деформаций

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{2T(N, \theta)}{N} e_{ij} \quad (8.26)$$

существенную роль играет функция $T = T(N, \theta)$, описывающая единую кривую зависимости сопротивления деформации T от скорости деформации N и температуры θ . Применим безразмерные величины для напряжений (8.8), полагая, что τ_s – предел текучести при сдвиге в условиях статических испытаний ($N \rightarrow 0$). Тогда

$$\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma} \delta_{ij} = \frac{T(N, \theta)}{\tau_s N} e_{ij}. \quad (8.27)$$

Считаем, что единую кривую как для модели, так и для природы можно описать формулой

$$T = \tau_s + AH^B, \quad (8.28)$$

в которой τ_s, A, B – функции температуры.

Решая совместно (8.27) и (8.28) и учитывая (8.12), (8.14), получим

$$\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}\delta_{ij} = \left[1 + \frac{A}{\tau_s} \left(\frac{v_0}{h} \right)^B \bar{H}^B \right] \frac{\bar{e}_{ij}}{\bar{H}}, \quad (8.29)$$

где $\bar{e}_{ij} = h\dot{e}_{ij}/v_0$; $\bar{H} = hH/v_0$; v_0 – скорость встречи бойка с заготовкой.

Моделирование требует, чтобы во всех соответственных точках $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \bar{H}$ были одинаковыми как для модели, так и для природы. Этого можно достичь только в случае, если за критерий подобия в формулах (8.29) принять

$$R_1 = \frac{A}{\tau_s} \left(\frac{v_0}{h} \right)^B = idem. \quad (8.30)$$

Обратимся к дифференциальному уравнению теплового баланса:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + TH = \rho c \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (8.31)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, ккал/(м.ч.град); c – коэффициент удельной теплоемкости, ккал/(град.кг).

В последнем выражении после умножения на dt справа получится количество тепла, идущее на повышение температуры в единице объема тела за время dt , а слева – количество тепла, поступившее за счет теплопроводности и выделения тепла при пластической деформации. Введем безразмерные величины по формулам (8.8) – (8.10),

$$(8.14),$$

а также

$$\bar{T} = \frac{T}{2\tau_s}; \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{h} v_0,$$

где v_0 – скорость встречи штампа с заготовкой; θ_0 – характерная температура, например, температура заготовки перед осадкой, равномерная по деформируемому телу.

Уравнение (8.31) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{2\tau_s v_0 h}{\lambda \theta_0} \bar{T} \bar{H} = \\ & = \frac{\rho c v_0 h}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} + \frac{h}{l} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \frac{h}{b} \bar{v}_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Основная теорема подобия требует, чтобы в соответственных точках и в сходственные моменты времени безразмерные переменные $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\theta}$, \bar{H} , \bar{v}_i , \bar{T} для модели и натуры были одинаковыми. Решение уравнения (8.32) для модели и натуры относительно θ будет одинаковым, если коэффициенты этого уравнения одинаковы для модели и натуры. А это значит, что модель и натура должны быть геометрически подобны, в сходственных точках должны быть одинаковы \bar{T} , \bar{H} , \bar{v}_i и, кроме того, должны выполняться следующие критерии подобия:

$$R_2 = \frac{\tau_s v_0 h}{\lambda \theta_0} = idem; \quad (8.33)$$

$$R_3 = \frac{\rho c v_0 h}{\lambda} = idem. \quad (8.34)$$

Обратимся теперь к граничным условиям тепловой части задачи.

Боковая поверхность заготовки теряет тепло излучением и конвективным образом. Однако эти потери не столь велики по сравнению с потерями в месте контакта заготовки с холодным инструментом. В дальнейшем для простоты не будем учитывать потери тепла через боковую поверхность:

$$\partial \theta / \partial n = 0 \quad (8.35)$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{n}} = 0. \quad (8.36)$$

Условие (8.36) идентично как для модели, так и для природы. Из этого соотношения не вытекает никаких дополнительных критериев. На контактной поверхности имеет место скольжение деформируемого материала по инструменту, мощность этого теплового источника, действующего на единицу поверхности, составит $m_s \tau_s v_s$, где v_s – скорость скольжения. Тепловой поток из горячей заготовки A в инструмент B балансируется с выделением тепла от трения:

$$m_s \tau_s v_s - \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_A + \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_B = 0, \quad (8.37)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности заготовки.

Кроме того, можно считать, что на контактной поверхности температура деформируемого тела A и инструмента B одинакова:

$$\theta_A = \theta_B. \quad (8.38)$$

Условие (8.38) при моделировании и натуральном эксперименте удовлетворяется автоматически, и поэтому из него не вытекает каких-либо критериев.

Выделим критерий подобия из условия (8.37). Примем безразмерную нормаль и скорость скольжения: $\bar{n} = n/h$; $\bar{v}_s = v_s/v_0$. Тогда условие (8.37) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\frac{m_s \tau_s v_0 h}{\lambda_A \theta_0} \bar{v}_s - \frac{\partial \bar{\theta}_A}{\partial \bar{n}} + \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{n}} = 0. \quad (8.39)$$

Для того чтобы условие (8.39) было одинаковым для модели и для природы и соответствующие температуры в соответствующих точках равны, кроме равенства коэффициентов трения m_s и удовлетворения критерия подобия R_2 , следует потребовать идентичности еще одного критерия:

$$R_4 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = idem, \quad (8.40)$$

т.е. отношение коэффициентов теплопроводности инструмента и деформируемого тела должно быть равным в модели и натуре.

Соответствующая температура инструмента до опыта в модели и натуре должна быть одинаковой:

$$\begin{aligned} \theta_A(x, y, z)|_{t=0} &= \theta_0 = \text{const}; \\ \theta_B(x, y, z)|_{t=0} &= \theta_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

В безразмерном виде эти начальные условия составят:

$$\bar{\theta}_A|_{t=0} = 1; \quad \bar{\theta}_B|_{t=0} = \frac{\theta_1}{\theta_0},$$

т.е. эксперимент должен быть построен так, чтобы для модели и природы в инструменте начальная температура была бы такой, чтобы

$$R_5 = \frac{\theta_1}{\theta_0} = idem. \quad (8.41)$$

Таким образом, для того чтобы осуществить модельный эксперимент по горячей деформации металла, необходимо подобрать следующие условия опыта: модель должна быть геометрически подобна натуре, модель и натура должны иметь одинаковые коэффициенты трения, соответственные начальные температуры модели и природы должны быть одинаковы, а также должны выполняться критерии подобия R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 . Подбор материала модели, который бы удовлетворял всем требованиям, – сложная задача.

Рассмотрим случай, когда материал модели и природы один и тот же. В этом случае

$$A_n = A_m; \quad B_n = B_m; \quad \tau_{s_n} = \tau_{s_m}; \quad \lambda_{A_n} = \lambda_{A_m}; \quad \lambda_{B_n} = \lambda_{B_m}; \quad \rho_n = \rho_m; \quad c_n = c_m.$$

Температура натуры и модели в исходном состоянии одинакова. Критерии подобия в этом случае приобретут вид

$$R'_1 = \left(\frac{v_0}{h} \right)_n = \left(\frac{v_0}{h} \right)_m ; \quad (8.42)$$

$$R'_2 = R'_3 = \overleftarrow{C_0 h} = \overleftarrow{C_0 h} . \quad (8.43)$$

Критерии подобия R_4 и R_5 удовлетворяются автоматически.

Легко видеть, что эти критерии противоречивы и удовлетворить их одновременно невозможно. Действительно, пусть моделирование осуществляется в меньшем масштабе, т. е. $h_H > h_M$. Из условия (8.42) следует, что в модельном опыте должно быть $v_{0_m} < v_{0_n}$ во столько же раз, во сколько $h_H > h_M$. Но это противоречит условию (8.43), согласно которому если мы уменьшим размеры модели, то во столько же раз должны увеличить скорость v_0 .

Однако иногда модельный эксперимент на том же материале возможен. Если скоростное упрочнение невелико (его можно не принимать в расчет), то условие (8.42) можно исключить и опыт проектировать только с условием (8.43). Такое предположение оправдывается тем, что многие металлы проявляют заметные скоростные упрочнения в результате изменения скорости деформации на порядок и выше.

В других случаях, когда температурные условия не играют существенного значения, из двух противоречащих условий выбирают только (8.42). Так бывает при изучении механических свойств металлов при высоких температурах. опыты стремятся провести в условиях, близких к изотермическим, предупреждая различными мерами охлаждение образца. В этом случае теплового «движения» практически нет, и его влияние не принимают в расчет.

8.2. Теория размерностей

Общие положения. Если явление столь сложно, что его изучению не может предшествовать формулировка соответствующей системы уравнений, граничных и начальных условий, а тем более их решение и установление связей между параметрами процесса, то изучение данного явления осуществляется экспериментально, а для отыскания критериев подобия используются методы анализа размерностей. Эти методы помогают также исследователю существенно сократить число переменных, которые приходится варьировать в процессе эксперимента. Методы анализа размерностей, правда, не определяют достаточных условий подобия, что может привести к опасности чрезмерно широких обобщений. Однако если исходные предпосылки сформулированы правильно, то анализ размерностей дает верные результаты [19].

Каждой физической величине соответствует определенная единица измерения. В механике используют три основные единицы измерения, а именно: длины, массы и времени – L , M , T . Остальные единицы называются производными. Например, единицы скорости и напряжения выражаются через три основные. Скорость имеет размерность LT^{-1} , размерность силы из закона Ньютона – $F = ma - MLT^{-2}$, а напряжение – $MT^{-2}L^{-1}$.

В формулы размерности физических величин размерности основных единиц измерения входят в степенях.

Размерностью называется выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения. Если изучаются, наряду с механическими категориями, термодинамические явления, то к основным единицам измерения можно добавить единицы измерения температуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ. РАССМОТРИМ С ПОЗИЦИИ МЕТОДА АНАЛИЗА

РАЗМЕРНОСТЕЙ ЗАДАЧУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ПУТЕМ S , ПРОХОДИМЫМ СВОБОДНО ПАДАЮЩИМ ТЕЛОМ, ВРЕМЕНЕМ ПАДЕНИЯ T И ДРУГИМИ ОБСТОЯТЕЛЬСТВАМИ. В СВОЕ ВРЕМЯ ГАЛИЛЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО ДОКАЗАЛ, ЧТО ЭТОТ ПУТЬ МОЖНО НАЙТИ ПО ФОРМУЛЕ

$$S = \frac{1}{2} g t^2, \quad (8.44)$$

где g – ускорение силы тяжести.

Будем считать, что формула (8.44) неизвестна, и «получим» ее методом анализа размерностей.

Первым этапом решения является выявление физических величин, от которых зависит изучаемое явление.

Очевидно, что S зависит от времени t и от ускорения силы тяжести g . Это означает, что S является искомой функции

$$S = f(g, t), \quad (8.45)$$

Наша цель состоит в отыскании вида этой функции. Искомую функцию можно представить в виде отрезка степенного ряда:

$$S = c_1 g^a t^b + c_2 g^{a'} t^{b'} + \dots, \quad (8.46)$$

где c_1, c_2, \dots , – неизвестные безразмерные коэффициенты.

Метод размерностей требует, чтобы каждый одночлен этого уравнения имел одинаковые размерности длины, массы и времени.

Так как размерность S есть L , $g - L \cdot T^{-2}$, $t - T$, то из (8.46) вытекает следующее уравнение размерностей:

$$L = (L \cdot T^{-2})^a \cdot T^b,$$

или

$$L = L^a \cdot T^{b-2a}.$$

Неизвестные показатели степени a и b определяются согласно основному принципу теории размерностей: любое уравнение, однотипное с вышеприведенным, должно быть однородным по размерностям, то есть показатели при основных единицах должны быть одинаковыми в каждом члене уравнения. Следовательно, налицо следующая система из двух уравнений:

$$\text{для показателей при } L \quad 1 = a;$$

$$\text{для показателей при } T \quad 0 = b - 2a.$$

Решим эту систему уравнений и получим $a = 1$, $b = 2$.

Следовательно, искомая функция имеет вид

$$S = cgt^2. \quad (8.47)$$

Оценка численного коэффициента c методами размерностей невозможна. Его следует определить экспериментально. Нужно ограничиться всего лишь одним опытом, определить из него S и t . Тогда найдем из последнего выражения: $c \cong 1/2$.

Метод анализа размерностей значительно облегчает труд экспериментатора, освободив его от серии опытов, в которых он должен был от опыта к опыту варьировать время падения, ускорение силы тяжести (в земных условиях это сделать трудно), замеряя в каждом опыте путь падения S .

Отдавая должное простоте и эффективности метода анализа размерностей, не следует переоценивать возможности этого метода. Не всегда столь просто можно представить зависимости исследуемой величины от параметров, как это было в предыдущем примере. Одного члена ряда (8.46) может оказаться недостаточно для хорошего аналитического описания процесса. Выбирая основные факторы или физические параметры, от которых зависит исследуемая величина, можно допустить просчет и не включить в перечень какую-либо важную переменную.

Таким образом, метод анализа размерностей состоит из следующих этапов:

1. Перечисляются факторы, от которых может зависеть исследуемая величина.
2. Составляется степенной одночлен предполагаемой зависимости.
3. Пишется уравнение размерностей этого одночлена.
4. Приравнивая показатели степени при размерностях основных единиц в правой и левой частях уравнения размерностей, получают систему уравнений, которая позволяет либо определить показатели степени, либо существенно уменьшить число неизвестных показателей степени.
5. Возвращаются к одночлену, заменяя конкретными значениями его показатели степени.

**РАСЧЕТ УШИРЕНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ЕГО ПРОКАТКЕ
МЕЖДУ ВАЛКАМИ. РАССМОТРИМ ВОПРОС ОБ
ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ МЕТОДОМ
АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ
РАСЧЕТА УШИРЕНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ЕГО ПРОКАТКЕ
МЕЖДУ ВАЛКАМИ [19]. ПРИ ПРОКАТКЕ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ УШИРЕНИЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ
ВЕЛИЧИНОЙ**

$$\Delta b = b_1 - b_0, \quad (8.48)$$

где b_1 и b_0 – ширина полосы после и до прокатки.

Выберем величины, от которых зависит уширение:

$$\Delta b = f(b_0, h_0, \Delta h, D, p, \tau) \quad (8.49)$$

где b_0, h_0 – размеры полосы до прокатки; Δh – обжатие; D – диаметр валков; p, τ – нормальное и касательное напряжение на поверхности контакта полосы с валком.

Функцию (8.49) можно представить в виде отрезка степенного ряда:

$$\Delta b = \sum_{i=1}^n c_i \cdot b_0^{\alpha_i} \cdot h_0^{\beta_i} \cdot \Delta h^{\gamma_i} \cdot D^{\delta_i} \cdot p^{\varepsilon_i} \cdot \tau^{\lambda_i}. \quad (8.50)$$

Каждое из слагаемых должно быть одной размерности и соответствовать размерности $\Delta b(L)$.

Для произвольного i -го члена ряда можно записать уравнение размерностей:

$$L = L^{\alpha_i} L^{\beta_i} L^{\gamma_i} L^{\delta_i} M^{\varepsilon_i} T^{-2\varepsilon_i} L^{-\varepsilon_i} M^{\lambda_i} T^{-2\lambda_i} L^{-\lambda_i} \quad (8.51)$$

из которого вытекают три уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } L - 1 = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i - \varepsilon_i - \lambda_i; \\ M - 0 = \varepsilon_i + \lambda_i; \\ T - 0 = -2\varepsilon_i - 2\lambda_i. \end{array} \right\} \quad (8.52)$$

Последние два уравнения линейно зависимы, из них следует, что $\varepsilon_i = -\lambda_i$. От системы уравнений (8.52) остается одно уравнение:

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i = 1.$$

Решаем его относительно β_i :

$$\beta_i = 1 - \alpha_i - \gamma_i - \delta_i.$$

Следовательно, соотношение (8.50) можно переписать в виде

$$\Delta b = \sum_{i=1}^n c_i \cdot b_0^{\alpha_i} \cdot h_0^{1-\alpha_i-\gamma_i-\delta_i} \Delta h^{\gamma_i} \cdot D^{\delta_i} \cdot p^{-\lambda_i} \cdot \tau^{\lambda_i},$$

или

$$\Delta b = \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{b_0}{h_0} \right)^{\alpha_i} \cdot \left(\frac{\Delta h}{h_0} \right)^{\gamma_i} \cdot \left(\frac{D}{h_0} \right)^{\delta_i} \cdot \left(\frac{\tau}{p} \right)^{\lambda_i} \cdot h_0.$$

Полагая, что $\tau = \mu p$, получаем окончательную формулу уширения:

$$\frac{\Delta b}{\Delta h} = \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{b_0}{h_0} \right)^{\alpha_i} \left(\frac{\Delta h}{h_0} \right)^{\gamma_i-1} \left(\frac{D}{h_0} \right)^{\delta_i} \mu^{\lambda_i}. \quad (8.53)$$

Отсюда следует: если натура и модель геометрически подобны, то из условия $\Delta b / \Delta h = idem$ вытекают критерии подобия:

$$\frac{b_0}{h_0} = idem; \quad \frac{\Delta h}{h_0} = idem; \quad \frac{D}{h_0} = idem; \quad \mu = idem. \quad (8.54)$$

Чтобы убедиться в правильности уравнения (8.53), проверим его в соответствии с требованиями π -теоремы учения о размерностях (см. разд. 8.1).

