

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИРОДЫ ВРЕМЕНИ
имени А. П. ЛЕВИЧА

Л. С. Шихобалов

ЭЛЕКТРОН

Санкт-Петербург
2025

УДК 530.1; 530.12:531.18; 537.8

Шихобалов Л. С. Электрон. — СПб., 2025. — 836 с.

Максвелловское электромагнитное поле симметрично относительно преобразований Лоренца. Порождать такое поле может только источник, который сам обладает этой симметрией. Следовательно, электрон симметричен относительно преобразований Лоренца. В трехмерном пространстве нет геометрических объектов с этой симметрией. Простейший лоренц-инвариантный геометрический объект — *четырёхмерный шар в пространстве Минковского*. Такой шар принят в качестве модели электрона. Модель точно описывает электромагнитное поле произвольно движущегося заряда (без применения уравнений Максвелла), позволяет рассчитать спин и магнитный момент электрона по обычным правилам механики и электродинамики, объясняет аномальный магнитный момент электрона самодействием электрона и даёт его значение с точностью $2 \cdot 10^{-7}$ (без использования гипотезы о виртуальных частицах), а также описывает другие свойства электрона. Модель приводит к новому определению постоянной тонкой структуры и даёт её значение с точностью $1 \cdot 10^{-7}$. Изложение модели предварено необходимыми сведениями из механики, линейной алгебры и специальной теории относительности.

Книга предназначена для специалистов в области теории относительности и теории элементарных частиц, для студентов, изучающих эти науки, и для всех читателей, интересующихся современными научными теориями.

Библиогр. 134 назв. Ил. 139.

Shikhobalov L. S. Electron.

Maxwell's electromagnetic field is symmetric under Lorentz transformations. Only a source that itself possesses this symmetry can generate such a field. Consequently, the electron is symmetric under Lorentz transformations. In three-dimensional space, there are no geometric objects with this symmetry. The simplest Lorentz-invariant geometric object is *four-dimensional ball in Minkowski space*. Such a ball is adopted as the model of the electron. The model accurately describes the electromagnetic field of an arbitrarily moving charge (without applying Maxwell's equations). The model allows us to calculate the electron's spin and magnetic moment with help of the usual rules of mechanics and electrodynamics. It explains the anomalous magnetic moment of the electron via self-action of electron and gives its value with an accuracy of $2 \cdot 10^{-7}$ (without using the hypothesis on virtual particles). It also describes other properties of the electron. The model leads to the new definition of the fine structure constant and gives its value with an accuracy of $1 \cdot 10^{-7}$. The necessary information from mechanics, linear algebra and the special relativity precedes the construction of the model.

© Л. С. Шихобалов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	9
Глава 1. Методология механики	12
Глава 2. Элементы геометрии и линейной алгебры	15
1. Линейное (векторное) пространство	15
2. Тензоры	19
3. Евклидово и псевдоевклидово пространства	36
4. Тензоры (операторы) поворота в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях	40
А. Поворот векторов	40
Б. Свойства угла между векторами	54
В. Вращение векторов	59
Г. Резюме	67
5. Пространство Минковского	68
6. Сферы в пространстве Минковского	91
7. Критерий антисимметричности двухвалентного тензора ..	99
8. Критерий антисимметричности двухвалентного тензора в пространстве Минковского	101
Глава 3. Основы специальной теории относительности ..	107
1. Исходные постулаты	109
2. Парадокс близнецов	112
3. Кинематика материальной точки в пространстве Минковского	114
4. Уравнение расхода массы фотонной ракеты	119
5. Системы отсчета в пространстве Минковского	123
6. Описание движения материальной точки с помощью инерциальной системы отсчета	143
7. Масса, энергия, импульс	151
8. Скорость света c	154
9. Преобразования Лоренца	160
10. Применение гиперболических функций для описания движения тел	177
11. Группа Лоренца и группа Пуанкаре	187
12. Гиперболическое движение материальной точки. Закон сложения скоростей	199
13. Аберрация. Эффект Доплера	214
14. Эффект Комптона. Позитрон	222

15. Силы в теории относительности	229
16. Тензор электромагнитного поля	232
17. Сила Лоренца	233
18. Динамика материальной точки в теории относительности	235
19. Вращение электрона магнитным полем	241
20. Вращение электрона электрическим полем	245
21. Прецессия Томаса и вращение Вигнера	263
22. О недостатках точечной модели электрона	304
Глава 4. «Точечная» частица	305
1. Наводящие соображения	305
2. «Точечная» частица	313
3. Плотность лучей	317
4. Векторная и псевдовекторная составляющие антисимметричного тензора	320
5. Скорость «точечной» частицы	327
6. Собственное поле «точечной» частицы	344
7. Собственное поле «точечной» частицы (координатное представление)	355
8. «Точечная» частица — модель электрона	367
9. Собственное поле «точечной» частицы (обсуждение)	368
10. Собственное поле «точечной» частицы при прямолинейной мировой линии	370
А. Равномерное прямолинейное движение частицы	371
Б. Вращение частицы вокруг ее центра	377
11. Динамика «точечной» частицы	379
12. Вращение электрона магнитным полем	388
13. Вращение электрона электрическим полем	390
14. Сравнение двух моделей электрона	400
15. Выводы	404
Глава 5. Частица ненулевого радиуса	406
1. Наводящие соображения	406
2. Частица ненулевого радиуса	410
3. Спин луча	414
4. Постоянная тонкой структуры	418
5. Спин частицы	421
6. Спин и собственный магнитный момент электрона	446
7. Аномальный магнитный момент электрона	447
8. Радиус электрона	456
9. Магнетизм электронов	458
10. Винтовая нить	463

11. Скорость частицы	485
12. Операторы интегрирования по поперечному сечению луча и по центральному сечению частицы	506
13. Законы движения частицы	519
14. Собственное поле частицы (исходная формула)	533
15. Плотность нитей	536
16. Вспомогательные формулы	566
17. Собственное поле частицы вдали от ее центра	595
18. Собственное поле вращающейся частицы	609
19. Вращение частицы магнитным полем с учетом самодействия	645
20. Действие на частицу неоднородного магнитного поля	703
21. Собственная энергия частицы	726
22. Позитрон	733
23. Количественные характеристики модели	736
24. Выводы	738
Глава 6. Обсуждение	740
1. О стационарных электронных орбитах	740
2. О реакции излучения	743
3. О дискретности и непрерывности характеристик частицы	743
4. О причинности и взаимодействии частиц	745
5. Эффект Эйнштейна–Подольского–Розена	749
6. О межзвёздной связи	751
7. О двухщелевом эксперименте	752
8. Модель электрона в общей теории относительности	755
9. О моделях элементарных частиц	758
10. О физических законах и свободе воли	759
11. Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени	760
12. История публикаций	763
13. О физике, мистике и мистике в физике	766
14. Цитаты	772
Дополнение 1. Соотношения неопределенностей	774
Дополнение 2. <i>CPT</i>-теорема	783
Заключение	787
Conclusion	797
Литература	807
Дополнительная литература	816
Предметный указатель	822

CONTENTS

Introduction	9
Chapter 1. The methodology of mechanics	12
Chapter 2. Elements of geometry and of linear algebra	15
1. Linear (vectorial) space	15
2. Tensors	19
3. Euclidean and pseudo-Euclidean spaces	36
4. Tensors (operators) of rotation in the proper Euclidean and pseudo-Euclidean planes	40
A. Turn of vectors	40
B. Properties of the angle between the vectors	54
C. Rotation of vectors	59
D. Summary	67
5. The Minkowski space	68
6. Spheres in the Minkowski space	91
7. The criterion of antisymmetry of bivalent tensor	99
8. The criterion of antisymmetry of bivalent tensor in the Minkowski space	101
Chapter 3. Fundamentals of the special relativity	107
1. The initial postulates	109
2. The twin paradox	112
3. Kinematics of a material point in the Minkowski space	114
4. The equation of mass loss of photonic rocket	119
5. Frames of reference in the Minkowski space	123
6. Description of motion of material point using the inertial frame of reference	143
7. Mass, energy, momentum	151
8. The light velocity c	154
9. The Lorentz transformations	160
10. The use of hyperbolic functions to describe the motion of bodies	177
11. The Lorentz group and the Poincare group	187
12. A hyperbolic motion of a material point. The law of velocity addition	199
13. An aberration. The Doppler effect	214
14. The Compton effect. Positron	222
15. Forces in the theory of relativity	229