Общее число n величин, входящих в уравнение (8.50), равно 7.

Число k величин с независимыми размерностями – 3.

Поэтому согласно π -теореме число критериев подобия должно быть равно:

$$t_n = n - k = 7 - 3 = 4.$$

Таким образом, уравнение связи между критериями подобия (8.53) является правильным, поскольку оно находится в соответствии с π -теоремой.

Из выражения (8.53) можно получить много формул, придавая конкретные значения параметрам $c_i, \lambda_i, \gamma_i, \delta_i, \lambda_i$. Выбор этих параметров может быть произвольным, и каждый раз они будут соответствовать правилам анализа размерностей. На практике эти параметры подбирают, исходя из лучшей аппроксимации опытных данных.

Если примем $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0, \alpha_i = \delta_i = \lambda_i = 0, \gamma_i = 1,$

то получим простейшую эмпирическую формулу:

$$\frac{\Delta b}{\Delta h} = c_1, \quad \text{или} \quad \Delta b = c_1 \Delta h. \quad (8.55)$$

Коэффициент c_1 подбирается из опытных данных. Формула справедлива в довольно узких пределах изменения условий прокатки.

Таким образом, метод анализа размерностей позволяет установить обоснованность той или иной эмпирической формулы. Правильная формула должна быть частным случаем выражения (8.53).

Задания для самоконтроля

1. Чем отличается физическое подобие от геометрического?
2. Возможно ли разрабатывать теорию моделирования процесса, когда он не имеет аналитического описания?
3. Какие теории подобия вам известны?
4. Дайте понятия критериев подобия.
5. Методы нахождения критериев подобия.
6. Укажите критерии подобия процессов холодной штамповки.
7. Какие трудности возникают при моделировании скоростных процессов холодной пластической деформации?
8. Расскажите о возможности моделирования горячей пластической деформации.
9. Каким образом преодолеваются противоречия некоторых критериев подобия?
10. Изложите сущность теории размерностей.
11. Приведите пример определения критериев подобия методом анализа размерностей.

Глава 9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

9.1. Метод делительных сеток

Постановка задачи и основные предположения. Для оценки локальных и интегральных характеристик деформированного состояния в теле выделяют элементарный объем и следят за перемещением этого объема в пластической области. Оценку деформированному состоянию дают по изменению размеров и формы выделенного объема (по перемещениям характерных точек) или же по изменению физико-механических свойств материала этого объема в процессе деформации. В первом случае методы изучения

деформированного состояния называются геометрическими. Обычно предполагается, что тело изотропно, а деформация в пределах выделенного объема однородна. Если размеры, характеризующие элементарный объем, малы, то полученные средние параметры формоизменения в этом объеме могут быть отнесены к его центру и рассматриваться как локальные.

Размеры выделенного объема должны быть выбраны такими, чтобы полученная информация была достаточно надежной для оценки локальной деформации. Чем меньше размеры элементарного объема, тем с большим основанием можно отнести полученные характеристики деформированного состояния к центру ячейки и повысить точность определения локальных характеристик. С другой стороны, выбор очень малых объемов может привести к проявлению микронеоднородности и микроанизотропии зерен кристаллического тела и уменьшению точности измерения размеров объема, что вызовет погрешность оценки характеристик деформированного состояния. Поэтому важное значение имеет правильный выбор оптимальных размеров выделенного элементарного объема.

Осесимметричное и плоское пластическое течение материала в процессах обработки металлов давлением характеризуется тем, что в теле можно выделить главные плоскости деформаций (скоростей деформаций), которые в процессе деформирования заготовки не искажаются. Это обстоятельство позволяет произвести оценку деформированного состояния по перемещению характерных точек или по изменению механических и физических свойств материала плоской элементарной фигуры, выделенной в этой плоскости.

Основные задачи анализа деформированного состояния – установить величины главных деформаций (скоростей деформаций), определить направление главных осей, вычислить накопленную интенсивность деформаций в любой точке пластической области деформируемого тела в процессе пластического формоизменения.

Геометрические методы исследования деформированного состояния. Все экспериментальные геометрические методы изучения

деформированного состояния при пластическом формоизменении можно разделить на три группы:

- 1) методы конечных деформаций;
- 2) поэтапные методы исследования;
- 3) методы течения.

Первая группа методов базируется на деформационной теории пластичности. Основные характеристики локального формоизменения определяются путем сопоставления конечной и начальной форм и размеров выделенного элементарного объема. Принимается, что элементарная сфера в результате деформации превращается в эллипсоид, главные оси которого определяют направление главных осей деформаций. Главные компоненты деформаций рассчитываются как натуральные логарифмы отношений главных диаметров эллипсоида к диаметру исходной сферы. Принимается, что направление главных осей напряжений совпадает с направлением главных осей конечных деформаций. Интенсивность накопленной деформации сдвига определяется значениями главных компонент конечных деформаций e_1, e_2, e_3 по выражению

$$\Gamma = \sqrt{2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)} \quad (9.1)$$

и характеризует физическое состояние материала и работу, затрачиваемую на формоизменение.

В основе второй группы методов также лежит деформационная теория. Весь процесс формоизменения разбивается на ряд этапов. На каждом этапе характеристики формоизменения определяются так же, как и в случае конечных деформаций. Накопленное значение интенсивности сдвиговой деформации Γ получается суммированием этапных значений $\Delta\Gamma_i$:

$$\Gamma = \sum_i \Delta\Gamma_i. \quad (9.2)$$

Направления главных осей деформаций на каждом этапе считают совпадающими с направлениями главных осей напряжений.

Третья группа методов базируется на теории пластического течения. Эти методы заключаются в непрерывном наблюдении за изменением формы и размеров элементарного объема, которые

рассматриваются как непрерывные функции некоторого параметра (времени, перемещения в пластической области и т.п.). Текущие значения компонент скоростей деформаций (производных по параметру) определяются в любой стадии процесса в произвольной, но обоснованно выбранной системе координат и используются как для нахождения текущего положения главных осей скоростей деформаций, так и для определения интенсивности скорости деформации $\dot{\Gamma}$ [производных интенсивности деформаций сдвига по параметру $\Gamma'(\lambda)$].

Величина накопленной интенсивности сдвиговой деформации находится интегрированием по параметру

$$\Gamma = \int \Gamma'(\lambda) d\lambda. \quad (9.3)$$

Таким образом, три группы геометрических методов изучения деформированного состояния при пластическом формоизменении различаются, главным образом, способом обработки полученной информации.

Первая группа методов пригодна для анализа процессов обработки металлов давлением при монотонном формоизменении, когда главные оси деформаций в течение всего процесса пластического формоизменения совпадают с одними и теми же материальными волокнами, а вид деформированного состояния остается неизменным.

Две другие группы методов позволяют анализировать процессы обработки металлов давлением при немонотонном формоизменении в условиях сложного нагружения. Следует отметить, что третья группа геометрических методов изучения деформированного состояния предпочтительнее других, так как дает более надежную информацию о физическом состоянии тела и затраченной работе деформации.

Выбор базы сетки. Точность нанесения и измерения делительной сетки. Условие однородности деформации в пределах ячейки делительной сетки выполняется тем точнее, чем меньше размеры базы сетки. С другой стороны, уменьшение базы сетки повышает требования к точности измерения, а также приводит к влиянию структурной микронеоднородности. Исследования,

выполненные под руководством И.П. Ренне, показали, что точность определения локальных деформаций с уменьшением базы сетки резко снижается. Минимальные размеры ячейки не должны быть меньше 0,2...0,3 мм. В этом случае влияние структурной неоднородности мало. При такой базе сетки требования к точности нанесения и измерения остаются высокими. Обычно размеры ячейки делительной сетки выбираются в соответствии с размерами исследуемой пластической области. При значительных деформациях, когда квадратная сетка превращается в сильно вытянутый параллелограмм, целесообразно за исходную ячейку принимать прямоугольник, высота которого в направлении течения меньше ширины. Такая форма ячейки в этом случае оказывается более удобной, чем квадратная.

Точность нанесения делительной сетки тем выше, чем больше увеличение и меньше цена деления оптического измерительного устройства, используемого для нанесения сетки. Так, если ведется отсчет по окулярам микроскопа УИМ-21 ($\times 30$), точность шага сетки обеспечивается с отклонением $\pm(1,5...2)$ мкм, а при отсчете по компаратору прибора ПМТ-3 ($\times 130$ и $\times 487$) – с отклонением $\pm(0,75...1)$ мкм.

Высокая точность измерения обеспечивается правильной геометрической формой риски, которая при значительных деформациях теряется, центральная линия риски (след острия индентора) размывается и четко не просматривается, что приводит к заметному снижению точности измерения деформированной сетки. Точность измерения становится тем ниже, чем шире риска и больше угол при вершине индентора. Поэтому продольные риски (совпадающие с направлением течения материала) можно наносить обычным индентором прибора ПМТ-3 с углом при вершине 135° , а поперечные (расширяющиеся при деформации) – специальным индентором с углом при вершине 60° . Исследования, проведенные И.П. Ренне с сотрудниками кафедры технологии штамповочного производства ТПИ, показали, что точность измерения координат узловых точек искаженной в результате деформации сетки практически не зависит от увеличения в пределах 30...130. Абсолютная погрешность измерения линейного размера составляет $\pm(3...6)$ мкм.

СПОСОБЫ ОБРАБОТКИ ИСКАЖЕННОЙ ДЕЛИТЕЛЬНОЙ СЕТКИ. *МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ. МЕТОД ЗИБЕЛЯ.* ПУСТЬ ИМЕЕТСЯ ИСХОДНАЯ КВАДРАТНАЯ СЕТКА, НАНЕСЕННАЯ В ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА. ВПИШЕМ В НЕЕ ОКРУЖНОСТЬ. ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ОКРУЖНОСТЬ ПРЕВРАЩАЕТСЯ В ЭЛЛИПС. ЕСЛИ В ТЕЧЕНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ ОСИ КВАДРАТА СОВПАДАЮТ С ГЛАВНЫМИ ОСЯМИ, ТО КВАДРАТ СТАНЕТ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ, А ВПИСАННАЯ В НЕГО ОКРУЖНОСТЬ – ЭЛЛИПСОМ, ОСИ КОТОРОГО СОВПАДАЮТ С ОСЯМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ГЛАВНЫМИ ОСЯМИ. ЕСЛИ ЖЕ В ПРОЦЕССЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗМЕНИТСЯ НАПРАВЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ, КОТОРЫЕ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ СОВПАДАЮТ С ОСЯМИ КВАДРАТА, ТО КВАДРАТ ПРЕВРАТИТСЯ В ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, А ОКРУЖНОСТЬ – В ЭЛЛИПС,

**НАПРАВЛЕНИЕ ОСЕЙ КОТОРОГО СОВПАДАЕТ С НОВЫМ
НАПРАВЛЕНИЕМ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ (РИС. 9.1).**

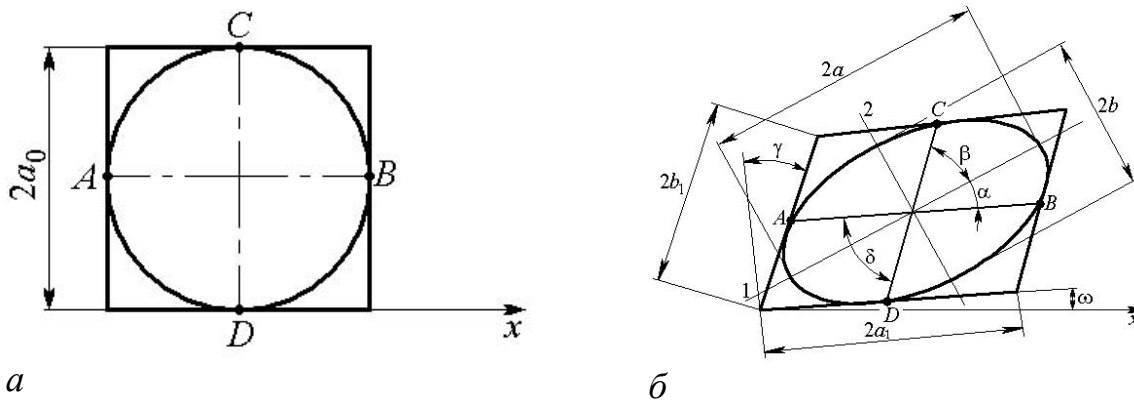


Рис. 9.1. Ячейка делительной сетки до (а) и после (б) деформации

Величины главных истинных деформаций можно определить по формулам

$$e_1 = \ln \frac{a}{a_0}; \quad e_2 = \ln \frac{b}{a_0}; \quad e_3 = -e_1 - e_2, \quad (9.4)$$

а интенсивность деформации сдвига – по формуле

$$\Gamma = 2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2}, \quad (9.5)$$

где $2a_0$ – диаметр вписанной в квадрат окружности (сторона квадрата); a и b – полуоси эллипса, вписанного в параллелограмм деформированной сетки.

Направление главных осей характеризуется углом α . Для аналитического определения полуосей деформированного эллипса и угла α необходимо знать точки касания эллипса со стороны параллелограмма. В начальный момент окружность соприкасалась со сторонами квадрата в их центральных точках. Будем считать, что при дальнейшем деформировании точки касания не переместятся вдоль деформированных сторон и будут делить их пополам. В результате этого диаметры эллипса AB и CD окажутся сопряженными.

Используя теорему Аполлония о связи между сопряженными диаметрами и полуосями эллипса, получаем следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2}; \quad (9.6)$$

$$a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta) = ab; \quad (9.7)$$

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2. \quad (9.8)$$

Из соотношений (9.7) и (9.8) следует:

$$a + b = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin \delta; \quad (9.9)$$

$$a - b = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin \delta; \quad (9.10)$$

$$\delta = \alpha + \beta$$

или
$$a + b = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin \delta}; \quad (9.11)$$

$$a - b = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin \delta}. \quad (9.12)$$

Таким образом,

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin \delta} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin \delta} \right); \quad (9.13)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin \delta} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin \delta} \right). \quad (9.14)$$

После возведения этих выражений в квадрат, приведения подобных членов и извлечения корня окончательно будет:

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)^2 - 4a_1^2 b_1^2 \sin^2 \delta}}; \quad (9.15)$$

$$b = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)^2 - 4a_1^2 b_1^2 \sin^2 \delta}}. \quad (9.16)$$

Величины главных деформаций e_1 , e_2 , e_3 определим по выражениям

$$e_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2 + \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)^2 - 4a_1^2 b_1^2 \sin^2 \delta}}{2a_0^2}; \quad (9.17)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{a_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2 - \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)^2 - 4a_1^2 b_1^2 \sin^2 \delta}}{2a_0^2}; \quad (9.18)$$

$$e_3 = -e_1 - e_2. \quad (9.19)$$

Найдем угол α . Так как $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \delta - \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha}$, то с помощью выражения (9.6) получим уравнение для определения α :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \delta \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

Решение этого уравнения приводит к выражению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \operatorname{tg} \delta - \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \delta - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (9.20)$$

Метод П.О. Пашкова. Этот метод основан на сопоставлении квадратной ячейки до деформации и ячейки в виде параллелограмма после деформации с использованием свойства экстремальности главных деформаций. Пусть квадратная ячейка, нанесенная в главной плоскости, превращается в параллелограмм со сторонами a_1 и b_1 и углом δ_1 между ними (рис. 9.2).

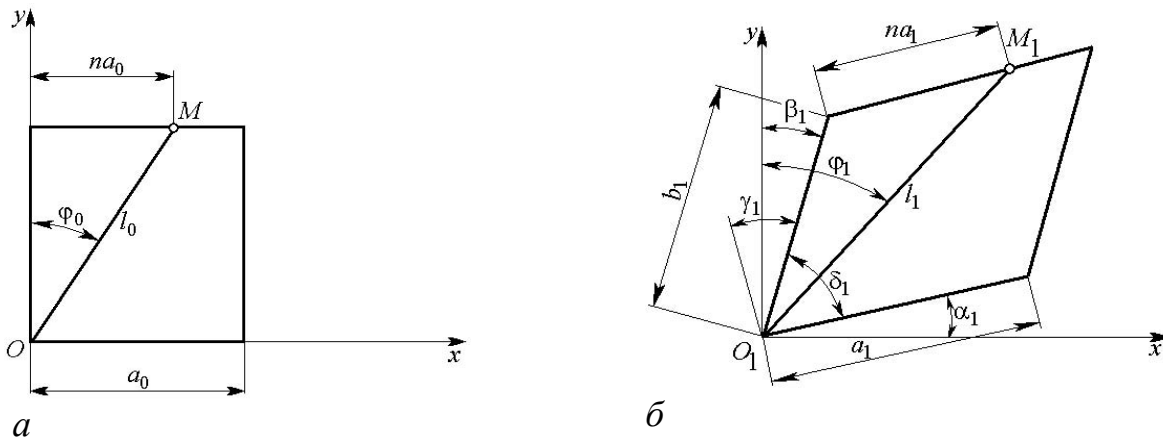


Рис. 9.2. Квадратная ячейка до деформации (а) и ячейки в виде параллелограмма после деформации (б)

Поворот сторон относительно системы координат xu характеризуется углами α_1 и β_1 . Отрезок OM , имеющий до деформации длину l_0 , определяемую выражением

$$l_0^2 = a_0^2 + n^2 a_0^2 = (1 + n^2) a_0^2, \quad (9.21)$$

и ориентацию, связанную с величиной n , после деформации будет иметь длину l_1 и новую ориентацию, определяемую углом φ_1 :

$$l_1^2 = b_1^2 + n^2 a_1^2 + 2a_1 b_1 n \cos \delta_1; \quad (9.22)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_1 \sin \beta_1 + n a_1 \cos \alpha_1}{b_1 \cos \beta_1 + n a_1 \sin \alpha_1}, \quad (9.23)$$

где $\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1$.

По условию однородности деформации и монотонности процесса величина n считается постоянной.

Деформация отрезка OM , рассчитываемая по выражению

$$e = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{l_1}{l_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b_1^2 + n^2 a_1^2 + 2n a_1 b_1 \cos \delta_1}{(1 + n^2) a_0^2}, \quad (9.24)$$

в общем случае не является главной. Используя свойство экстремальности главных деформаций, найдем значения n , определяющие положение главных осей:

$$\frac{\partial e}{\partial n} = 0; \quad n_{1,2} = \frac{a_1^2 - b_1^2 \pm \sqrt{(a_1^2 - b_1^2)^2 + 4a_1^2 b_1^2 \cos^2 \delta_1}}{2a_1 b_1 \cos \delta_1}. \quad (9.25)$$

Подставляя значения n_1 и n_2 в уравнение (9.24), получаем

$$\left. \begin{aligned} e_{1,2} &= \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2 \pm \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)^2 - 4a_1^2 b_1^2 \sin^2 \delta_1}}{2a_0^2}; \\ e_3 &= -e_1 - e_2, \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

т.е. результат, тождественный полученному по методу Зибеля.

Направление главных осей и интенсивность деформации сдвига определяют соответственно по выражениям (9.23) и (9.5).

Поэтапные методы исследования. Модернизированный метод П.О. Пашкова. Изложенный выше метод П.О. Пашкова не пригоден для оценки деформаций при поэтапном исследовании, так как он основан на преобразовании начальной квадратной ячейки в параллелограмм. И.П. Ренне обобщил этот метод на случай, когда начальная ячейка есть параллелограмм. Это позволило применить модернизированный метод П.О. Пашкова для поэтапного исследования процесса пластического формоизменения.

Рассмотрим элемент в виде параллелограмма до и после малого этапа деформации (рис. 9.3).

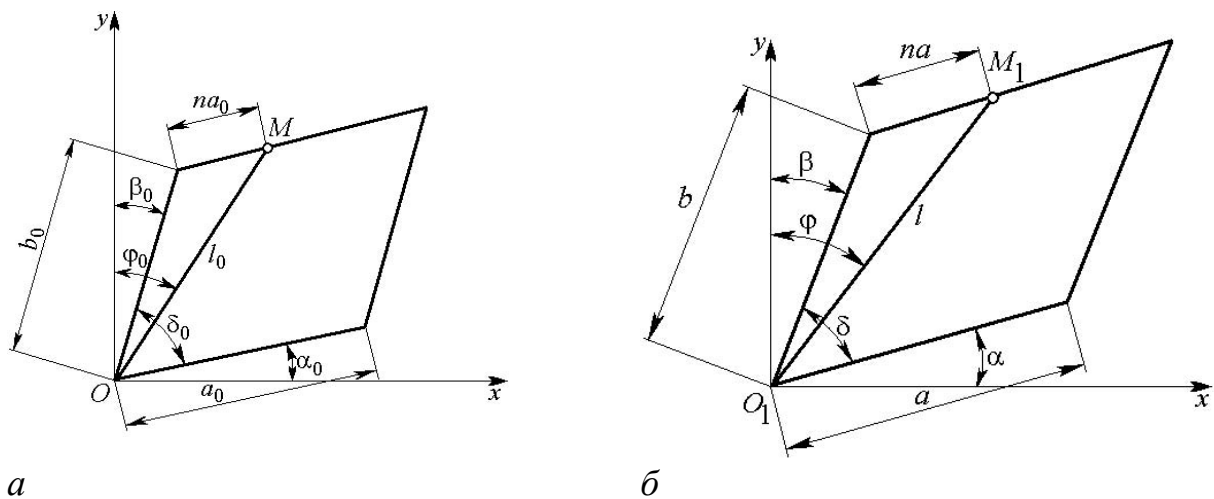


Рис. 9.3. Элемент в виде параллелограмма до (а) и после (б) малого этапа деформации

Отрезок прямой OM , имеющей длину l_0 и ориентацию в системе координат x, y , определяемую углом φ_0 , после этапа деформации изменяет свою длину до величины l и занимает новое положение O_1M_1 , определяемое углом φ . Положение сторон ячейки до и после этапа деформации фиксируется относительно системы координат x, y величинами углов α_0, β_0 и α, β .

Из геометрических соображений находим

$$l_0^2 = b_0^2 + n^2 a_0^2 + 2na_0 b_0 \cos \delta_0; \quad (9.27)$$

$$l^2 = b^2 + n^2 a^2 + 2nab \cos \delta; \quad (9.28)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{b_0 \sin \beta_0 + na_0 \cos \alpha_0}{b_0 \cos \beta_0 + na_0 \sin \alpha_0}; \quad (9.29)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \beta + na \cos \alpha}{b \cos \beta + na \sin \alpha}. \quad (9.30)$$

Деформацию отрезка OM вычислим по выражению

$$e = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{l}{l_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + n^2 a^2 + 2abnc \cos \delta}{b_0^2 + n^2 a_0^2 + 2a_0 b_0 n \cos \delta_0}. \quad (9.31)$$

В общем случае деформация, определяемая выражением (9.31), не является главной. Используя свойство экстремальности главных деформаций, можно найти значения n , определяющие положение главных осей:

$$\frac{\partial e}{\partial n} = 0; \quad An^2 - Bn - C = 0; \quad (9.32)$$

$$n_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}, \quad (9.33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= a_0 b_0 a^2 \cos \delta_0 - a b a_0^2 \cos \delta; \\ B &= a_0^2 b^2 - a^2 b_0^2; \\ C &= a_0 b_0 b^2 \cos \delta_0 - a b b_0^2 \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Направление главных осей в исходном и деформированном состоянии будет найдено по выражениям (9.29) и (9.30) после подстановки полученных величин n_1 и n_2 . Главные деформации e_1 и e_2 рассчитываются по формуле (9.31) после подстановки величин n_1 и n_2 . Интенсивность деформации сдвига Γ определяется по формуле (9.5). Такое обобщение формул П.О. Пашкова оказывается весьма удобным при поэтапном изучении процесса формоизменения.

Методы течения. Метод И.П. Ренне. Для анализа процессов установившегося пластического течения при немонотонном формоизменении широкое применение нашел метод течения И.П. Ренне. Он основан на непрерывном наблюдении за изменением положения и длины двух базовых отрезков делительной сетки, нанесенной в главной плоскости, при ее перемещении в очаге деформации. Метод был использован при экспериментальном изучении стационарных процессов осесимметричного течения при волочении, прессовании и обратном выдавливании.

Рассмотрим сущность метода и основные соотношения.

В любом малом объеме деформируемого тела при немонотонном формоизменении напряженное и деформированное состояния могут

быть описаны зависимостями компонент тензоров напряжений и деформаций от некоторого параметра λ , определяющего процесс формоизменения. Интенсивности линейных и сдвиговых деформаций также являются функциями этого параметра:

$$e_i = e_i(\lambda); \quad \Gamma = \Gamma(\lambda)$$

Они могут быть найдены интегрированием по λ производной интенсивности линейной деформации:

$$e_i = \int_{\lambda} \frac{\partial e_i}{\partial \lambda} d\lambda = \int_{\lambda} e'_i d\lambda \quad (9.35)$$

или по производной интенсивности сдвиговой деформации:

$$\Gamma = \int_{\lambda} \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} d\lambda = \int_{\lambda} \Gamma' d\lambda, \quad (9.36)$$

где
$$\Gamma' = \sqrt{2(e'_x{}^2 + e'_y{}^2 + e'_z{}^2) + \gamma'_{xy}{}^2}; \quad e'_i = \frac{\Gamma'}{\sqrt{3}}. \quad (9.37)$$

Система координат (x, y, z) выбрана так, что оси x, y лежат в главной плоскости деформаций.

Таким образом, при немонотонном формоизменении задача обработки результатов искажения делительной сетки сводится к нахождению производных от компонент деформации по параметру, определяющему процесс деформирования, и интегрированию соотношений (9.35) или (9.36) с целью нахождения интенсивности деформаций. Направления текущих главных осей, лежащих в плоскости делительной сетки, определяются по выражению

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma'_{xy}}{e'_x - e'_y} \quad (9.38)$$

При вычислении производных от компонент деформаций удобно пользоваться подвижной системой координат (x, y) , одна из осей которой связана с направлением одной из сторон ячейки делительной сетки (рис. 9.4). Пусть с отрезком a будет связана ось x подвижной системы координат. Непрерывное наблюдение за изменением

положения и длин двух отрезков a и b , лежащих в главной плоскости, позволяет найти функциональные зависимости

$$\left. \begin{aligned} a &= a \lambda, \quad b = b \lambda; \\ \alpha &= \alpha \lambda, \quad \gamma = \gamma \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

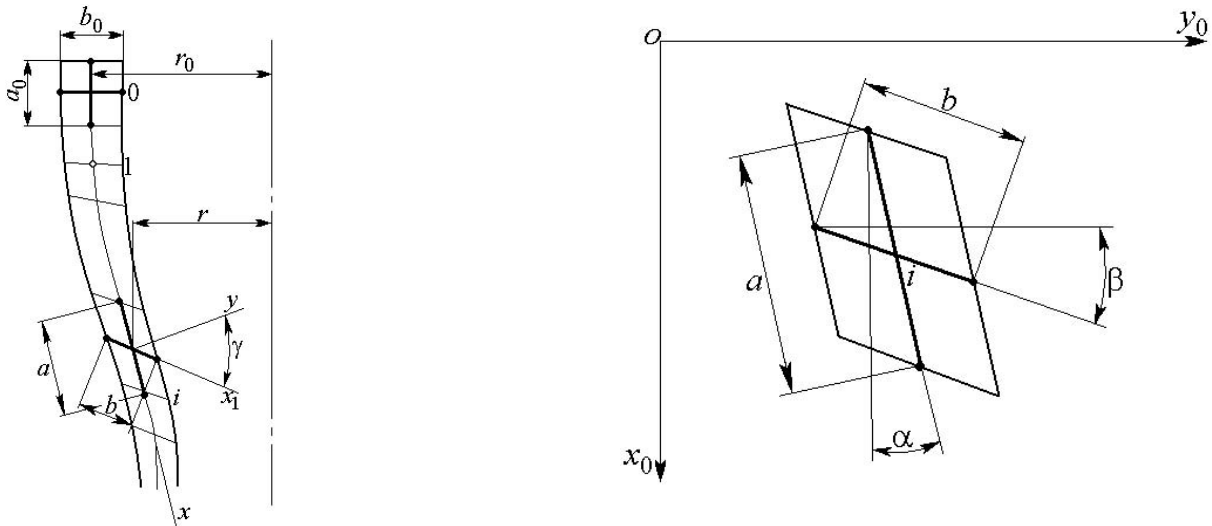


Рис. 9.4. Подвижная система координат (x, y)

В случае установившихся (стационарных) процессов волочения, прессования и прокатки в качестве параметра можно и удобно выбрать номер ячейки. Изменения длин отрезков и углов в процессе деформирования могут быть представлены в виде графиков или таблиц. Рассмотрим вопрос об определении производных от компонент деформаций. Пусть известны размеры ячейки a и b в какой-то момент деформирования, тогда

$$e_x = \ln \frac{a}{a_0}; \quad e'_x = \frac{a'}{a}. \quad (9.40)$$

Обозначим размеры отрезка, перпендикулярного к главной плоскости в направлении оси z в начальный и рассматриваемый моменты времени, соответственно c_0 и c . В этом случае

$$e_z = \ln \frac{c}{c_0}; \quad e'_z = \frac{c'}{c}. \quad (9.41)$$

Запишем выражение для элементарного объема, построенного на параллелограмме в основании с высотой c :

$$V = Fc = a b \cos \gamma c. \quad (9.42)$$

Относительное изменение элементарного объема найдем по выражению

$$\frac{V'}{V} = \frac{c'}{c} + \frac{a'}{a} + \frac{b' \cos \gamma'}{b \cos \gamma} = 0. \quad (9.43)$$

Сопоставляя полученное выражение с выражением для первой производной от условия несжимаемости

$$e'_x + e'_y + e'_z = 0 \quad (9.44)$$

и учитывая соотношения (9.40) и (9.41), устанавливаем, что

$$e'_y = \frac{b' \cos \gamma'}{b \cos \gamma} = \frac{b'}{b} - \gamma' \operatorname{tg} \gamma. \quad (9.45)$$

Таким образом, для производных от компонент деформаций по параметру получаем выражения

$$e'_x = \frac{a'}{a}; \quad e'_y = \frac{b'}{b} - \gamma' \operatorname{tg} \gamma; \quad e'_z = -e'_x - e'_y, \quad (9.46)$$

в которые входят величины линейных и угловых характеристик деформируемой ячейки и производные от них. Для определения производной от компоненты сдвиговой деформации γ'_{xy} воспользуемся формулами преобразования компонент скорости деформации при повороте осей x, y вокруг оси z на угол $\frac{\pi}{2} - \gamma$. В этом случае ось x совпадает с отрезком b . Поэтому, с одной стороны,

$$e'_{x_1} = \frac{b'}{b}, \quad (9.47)$$

а с другой –

$$e'_{x_1} = e'_x \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) + e'_y \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) + \gamma'_{xy} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right).$$

Подставим в это выражение значение e'_{x_1} из уравнения (9.47):

$$\gamma'_{xy} = \gamma' - \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \operatorname{tg} \gamma,$$

или

$$\gamma'_{xy} = \operatorname{tg} \gamma' - e'_x - e'_y \operatorname{tg} \gamma. \quad (9.48)$$

Укажем последовательность работ при анализе стационарных процессов обработки металлов давлением:

1. Наносится делительная сетка в главной плоскости деформаций. За начальную элементарную ячейку принимается квадрат. В процессе деформирования изменяются координаты узловых точек сетки. Так как процесс стационарный, то остановка процесса в момент реализации стационарной стадии дает полную картину искажения делительной сетки за всю стадию. Каждая ячейка сетки при движении вдоль траектории (линии тока) занимает последовательные положения ячеек.

2. Измеряются координаты узловых точек сетки вдоль фиксированных линий тока. По этим координатам определяются размеры a и b сетки и угловые характеристики α , β и γ , равный $\alpha + \beta$ (см. рис. 9.4). Результаты представляются следующим образом:

λ	a	b	γ	α
λ_0	a_0	b_0	γ_0	α_0
λ_1	a_1	b_1	γ_1	α_1
λ_2	a_2	b_2	γ_2	α_2
...

3. Находятся производные от параметров ячейки a , b , γ разностным методом, например:

$$a'_i = \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2}, \quad (9.49)$$

где i – номер рассматриваемой ячейки.

4. Определяются производные от компонент деформаций по параметру $e'_x, e'_y, e'_z, \gamma'_{xy}$ с учетом формул (9.46) и (9.48).

5. Вычисляются величины производных по номеру ячейки от интенсивности деформаций в каждой точке вдоль линии тока по формуле (9.37).

6. Определяется величина накопленной интенсивности сдвиговой деформации по выражению (9.36). Интегрирование выполняется вдоль линии тока по номеру ячейки.

7. Находится направление главных осей в текущий момент деформации в каждой точке линии тока в соответствии с уравнением (9.38). Полученная информация достаточна для оценки деформированного состояния в любой точке линии тока.

9.2. Метод визиопластичности

Метод визиопластичности разработан Э. Томсеном, Ш. Кобаяши, Фришем и К. Янгом и применен к анализу процесса обратного выдавливания прутков и труб (рис. 9.5) в стационарной стадии пластического течения.

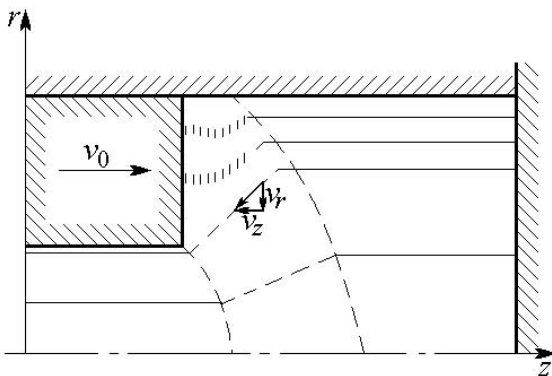


Рис. 9.5. К методу визиопластичности

Метод дает возможность определить компоненты скоростей течения, траектории перемещения элементарных объемов деформированного тела (частиц металла), скорости деформаций и накопленную интенсивность деформаций в каждой точке пластической области. Исходной деформацией для этого служит экспериментально установленное поле смещений элементарных

объемов деформированного тела на каждом фиксированном по времени этапе деформирования.