16. Electromagnetic field tensor.....	232
17. The Lorentz force.....	233
18. The dynamics of material point in the theory of relativity...	235
19. Electron rotation by a magnetic field.....	241
20. Electron rotation by an electric field.....	245
21. Thomas precession and Wigner rotation.....	263
22. On the shortcomings of the point model of electron.....	304
Chapter 4. The “point” particle.....	305
1. Leading ideas.....	305
2. The “point” particle.....	313
3. The density of rays.....	317
4. Vector and pseudo-vector components of an antisymmetric tensor.....	320
5. Velocity of “point” particle.....	327
6. The self-field of “point” particle.....	344
7. The self-field of “point” particle (coordinate representation) .	355
8. The “point” particle is the model of electron.....	367
9. The self-field of “point” particle (discussion).....	368
10. The self-field of “point” particle in case of rectilinear world line	370
A. Uniform rectilinear motion of the particle.....	371
B. Rotation of the particle around its center.....	377
11. The dynamics of “point” particle.....	379
12. Electron rotation by a magnetic field.....	388
13. Electron rotation by an electric field.....	390
14. Comparison of two models of electron.....	400
15. Conclusions.....	404
Chapter 5. The particle of non-zero radius.....	406
1. Leading ideas.....	406
2. The particle of non-zero radius.....	410
3. The spin of the ray.....	414
4. The fine structure constant.....	418
5. The spin of the particle.....	421
6. The spin and the intrinsic magnetic moment of an electron..	446
7. The anomalous magnetic moment of an electron.....	447
8. The electron radius.....	456
9. Magnetism of electrons.....	458
10. The screw thread.....	463
11. The velocity of the particle.....	485
12. The integration operators over the ray cross section and over the central section of the particle.....	506

13. The laws of motion of the particle.....	519
14. Self-field of the particle (initial formula).....	533
15. Density of threads	536
16. Auxiliary formulas	566
17. Self-field of the particle away from its center	595
18. Self-field of the rotating particle.....	609
19. Particle rotation by a magnetic field taking into account its self-action	645
20. The effect of a non-uniform magnetic field on the particle ...	703
21. Self-energy of the particle.....	726
22. Positron	733
23. Quantitative characteristics of the model.....	736
24. Conclusions	738
Глава 6. Discussion	740
1. On stationary orbits of electrons	740
2. On the reaction of radiation.....	743
3. On the discreteness and continuity of the characteristics of a particle	743
4. On causality and interaction of particles	745
5. The Einstein-Podolsky-Rosen effect	749
6. On interstellar communication	751
7. On the double-slit experiment.....	752
8. Electron model in general relativity	755
9. On models of elementary particles.....	758
10. On physical laws and free will.....	759
11. The theory of relativity as the theory of absolute space-time	760
12. The history of publications.....	763
13. About physics, mysticism and mysticism in physics.....	766
14. The quotes	772
Addition 1. Uncertainty relations	774
Addition 2. <i>CPT</i>-theorem	783
Conclusion (in Russian)	787
Conclusion (in English)	797
Literature	807
Additional literature	816
Subject index	822

«Знаете, было бы вполне достаточно
по-настоящему понять электрон».

А. Эйнштейн, цит. по [1]

«Электрон так же *неисчерпаем*, как и
атом, природа бесконечна. . . ».

В. И. Ульянов [2]

«... теорию электрона нельзя считать
законченной, поскольку ей присущи
внутренние логические противоречия».

*Физический энциклопедический
словарь [3]*

ВВЕДЕНИЕ

Природа едина. Единым должно быть и ее описание. Однако, из-за ограниченности человеческого мышления, не удастся построить общую теорию, описывающую сразу все явления природы. Поэтому единая в идеале картина мира представляет собой в реальности совокупность отдельных областей знания (отдельных наук), в каждой из которых исследуется свой круг явлений природы.

Границы между разными науками условны и размыты. В связи с этим возникают ситуации, когда специалистам одной области знания приходится для решения своих задач вторгаться в область знания, разрабатываемую исследователями другой специальности. Такое случилось и с автором настоящей книги. В 1988 году мне, работающему в области механики макроскопических тел, потребовалась модель электрона для решения одной из задач механики. Специфика задачи не позволяла использовать имеющуюся в квантовой электродинамике точечную модель электрона, поэтому пришлось разработать новую модель электрона.

Настоящая книга посвящена изложению этой модели. Содержанию книги более соответствует название «Начала механики для четырехмерного пространства-времени (на примере модели электрона)», однако из-за его громоздкости книга названа более кратко — «Электрон».

Предлагаемая модель электрона создана на основе принятой в механике методологии построения моделей материальных тел. В качестве исходного геометрического объекта, отражающего пространственные и временные свойства мира, выбрано четырехмерное пространство Минковского, служащее фундаментом специальной теории относительности. Электрон моделирован в нем четырехмерным лоренц-инвариантным шаром с определенной внутренней структурой. Он движется в этом пространстве вдоль времениподобной мировой линии. Вследствие псевдоевклидовости пространства Минковского, шар в нем является неограниченным объектом. Это обстоятельство позволило представить электрический заряд и его электромагнитное поле в виде единого геометрического объекта. Данная модель с высокой точностью описывает свойства электронов.

Для быстрого ознакомления с моделью электрона достаточно прочитать первые и последние разделы глав 4 и 5 и заключение.

В настоящей книге термины «элементарная частица», «электрон», «позитрон» и им подобные обозначают объекты реального мира. *Под термином «частица» (в главах 4 и 5) понимается только строящаяся математическая конструкция.*

Нумерации формул, теорем и рисунков — свои в каждой главе и включают в себя номер раздела в данной главе и номер формулы, теоремы или рисунка в этом разделе (например, ссылка в главе 2 на теорему 5.1 означает первую теорему в разд. 5 этой же главы). При необходимости сослаться на формулу или теорему из другой главы дополнительно указывается номер главы.

Все встречающиеся функции считаются непрерывно дифференцируемыми требуемое число раз. Векторы обозначаются полужирным шрифтом, псевдовекторы — чертой над символом, например, **Е** — вектор (напряженность электрического поля), $\vec{H}$ — псевдовектор (напряженность магнитного поля). Для обозначения конца доказательства использован знак ■ — уменьшенная копия картины К. С. Малевича «Чёрный супрематический квадрат».

Благодарности

Результаты исследования на разных его этапах были неоднократно обсуждены с коллегами. Их доброжелательные советы и критические замечания помогли уточнить ряд положений. Друзья и коллеги оказали материально-техническую поддержку исследованию. Выполнению исследования способствовали: А. Д. Александров, С. В. Антонец, Э. Л. Аэро, Р. Г. Баранцев, И. Э. Булыженков, С. Б. Воробьев, М. В. Воротков, Л. Б. Гримзе, Э. А. Гурмузова, В. П. Гусев, П. А. Жилин, В. Т. Зарубайло, Е. А. Зарубайло, Н. Н. Казанский, В. В. Кассандров, Ю. А. Козин, С. Е. Козлов, Д. Н. Козырев, Ф. Н. Козырев, К. В. Копейкин, Ю. И. Копилевич, Н. В. Кузнецов, А. П. Левич, А. Ф. Локтев, В. М. Ломовицкая, А. А. Малков, Б. З. Марголин, Н. Ф. Морозов, М. А. Нарбут, В. М. Нарышкин, В. В. Орлов, А. В. Осипов, В. Ф. Осипов, А. Н. Панов, Д. В. Рисник, В. Д. Родионов, К. В. Родионов, Л. Е. Румянцева, С. К. Соболев, О. В. Темнов, П. Е. Товстик, И. П. Утлинская, М. С. Ухин, В. В. Фролов, В. А. Швецова, С. А. Шейнман, А. Л. Шихобалова, Н. Д. Шихобалова, Е. А. Юнг. Всем им автор выражает глубокую признательность.