В плоскости симметрии деформируемого тела (в меридиональной плоскости) наносилась квадратная сетка. После каждого малого этапа деформации искаженная сетка фотографировалась. Негативы фотографий проектировались на миллиметровую бумагу с увеличением в десять раз, и вычерчивалось мгновенное положение точек пересечения (узлов) линий сетки. На основании этого получали траектории частиц металла.

Одновременное измерение перемещения частиц за соответствующий этап деформации и времени этапа дает возможность найти величину и направление скорости.

Компоненты скорости деформаций определили с помощью уравнений линейной теории деформаций. В цилиндрической системе координат r, θ, z компоненты скоростей деформаций при стационарном пластическом течении материала находили по формулам

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \dot{e}_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \\ \dot{\gamma}_{zr} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}; & \dot{e}_\theta &= -\dot{e}_z - \dot{e}_r, \end{aligned} \right\} \quad (9.50)$$

где v_z и v_r – компоненты скорости частицы в направлении осей z и r соответственно.

Накопленная интенсивность линейных деформаций может быть определена по выражению

$$e_i = \sum_0^t \ln \left(1 + \dot{e}_i \Delta t \right), \quad (9.51)$$

где \dot{e}_i – интенсивность скоростей линейных деформаций:

$$\dot{e}_i = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\dot{e}_z - \dot{e}_r \right)^2 + \left(\dot{e}_r - \dot{e}_\theta \right)^2 + \left(\dot{e}_\theta - \dot{e}_z \right)^2 + \frac{3}{4} \dot{\gamma}_{zr}^2 \right]}. \quad (9.52)$$

Суммирование производится по времени вдоль линий тока.

Направление главных осей скоростей деформаций в любой точке пластической области находим по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\dot{\gamma}_{zr}}{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r},$$

где φ – угол, который составляет направление главной скорости деформации с осью z .

В дальнейшем, используя уравнения связи между напряжениями и скоростями деформации и одно из уравнений равновесия (по методике, изложенной в работе [41]), можно определить напряжения.

Следует отметить, что использование уравнений линейной теории малых деформаций (9.50) вносит в определение накопленной деформации и направления осей главных скоростей деформации и величин напряжений ошибку неопределенной величины в силу неучета вращения окрестности точки как жесткого целого и игнорирования второго уравнения равновесия.

9.3. Метод измерения твердости

Сущность метода. Метод исследования деформированного состояния по измерению твердости деформируемого тела основан на широкоизвестном факте существенного изменения физико-механических свойств металлов при их пластическом формоизменении. Это изменение обусловлено работой, затраченной на пластическое деформирование металла. Так, при холодной обработке металлов давлением способность металлов сопротивляться последующей пластической деформации возрастает, а их способность деформироваться снижается. В частности, это связано с упрочнением, вызванным пластической деформацией, и такая характеристика физико-механических свойств металла, как твердость, вследствие этого может служить мерой работы, затраченной на пластическое формоизменение металла. Располагая установленной для конкретного металла зависимостью между показателями напряженно-деформированного состояния (интенсивностями напряжений и деформаций) и твердостью, замеряя твердость в различных точках деформируемого тела, можно оценить напряженно-деформированное состояние в них.

Г.Д. Делем экспериментально было установлено существование для каждого металла единой зависимости между твердостью и интенсивностью напряжений для различных схем напряженного состояния и путей нагружения [12, 13].

Поскольку между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций существует связь, определяемая кривой течения (кривой истинных напряжений), которая также практически не зависит от схемы напряженно-деформированного состояния для большинства обрабатываемых давлением материалов (гипотеза единой кривой течения), то по определенному значению твердости можно судить и о деформированном состоянии в точке тела.

Типичная зависимость между твердостью, интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций называется тарировочным графиком (рис. 9.6).

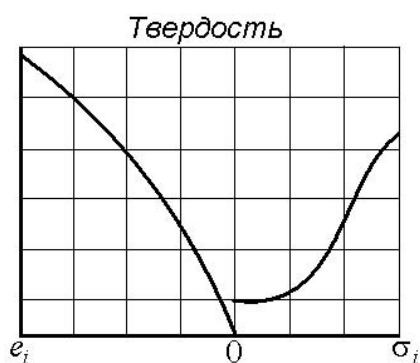


Рис. 9.6. Зависимость между твердостью, интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций

(тарировочный график)

Метод измерения твердости дает возможность получить объективную информацию при анализе не очень малых и не очень больших деформаций, поскольку при анализе малых деформаций большой разброс исходной твердости материала вносит существенную погрешность, а при анализе больших деформаций, при которых материал уже мало упрочняется, твердость остается практически постоянной и не может характеризовать деформированное состояние.

Способы измерения твердости. При исследовании напряженно-деформированного состояния пользуются различными способами определения твердости. Выбор способа зависит от размеров образца или области пластической деформации, неравномерности распределения деформаций.

Условия испытаний по определению твердости регламентированы ГОСТ 9012-84 (по Бриннелю), ГОСТ 2999-84 (по Виккерсу), ГОСТ 9013-84 (по Роквеллу) и ГОСТ 9450-76 (микротвердость).

Несмотря на то, что между микро- и макротвердостью существует вполне определенная связь, считается целесообразным использовать измерение микротвердости лишь в крайних случаях, например при малых размерах пластической области и большой неравномерности распределения деформаций. Это связано с серьезными трудностями измерения микротвердости.

Для получения стабильных результатов измерения твердости поверхность, на которой производятся замеры, должна быть хорошо отшлифована (9, 10-й класс чистоты). Наиболее надежную информацию получают, используя метод Бриннеля (для больших областей пластической деформации) и метод Виккерса (для небольших областей пластической деформации).

При испытаниях по Бриннелю рекомендуется выдерживать расстояние от центра отпечатка до края образца не менее $2,5d$ (диаметр отпечатка), а расстояние между центрами двух соседних отпечатков – не менее $4d$. У мягких металлов с $HB < 35$ эти расстояния должны быть соответственно не менее $3d$ и $6d$. Толщина образца должна быть не менее десятикратной глубины отпечатка.

При замерах твердости по Виккерсу минимальная толщина образцов из стали должна быть больше диагонали отпечатка в 1,2 раза и в 1,5 раза при испытании цветных металлов. Расстояние между центрами отпечатков и от края образца должно быть не менее 2,5 длины диагонали отпечатка.

Недостатком способа замера твердости по Роквеллу является невысокая стабильность получаемых результатов.

Построение тарифовочных графиков. Для построения тарифовочного графика «интенсивность напряжений – твердость – интенсивность деформаций» необходимо измерять твердость при различной величине деформации образца, напряженно-деформированное состояние которого известно. Обычно тарифование проводят путем испытания образца на растяжение или сжатие. В обоих случаях интенсивность напряжений определяют по выражению

$$\sigma_i = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot D^2}, \quad (9.53)$$

где P – деформирующая сила; D – диаметр продеформированного образца.

Интенсивность деформации находят из выражения

$$e_i = \ln \frac{l_1}{l_0}, \quad (9.54)$$

где l_1 и l_0 – длина образца после и до деформирования при растяжении и высота образца до и после деформирования при сжатии.

При построении тарировочного графика из опытов на сжатие изготавливается серия одинаковых образцов, испытанием одного из которых определяется твердость материала в недеформированном состоянии, а остальные осаживаются до различных степеней деформации. Осаженные образцы разрезают по меридиональному сечению и полученную поверхность шлифуют, после чего на этой поверхности проводят замеры твердости в нескольких точках. Осредненное значение твердости принимают за твердость, соответствующую данному напряженно-деформированному состоянию. Испытания на сжатие ограничиваются началом бочкообразования, при котором вследствие неравномерности деформаций твердость в меридиональном сечении имеет большой разброс.

При построении тарировочного графика из опытов на растяжение образцы растягиваются до различных степеней деформации (некоторые образцы доводят до разрушения). На деформированных образцах выполняют лыски, в различных точках которых измеряют твердость. Надежные результаты получают до момента образования шейки, после чего напряженное состояние перестает быть линейным, и для его определения необходимо вводить известные поправки, например поправку Давиденкова – Спиридоновой.

Для уменьшения погрешности, связанной с возможным различием между исходной твердостью исследуемого тела и твердостью тарировочных образцов, тарировочный график рекомендуется строить в координатах «интенсивность деформации – приращение твердости».

Определение интенсивности напряжений и деформаций. Для определения по тарировочному графику интенсивности напряжений и деформаций в области пластической деформации исследуемого тела

необходимо знать распределение твердости в этой области. Обычно исследуемое тело после деформирования (или этапа деформирования) разрезают. Слой материала, получившего упрочнение в результате этой операции, удаляют. Для этого после чистового строгания или точения испытываемую поверхность шлифуют для измерения макротвердости или полируют для измерения микротвердости. Рекомендуют сочетать механическое полирование с травлением и электрополированием. Технология обработки испытываемых поверхностей тарировочных образцов и исследуемого тела должна быть примерно одинаковой.

После измерения твердости в различных точках поверхности результаты наносят на эскиз этой поверхности и статистически обрабатывают. Для этого наносят изосклеры – линии равной твердости. По поверхности из тарировочного графика определяют соответствующую каждой изосклере величину интенсивности напряжений и деформаций.

В некоторых случаях полученной информации достаточно для определения компонент тензора – девиатора деформаций. Чаще же метод измерения твердости используют в комбинации с геометрическими методами исследования деформации.

Задания для самоконтроля

1. Перечислите геометрические методы исследования деформированного состояния.

2. На каких теориях базируются геометрические методы исследования деформированного состояния?

3. Для анализа каких процессов обработки металлов давлением пригодны изучаемые методы исследования деформированного состояния?

4. Каким образом осуществляется выбор базы сетки и обеспечивается точность нанесения и измерения делительной сетки?

5. Изложите сущность способов обработки искаженной делительной сетки по методу конечных деформаций (метод Зибеля, метод П.О. Пашкова).

6. Укажите особенности обработки искаженной делительной сетки при поэтапных методах исследования деформированного состояния.

7. Изложите основные идеи метода И.П. Ренне.

8. Укажите последовательность работ при анализе стационарных процессов обработки металлов давлением.

9. Опишите метод визиопластичности.

10. Сущность метода измерения твердости.

11. Перечислите способы измерения твердости.

12. Опишите методику построения тарировочного графика «интенсивность напряжений – твердость – интенсивность деформаций».

13. Изложите систему опытов для построения тарировочного графика «интенсивность напряжений – твердость – интенсивность деформаций».

14. Каким образом можно определить интенсивности напряжений и деформаций по тарировочному графику «интенсивность напряжений – твердость – интенсивность деформаций»?

ГЛАВА 10. Устойчивость процессов пластического формоизменения

В процессах штамповки листовых материалов могут возникать неустойчивые состояния, которые приводят к появлению сосредоточенных деформаций, недопустимых в готовых изделиях. Состояние равновесия называется устойчивым, если малое изменение действующей силы вызывает малое изменение деформаций.

Если сила, приложенная к деформируемому элементу, достигает максимума, то дальнейшее возрастание деформаций происходит без увеличения силы и может оказаться большим. Так как в металле всегда имеются небольшие механические и геометрические неоднородности, то неустойчивое состояние приводит к появлению сосредоточенных деформаций. Потеря устойчивости определяется условием максимума деформирующих сил.

Можно отметить четыре типа потери устойчивости при сложной вытяжке. Потеря устойчивости первого типа происходит при малых деформациях в начальный период вытяжки, соответствующий появлению площадки текучести на диаграмме растяжения. Результатом потери устойчивости первого типа является образование полос скольжения на поверхности вытягиваемых заготовок. Эти полосы скольжения портят внешний вид деталей. Их устранение является настолько трудоемкой операцией, что обычно это оказывается нерентабельным и детали признаются браком.

Меры борьбы с образованием полос скольжения сводятся к получению стали, не имеющей площадки текучести на диаграмме растяжения. Наиболее распространенным способом устранения площадки текучести является дрессировка стали, которая заключается в холодной прокатке листов после отжига с небольшим (порядка 0,5...2,0 %) обжатием. Однако для наиболее распространенной кипящей стали эффект дрессировки в результате старения постепенно исчезает, одновременно несколько уменьшается пластичность металла. Эффект старения можно частично устранить путем

обработки листовых материалов на многовалковых правильных станах или на специальных машинах для растяжения. Легирование небольшими количествами титана, ванадия, хрома и молибдена уменьшает склонность сталей к старению. Этот вид потери устойчивости не приводит к разрывам металла.

В результате сжатия в плоскости листа может возникнуть потеря устойчивости второго типа, которая вызывает появление складок на сжатых и сжаторастянутых участках листовой заготовки и приводит к искажению формы изделия. Образование складок в процессе сложной вытяжки может быть уменьшено постановкой перетяжных ребер и порогов, а также уменьшением зазора между прижимным кольцом и матрицей и увеличением давления прижима.

Наибольший интерес для анализа процессов вытяжки деталей сложной формы представляет потеря устойчивости третьего типа, которая возникает в момент, соответствующий достижению максимума внешней нагрузки, действующей на листовую заготовку. Результатом потери устойчивости этого типа является значительное местное утонение листа на участке, расположенном симметрично относительно главных осей напряжений, и разрыв металла.

Вторичные полосы скольжения (четвертый тип), в отличие от полос скольжения начальной стадии деформирования, возникают при деформациях, соответствующих максимуму внешней нагрузки. Являясь следствием резкого утонения листового металла вдоль некоторых линий на поверхности заготовки, вторичные полосы скольжения приводят к быстрому разрыву металла.

10.1. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ (ШЕЙКООБРАЗОВАНИЕ)

В ПРОЦЕССАХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ДОБАВОЧНЫХ НАГРУЗОК. РАССМОТРИМ КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, НАХОДЯЩИЙСЯ НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ ПРОЕМА МАТРИЦЫ В ДВУХОСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ (РИС. 10.1). КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ЛИНИИ ВЫБРАНЫ ТАК, ЧТОБЫ ОНИ СОВПАДАЛИ С ТРАЕКТОРИЯМИ ГЛАВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.

Принимая нагружение простым, запишем уравнение связи между напряжениями и деформациями:

$$\frac{e_u}{\sigma'_u} = \frac{e_v}{\sigma'_v} = \frac{e_z}{\sigma'_z} = \frac{3e_i}{2\sigma_i},$$

где σ'_u , σ'_v , σ'_z – компоненты девиатора напряжений; e_u , e_v , e_z – логарифмические деформации в соответствующих направлениях.

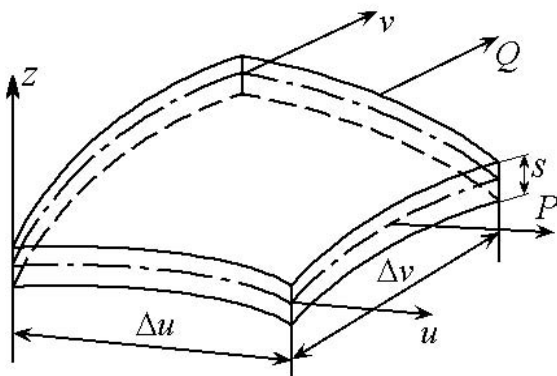


Рис. 10.1. Схема криволинейного элемента, находящегося в двухосном напряжённом состоянии

Введем обозначение $\frac{\sigma'_v}{\sigma'_u} = m$,

учтем, что $\sigma'_z = 0$. Тогда можно записать

$$e_v = \frac{\sigma'_v}{\sigma'_u} e_u = \frac{2m-1}{2-m} e_u. \quad (10.1)$$

Из этого выражения следует

$$m = \frac{2e_v + e_u}{2e_u + e_v}. \quad (10.2)$$

Формула (10.2) позволяет определить величину m экспериментально, путем замера деформаций.

Используя условие несжимаемости, найдем

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\epsilon_u - e_v + \epsilon_v - e_z + \epsilon_z - e_u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_u^2 + e_u e_v + e_v^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{2-m} e_u. \quad (10.3)$$

Выражение для интенсивности напряжений можно представить как

$$\sigma_i = \sqrt{1-m+m^2} \sigma_u. \quad (10.4)$$

Теперь находим

$$\left. \begin{aligned} e_u &= \frac{2-m}{2\sqrt{1-m+m^2}} e_i = \psi_u \epsilon_i; \\ e_v &= \frac{2m-1}{2\sqrt{1-m+m^2}} e_i = \psi_v \epsilon_i; \\ -e_z &= \frac{m+1}{2\sqrt{1-m+m^2}} e_i = \psi_z \epsilon_i. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Обозначим через P силу, приложенную к элементу и направленную по оси u , а через Q – силу, действующую вдоль оси v .

Тогда

$$P = \sigma_u \Delta v s, \quad Q = \sigma_v \Delta u s. \quad (10.6)$$

Двухосное растяжение становится неустойчивым, когда одна из сил P или Q достигнет максимума.