Особое чувство благодарности испытывает автор по отношению к своим учителям — В. А. Рыжику, привившему автору основы математической культуры, А. А. Вакуленко, научившему ставить и решать задачи механики, и Н. А. Козыреву, показавшему, что Время является источником жизненных возможностей мира. Без многолетнего общения с ними настоящее исследование не могло бы быть поставлено и выполнено.

Глава 1

МЕТОДОЛОГИЯ МЕХАНИКИ

«Механика — это не теория какого бы то ни было явления Природы, но метод исследования Природы».
П. А. Жилин [4]

Механика — наука о движениях материальных тел и причинах, их вызывающих. Она — фундамент физики и всего естествознания. Совокупность приемов исследования, применяемых в механике, то есть методология механики, разрабатывалась на протяжении нескольких веков и продолжает развиваться в настоящее время. Основы этой методологии заложены И. Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии» [5].

Согласно методологии механики, начальными этапами построения физической теории должны быть:

- *выбор математического множества (пространства), отражающего пространственные свойства реального мира, будем называть это множество базисным пространством;*
- *выбор математического множества, отражающего временные свойства мира;*
- *задание геометрических объектов в выбранном базисном пространстве в качестве моделей изучаемых материальных тел;*
- *постулирование законов движения и взаимодействия тел.*

И. Ньютон принял, что пространственные свойства мира описываются трехмерным евклидовым пространством, временные свойства — числовой переменной, одинаково меняющейся во всех точках евклидова пространства. До начала XX века такое допущение считалось единственно возможным.

Однако развитие физики, в первую очередь электродинамики, показало, что более соответствует реальности описание пространственных и временных свойств мира посредством единого четырехмерного геометрического пространства. Впервые это представление в аналитической форме, связывающей между собой пространственные и временные координаты событий, сформулировал в 1905 г. А. Эйнштейн [6]. Затем в 1908 г. геометрическую интерпретацию этому представлению дал Г. Минковский [7]. Теория, разработанная А. Эйнштейном, носит название *специальной теории относительности*. Предложенное Г. Минковским геометрическое пространство принято называть *пространством Минковского*. Это — четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(+ - - -)$. В последующем А. Эйнштейн создал *общую теорию относительности*, в которой пространственные и временные свойства мира описываются четырехмерным псевдоримановым пространством. Четырехмерное геометрическое пространство, описывающее пространственные и временные свойства мира, называется *пространством-временем*.

Таким образом, в начале XX века в рамках теории относительности был сделан первый шаг на пути построения основ новой фундаментальной физической теории — было постулативно выбрано определенное четырехмерное геометрическое пространство, отражающее пространственные и временные свойства мира.

Однако за последующее столетие при описании элементарных частиц так и не был сделан следующий обязательный шаг — элементарным частицам не были поставлены в соответствие никакие геометрические образы в этом пространстве.

Поясним, что хотя в физике и говорится, что элементарные частицы являются точечными телами, но в действительности их математическое описание в физических теориях не соответствует понятию геометрической точки, потому что им не ставятся в соответствие никакие фиксированные положения в выбранном пространстве. Отметим, что на заре развития специальной теории относительности делались попытки представить электрон трехмерным шаром в пространстве Минковского. Однако эти попытки потерпели неудачу. Они и не могли привести к успеху, из-за несоответствия между группой симметрии трехмерного шара и группой симметрии четырехмерного пространства Минковского.

Согласно методологии механики, *размерность геометрического объекта, моделирующего изучаемое материальное тело, должна быть такой же, какова размерность выбранного базисного простран-*

ства. (Геометрические объекты большей размерности не помещаются внутрь пространства, а геометрические объекты меньшей размерности могут использоваться только для упрощения решения отдельных частных задач.)

В теории относительности базисное пространство полагается четырехмерным, следовательно, *материальные тела должны моделироваться в этой теории четырехмерными геометрическими объектами.* К сожалению, это положение до сих пор не принято во внимание ни в теории относительности, ни в теории элементарных частиц.

Отметим, что с позиции психологического восприятия переход от привычной ньютоновой модели трехмерного пространства и одномерного времени к непривычной и не наглядной модели единого четырехмерного пространства-времени, к тому же снабженного необычной псевдоевклидовой метрикой, можно уподобить переходу от геометрии Евклида к геометрии Лобачевского или к геометрии Римана. В этих случаях тоже потребовалось в свое время совершить психологическое усилие, чтобы отказаться от привычного и кажущегося очевидным постулата о том, что на плоскости через точку, находящуюся вне прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную, и принять совершенно не наглядные постулаты: в первом случае, что таких прямых имеется не менее двух, а во втором случае, что таких прямых вообще не существует. Между тем, системы аксиом Лобачевского и Римана приводят к продуктивным результатам, в частности, именно риманова геометрия используется в общей теории относительности.

Сформулированные положения методологии механики будут использованы в главах 4 и 5 при построении модели электрона. Предваряя изложение модели, приведем в двух следующих главах необходимые сведения из математики и теории относительности.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В настоящей книге используются понятия вектора, тензора, линейного пространства, собственно евклидова и псевдоевклидова пространств, пространства Минковского. Приведем определения этих понятий и изложим кратко их основные свойства.

1. Линейное (векторное) пространство

Линейное или *векторное* пространство V есть множество, в котором определены операции *сложения элементов* и *умножения элемента на число*, обладающие «обычными» свойствами (эти свойства задаются аксиомами). В частности, существует *нулевой* элемент $\mathbf{0} \in V$ (он удовлетворяет условию $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ для любого $\mathbf{a} \in V$) и для каждого элемента $\mathbf{a} \in V$ существует *противоположный* к нему элемент $-\mathbf{a} \in V$ такой, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Векторы обозначаются либо буквой (или цифрой), набранной полужирным шрифтом, либо стрелкой над символом, например, $\overrightarrow{AB}$ — вектор, имеющий начало в точке A и конец в точке B .

Нас интересует линейное пространство V , в котором элементы умножаются на *вещественные* числа. Такое пространство называется пространством, определенным над множеством вещественных чисел, или просто *вещественным линейным пространством*. Множество вещественных чисел обозначается через R .

Будем считать, что в пространстве V задана операция *скалярного умножения* векторов. Это означает, что определено отображение, которое любым двум векторам $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ставит в соответствие число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in R$, называемое *скалярным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Данное

отображение обладает следующими свойствами:

- *симметричностью* ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$);
- *билинейностью* (это означает, что $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ и $\mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ и любых $\alpha, \beta \in R$);
- *невыврожденностью* (согласно этому свойству, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ при всех $\mathbf{b} \in V$, то обязательно $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, иначе говоря, для каждого $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ найдется такой вектор $\mathbf{b}$, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$; благодаря симметричности скалярного умножения, это свойство выполняется и по отношению к другому сомножителю, то есть если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ при всех $\mathbf{a} \in V$, то $\mathbf{b} = \mathbf{0}$).

Скалярное произведение вектора на себя $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ может принимать (для разных векторов) как положительное, так и отрицательное или нулевое значение. Число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{a}$. Ненулевой вектор, имеющий нулевой скалярный квадрат, называется *изотропным*.

Длина (модуль) вектора $\mathbf{a} \in V$ определяется как вещественное неотрицательное число

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.1)$$

Согласно (1.1), вектор $\mathbf{a}$ имеет единичную длину тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \pm 1$. Векторы единичной длины именуются *единичными векторами* или *ортами*. Иногда *единичными* называют векторы, удовлетворяющие условию $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = +1$, а векторы, для которых $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1$, называют *мнимоединичными*. Таким образом, прилагательное «единичный» может относиться, в зависимости от контекста, либо ко всем векторам единичной длины, либо лишь к тем из них, скалярный квадрат которых равен $+1$. Изотропный вектор имеет нулевую длину.

Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортгональными* (иногда *взаимно ортгональными*), если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Каждый изотропный вектор ортгонален сам себе (потому что для изотропного вектора $\mathbf{a}$ выполняется равенство $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$).

Сделаем два замечания, касающиеся нулевого вектора $\mathbf{0}$.

Пусть $\mathbf{a}$ — ненулевой изотропный вектор, $\mathbf{b}$ — ненулевой неизотропный вектор. Рассмотрим два подпространства пространства V , порожденные этими векторами. Первое состоит из изотропных векторов $\alpha\mathbf{a}$, где $\alpha \in R$, второе — из неизотропных векторов $\beta\mathbf{b}$, где $\beta \in R$. Поскольку всякое подпространство линейного пространства само является линейным пространством, то оба подпространства содержат нулевой вектор $\mathbf{0}$ (в первом случае $\mathbf{0} = 0\mathbf{a}$, во втором $\mathbf{0} = 0\mathbf{b}$). Понятно, что при рассмотрении первого подпространства удобно считать нулевой вектор изотропным, а при рассмотрении второго — неизотропным. В связи с этим принято относить нулевой вектор к обоим типам векторов.

При формулировании утверждений, которые не выполняются для нулевого вектора, мы не всегда будем указывать это ограничение, считая его очевидным. Например, не будем сопровождать таким указанием утверждение «оператор поворачивает векторы на угол φ без изменения их длины», так как очевидно, что слова «без изменения их длины» могут относиться к любому вектору, включая нулевой, тогда как слова «поворачивает векторы на угол φ » для нулевого вектора лишены смысла.

В дальнейшем свойства линейных пространств полагаем известными. В частности, считаем известными понятия *линейной зависимости* и *линейной независимости* векторов, а также понятия *базиса* и *размерности* линейного пространства.

Мы исключаем из рассмотрения так называемое *тривиальное* линейное пространство, то есть пространство, которое состоит из одного нулевого элемента. Все другие (нетривиальные) линейные пространства содержат бесконечное множество элементов.

Будем рассматривать только конечномерные пространства. Размерность пространства обозначается символом $\dim$ (от английского слова «dimension», означающего «размерность»); например, запись $\dim V = n$ говорит о том, что пространство V является n -мерным. Для конечномерных линейных пространств выполняется следующее утверждение.

Закон инерции (алгебраический). Пусть V — n -мерное вещественное линейное пространство со скалярным умножением векторов. Тогда существует такое целое число $p \geq 0$, что для всякой системы n векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in V$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i &\neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \tag{1.2}$$

среди n вещественных чисел $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$ имеется ровно p положительных и ровно $q = n - p$ отрицательных.

В этом законе самым важным является то обстоятельство, что числа p и q одни и те же для любой системы векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, удовлетворяющих указанным условиям. Пара чисел (p, q) называется *типом* или *сигнатурой* пространства V ($p + q = n$; $n = \dim V$). Отметим, что в каждом линейном пространстве со скалярным умножением векторов существует бесконечное множество систем векторов, удовлетворяющих условию (1.2).

Очевидно, что пространство, имеющее тип (p, q) , переводится в пространство типа (q, p) изменением знаков всех скалярных произведе-

ний. Поэтому пространства типов (p, q) и (q, p) обладают одинаковыми геометрическими свойствами. Это означает, что среди $n + 1$ типов n -мерных линейных пространств с сигнатурами $(n, 0)$, $(n - 1, 1)$, $\dots$, $(0, n)$ существенно различных имеется только $(n + 1)/2$ типов при n нечетном или $(n/2) + 1$ типов при n четном.

Скалярное произведение векторов называют также *метрической формой* («метрической», так как с ее помощью определяются длины векторов и углы между ними).

В пространстве типа $(p, 0)$ все ненулевые векторы имеют положительные скалярные квадраты, а в пространстве типа $(0, q)$ все ненулевые векторы имеют отрицательные скалярные квадраты. Поэтому пространства типов $(p, 0)$ и $(0, q)$ называются пространствами с *положительно определенной* и *отрицательно определенной* метрическими формами соответственно.

В физической литературе принято обозначать сигнатуру пространства с помощью знаков $+$ и $-$. В частности, для обозначения сигнатуры четырехмерного пространства Минковского обычно применяют символ $(+ - - -)$ вместо $(1, 3)$. Мы тоже будем пользоваться такими символами. Например, будем обозначать символами $(+++)$ и $(---)$ сигнатуры трехмерных пространств с соответственно положительно определенной и отрицательно определенной метрическими формами (согласно сказанному выше, эти два пространства обладают одинаковыми геометрическими свойствами).

Обратим внимание на то, что в линейном пространстве векторы и операции сложения векторов и умножения вектора на число не зависят от базиса, заданного в пространстве. Это сразу вытекает из того обстоятельства, что при построении теории линейных пространств векторы и указанные операции над ними вводятся до введения понятия базиса. Более того, сам базис определяется на основании предварительно установленных свойств векторов.

Математический объект, связанный с линейным пространством, называется *инвариантным* или *каноническим*, если он не зависит от того, задан или нет в пространстве базис и если задан, то какой именно.

Таким образом, векторы и операции сложения векторов и умножения вектора на число являются инвариантными математическими объектами. Эти объекты входят непосредственно в определение линейного пространства. В отличие от них, операция скалярного умножения векторов не участвует в этом определении, а вводится как дополнительная структура. Ее можно задавать различными способами. При этом она может как зависеть, так и не зависеть от заданного в про-

пространстве базиса. *Всюду далее считается, что операция скалярного умножения векторов не зависит от базиса, то есть является инвариантной (канонической) операцией.*

2. Тензоры

Пусть задано конечномерное линейное (векторное) пространство V со скалярным умножением векторов, определенное над множеством вещественных чисел R .

Тензоры — это конечные суммы вида

$$\begin{aligned} &\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \dots + \gamma \mathbf{c}; \\ &\alpha \mathbf{a} \mathbf{x} + \beta \mathbf{b} \mathbf{y} + \dots + \gamma \mathbf{c} \mathbf{z}; \\ &\alpha \mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{x} + \beta \mathbf{b} \mathbf{q} \mathbf{y} + \dots + \gamma \mathbf{c} \mathbf{r} \mathbf{z}; \\ &\alpha \mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{u} \mathbf{x} + \beta \mathbf{b} \mathbf{q} \mathbf{v} \mathbf{y} + \dots + \gamma \mathbf{c} \mathbf{r} \mathbf{w} \mathbf{z}; \dots, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где греческие буквы — числа из R ; латинские буквы — векторы из V ; $\mathbf{a} \mathbf{x}$, $\mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{x}$, $\mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{u} \mathbf{x}$, ... — тензорные произведения векторов; тензорное умножение — ассоциативная, некоммутативная, линейная по каждому сомножителю операция, обозначаемая без знака умножения между сомножителями (такое обозначение принято в механике; в математике эта операция обозначается знаком $\otimes$, например, $\mathbf{a} \mathbf{x} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$); операция сложения коммутативна и ассоциативна; умножение на число производится в соответствии с правилом: $\alpha \mathbf{a} \mathbf{b} = (\alpha \mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathbf{a} (\alpha \mathbf{b})$ (поэтому можно записывать $\alpha \mathbf{a} \mathbf{b}$, $\alpha \alpha \mathbf{b}$ или $\mathbf{a} \mathbf{b} \alpha$).

Количество векторных сомножителей в тензорном произведении определяет *ранг* или *валентность* тензора. В выражении (2.1) фигурируют тензоры первого, второго, третьего и четвертого рангов.