Условие устойчивости имеет вид

$$dP > 0, \quad dQ > 0. \quad (10.7)$$

Пусть $|\sigma_u| > |\sigma_v|$. В этом случае двухосное напряженное состояние потеряет устойчивость при нарушении первого условия, которое можно записать следующим образом:

$$d\sigma_u \Delta v s + \sigma_u d(\Delta v) + \sigma_u \Delta v ds > 0, \quad (10.8)$$

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} + \frac{d(\Delta v)}{\Delta v} + \frac{ds}{s} > 0 \quad (10.9)$$

или

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} + de_v + de_z > 0. \quad (10.10)$$

Из условия несжимаемости получим

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} > de_u. \quad (10.11)$$

Если $\sigma_u = \sigma_v$, то выполняется и второе условие:

$$\frac{d\sigma_v}{\sigma_v} > de_v. \quad (10.12)$$

Из уравнений (10.4), (10.5) и (10.11) следует

$$\frac{d\sigma_i}{de_i} > \psi_u \sigma_i. \quad (10.13)$$

Зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций может быть взята в виде

$$\sigma_i = ce_i^n. \quad (10.14)$$

Дифференцируя это выражение и подставляя результат в формулу (10.13), получим наибольшее значение величины устойчивой интенсивности деформаций, которая может быть реализована в процессах формоизменения листового металла:

$$\epsilon_{i \text{ кр}} \leq \frac{n}{\psi_u} = \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{2-m} n. \quad (10.15)$$

Как видно из формулы, на величину критической деформации влияет характер напряженного состояния, который определяется величиной m и зависит от величины n , характеризующей способность материала к упрочнению (n – максимальная равномерная деформация).

Результаты расчетов представлены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Результаты расчетов по формулам (10.15) и (10.5)

m	$\epsilon_{i \text{ кр}}$	$\epsilon_{u \text{ кр}}$	$\epsilon_{v \text{ кр}}$	$\epsilon_{z \text{ кр}}$
0	n	n	$-n/2$	$-n/2$
0,5	$2/\sqrt{3}n$	n	0	$-n$
1	$2n$	n	n	$-2n$
-0,5	$2\sqrt{7}/5n$	n	$-4n/5$	$-n/5$
-1	$2/\sqrt{3}n$	n	$-n$	0

Из табл. 10.1 следует, что наибольшая равномерная деформация по толщине листа, которая может быть реализована в процессах пластического формоизменения, получается при $m=1$, т.е. при равномерном двухосном растяжении. Эта величина в 4 раза больше равномерной деформации по толщине, которая получается при простом одноосном растяжении.

При анализе устойчивости двухосного напряженного состояния по формулам (10.8) – (10.15) принималось, что сила воспринимается одним определенным элементом, деформирующимся в процессе вытяжки.

Можно считать, что такие же условия имеют место для элемента, находящегося на некотором расстоянии от проёма матрицы.

У самого контура ширина элемента, через который передается сила в момент потери устойчивости, является постоянной. Следует в этом случае положить $d(\Delta v) = 0$.

Из (10.10) имеем

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} > -de_z \quad (10.16)$$

или

$$\frac{d\sigma_i}{\sigma_i} > \psi_z \overleftarrow{de}_i. \quad (10.17)$$

Дифференцируя выражение (10.14) и подставляя результаты в уравнение (10.17), найдем

$$\epsilon_{i \text{ кр}}^{\sim} = \frac{n}{\psi_z(n)} = \frac{2\sqrt{1-m-m^2}}{m+1} n. \quad (10.18)$$

Далее по формулам (10.5) получим критические значения деформаций для частей заготовки, расположенных вблизи контура проёма матрицы:

$$\epsilon_{u \text{ кр}}^{\sim} = \frac{2-m}{m+1} n; \quad \epsilon_{v \text{ кр}}^{\sim} = \frac{2m-1}{m+1} n; \quad -\epsilon_{z \text{ кр}}^{\sim} = n. \quad (10.19)$$

При $m = -1$ устойчивость получается неограниченной, и процесс вытяжки может продолжаться до полного исчерпывания пластичности.

Значения критических деформаций представляют собой пределы, определяемые только устойчивостью процесса. Эти значения могут быть реализованы, если пластичность деформируемого материала достаточна. А.Д. Томленов предлагает для использования полученных результатов в производственных условиях наносить сетку диаметром 20 мм.

Деформации оцениваются по формулам

$$e_u = \ln \frac{d_u}{d_0}; \quad e_v = \ln \frac{d_v}{d_0}; \quad -e_z = e_u + e_v,$$

где d_0 – начальный диаметр сетки; d_u , d_v – наибольший и наименьший диаметры ячейки после деформации.

По формуле (10.2) находится m , а по формуле (10.3) – e_i . Из опыта растяжения образца известна величина n . При одноосном растяжении

$$\sigma_{i_{kp}} = \sigma_k = \sigma_\sigma \left(1 + e_k\right)^n \quad n = \ln \left(1 + e_k\right)^n$$

где σ_σ – предел прочности; e_k – наибольшее равномерное относительное удлинение образца.

По уравнению (10.14)

$$c = \sigma_k / e_{kp}^n.$$

Зная c и n , можно определить интенсивность напряжений по величинам интенсивности деформаций; по формулам $\frac{\sigma_v}{\sigma_u} = m$ и (10.4) можно узнать величины главных напряжений σ_u, σ_v .

В качестве характеристики локального деформированного состояния удобно пользоваться отношением

$$\eta = \frac{e_i}{e_{i_{kp}} \left(1 + e_k\right)^n} = \frac{e_u}{n}. \quad (10.20)$$

При $\eta = 1$ возникает опасность разрывов.

Критерий шейкообразования ортотропного анизотропно-упрочняющегося листового материала при плоском напряженном состоянии заготовки. Прямоугольный лист из ортотропного

материала толщиной s растягивается напряжениями σ_x и σ_y . Оси x, y и z совпадают с главными осями анизотропии.

Материал принимается несжимаемым жесткопластическим, ортотропным, для которого справедливы условие текучести Мизеса – Хилла (4.93) и ассоциированный закон пластического течения (4.94), а сопротивления материала пластическому деформированию в направлениях главных осей анизотропии x, y, z и при сдвиге в главных осях анизотропии подчиняются зависимостям (4.95).

Площади поперечного сечения листа, перпендикулярного к осям y и x , определяются соответственно

$$l_x s = F_y; \quad l_y s = F_x. \quad (10.21)$$

Нагрузки на лист P_x и P_y равны:

$$P_x = \sigma_x F_x; \quad P_y = \sigma_y F_y. \quad (10.22)$$

Из условия положительных добавочных нагрузок

$$\left. \begin{aligned} dP_x = \sigma_x dF_x + F_x d\sigma_x > 0, \\ dP_y = \sigma_y dF_y + F_y d\sigma_y > 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

получаем условие устойчивости деформирования:

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x} > de_x; \quad \frac{d\sigma_y}{\sigma_y} > de_y. \quad (10.24)$$

Введем величину $m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. (10.25)

В случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) величина интенсивности напряжений σ_i рассчитывается по выражению

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2\left(1 + \frac{G}{F} + \frac{H}{F}\right)}} \left(m^2 + \frac{G}{F} + \frac{H}{F} - 2\frac{H}{F}m + \frac{H}{F}m^2 \right)^{1/2} \sigma_x. \quad (10.26)$$

Если учесть, что $\frac{G}{F} = \frac{R_y}{R_x}$ и $\frac{H}{F} = R_y$, то получим

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2(R_x + R_y + R_x R_y)}} \left[(R_x + R_x R_y) m^2 - 2R_y R_x m + (R_y R_x + R_y) \right]^{1/2} \sigma_x. \quad (10.27)$$

Обозначим

$$\frac{3(R_y + 1)R_x}{2(R_x + R_y + R_x R_y)} = a_y; \quad \frac{3R_y R_x}{2(R_x + R_y + R_x R_y)} = a_{xy};$$

$$\frac{3R_y (R_x + 1)}{2(R_x + R_y + R_x R_y)} = a_x. \quad (10.28)$$

Тогда выражение для определения величины интенсивности напряжений (10.27) преобразуется к виду

$$\sigma_i = \sigma_x \sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}. \quad (10.29)$$

Установим связь между de_x и de_i , de_y и de_i , используя ассоциированный закон пластического течения (4.94) и выражения (10.25), (10.29):

$$de_x = \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}} de_i; \quad de_y = \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}} de_i. \quad (10.30)$$

Подставляя соотношения (10.29) и (10.30) в неравенства (10.24), получим

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{\frac{da_x}{de_i} - 2\frac{da_{xy}}{de_i}m + \frac{da_y}{de_i}m^2 - 2a_{xy}\frac{dm}{de_i} + 2ma_y\frac{dm}{de_i}}{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2} + \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad (10.31)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{1}{2} \frac{m \left(m^2 \frac{da_y}{de_i} - 2m \frac{da_{xy}}{de_i} + \frac{da_x}{de_i} \right) + 2a_{xy}m \frac{dm}{de_i} - 2a_x \frac{dm}{de_i}}{m(m^2 a_y - 2a_{xy}m + a_x)} + \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (10.32)$$

При простом нагружении $dm/de_i = 0$ эти неравенства упрощаются и принимают следующий вид:

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{1}{2} \frac{\frac{da_x}{de_i} - 2\frac{da_{xy}}{de_i}m + \frac{da_y}{de_i}m^2}{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2} + \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad (10.33)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{1}{2} \frac{m^2 \frac{da_y}{de_i} - 2m \frac{da_{xy}}{de_i} + \frac{da_x}{de_i}}{m^2 a_y - 2a_{xy}m + a_x} + \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (10.34)$$

Если материал, кроме того, изотропно упрочняется, то параметры a_x , a_y , a_{xy} будут постоянными величинами в процессе пластического деформирования, и, следовательно:

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad (10.35)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (10.36)$$

Критической является наименьшая из деформаций $\int de_i$, удовлетворяющих условиям (10.31) и (10.32), (10.33) и (10.34), (10.35) и (10.36), взятым со знаком равенства.

Критерий локальной потери устойчивости анизотропной листовой заготовки в условиях плоского напряженного и деформированного состояний. Рассмотрим процесс двухосного растяжения прямоугольного листа из ортотропного материала

толщиной s в условиях плоского напряженного ($\sigma_z = 0$) и плоского деформированного ($de_y = 0$) состояний под действием напряжений σ_x и σ_y . Здесь оси x , y и z совпадают с главными осями анизотропии.

Материал принимается несжимаемым жесткопластическим ортотропным, для которого справедливы условие текучести Мизеса – Хилла (4.93) и ассоциированный закон пластического течения (4.94). Допускается, что сопротивления материала пластическому деформированию в направлениях главных осей анизотропии x, y, z и при сдвиге в главных осях анизотропии подчиняются зависимостям (4.95).

Условие положительности добавочных нагрузок в направлении действия максимальной силы в случае реализации плоского напряженного состояния будет иметь вид

$$dP_x = \sigma_x dF_x + F_x d\sigma_x > 0, \quad (10.37)$$

где $F_x = l_y s$ и l_y – площадь поперечного сечения и ширина листа в направлении, перпендикулярном к главной оси анизотропии x ;

$$dF_x = dl_y s + l_y ds. \quad (10.38)$$

После подстановки выражения (10.38) в формулу (10.37) получим

$$\sigma_x dl_y s + \sigma_x l_y ds + l_y s d\sigma_x > 0. \quad (10.39)$$

Разделив каждое слагаемое выражения (10.39) на $\sigma_x l_y s$, имеем

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x} + \frac{dl_y}{l_y} + \frac{ds}{s} > 0, \quad (10.40)$$

т.е.

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x} + de_y + de_z > 0. \quad (10.41)$$

Используя условие несжимаемости материала ($de_x + de_y + de_z = 0$) и учитывая, что деформация в направлении оси y равна нулю ($de_y = 0$), условие положительности добавочных нагрузок можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x} > de_x. \quad (10.42)$$

В случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) величина интенсивности напряжения σ_i определяется по выражению (10.29).

Величина напряжения σ_y может быть найдена из ассоциированного закона пластического течения (следует принять во внимание,

что $d\varepsilon_y = 0$) следующим образом:

$$\sigma_y = \frac{H\sigma_x}{H+F} = \frac{R_y\sigma_x}{R_y+1}. \quad (10.43)$$

В рассматриваемом случае имеем

$$m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{R_y}{R_y+1}. \quad (10.44)$$

После подстановки выражения (10.44) в формулу (10.29) получим

$$\sigma_i = \sigma_x \sqrt{a_x - 2a_{xy} \frac{R_y}{R_y + 1} + a_y \left(\frac{R_y}{R_y + 1} \right)^2}. \quad (10.45)$$

Приращения деформации de_x и интенсивности деформации de_i связаны между собой соотношениями (10.30).

Если не допустить деформации в направлении оси y , то нужно в выражении (10.30) положить $m = R_y / (1 + R_y)$. Приведенное выше соотношение с учетом выражения (10.44) может быть записано в виде

$$de_x = de_i \frac{a_x - a_{xy} \frac{R_y}{1 + R_y}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy} \frac{R_y}{R_y + 1} + a_y \left(\frac{R_y}{R_y + 1} \right)^2}}. \quad (10.46)$$

КРИТЕРИЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИИ (10.42) С УЧЁТОМ ФОРМУЛ (10.45) И (10.46) ПРЕОБРАЗУЕТСЯ К ВИДУ

$$\frac{1}{Z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} > \frac{1}{2} \frac{\frac{dA_x}{de_i} - 2 \frac{dA_{xy}}{de_i} + \frac{dA_y}{de_i}}{A_x - 2A_{xy} + A_y} + \frac{A_x - A_{xy}}{\sqrt{A_x - 2A_{xy} + A_y}}, \quad (10.47)$$

где
$$A_x = a_x; \quad A_{xy} = a_{xy} \frac{R_y}{R_y + 1}; \quad A_y = a_y \left(\frac{R_y}{R_y + 1} \right)^2.$$

Аналогичным образом может быть получен критерий локальной потери устойчивости при плоском напряженном (в плоскости xy) и плоском деформированном (в плоскости zy ; $de_x = 0$) состояниях.

Приведенный выше критерий шейкообразования может быть использован для предсказания предельных возможностей деформирования в условиях плоского напряженного и плоского деформированного состояний ортотропного анизотропно-упрочняющегося материала.

Критерий устойчивости положительности работы добавочных нагрузок. Изложенное выше исследование устойчивости процесса утонения листового материала выполнено на основании критерия устойчивости положительности добавочных нагрузок (10.7).

Д. Друккером был предложен критерий, согласно которому пластическое деформирование является устойчивым, если положительна работа добавочных нагрузок:

$$\Sigma dP_i dl_i \geq 0. \quad (10.48)$$

Здесь l_i – обобщенные перемещения, на которых совершают работу обобщенные силы P_i . Согласно многочисленным экспериментальным данным, критерий (10.48) более точно отражает момент перехода материала из устойчивого состояния в неустойчивое.

В соответствии с критерием положительности работы добавочных нагрузок (10.48) деформирование листа является устойчивым, если

$$dPd\Delta u + dQd\Delta v \geq 0, \quad (10.49)$$

где Δu и Δv – размер элемента листа в направлениях осей u и v .

Обозначим толщину листа через s . В этом случае

$$P = \sigma_u \Delta v s; \quad Q = \sigma_v \Delta u s;$$

$$de_u = \frac{d(\Delta u)}{\Delta u}, \quad de_v = \frac{d(\Delta v)}{\Delta v}, \quad de_z = \frac{ds}{s} = -de_u - de_v.$$

Теперь условие (10.49) переписется как

$$d\sigma_u de_u + d\sigma_v de_v \geq \sigma_u de_u^2 + \sigma_v de_v^2. \quad (10.50)$$

Введем

$$m = \frac{\sigma_v}{\sigma_u}; \quad B = \frac{de_v}{de_u} \quad (10.51)$$

и, полагая нагружение простым, из (10.50) получим

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u de_u} - \frac{1 + mB^2}{1 + mB} \geq 0. \quad (10.52)$$

Используя обозначения (10.51), представим выражение для интенсивности напряжений и приращения интенсивности деформаций при плоском напряженном состоянии в виде

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_u^2 + (\sigma_u - \sigma_v)^2 + \sigma_v^2} = \sqrt{m^2 - m + 1} \sigma_u; \quad (10.53)$$

$$\begin{aligned} de_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(de_u - de_v)^2 + (de_v - de_z)^2 + (de_z - de_u)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + B + B^2} de_u. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Из ассоциированного закона течения найдем

$$B = \frac{de_v}{de_u} = \frac{2\sigma_v - \sigma_u}{2\sigma_u - \sigma_v} = \frac{2m-1}{2-m}. \quad (10.55)$$

Подставляя (10.53) – (10.55) в уравнение (10.52), получим условие устойчивости материала:

$$\frac{d\sigma_i}{\sigma_i de_i} \geq \frac{4m^3 - 3m^2 - 3m + 4}{4\sqrt{(n^2 - m + 1)^3}}. \quad (10.56)$$

Из этого выражения легко получить зависимость критической деформации от m , если известна кривая течения материала. Для этого находим производную dy_i/de_i как тангенс угла наклона касательной к кривой течения и строим график изменения $dy_i/y_i de_i$ в зависимости от e_i . Значение e_i , при котором условие (10.56) выполняется со знаком равенства, является критической деформацией.