Тензорное произведение двух или более векторов называется *полиадой*. В случае двух сомножителей полиада называется также *диадой*. Например, $\mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{x}$ — полиада, $\mathbf{a} \mathbf{x}$ — диада. Тензор ранга r (при $r \geq 2$) представляет собой линейную комбинацию полиад, каждая из которых состоит из r векторных сомножителей. Тензор первого ранга есть просто линейная комбинация векторов пространства V .

Отметим существенное отличие тензоров первого ранга от тензоров других рангов. Известно, что любая линейная комбинация векторов сама является вектором. Поэтому всякий тензор первого ранга, являясь линейной комбинацией векторов, может быть представлен в виде одного вектора. В то же время линейная комбинация полиад, как доказывается, может не быть полиадой. Вследствие этого, не всякий тензор

второго или более высокого ранга может быть представлен в виде одной полиады.

Тензор A ранга r (при $r \geq 2$) называется *разложимым*, если он может быть представлен в виде полиады, то есть если существуют векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in V$ такие, что $A = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r$, и называется *неразложимым*, когда такое представление невозможно.

Тензорное произведение векторов обладает свойством *полилинейности*, то есть оно является линейным по каждому сомножителю, например,

$$\mathbf{a}(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q})\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{x} + \beta \mathbf{a} \mathbf{q} \mathbf{x},$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}$ — векторы; α, β — числа.

Тензоры можно умножать на числа, тензоры одного ранга можно складывать между собой, поэтому множество всех тензоров ранга r образует линейное пространство, обозначаемое $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ или $V^{\otimes r}$, где V — исходное линейное пространство (в первом из этих обозначений подразумевается наличие r сомножителей). В случае $r = 1$ имеем: $V^{\otimes 1} = V$.

Нулевым элементом пространства $V^{\otimes r}$ является тензор, который может быть получен умножением числа нуль на произвольный тензор этого пространства; он равен также любой полиаде, содержащей нулевой вектор. Такой тензор называется *нулевым* тензором и обозначается $\hat{0}$ (в каждом пространстве $V^{\otimes r}$ это свой тензор, имеющий ранг r). Например, в пространстве тензоров второго ранга

$$\hat{0} = 0(\mathbf{a}\mathbf{x}) = \mathbf{a}\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{x} \quad \text{при любых } \mathbf{a}, \mathbf{x} \in V, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор пространства V . В пространстве тензоров первого ранга нулевой тензор совпадает с нулевым вектором.

Наряду с операциями сложения тензоров и умножения тензора на число, вводятся другие операции над тензорами.

Операция *тензорного умножения* тензоров представляет собой билинейную ассоциативную операцию образования из тензоров рангов r и p тензора ранга $r + p$. Эта операция обозначается без знака умножения между сомножителями, в связи с чем она фактически реализуется путем приписывания к полиадам первого тензорного сомножителя полиад второго сомножителя, как демонстрирует следующий пример:

$$\alpha \mathbf{a} \mathbf{b} (\beta \mathbf{c} \mathbf{d} \mathbf{e} + \gamma \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}) = \alpha \beta \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{d} \mathbf{e} + \alpha \gamma \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z},$$

здесь использована линейность рассматриваемой операции по второму сомножителю; греческие буквы — числа; латинские буквы — векторы.

В этом примере в результате тензорного умножения тензора второго ранга на тензор третьего ранга получен тензор пятого ранга. Операция тензорного умножения тензоров *не* коммутативна (это сразу следует из приведенного примера, если в нем поменять местами сомножители).

Отметим, что участвующая в (2.1) операция тензорного умножения векторов является частным случаем операции тензорного умножения тензоров (при трактовке векторов как тензоров первого ранга). В математической литературе операция тензорного умножения тензоров обозначается знаком $\otimes$, например, $ABC = A \otimes B \otimes C$ (где A, B, C — тензоры).

Тензоры произвольных рангов можно умножать друг на друга не только тензорно, но и скалярно. Эта операция может быть определена не единственным способом. Мы будем пользоваться следующим правилом выполнения этой операции.

Правило скалярного умножения тензоров. *Если оба перемножаемых тензора являются полиадами, то нужно умножить скалярно последний вектор первого сомножителя на первый вектор второго сомножителя. Полученное при этом число следует поставить перед произведением полиад, а сами полиады (уменьшенные каждая на один вектор) перемножить тензорно. Если какой-либо из тензоров представляет собой линейную комбинацию полиад, то предварительно нужно раскрыть скобки и превратить произведение тензоров в сумму скалярных произведений полиад (поставив числовые коэффициенты перед произведениями). Затем следует перемножить полиады так, как указано выше. Операция скалярного умножения тензоров обозначается точкой (также, как операция скалярного умножения векторов).*

Следующий пример иллюстрирует выполнение *скалярного умножения* тензоров:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{ab} \cdot (\beta \mathbf{cde} + \gamma \mathbf{xyz}) &= \alpha \beta \mathbf{ab} \cdot \mathbf{cde} + \alpha \gamma \mathbf{ab} \cdot \mathbf{xyz} = \\ &= \alpha \beta \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{de} + \alpha \gamma \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{yz} = \alpha \beta (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ade} + \alpha \gamma (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{ayz}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$ — скалярные произведения векторов (числа).

Скалярное произведение тензоров рангов r и p есть тензор ранга $r+p-2$ (при $r+p > 2$). Скалярное произведение векторов, трактуемых как тензоры первого ранга ($r = p = 1$), есть число, которое совпадает с обычным их скалярным произведением как векторов пространства V .

Частным случаем операции скалярного умножения тензоров является операция скалярного умножения диады на вектор, осуществляе-

мая в соответствии с (2.3) по следующему правилу:

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} \quad \text{для любых } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in V. \quad (2.4)$$

Операция скалярного умножения тензоров билинейна, но не коммутативна (за исключением случая скалярного умножения векторов). Эта операция может как обладать свойством ассоциативности, так и не обладать этим свойством. Например, при любых $A, B \in V \otimes V$ и любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ выполняются равенства

$$A \cdot (B \cdot \mathbf{u}) = (A \cdot B) \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{u} \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot A) \cdot \mathbf{v}; \quad (2.5)$$

вместе с тем, в общем случае имеет место неравенство

$$A \cdot (\mathbf{u} \cdot B) \neq (A \cdot \mathbf{u}) \cdot B.$$

Из этого примера следует, что выражения $A \cdot B \cdot \mathbf{u}$ и $\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{v}$ могут быть записаны без скобок, тогда как выражение $A \cdot \mathbf{u} \cdot B$, записанное без скобок, лишено смысла.

Вводятся также операции *двойного скалярного (бискалярного)*, *три-скалярного* и вообще *полискалярного* умножений тензоров. Эти операции осуществляются путем последовательного выполнения нескольких скалярных умножений тензоров (каждое из которых реализуется в соответствии с указанным выше правилом). Следующие примеры демонстрируют выполнение этих операций:

$$\begin{aligned} \mathbf{abc} \cdot \cdot \mathbf{xyz} &= \mathbf{ab} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{yz} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{ab} \cdot \mathbf{yz} = \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})\mathbf{az}; \\ \mathbf{abc} \cdot \cdot \cdot \mathbf{xyz} &= \mathbf{ab} \cdot \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{yz} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{ab} \cdot \cdot \mathbf{yz} = \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ — произвольные векторы; двоеточие и трехточие — знаки введенных операций (количество точек в обозначении операции равно количеству скалярных произведений векторов в правой части выражения). В результате би- и трискалярного умножений двух тензоров третьего ранга получены соответственно тензор второго ранга и скаляр.

Тензоры, участвующие в полискалярном произведении, могут иметь различные ранги, при этом наименьший из рангов не должен быть меньше количества точек в обозначении операции. Операция полискалярного умножения тензоров, как и операция скалярного умножения

тензоров, билинейна, но в общем случае не коммутативна и не ассоциативна.

В настоящей книге используются в основном тензоры второго ранга. Рассмотрим их свойства подробнее.

Напомним, что *тензор второго ранга (двухвалентный тензор)* представляет собой конечную сумму вида

$$A = \alpha \mathbf{a}\mathbf{x} + \beta \mathbf{b}\mathbf{y} + \dots + \gamma \mathbf{c}\mathbf{z}, \quad (2.7)$$

где $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in R$; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z} \in V$. Множество всех тензоров второго ранга образует линейное пространство, обозначаемое $V \otimes V$.

Операция скалярного умножения двухвалентного тензора на вектор обладает свойством *невыврожденности*; это означает выполнение следующей эквивалентности:

$$(A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ или } \mathbf{a} \cdot A = \mathbf{0} \text{ при всех } \mathbf{a} \in V) \iff A = \hat{\mathbf{0}}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; $\hat{\mathbf{0}}$ — нулевой тензор ($\mathbf{0} \in V$; $\hat{\mathbf{0}} \in V \otimes V$).

В пространстве тензоров второго ранга $V \otimes V$ вводится операция *транспонирования* тензора, которая заключается в перемене местами векторов в каждой из диад, образующих тензор. Так, если дан тензор второго ранга A вида (2.7), то *транспонированный* или *сопряжённый* к нему тензор, обозначаемый звездочкой, есть

$$A^* = \alpha \mathbf{x}\mathbf{a} + \beta \mathbf{y}\mathbf{b} + \dots + \gamma \mathbf{z}\mathbf{c}. \quad (2.9)$$

Операция транспонирования тензора обладает следующими свойствами:

$$(A^*)^* = A; \quad (A \pm B)^* = A^* \pm B^*; \quad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \quad (2.10)$$

для произвольных тензоров $A, B \in V \otimes V$.

Для любого тензора $A \in V \otimes V$ и любого вектора $\mathbf{a} \in V$ выполняются равенства

$$A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot A^*; \quad A^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot A. \quad (2.11)$$

Тензор A называется *симметричным* или *самосопряженным*, если

$$A^* = A, \quad (2.12)$$

и называется *антисимметричным* или *кососимметричным*, если

$$A^* = -A. \quad (2.13)$$

Например, тензор $\mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ симметричный, а тензор $\mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ антисимметричный.

Антисимметричные тензоры второго ранга называются *бивекторами*. Такие тензоры играют большую роль в физике, в частности, антисимметричным является тензор электромагнитного поля.

В пространстве $V \otimes V$ определена также операция *свёртывания* тензора. Она состоит в том, что в каждой диаде, входящей в состав тензора, операция тензорного умножения векторов заменяется операцией скалярного умножения векторов. Результатом осуществления этой операции является число, называемое *следом* тензора и обозначаемое символом sp или tr (от немецкого слова «Spur» и английского «trace», означающих «след»). Так, след тензора A вида (2.7) есть

$$\text{sp } A = \text{tr } A = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}) + \dots + \gamma(\mathbf{c} \cdot \mathbf{z}). \quad (2.14)$$

Отметим, что

$$\text{sp}(A \cdot B) = A \cdot \cdot B$$

для любых $A, B \in V \otimes V$.

В пространстве $V \otimes V$ существует, причем единственный, тензор I , определяемый законом

$$I \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{при всех } \mathbf{u} \in V. \quad (2.15)$$

Тензор I называется *единичным*, *метрическим* или *фундаментальным* тензором.

Единичный тензор I и только он удовлетворяет следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} I \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot I = \mathbf{u} \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u} \in V; \\ A \cdot I &= I \cdot A = A \quad \text{для любого тензора } A \in V \otimes V; \\ \mathbf{u} \cdot I \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{для любых } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Иногда единичный тензор определяют с помощью второй из зависимостей (2.16) вместо (2.15).

Пусть $A \in V \otimes V$. Тензор $A^{-1} \in V \otimes V$ называется *обратным* к тензору A , если выполняется соотношение

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I, \quad (2.17)$$

где I — единичный тензор. Тензор A , имеющий обратный тензор, называется *обратимым*. Обратный тензор существует не для всякого тензора.

Если тензоры A и B имеют обратные тензоры, то

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Нам потребуется следующее определение из теории линейных пространств.

Два линейных пространства называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное линейное отображение одного из них на другое; само такое отображение именуется *изоморфизмом*. Отображение, обратное к изоморфизму тоже является изоморфизмом. Упрощая, можно сказать, что изоморфизм — это отображение, переводящее сумму векторов в сумму векторов и произведение вектора на число в произведение вектора на это же число.

Два изоморфных линейных пространства одинаково устроены по своим линейным свойствам (то есть по свойствам, определяемым операциями сложения элементов и умножения элементов на скаляры), поэтому в тех задачах, где используются только линейные свойства пространств, эти пространства могут быть заменены одно другим.

Пространство двухвалентных тензоров $V \otimes V$ изоморфно пространству линейных операторов, действующих из V в V , и изоморфно пространству билинейных форм, действующих из $V \times V$ в R . Например, тензор $A \in V \otimes V$ определяет линейный оператор $\mathcal{A}$ и билинейную форму $\mathcal{F}$ согласно законам

$$\mathcal{A}: \mathbf{u} \mapsto A \cdot \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{v}, \quad (2.18)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ — произвольные векторы из V .

Законы (2.18) не единственно возможные. Так, тензор A определяет линейные операторы также в соответствии с законами $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot A$, $\mathbf{u} \mapsto 5A \cdot \mathbf{u}$ и другими.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы, действующие из V в V и связанные с тензорами $A, B \in V \otimes V$ первым из законов (2.18):

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u}; \quad \mathcal{B}(\mathbf{u}) = B \cdot \mathbf{u} \quad \text{при всех } \mathbf{u} \in V. \quad (2.19)$$

Рассмотрим композицию этих операторов. На основании определения композиции операторов и зависимостей (2.5) и (2.19) можем записать:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{u}) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) = \mathcal{A}(B \cdot \mathbf{u}) = \\ &= A \cdot (B \cdot \mathbf{u}) = (A \cdot B) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

где $\circ$ — символ композиции операторов.

Отсюда следует, что существует взаимно однозначное соответствие между композицией операторов и скалярным произведением тензоров, устанавливаемое законом

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{u}) = (A \cdot B) \cdot \mathbf{u} \quad \text{при всех } \mathbf{u} \in V.$$

Существование изоморфизма между пространством линейных операторов и пространством двухвалентных тензоров и наличие взаимно однозначного соответствия между композицией операторов и скалярным произведением тензоров позволяют не различать эти пространства. В связи с этим *термины «линейный оператор» и «двухвалентный тензор» могут быть использованы как синонимы.*

Далее при трактовке двухвалентных тензоров как линейных операторов считается, что они действуют на векторы пространства V в соответствии с первым из законов (2.18).

Тензор (оператор) $A \in V \otimes V$ называется *ортогональным*, если он не меняет скалярные произведения векторов, то есть удовлетворяет условию

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{при всех } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (2.20)$$

Справедливы следующие утверждения.

Для того, чтобы тензор A был ортогональным, достаточно, чтобы он не менял скалярные произведения векторов на самих себя:

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad \text{при всех } \mathbf{u} \in V.$$

Тензор A является ортогональным в том и только том случае, когда

$$A^* = A^{-1}, \quad (2.21)$$

где A^* — тензор, транспонированный (сопряженный) к тензору A ; A^{-1} — тензор, обратный к A .

Если любой из тензоров A , A^* или A^{-1} является ортогональным, то остальные два тензора тоже являются ортогональными. Если A и B — ортогональные тензоры, то тензор $A \cdot B$ тоже ортогональный.

Примером ортогонального тензора служит единичный тензор I (выполнение для него условия (2.20) сразу следует из закона (2.15), определяющего этот тензор). Другие примеры ортогональных тензоров имеются в разд. 4.

Сформулируем определение группы.