Если кривая упрочнения материала аппроксимируется степенной зависимостью $\sigma_i = Ae_i^n$, то из (10.56) следует, что критическая деформация, соответствующая моменту образования шейки, будет определяться выражением

$$e_{inp} = \frac{4n\sqrt{(n^2 - m + 1)^3}}{4m^3 - 3m^2 - 3m + 4}. \quad (10.57)$$

Рассмотрим ряд простейших случаев:

1) одноосное растяжение ($\sigma_v = 0$; $m = 0$):

$$e_{ikp} = n; \quad e_{ukp} = n; \quad e_{vkp} = e_{zkp} = -0,5n;$$

2) равномерное двухосное растяжение ($\sigma_u = \sigma_v$; $m = 1$):

$$e_{ikp} = 2n; \quad e_{ukp} = e_{vkp} = n; \quad e_{zkp} = -2n;$$

3) равномерное растяжение-сжатие ($\sigma_u = -\sigma_v$; $m = -1$):

$$e_{ikp} = \infty,$$

т.е. в этом случае материал деформируется без шейкообразования, и его разрушение происходит после исчерпывания ресурса пластичности.

Вторичные полосы скольжения. В процессе вытяжки деталей сложной формы участки листовой заготовки, подвергающиеся двухосному пластическому растяжению, могут потерять устойчивость с образованием вторичных полос скольжения. Последние, в отличие от полос скольжения начальной стадии деформирования, обусловленных наличием площадки текучести на диаграмме растяжения, возникают при деформациях, соответствующих максимуму внешней нагрузки. Вторичные полосы скольжения приводят к быстрому разрыву металла, и поэтому их возникновение при штамповке нежелательно.

Вторичные полосы скольжения являются следствием резкого утонения листа вдоль некоторых линий на его поверхности, по направлению которых деформации удлинения отсутствуют.

В.Д. Головлевым для анизотропного материала с круговой симметрией установлена граница между областями потери устойчивости, происходящей без образования вторичных полос скольжения и с их образованием (кривая OA , рис. 10.2). Область II , располагающаяся ниже кривой, соответствует напряженному состоянию и анизотропии, при которых потеря устойчивости сопровождается образованием вторичных полос скольжения. В области I потеря устойчивости происходит без образования полос скольжения, за счет сосредоточенного утонения.

Для изотропного материала ($R_0 = 1$) вторичные полосы скольжения возможны только при $m_\sigma \leq 0,5$ (рис. 10.2). Для анизотропных материалов с показателями анизотропии R_0 , равными 0,5 и 2,0, возникновение полос скольжения возможно при величинах m_σ , не превышающих соответственно 0,33 и 0,66, т.е. область возможного возникновения вторичных полос скольжения расширяется с увеличением показателей анизотропии. Образование вторичных полос скольжения является следствием разрыва нормальной и касательной составляющих скорости и непосредственно влечет за собой разрыв листового металла.

На рис. 10.2 обозначены: $\sigma_{ук}$ – критическое значение σ_u , при котором имеет место потеря устойчивости с образованием сосредоточенного утонения; $\sigma'_{ук}$ – критическое значение σ_u , соответствующее моменту возникновения вторичных полос скольжения.

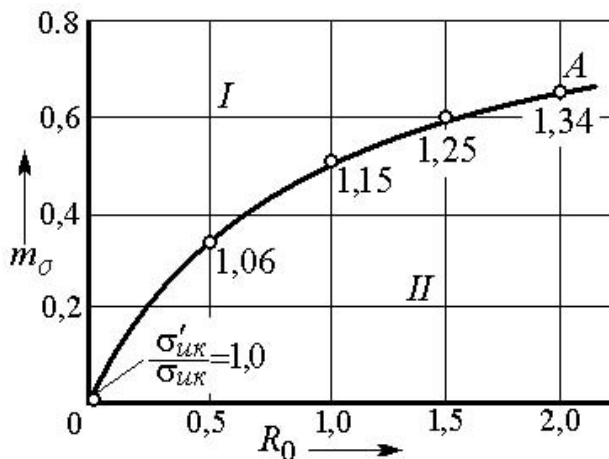


Рис. 10.2. График, характеризующий влияние напряженного состояния (m_σ) и анизотропии (R_0) на тип потери устойчивости при двухосном растяжении

Следует отметить, что потеря устойчивости при пластическом растяжении с образованием сосредоточенного утонения характеризуется возникновением на листовой заготовке участка интенсивного утонения, располагающегося симметрично относительно главных осей напряжений. Металл после возникновения сосредоточенного утонения сохраняет некоторую склонность к дальнейшему формообразованию.

10.2. Складкообразование в процессах пластического формоизменения листового материала

Методы анализа складкообразования. Технологические возможности многих процессов листовой штамповки лимитируются потерей устойчивости заготовки второго типа при ее формоизменении, т.е. явлением образования волнистости, складок,

гофр на участках заготовки, деформируемых при сжимающих или растягивающих напряжениях. Рассмотрим этот вид пластической потери устойчивости.

Для предупреждения потери устойчивости заготовки часто бывают вынуждены применять в штампе дополнительные устройства –прижимы, перетяжные пороги или переходить на более сложный технологический процесс.

Теория устойчивости заготовок при их пластическом формоизменении является наименее разработанным разделом теории обработки металлов давлением. Устойчивость заготовки рассматривают на основании теории устойчивости пластин и оболочек, работающих в инженерных конструкциях, при упругих деформациях или за пределом упругости при наличии малых пластических деформаций.

Изучение устойчивости заготовок при ОМД значительно усложняется тем, что заранее неизвестны форма и размеры заготовки в момент начала потери устойчивости, так как это явление возникает в процессе деформирования. Кроме того, напряженное состояние заготовки и интенсивность упрочнения изменяются в процессе формоизменения.

Обычно при анализе устойчивости заготовок при пластическом формоизменении применяют статический и энергетический критерии устойчивости, при использовании которых аналитические решения получаются более простые.

Сущность статического критерия устойчивости состоит в том, что рассматриваются состояния равновесия, бесконечно близкие к основному (исходному) состоянию равновесия, т.е. при некотором значении нагрузки наряду с основной формой возможна другая форма равновесия, а именно при несколько искривленной заготовке. Такое состояние и рассматривается как переходное от устойчивого равновесия к неустойчивому.

При энергетическом критерии устойчивости за критическую принимают такую нагрузку, при которой приращение работы внешних сил равно приращению работы деформаций. Для консервативных систем, т. е. таких систем, работа внешних сил

которых зависит лишь от начального и конечного положений точек системы и не зависит от траекторий движения точек, статический и энергетический критерии эквивалентны.

В известных исследованиях устойчивости листовых заготовок (при их формоизменении) основное внимание было обращено на рассмотрение устойчивости во фланце заготовки, так как эта задача является более простой.

К первому теоретическому исследованию потери устойчивости фланца заготовки можно отнести исследование И.В. Геккелера, которое в дальнейшем было развито в работах Л.А. Шофмана и др.

При рассмотрении устойчивости фланца И.В. Геккелер принял, что фланец представляет собой узкое кольцо, нагруженное по внутреннему контуру равномерно распределенной растягивающей нагрузкой и тангенциальными сжимающими напряжениями, равномерно распределенными по сечению кольца. Задача рассматривалась как упругая.

При изучении потери устойчивости за пределом текучести некоторые исследователи использовали решение упругой задачи, заменяя при этом в целях уточнения модуль упругости E приведенным модулем упругости (модуль Кармана):

$$E_0 = \frac{4E \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \right)^2} = \frac{4E\Pi}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\Pi} \right)^2}.$$

Известны и другие несколько отличные работы по рассмотрению отдельных задач потери устойчивости заготовок при листовой штамповке.

Наиболее интересными являются исследования Ю.Н. Алексеева, В.Д. Головлева и Е.И. Исаченкова, которые использовали разработанные А.А. Ильюшиным основные положения решения задачи устойчивости за пределом упругости. Эти ученые приняли степенную зависимость напряжений от степени деформаций и усреднение напряжений по ширине исследуемого участка. Толщину заготовки считали неизменной.

Во многих исследованиях рассматриваемый секторный участок фланца принимался при анализе за прямоугольную пластину длиной, равной длине полуволны складки.

Основные особенности потери устойчивости в виде образования складок. Для уточнения и выявления условий потери устойчивости заготовок при пластическом деформировании проведены экспериментальные исследования по изучению особенностей потери устойчивости заготовок при нескольких технологических процессах. Результаты этих экспериментов позволили сформулировать основные особенности потери устойчивости заготовок при обработке металлов давлением.

В пластическом состоянии заготовка менее устойчива, чем в упругом. Потеря устойчивости происходит при значительной относительной деформации, несмотря на увеличение толщины стенки.

Потеря устойчивости при пластическом деформировании возникает в условиях непрерывного возрастания степени деформации и, следовательно, деформирующей силы; потеря устойчивости в виде выпучивания, образования волнистости или складки развивается постепенно, а не скачкообразно, как при упругом состоянии; при

определенных условиях появившаяся или первоначально имевшаяся на заготовке искривленность (выпучина) может выправиться при дальнейшем деформировании.

В общем виде применительно к процессам обработки металлов давлением за критерий пластической потери устойчивости следует принимать равенство нулю сжимающих напряжений на выпуклой стороне заготовки, тогда при дальнейшем деформировании заготовки в основном будет происходить увеличение высоты складки, а не ее осадка.

Интенсивность упрочнения заготовки повышает ее устойчивость. При рассмотрении устойчивости в пластическом состоянии аппроксимировать интенсивность упрочнения следует по криволинейной зависимости, например степенной, как более близко отражающей действительный характер этого явления. Если аппроксимировать кривую напряжений на участке пластических деформаций линейной зависимостью, то надо заранее принять, что наиболее опасным моментом деформирования в отношении потери устойчивости будет момент, когда напряжения достигнут предела текучести; это противоречит экспериментам, но иногда такое условие принимается.

Устойчивость заготовки уменьшается с увеличением степени деформации, так как снижается интенсивность упрочнения. Однако это уменьшение имеет предел, поскольку одновременно уменьшается высота (или ширина участка) заготовки и увеличиваются ее поперечные размеры (толщина, диаметр).

Контакт на торцовых поверхностях заготовки, например, при осадке стержня или пластины, нарушается при переходе сжимающих напряжений в растягивающие на боковой поверхности заготовки, т. е. в начальной стадии потери устойчивости. Следовательно, условия изгиба при осадке свободно опертой заготовки одинаковы с условиями продольного изгиба заготовки с защемленными концами;

это объясняется небольшим отношением высоты заготовки к ее поперечным размерам при осадке.

10.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ И СТЕРЖНЯ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ. РАССМОТРИМ ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ, НАГРУЖЕННОЙ С ДВУХ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СТОРОН СЖИМАЮЩИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ.

Принимаем следующие начальные условия и допущения:

а) нагруженные торцы пластины при $x=0$ и $x=h$ (рис. 10.3) считаем жестко заземленными. Пластину принимаем бесконечно широкой, т.е. краевым эффектом на свободных сторонах пренебрегаем;

б) кривизну выпучины считаем зависящей только от координаты x , т.е. рассматривается так называемая цилиндрическая форма потери устойчивости, что является следствием предыдущего допущения;

в) напряженное и деформированное состояния заготовки принимаем плоскими. Отсутствуют напряжения по толщине пластины, а деформации – по ее ширине, так как пластина принята бесконечно широкой;

г) зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций принимаем в виде степенной функции

$$\sigma_i = A e_i^\alpha;$$

д) предельные отношения высоты пластины к ее толщине определяем, исходя из условия, что потеря устойчивости происходит в процессе деформирования;

е) материал пластины принимаем изотропным.

Решение задачи проводим на основании статического критерия устойчивости с использованием теории пластического течения, которая, по-видимому, более соответствует пластическому деформированию при больших степенях деформаций.

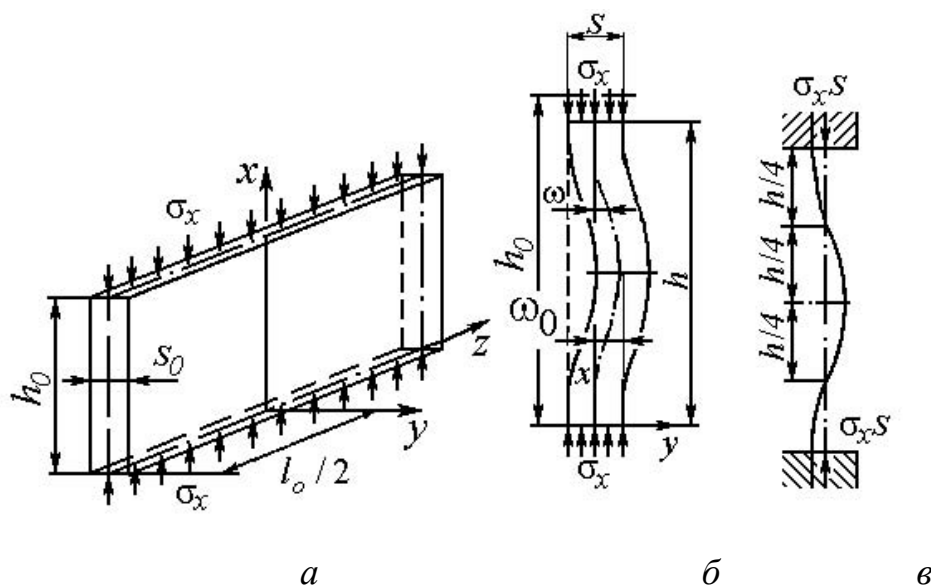


Рис. 10.3. Схема нагружения (а), изгиба (б) и кривизны (в) средней линии

Дифференциальное уравнение устойчивости исследуемой пластины имеет вид

$$\frac{d^2 \delta M}{dx^2} + \sigma_x s \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0, \quad (10.58)$$

где δM – приращение момента внутренних сил при изменении кривизны срединной поверхности пластины; σ_x – сжимающее напряжение в направлении оси x ; s – толщина пластины с учетом деформации, предшествующей потере устойчивости; ω – прогиб срединной поверхности пластины; $\frac{d^2 \omega}{dx^2}$ – изменение кривизны срединной поверхности пластины при возникновении явления выпучивания.

Приращение момента внутренних сил равно:

$$\delta M = \int_{-s/2}^{s/2} \delta \sigma_x y dy. \quad (10.59)$$

Приращение напряжения $\delta \sigma_x$ определяем из зависимости между приращением деформации e_x и напряжениями σ_x и σ_z .

По теории пластического течения приращение деформаций

$$\delta e_x = \frac{\delta \sigma_x}{\sigma_x E_k} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_z \right), \quad (10.60)$$

где E_k – касательный модуль упрочнения, $E_k = \frac{d\sigma_i}{de_i}$; σ_z – напряжение по ширине пластины в направлении оси z .

Для определения приращения интенсивности напряжений воспользуемся условием пластичности, которое для плоских

напряженного и деформированного состояний ($\sigma_z = \frac{\sigma_x}{2}$; $\sigma_y = 0$) имеет

вид

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_x. \quad (10.61)$$

Следовательно,

$$\delta\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta\sigma_x. \quad (10.62)$$

Подставляем значения $\delta\sigma_i$, σ_i и σ_z в уравнение (10.60), тогда

$$\delta e_x = \frac{3}{4} \frac{\delta\sigma_x}{E_k}; \quad (10.63)$$

$$\delta\sigma_x = \frac{4}{3} E_k \delta e_x. \quad (10.64)$$

В соответствии с гипотезой плоских сечений при изгибе принимаем линейную зависимость приращения деформаций по толщине заготовки:

$$\delta e_x = \delta e_{x0} \pm y \frac{d^2 \omega}{dx^2}, \quad (10.65)$$

где δe_{x0} – приращение деформации срединной поверхности.

Подставляем значения $\delta\sigma_x$ из (10.64) и δe_x из (10.65) в уравнение (10.59):

$$\delta M = \frac{4}{3} E_k \int_{-s/2}^{s/2} \left(\delta e_{x0} \pm y \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) y dy. \quad (10.66)$$

После интегрирования получаем:

для пластины

$$\delta M = -\frac{4}{3} E_k J_0 \frac{d^2 \omega}{dx^2}; \quad (10.67)$$

аналогичным решением для стержня

$$\delta M = -E_k J_0 \frac{d^2 \omega}{dx^2}, \quad (10.68)$$

где J_0 – момент инерции сечения пластины или стержня единичной ширины; $J_0 = \frac{s^3}{12}$.

Полученные значения δM подставляем в уравнение (10.58), тогда

для пластины

$$\frac{4}{3} E_k J_0 \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \sigma_x s \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0; \quad (10.69)$$

для стержня

$$E_k J_0 \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \sigma_x s \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0. \quad (10.70)$$

Уравнение (10.69), определяющее устойчивость пластины в условиях плоской деформации, отличается от уравнения (10.70) только постоянным коэффициентом при первом члене.

Граничными условиями для решения уравнений (10.69) и (10.70) при жестком защемлении сторон являются:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=h \quad \omega = 0; \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=h \quad \frac{d\omega}{dx} = 0.$$

Решая уравнение (10.69) с использованием указанных условий, находим выражения для критических сжимающих напряжений:

для пластины

$$\sigma_{xkp} = \frac{4\pi^2 E_k s^2}{9h^2}; \quad (10.71)$$

для стержня квадратного сечения

$$\sigma_{xkp} = \frac{\pi^2 E_k s^2}{3h^2}; \quad (10.72)$$

для стержня круглого сечения

$$\sigma_{xkp} = \frac{\pi^2 E_k d^2}{4h^2}. \quad (10.73)$$

Полученные уравнения аналогичны известным уравнениям для упругих и упругопластических систем; однако в уравнения (10.71) – (10.73) входят текущие высота и толщина, что дает возможность определить критические значения исходных размеров с учетом деформаций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ. В СООТВЕТСТВИИ СО СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ НАПРЯЖЕНИЙ КАСАТЕЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

$$E_k = \frac{d\sigma_i}{de_i} = A\alpha e_i^{\alpha-1}. \quad (10.74)$$

Интенсивность деформаций для плоского деформированного состояния равна: $e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} e_x$; для линейного – $e_i = e_x$.