Группой называется множество Γ с операцией $\circ: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$, которая ассоциативна (то есть $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для любых $a, b, c \in \Gamma$),

допускает существование *единичного* элемента $e \in \Gamma$ (то есть элемента, определяемого условием $a \circ e = e \circ a = a$ для всех $a \in \Gamma$) и обеспечивает для каждого элемента $a \in \Gamma$ наличие *обратного* к нему элемента $a^{-1} \in \Gamma$ (определяемого условием $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$). Операция $\circ$ называется *групповой операцией*, часто ее называют *умножением*.

Множество $\mathcal{O} \subset V \otimes V$, образованное всеми ортогональными тензорами второго ранга, является группой со скалярным умножением тензоров в качестве групповой операции и единичным тензором I в качестве единичного элемента группы, при этом для каждого тензора обратным к нему элементом группы служит обратный тензор.

Группа $\mathcal{O}$ называется *ортогональной группой* пространства V . В случае пространства Минковского, используемого в специальной теории относительности, эта группа называется *группой Лоренца*.

При преобразованиях пространства V , осуществляемых ортогональными тензорами, остаются неизменными все отношения между векторами, которые порождаются действующими в V операциями. А именно, сумма векторов преобразуется в сумму векторов, произведение вектора на число — в произведение вектора на это же число, а также сохраняются скалярные произведения векторов. Кроме того, остаются неизменными длины векторов и углы между векторами, так как они определяются через скалярные произведения векторов. Учитывая это, можно сказать, что ортогональная группа $\mathcal{O}$ характеризует симметрию пространства V .

Отметим, что множество ортогональных тензоров $\mathcal{O}$ не является линейным подпространством пространства $V \otimes V$. Действительно, если бы это множество было таковым, то согласно аксиомам линейного пространства оно содержало бы нулевой тензор $\hat{0}$. Однако этот тензор не принадлежит $\mathcal{O}$. Дело в том, что тензор $\hat{0}$ (рассматриваемый как линейный оператор) переводит все векторы в нулевой вектор, так как, в силу (2.2), $\hat{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{u} \in V$, поэтому тензор $\hat{0}$ не удовлетворяет условию (2.20), определяющему ортогональный тензор. Значит, $\hat{0} \notin \mathcal{O}$, и, следовательно, $\mathcal{O}$ не является линейным пространством.

При решении задач с участием тензоров бывает удобно пользоваться координатным представлением тензоров аналогично тому, как при решении задач векторной алгебры бывает удобно пользоваться координатным представлением векторов.

В каждом тензорном пространстве $V^{\otimes r}$, как и во всяком линейном пространстве, существует бесконечное множество базисов. При решении задач обычно используют базисы, элементами которых являются полиады, составленные из векторов базиса исходного пространства V .

Приведем примеры базисов, задаваемых в пространстве двухвалентных тензоров $V \otimes V$.

Введем в рассматриваемом n -мерном линейном пространстве V какой-либо базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть A — произвольный двухвалентный тензор, он имеет вид (2.7):

$$A = \alpha \mathbf{a} \mathbf{x} + \dots + \gamma \mathbf{c} \mathbf{z},$$

где $\alpha, \dots, \gamma \in R$; $\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z} \in V$. Разложим все векторы, входящие в состав тензора, по введенному базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$:

$$\begin{aligned} A = & \alpha(a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n)(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) + \dots + \\ & + \gamma(c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \mathbf{e}_n)(z_1 \mathbf{e}_1 + \dots + z_n \mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

где a_i, x_i, c_i, z_i — компоненты векторов $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{z}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Пользуясь билинейностью тензорного произведения векторов, раскроем скобки и в полученной сумме переставим слагаемые так, чтобы слагаемые, содержащие одинаковые диады, оказались рядом. Затем в каждой такой совокупности слагаемых вынесем общую диаду за скобки. В результате получим представление тензора A в виде линейной комбинации диад из векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{aligned} A = & (\alpha a_1 x_1 + \dots + \gamma c_1 z_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha a_1 x_n + \dots + \gamma c_1 z_n) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_n + \dots \\ & + (\alpha a_n x_1 + \dots + \gamma c_n z_1) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha a_n x_n + \dots + \gamma c_n z_n) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что любой тензор пространства $V \otimes V$ может быть представлен в виде линейной комбинации n^2 диад $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$. Эти диады, как можно доказать, линейно независимы. Следовательно, совокупность диад $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}_{i,j=1}^n$ есть базис пространства $V \otimes V$. Этот базис называется *тензорным* или *диадным* базисом. Поскольку он содержит n^2 элементов, то $\dim(V \otimes V) = n^2$.

Представление тензора в виде линейной комбинации базисных диад называется *разложением тензора по базису*. Коэффициенты разложения именуются *компонентами* или *координатами* тензора в данном базисе. Так, разложение тензора $A \in V \otimes V$ по базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}_{i,j=1}^n$ имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (2.22)$$

где a_{ij} — компоненты тензора A в этом базисе. Компоненты тензора второго ранга принято записывать в форме квадратной матрицы по-

рядка n , которая называется *матрицей компонент тензора* или просто *матрицей тензора*:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Подчеркнем, что тензор имеет в разных базисах, вообще говоря, разные матрицы компонент.

В физической литературе знаки суммирования обычно опускают и принимают следующее соглашение.

Соглашение о суммировании. Если индекс встречается дважды при какой-либо величине или в произведении величин, то подразумевается, что имеет место суммирование по этому индексу в пределах от 1 до n (где n — размерность рассматриваемого линейного пространства). Такой индекс называется *индексом суммирования* или *немым индексом*.

Очевидно, что замена символа, являющегося индексом суммирования, любым другим символом не меняет выражения. Например, $x_j \mathbf{e}_j$ и $x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ есть одно и то же выражение, равное $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$.

При применении соглашения о суммировании формула (2.22) приобретает более компактный вид:

$$A = a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Из формул (2.22) и (2.23) вытекает, что при фиксировании диадного базиса каждый двухвалентный тензор однозначно определяет некоторую квадратную матрицу, являющуюся матрицей его компонент в данном базисе. Порядок этой матрицы равен размерности рассматриваемого линейного пространства. Верно и обратное утверждение. При фиксировании диадного базиса каждая квадратная матрица вида (2.23) однозначно определяет по формуле (2.22) некоторый двухвалентный тензор.

В пространстве $V \otimes V$ наряду с рассмотренным диадным базисом $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$, образованном из векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, вводятся также диадные базисы, в которых участвуют векторы базиса $\{\mathbf{e}_i^*\}$, взаимного к $\{\mathbf{e}_i\}$.

Напомним, что базисы $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*\}$ в n -мерном линейном пространстве называются *взаимными* (*дуальными*, *сопряженными* или *биортогональными*), если они связаны условием

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.24)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.25)$$

Известно, что для любого базиса существует единственный взаимный к нему базис. Подчеркнем, что в силу симметричности операции скалярного умножения векторов базисы $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mathbf{e}_i^*\}_{i=1}^n$ равноправны, то есть если базис $\{\mathbf{e}_i^*\}$ является взаимным к базису $\{\mathbf{e}_i\}$, то и базис $\{\mathbf{e}_i\}$ является взаимным к базису $\{\mathbf{e}_i^*\}$.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, по которому раскладываются векторы пространства V , и $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*\}$ — взаимный к нему базис. Для разложения двухвалентных тензоров обычно используют следующие четыре диадных базиса пространства $V \otimes V$: $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$, $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$, $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$ и $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*\}$ (где $i, j = 1, 2, \dots, n$). Диадные базисы $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ и $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$ называются *смешанными* (потому что они состоят из векторов двух различных базисов пространства V).

Отметим, что в пространстве V типа $(n, 0)$ базис, взаимный к ортонормированному базису, совпадает с ним самим, поэтому при использовании в таком пространстве ортонормированного базиса все четыре упомянутых выше диадных базиса представляют собой один и тот же базис.

Рассмотрим, для примера, разложение единичного тензора I по указанным диадным базисам.