Истинная деформация сжатия, предшествующая потере устойчивости заготовки: $e_x = \ln \frac{h_0}{h}$, откуда $h = \frac{h_0}{e^{e_x}}$.

Из условия постоянства объема находим: для плоского деформированного состояния – $s = s_0 e^{e_x}$; для линейного деформирования – $s = s_0 e^{0,5e_x}$ и $d = d_0 e^{0,5e_x}$ (h_0 , s_0 и d_0 – начальные размеры заготовок).

Подставляем в уравнения (10.71) – (10.73) текущие размеры заготовок и значения E_k и σ_x . Тогда получаем критические значения h_0/s_0 :

для пластины

$$\frac{h_0}{s_0} = \pi e^{2e_x} \sqrt{\frac{\alpha}{3e_x}}; \quad (10.75)$$

для стержня квадратного сечения

$$\frac{h_0}{s_0} = \pi e^{1,5e_x} \sqrt{\frac{\alpha}{3e_x}}; \quad (10.76)$$

для круглого стержня

$$\frac{h_0}{d_0} = \frac{\pi}{2} e^{1,5e_x} \sqrt{\frac{\alpha}{e_x}}. \quad (10.77)$$

С увеличением степени деформации устойчивость заготовок значительно уменьшается (рис. 10.4).

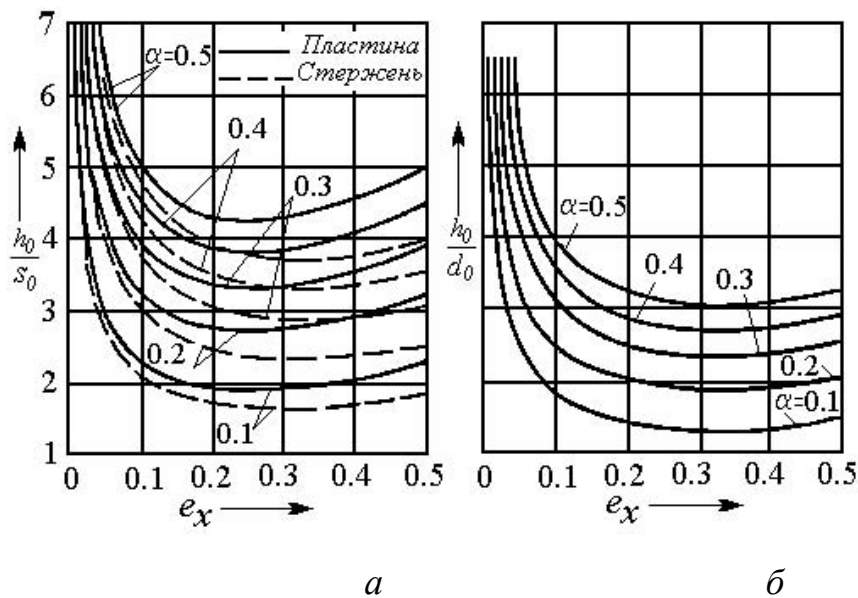


Рис. 10.4. Зависимость критических значений h_0/s_0 и h_0/d_0

от степени деформации:

a – пластина и прямоугольный стержень;

б – круглый стержень; α – показатель упрочнения

Дифференцируя уравнения (10.75) – (10.77), определяем величину деформации e_x , при которой заготовка имеет наименьшую устойчивость. Из условия $df \left(\frac{h_0}{s_0} \right) de_x = 0$ находим, что наименьшее критическое значение h_0/s_0 соответствует степени деформации: для пластины – $e_x = 0,25$; для стержня – $e_x = 0,33$. Это значение h_0/s_0 в дальнейшем называем предельным значением и обозначаем $\left(\frac{h_0}{s_0} \right)_{\text{пр}}$.

Для случаев деформирования при больших степенях деформаций уравнения (10.75) – (10.77) можно упростить путем подстановки значений e_x , соответствующих минимальной устойчивости заготовки. Тогда предельные значения h_0/s_0 и h_0/d_0 будут определяться по формулам:

для пластины

$$\left(\frac{h_0}{s_0}\right)_{np} = 6\sqrt{\alpha}; \quad (10.78)$$

для стержня квадратного сечения

$$\left(\frac{h_0}{s_0}\right)_{np} = 5,2\sqrt{\alpha}; \quad (10.79)$$

для стержня круглого сечения

$$\left(\frac{h_0}{d_0}\right)_{np} = 4,5\sqrt{\alpha}. \quad (10.80)$$

Зависимости (10.78) – (10.80) от показателя упрочнения α графически изображены на рис. 10.5.

Рис. 10.5. Зависимость предельных значений h_0/s_0 и h_0/d_0 от

показателя

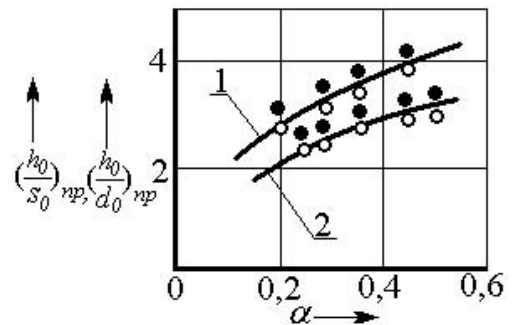
упрочнения α :

1 – пластина; 2 – круглый стержень;

— — — — — теоретические кривые;

•, ○ — соответственно

экспериментальные точки для пластины и круглого стержня



Эксперименты проводились по осадке на специальном устройстве образцов из материалов, отличающихся друг от друга интенсивностью упрочнения. Толщина образцов составляла 10 мм, ширина пластины была равна ее 10 толщинам.

Одновременно для этих материалов были проведены механические испытания на разрыв для определения интенсивности упрочнения. По диаграммам напряжений на участках, соответствующих относительным деформациям $e_x = 0,2 \dots 0,35$, установлены значения α : для нагартованной красной меди – 0,2; для низкоуглеродистой стали Ст. 3 – 0,29; для нержавеющей стали X18H10T – 0,36; отожженной красной меди – 0,45; латуни Л62 – 0,55; стали Ст. 3 (в горячем состоянии) – 0,25; стали X18H10T (в горячем состоянии) – 0,27.

10.4. Устойчивость цилиндрической заготовки

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ. ПРИ ОСАДКЕ ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ С ХАРАКТЕРНЫМИ РАЗМЕРАМИ, БОЛЬШИМИ НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ, ПРОИСХОДИТ ПОТЕРЯ ЕЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ВИДЕ НАРУЖНОГО КОЛЬЦЕВОГО ВЫПУЧИВАНИЯ, КОТОРОЕ ПРИ ДАЛЬНЕЙШЕМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПЕРЕХОДИТ В ЗАЖИМ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ (РИС. 10.6).

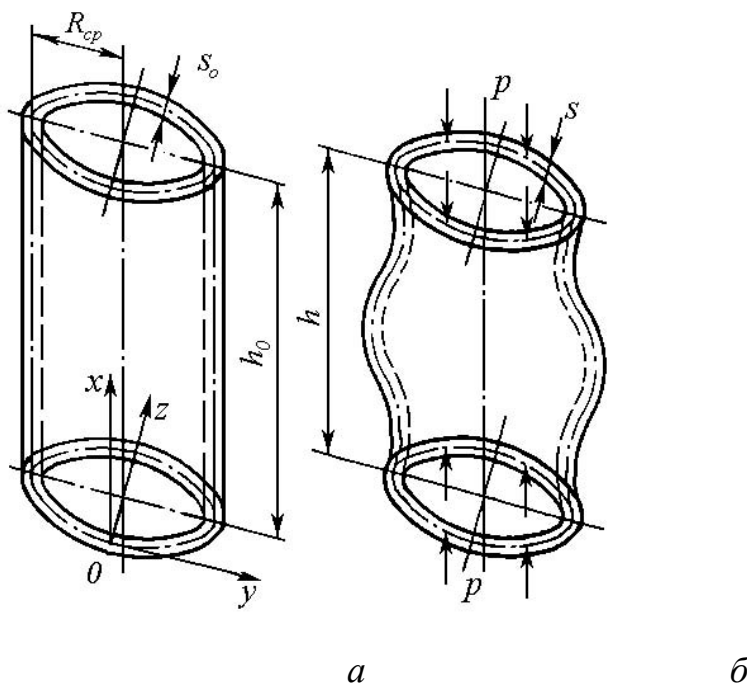


Рис. 10.6. Цилиндрическая оболочка:

a – до деформирования; *б* – после потери устойчивости

Рассмотрим условия потери устойчивости этой заготовки как цилиндрической оболочки при сжатии с большой степенью деформаций аналогично методике анализа устойчивости пластин и стержней. Однако формоизменение цилиндрических оболочек при потере устойчивости несколько отличное, так как с началом потери устойчивости в оболочках появляются дополнительные растягивающие тангенциальные напряжения, возникающие

вследствие увеличения диаметра срединной поверхности оболочки при ее выпучивании (см. рис. 10.6).

При решении задачи устойчивости цилиндрических оболочек, деформируемых осевыми сжимающими нагрузками, используем, так же как и при рассмотрении потери устойчивости пластин и стержней, статический критерий устойчивости и теорию пластического течения.

По сравнению с уравнением (10.58) в общее дифференциальное уравнение устойчивости цилиндрической оболочки при осевой осадке добавляется третье слагаемое, учитывающее особенности формоизменения оболочки:

$$d^2 M \left/ dx^2 + \sigma_x s d^2 \omega \right/ dx^2 + \frac{1}{R_{cp}} \delta T = 0;$$

$$\delta M = \int_{-s/2}^{s/2} \delta \sigma_x z dz; \quad \delta T = \int_{-s/2}^{s/2} \delta \sigma_y dz, \quad (10.81)$$

где R_{cp} – радиус срединной поверхности исходной оболочки; δT – изменение дополнительно возникающей при потере устойчивости окружной силы вследствие выпучивания срединной поверхности оболочки.

Зависимости предельных значений ϵ_0/s_0 от e_x могут быть представлены графически (рис. 10.7).

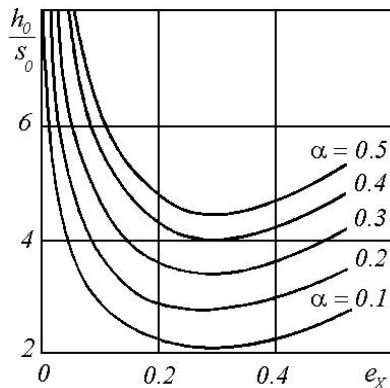
Напряженное и деформированное состояния цилиндрической оболочки до момента потери устойчивости являются приближенно плоскими ввиду отсутствия напряжений по толщине и деформаций срединной поверхности в окружном направлении $\epsilon_y = 0$.

Степень деформации $e_x \leq 0,3$, т. е. относительно небольшая.

Тогда напряжения, деформации и их приращения составят:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sigma_x / 2; \quad \delta \sigma_i = \sqrt{3} \delta \sigma_x / 2; \quad \sigma_y = \sigma_x / 2; \quad (10.82)$$

$$e_i = 2 \varepsilon_x / \sqrt{3}; \quad \delta e_i = 2 \delta \varepsilon_x / \sqrt{3}; \quad (10.83)$$



$$\sigma_x = \frac{A}{\sqrt{3}} e^{\alpha} A e_x^{\alpha}; \quad (10.84)$$

$$E_k = A \frac{A}{\sqrt{3}} e^{-1} A e_x^{\alpha-1}. \quad (10.85)$$

Для определения приращения напряжений сжатия воспользуемся зависимостью между приращением деформаций и напряжением (10.60) и уравнениями (10.82) – (10.85):

$$\delta \sigma_x = 4 E_k \delta e_x / 3. \quad (10.86)$$

С момента появления складки осадка заготовки начинает происходить в основном за счет выпучивания стенки. Радиальные напряжения и деформации малы, и ими можно пренебречь. Тогда $\delta e_x = -\delta e_y$; $\delta \sigma_x = -\delta \sigma_y$. Из уравнения (10.86) получим

$$\delta \sigma_y = 4 E_k \delta e_y / 3. \quad (10.87)$$

По гипотезе плоских сечений при изгибе принимаем линейную зависимость приращений деформаций по толщине оболочки:

$$\delta e_x = \delta e_0 + z d^2 \omega / dx^2 ; \quad \delta e_y = -\omega / R_{cp} , \quad (10.88)$$

где δe_0 – бесконечно малое приращение деформации срединной поверхности оболочки.

Решая совместно уравнения (10.81), (10.86) – (10.88), после интегрирования получаем

$$\frac{1}{9} E_k s^2 d^4 \omega / dx^4 + \sigma_x d^2 \omega / dx^2 - \frac{4}{3} E_k \omega / R_{cp}^2 = 0. \quad (10.89)$$

В рассматриваемом случае, когда оболочка выпучивается наружу и концы ее заделаны, наиболее близкую кривую прогиба можно выразить функцией $\omega = \omega_0 \left[-\cos \left(\frac{\pi x}{h} \right) \right] / 2$.

Принятая функция удовлетворяет граничным условиям ($\omega = 0$ и $d\omega/dx = 0$ при $x = 0, x = h$) и условию изгиба стенки оболочки посередине ($\omega = \omega_0$; $d\omega/dx = 0$ при $x = h/2$).

После подстановки принятого выражения функции ω и ее дифференциалов в уравнение (10.89) и математических преобразований получаем

$$4E_k s^2 \pi^4 / h^4 - \sigma_x \pi^2 / h^2 + E_k \left[\cos \left(\frac{\pi x}{h} \right) - 1 \right] / R_{cp} = 0. \quad (10.90)$$

В уравнении неизвестной величиной является $\cos \left(\frac{\pi x}{h} \right)$, которая изменяется от -1 до $+1$. Теоретические кривые эквидистантны экспериментальным кривым при $\cos \left(\frac{\pi x}{h} \right) = 1/2$. Учитывая это, подставляем $1/2$ в уравнение (10.90) вместо $\cos \left(\frac{\pi x}{h} \right)$:

$$\sigma_{xkp} = E_k [4\pi^2 s^2 / (9h^2) + h^2 / (3\pi^2 R_{cp}^2)]. \quad (10.91)$$

В полученном уравнении по сравнению с уравнением, характеризующим устойчивость пластины, дополнительным является второе слагаемое, учитывающее радиус цилиндрической оболочки. Если применительно к пластине принять $R_{cp} = \infty$, то уравнение (10.91) примет вид уравнения (10.71).

Определение критических размеров заготовки. Подставляя в уравнение (10.91) значения σ_x и E_k из уравнений (10.84) и (10.85) и выражая текущие размеры оболочки через начальные (принимая $e_x = \ln \bar{\rho}_0 / h$ и, следовательно, $h = h_0 / e^{e_x}$, $s = s_0 e^{e_x}$), получаем

$$\frac{h_0}{s_0} = \pi e^{2e_x} \sqrt{\frac{\alpha}{3[e_x - \alpha h_0^2 / (4\pi^2 R_{cp}^2 e^{2e_x})]}}. \quad (10.92)$$

С увеличением степени деформации устойчивость оболочки и, следовательно, величина $\bar{\rho}_0 / s_0$ уменьшается. Величину деформации e_{xnp} , при которой заготовка имеет наименьшую устойчивость, определяем графически (см. рис. 10.7). Для цилиндрической оболочки с различным показателем упрочнения α минимальному отношению $\bar{\rho}_0 / s_0$ соответствует значение степени деформации $e_{xnp} = 0,26 \dots 0,28$.

Подставляя среднее значение $e_{xnp} = 0,265$ в уравнение (10.92), получаем уравнение для предельного значения $\bar{\rho}_0 / s_0_{np}$,

соответствующее условиям осадки или обжима трубной заготовки при больших степенях деформаций:

$$\left(\frac{h_0}{s_0}\right)_{np} = 6 \sqrt{\frac{\alpha}{1 - 0,0056\alpha h_0^2/R_{cp}^2}}. \quad (10.93)$$

Полученные зависимости действительны до $h_0/R_{cp} \leq 6$. При больших отношениях h_0/R_{cp} у оболочки начинают возникать две выпучины на расстоянии от торцов до середины выпучины $l \approx h/4$.

10.5. Устойчивость заготовки при формовке сферических деталей без фланца

Форма заготовки и элемента складки при вытяжке. Проведем исследование потери устойчивости при штамповке неполных сферических заготовок без фланца (рис. 10.8). При формоизменении в заготовке возникают два участка: центральный (двухосное растяжение) и периферийный (разноименное напряженное состояние – сжимающие широтные напряжения). При этом отношение широтных напряжений к меридиональным (σ_θ/σ_R) увеличивается к кромке заготовки.

Экспериментальные исследования позволили уточнить особенности формоизменения заготовок в процессе их штамповки.

Радиус граничной поверхности R_0 между центральным и периферийным участками остается примерно постоянным.

Заготовка соприкасается с матрицей по сравнительно узкой и почти неизменной до конца деформирования кольцевой поверхности. Заготовка наименее устойчива в начале деформирования, когда ее внеконтактный участок поверхности имеет почти коническую форму (рис. 10.8).

При больших величинах отношения диаметра заготовки к ее толщине при потере устойчивости появляются четыре радиальные складки, равномерно расположенные по окружности. Складки появляются вблизи кромки и распространяются в радиальном направлении.

Небольшие складки в конце деформирования, когда заготовка плотно зажимается между пуансоном и матрицей, разглаживаются. Однако при холодной штамповке в результате пружинения складки восстанавливаются, хотя значительно меньшей высоты.

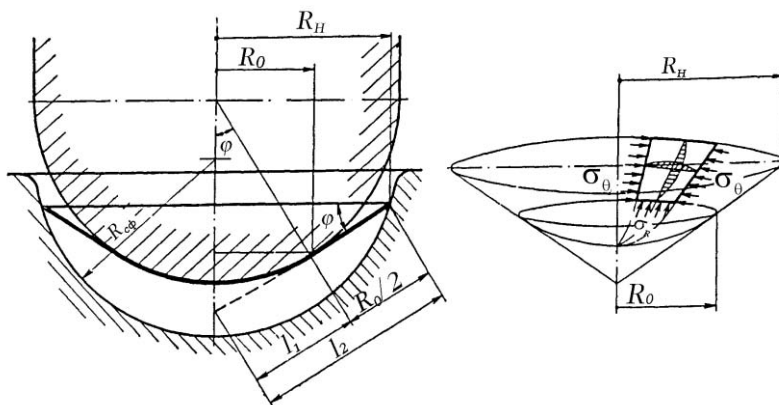


Рис. 10.8. Форма заготовки и элемента складки в момент потери устойчивости при вытяжке

При анализе потери устойчивости принимаем рассматриваемый элемент полуволны.

Согласно экспериментальным данным, трение на кромке заготовки оказывает существенное влияние на положение граничной нейтральной поверхности между участками, что учитываем введением эмпирического коэффициента $k = 1,35$:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{i_{cp}} \left[\ln \left(\frac{R_3}{R} \right) - 1 \right]; \quad \sigma_R = \sigma_{i_{cp}} k \ln \left(\frac{R_3}{R} \right), \quad (10.94)$$

где $\sigma_{i_{cp}}$ – средняя интенсивность напряженного состояния в наружной зоне заготовки; R – радиус рассматриваемого участка заготовки.

Приравниваем широтное напряжение на нейтральной окружности $\sigma_{\theta} = 0$ и получаем зависимость для определения радиуса нейтральной окружности:

$$R_0 \approx 0,5R_3. \quad (10.95)$$

Величина e_i переменна по ширине рассматриваемого конического участка. Широтные напряжения уменьшаются от наибольшего значения на кромке заготовки до нуля на нейтральной окружности, а меридиональные от небольшого значения на кромке постепенно возрастают к нейтральной окружности.

С учетом этого, а также того, что максимальный прогиб складки смещен к кромке:

$$\sigma_i = Ae_{i_{cp}}^\alpha \cong Ae_{\theta H}^\alpha, \quad (10.96)$$

где $e_{\theta H}$ – относительная деформация кромки.

В соответствии с изложенными условиями формоизменения заготовки и допущениями принимаем схему (см. рис. 10.8), которая соответствует наименьшей устойчивости заготовки:

$$e_{\theta H} = R_3^2 / [8R_{c\phi}^2 \langle + \cos \varphi \rangle] \quad (10.97)$$

Критерий устойчивости. Для исследования устойчивости заготовки при рассматриваемом виде штамповки используем энергетический метод, благодаря чему решение получается менее сложным. Согласно этому методу, работа внутренних сил A_q приравнивается к работе внешних сил A_b . Устойчивое состояние оболочки характеризуется условием $A_q \geq A_b$.

Решение С.П. Тимошенко, как показал А.А. Ильюшин, вполне приемлемо для оценки устойчивости оболочек при напряжениях, превышающих предел текучести.

Работа внутренних сил, за которую принимаем деформации поверхности рассматриваемого элемента, равна:

$$A_q = \frac{s_0^2}{6(1-\nu^2)} \iint [E_c \chi_R^2 + \chi_R \chi_\theta + \chi_\theta^2 + \chi^2 - \frac{3}{4} \langle E_c - E_k \rangle \langle \chi_R \sigma_R + \chi_\theta \sigma_\theta \rangle \langle \sigma_i^2 \rangle] \cos \varphi l d l d \theta, \quad (10.98)$$

где ν – коэффициент Пуассона, $\nu = 0,5$; E_c – секущий модуль, $E_c = \frac{\sigma_i}{e_i}$; χ_R , χ_θ – изменения кривизны срединной поверхности соответственно в меридиональном и широтном направлениях; χ – изменение кривизны кручения срединной поверхности; l – расстояние по образующей конуса от его вершины до рассматриваемой точки; θ – угол между осевой плоскостью, проходящей через рассматриваемую точку, и осевой плоскостью, делящей полуволну пополам и принятой за начальную.

Величины χ_R , χ_θ и χ определяем по уравнениям

$$\begin{aligned} \chi_\theta &= \left[\frac{1}{R^2 \cos \varphi} \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \left[\frac{1}{l} \right] \frac{\partial \omega}{\partial l}; \\ \chi_R &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}; \\ \chi &= \left[\frac{\cos \varphi}{R} \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial l \partial \theta} - \left[\frac{l^2 \cos \varphi}{R} \right] \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (10.99)$$

где ω – прогиб произвольной точки складки, т.е. расстояние от срединной поверхности складки до исходной срединной поверхности оболочки.

Работу внешних сил находим из выражения

$$A_b = s_0 \iint \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} \right)^2 + \frac{\cos \varphi}{l} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \right] \cos \varphi l dl d\theta. \quad (10.100)$$

Приравняв правые части уравнений (10.98) и (10.100), подставив значения σ_θ , σ_R , $\sigma_{i_{cp}}$ и ε_θ из уравнений (10.94), (10.96) и (10.97) и заменив отношение R_n/R отношением l_2/l (см. рис. 10.8), получим

уравнение для критического радиуса заготовки в весьма сложной форме.

Выбираемая функция прогибов ω должна удовлетворять граничным условиям и приближенно отражать форму складки. Принимаем эту функцию в виде уравнения поверхности, выраженного через расстояние от вершины до соответствующей точки конуса. Учитывая, что максимальный прогиб сдвинут к кромке оболочки, получим

$$\omega = \omega_{\max} \frac{l \left[1 - l \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + l_1 l_2 \right]}{m} \cos n\theta, \quad (10.101)$$

где m – постоянная величина, равная числителю дроби при $l = l_0$ и $\theta = 0$; l_0 – расстояние от вершины конуса до точки максимального прогиба.

Характерные сечения поверхности складки по принятой зависимости (10.101) соответствуют приведенным на рис. 10.8.

После подстановки значения ω из уравнения (10.101) и $n = 4$ в (10.98), (10.100), интегрирования и совместного решения уравнений (10.98), (10.100) получаем

$$D_{3np}^2 = s^2 R_{c\phi}^2 f \left(\frac{l_2}{l_1}; \alpha; \cos \varphi \right) l_1^2. \quad (10.102)$$

Согласно рис. 10.8,

$$l_2/l_1 = 1 + \cos \varphi; \quad l_1 = D_3 / \left(\frac{1}{2} \cos \varphi \right)$$

Поскольку угол φ изменяется от нуля до 30° , принимаем среднее значение: $\cos\varphi = 0,93$. Отсюда $l_2/l_1 = 1,93$ и $l_1 = D_3/3,73$.

Подставляя эти значения в уравнение (10.102), можно принять среднее значение числового коэффициента $\alpha = 0,3$. Тогда

$$D_{з_{np}} = 9\sqrt{D_{сф}s_0}. \quad (10.103)$$

Для подтверждения полученной зависимости проведены эксперименты по холодной штамповке заготовок из низкоуглеродистой стали 10 и коррозионно-стойкой стали 08Х18Н10Т. При экспериментах применяли заготовки толщиной $s_0 = 0,4...2$ мм с наружным диаметром $D_3 = \langle 100...500 \rangle \overline{s_0}$ и радиусом сферы $R_{сф} = 100...2000s_0$. За критический диаметр при обработке экспериментальных данных принимали наибольший диаметр заготовки при условии, что небольшие складки возникали не более чем на одной заготовке при штамповке комплекта, состоящего из десяти штук. Отклонения экспериментальных данных не превышали 14,5 %.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Назовите основные типы потери устойчивости заготовки при сложной вытяжке.
2. Укажите тип потери устойчивости, для предотвращения которой применяют дрессировку стального листа, перетяжные ребра и пороги.

3. Запишите критерий устойчивости шейкообразования при двухосном плоском напряженном состоянии.

4. Получите условие потери устойчивости (шейкообразования) части заготовки на некотором расстоянии от проёма матрицы на основе критерия устойчивости положительности добавочных нагрузок.

5. Как влияет характер напряженного состояния на величину критической деформации части заготовки на некотором расстоянии от проёма матрицы?

6. Рассмотрите устойчивость заготовки при простейших случаях нагружения: одноосного нагружения; равномерного двухосного растяжения; равномерного растяжения-сжатия.

7. Чем отличается потеря устойчивости листовой заготовки с образованием вторичных полос скольжения от потери устойчивости с образованием полос скольжения нормальной стадии деформирования?

8. Чем отличается потеря устойчивости листовой заготовки с образованием вторичных полос скольжения от потери устойчивости с образованием сосредоточенного утонения?

9. Каковы особенности складкообразования заготовок при пластической деформации?

10. Укажите особенности оценки устойчивости (шейкообразования) заготовки вблизи контура проёма матрицы.

11. ?

12. Перечислите особенности оценки устойчивости осесимметричной заготовки.

13. Опишите постановку задачи о потере устойчивости заготовки при формовке сферических деталей без фланца.

14. Какова форма заготовки и элементы складки при потере устойчивости?

15. Приведите формулу для определения предельного диаметра заготовки.

Литература

1. **Аверкиев, Ю.А.** Холодная штамповка. Формоизменяющие операции / Ю.А. Аверкиев. – Ростов-на-Дону: РГУ, 1984. – 288 с.
2. **Аверкиев, Ю.А.** Технология холодной штамповки: учебн. для вузов / Ю.А. Аверкиев, А.Ю. Аверкиев. – М.: Машиностроение, 1989. – 304 с.
3. **Арышенский, Ю.М.** Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов / Ю.М. Арышенский, Ф.В. Гречников. – М.: Металлургия, 1990. – 304 с.
4. **Богатов, А.А.** Механические свойства и модели разрушения металлов: учебное пособие для вузов / А.А. Богатов. – Екатеринбург: ГОУ ВПО «УГТУ-УПИ», 2002. – 329 с.
5. **Богатов, А.А.** Ресурс пластичности металлов при обработке давлением / А.А. Богатов, О.И. Мижирицкий, С.В. Смирнов. – М.: Металлургия, 1984. – 144 с.
6. **Вольмир, А.С.** Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

7. **Голенков, В.А.** Технологические процессы обработки металлов давлением с локальным нагружением заготовки / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко. – М.: Машиностроение, 1997. – 226 с.

8. **Головин, С.А.** Физические основы пластической деформации: учеб. пособие / С.А. Головин. – Тула: Тул. гос. университет, 2003. – 148 с.

9. **Головлев, В.Д.** Расчет процессов листовой штамповки / В.Д. Головлев. – М.: Машиностроение, 1974. – 136 с.

10. **Горбунов, М.Н.** Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве самолетов / М.Н. Горбунов. – М.: Машиностроение, 1981. – 224 с.

11. **Гречников, Ф.В.** Деформирование анизотропных материалов / Ф.В. Гречников. – М.: Машиностроение, 1998. – 446 с.

12. **Дель, Г.Д.** Определение напряжений в пластической области по распределению твердости / Г.Д. Дель. – М.: Машиностроение, 1971. – 200 с.

13. **Дель, Г.Д.** Технологическая механика / Г.Д. Дель. – М.: Машиностроение, 1978. – 174 с.

14. **Евстратов, В.А.** Теория обработки металлов давлением / В.А. Евстратов. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском университете, 1991. – 248 с.

15. **Джонсон, В.** Механика процесса выдавливания металлов / В. Джонсон, Х. Кудо. – М.: Металлургия, 1965. – 174 с.

16. **Джонсон, У.** Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М.: Машиностроение, 1979. – 567 с.

17. **Закономерности ползучести и длительной прочности:** справочник / под общ. ред. С.А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.

18. **Яковлев, С.П.** Изотермическое деформирование высокопрочных анизотропных металлов / С.П. Яковлев [и др.]. – М.: Машиностроение-1, Изд-во ТулГУ, 2004. – 427 с.

19. **Колмогоров, В.Л.** Механика обработки металлов давлением / В.Л. Колмогоров. – Екатеринбург: Уральский государственный технический университет (УПИ), 2001. – 836 с.

20. **Колмогоров, В.Л.** Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения /

В.Л. Колмогоров, Б.А. Мигачев, В.Г. Бурдуковский. – Екатеринбург: УрОРАН, 1994. – 104 с.

21. **Малинин, Н.Н.** Ползучесть в обработке металлов / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.

22. **Малинин, Н.Н.** Технологические задачи пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Высшая школа, 1979. – 119 с.

23. **Мошнин, Е.Н.** Технология штамповки крупногабаритных деталей / Е.Н. Мошнин. – М.: Машиностроение, 1973. – 240 с.

24. **Нечепуренко, Ю.Г.** Глубокая вытяжка цилиндрических изделий из анизотропного материала / Ю.Г. Нечепуренко, С.П. Яковлев, С.С. Яковлев. – Тула: ТулГУ, 2000. – 195 с.

25. **Огородников, В.А.** Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / В.А. Огородников. – Киев: Вища школа, 1983. – 175 с.

26. **Попов, Е.А.** Основы теории листовой штамповки / Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 278 с.

27. **Попов, Е.А.** Технология и автоматизация листовой штамповки / Е.А. Попов, В.Г. Ковалев, И.Н. Шубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 480 с.

28. **Работнов, Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

29. **Работнов, Ю.Н.** Кратковременная ползучесть / Ю.Н. Работнов, С.Т. Милейко. – М.: Наука, 1970. – 224 с.

30. **Романов, К.И.** Механика горячего формоизменения металлов / К.И. Романов. – М.: Машиностроение, 1993. – 240 с.

31. **Селедкин, Е.М.** Математическое моделирование процессов формоизменения заготовок / Е.М. Селедкин, А.Е. Гвоздев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 1998. – 225 с.

32. **Смирнов-Аляев, Г.А.** Механические основы пластической обработки металлов / Г.А. Смирнов-Аляев. – М.: Машиностроение, 1968. – 272 с.

33. **Смирнов-Аляев, Г.А.** Сопротивление материалов пластическому деформированию / Г.А. Смирнов-Аляев. – Л.: Машиностроение, 1978. – 368 с.

34. **Соколовский, В.В.** Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

35. **Специальные технологические процессы и оборудование обработки давлением** / В.А. Голенков [и др.]; под ред. В.А. Голенкова, А.М. Дмитриева. – М.: Машиностроение, 2004. – 464 с.
36. **Степанский, Л.Г.** Расчеты процессов обработки металлов давлением / Л.Г. Степанский. – М.: Машиностроение, 1979. – 215 с.
37. **Сторожев, М.В.** Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
38. **Теорияковки и штамповки** / под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1992. – 720 с.
39. **Теория обработки металлов давлением** / И.Я. Тарновский [и др.]. – М.: Металлургия, 1963. – 672 с.
40. **Теория пластических деформаций металлов** / Е.П. Унксов [и др.]; под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.
41. **Томленов, А.Д.** Теория пластического деформирования металлов / А.Д. Томленов. – М.: Металлургия, 1972. – 408 с.
42. **Томсен, Э.** Механика пластической деформации при обработке металлов / Э. Томсен, К. Янг, Ш. Кобаяши. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.

43. **Физическое металловедение** / С.В. Грачев [и др.]. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2002. – 534 с.
44. **Шевелев, В.В.** Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку / В.В. Шевелев, С.П. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1972. – 136 с.
45. **Шофман, Л.А.** Теория и расчеты процессов холодной штамповки / Л.А. Шофман. – М.: Машиностроение, 1964. – 375 с.
46. **Яковлев, С.П.** Штамповка анизотропных заготовок / С.П. Яковлев, В.Д. Кухарь. – М.: Машиностроение, 1986. – 136 с.
47. **Яковлев, С.П.** Обработка давлением анизотропных материалов / С.П. Яковлев, С.С. Яковлев, В.А. Андрейченко. – Кишинев: Квант, 1997. – 332 с.

Учебное издание

**Голенков Вячеслав Александрович, Яковлев Сергей Петрович,
Головин Станислав Алексеевич, Яковлев Сергей Сергеевич,
Кухарь Владимир Денисович**

**ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ
МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

Учебник

Редактор Т.Д. Васильева
Технический редактор Т.П. Прокудина

Подписано в печать 20.07.2009 г. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 27,6. Тираж 500 экз.
Заказ № 410

ООО «Издательство Машиностроение»
107076, г. Москва, Стромьинский пер., 4. www.mashin.ru

ООО Полиграфическая фирма «КАРТУШ»
302005, г. Орел, ул. Васильевская, 138.

ISBN 978-5-94275-469-3



9 785942 754693