Докажем, что тензор I имеет следующий вид в смешанных базисах $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ и $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$:

$$I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \dots + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* = \mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n^* \mathbf{e}_n. \quad (2.26)$$

В самом деле, обозначим:

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \dots + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^*; \\ J^* &= \mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n^* \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (2.27)$$

(J^* является тензором, транспонированным к J). Возьмем произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$ и разложим его по базисам $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}_i^*\}$:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n = u_1^* \mathbf{e}_1^* + u_2^* \mathbf{e}_2^* + \dots + u_n^* \mathbf{e}_n^*, \quad (2.28)$$

где u_i и u_i^* — компоненты вектора $\mathbf{u}$ в этих базисах.

Вычислим произведения $J \cdot \mathbf{u}$ и $J^* \cdot \mathbf{u}$, пользуясь в одном случае первым, а в другом случае вторым из разложений вектора $\mathbf{u}$ в (2.28). Учитывая билинейность операции скалярного умножения, правило скалярного умножения диады на вектор (2.4) и условие (2.24), связывающее

взаимные базисы, находим:

$$\begin{aligned} J \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \dots + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^*) \cdot (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n) = \\ &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n = \mathbf{u}; \\ J^* \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n^* \mathbf{e}_n) \cdot (u_1^* \mathbf{e}_1^* + u_2^* \mathbf{e}_2^* + \dots + u_n^* \mathbf{e}_n^*) = \\ &= u_1^* \mathbf{e}_1^* + u_2^* \mathbf{e}_2^* + \dots + u_n^* \mathbf{e}_n^* = \mathbf{u}, \end{aligned}$$

откуда $J \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ и $J^* \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Поскольку эти равенства выполняются при всех $\mathbf{u} \in V$, то на основании закона (2.15) с учетом единственности единичного тензора имеем: $J = J^* = I$. Отсюда и из (2.27) заключаем, что тензор I действительно может быть представлен в форме (2.26).

Из (2.26) видно, что компонентами тензора I в смешанных диадных базисах $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ и $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$ служат символы Кронекера δ_{ij} , определяемые выражением (2.25), поэтому можем записать:

$$I = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij} \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j,$$

здесь и далее использовано соглашение о суммировании.

Отметим, что след единичного тензора I равен размерности пространства V . Действительно, из (2.14), (2.24), (2.25) и (2.26) имеем:

$$\text{sp } I = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^* + \dots + \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n^* = \delta_{11} + \delta_{22} + \dots + \delta_{nn} = n.$$

Теперь разложим тензор I по диадным базисам $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*\}$ и $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$:

$$I = g_{ij} \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^* = g_{ij}^* \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

где g_{ij} и g_{ij}^* — компоненты тензора I в этих базисах. Можно доказать, что

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j; \quad g_{ij}^* = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* \quad \text{при всех } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, единичный (метрический, фундаментальный) тензор I раскладывается по диадным базисам $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$, $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$, $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*\}$ и $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$ следующим образом:

$$I = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij} \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j = g_{ij} \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^* = g_{ij}^* \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (2.29)$$

где матрицы компонент тензора I имеют вид

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.30)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix};$$

$$(g_{ij}^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2^* & \dots & \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_n^* \\ \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_2^* & \dots & \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_n^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{e}_2^* & \dots & \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{e}_n^* \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, составленная из попарных скалярных произведений векторов базиса, называется *матрицей Грама* этого базиса. В соответствии с этим определением, матрицы (g_{ij}) и (g_{ij}^*) есть матрицы Грама базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}_i^*\}$ соответственно. Благодаря симметричности операции скалярного умножения векторов, матрицы (g_{ij}) и (g_{ij}^*) являются симметричными: $g_{ij} = g_{ji}$ и $g_{ij}^* = g_{ji}^*$ (при всех i и j). Эти матрицы, как можно доказать, являются взаимно обратными: $(g_{ij}^*)^{-1} = (g_{ij})$ и $(g_{ij})^{-1} = (g_{ij}^*)$; они связывают между собой векторы взаимных базисов: $\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}_j^*$ и $\mathbf{e}_i^* = g_{ij}^* \mathbf{e}_j$ (при всех i). Если линейное пространство V имеет тип $(n, 0)$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис, то каждая из матриц (g_{ij}) и (g_{ij}^*) представляет собой единичную матрицу (δ_{ij}) .

Определитель матрицы компонент тензора в смешанном диадном базисе называется *определителем* или *детерминантом* тензора A и обозначается $\det A$. (Величина $\det A$, как доказывается, не зависит от выбора пары взаимных базисов пространства V , образующих смешанный диадный базис.) Например, согласно (2.29) и (2.30), $\det I = \det(\delta_{ij}) = 1$.

Представим тензор A в виде разложения по смешанному диадному базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$: $A = a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*$. Отсюда на основании определения следа тензора (2.14) и зависимости (2.24) находим: $\text{sp } A = a_{ij} \delta_{ij} = a_{ii}$. Таким образом, след тензора равен следу матрицы его компонент в смешанном диадном базисе. В частности, из (2.29) и (2.30) мы вновь получаем: $\text{sp } I = n$. Отметим, что в диадном базисе, не являющимся смешанным, тензор может иметь матрицу компонент, определитель и след которой отличаются от определителя и следа тензора.

Правило использования матриц вместо тензоров. При работе с тензорами как с операторами, действующими на векторы в соответствии с первым законом (2.18): $A: \mathbf{u} \mapsto A \cdot \mathbf{u}$, замена тензоров их матрицами допустима только в том случае, если матрицы всех тензоров относятся к базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$, где $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис, по которому раскладываются векторы, $\{\mathbf{e}_i^*\}$ — базис, взаимный к $\{\mathbf{e}_i\}$. При этом

сумме тензоров и произведению тензора на число соответствуют сумма матриц и произведение матрицы на это же число, а произведению тензоров отвечает произведение матриц.

В случае тензоров произвольного ранга их разложение по базису осуществляется способом, аналогичным примененному для тензоров второго ранга. Пусть $V^{\otimes r}$ — пространство тензоров ранга r . Оно имеет размерность n^r ($n = \dim V$), поэтому его базис состоит из n^r линейно независимых тензоров ранга r . Если $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ — выбранный базис пространства V , то в роли базиса пространства $V^{\otimes r}$ обычно используют совокупность n^r полиад $\{\mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_r}\}_{i_1, \dots, i_r=1}^n$, составленных из векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$.

Разложение произвольного тензора $A \in V^{\otimes r}$ по этому тензорному базису имеет вид

$$A = a_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_r},$$

где $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ — компоненты тензора в данном базисе; применено соглашение о суммировании.

Используются также тензорные базисы, полиады которых содержат векторы базиса $\{\mathbf{e}_i^*\}$, взаимного к $\{\mathbf{e}_i\}$. Если полиады, образующие тензорный базис, состоят из p векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ и q векторов базиса $\{\mathbf{e}_i^*\}$, то о компонентах тензора в таком базисе говорят, что они являются p раз *контравариантными* и q раз *ковариантными* ($p+q=r$, где r — ранг тензора). Например, согласно (2.29), единичный тензор I имеет в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$ компоненты g_{ij}^* , дважды контравариантные, в базисе $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*\}$ компоненты g_{ij} , дважды ковариантные, и в смешанных базисах $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ и $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$ компоненты δ_{ij} , один раз контра- и один раз ковариантные. Использование для компонент тензора двух разных наименований обусловлено различием законов преобразования контра- и ковариантных компонент при замене базиса в пространстве V .

При решении задач иногда возникает необходимость заменить в тензоре векторы, входящие в его состав, другими векторами. В частности, это приходится делать при замене базиса в пространстве V , ибо такая замена приводит к соответствующему изменению тензорного базиса. Замена в тензоре одних векторов другими векторами осуществляется по следующему правилу.

Правило замены векторов в тензоре. Для того, чтобы заменить векторы, образующие тензор, другими векторами, нужно выразить заменяемые векторы через новые и подставить эти их значения в тензор.

Например, пусть требуется заменить в тензоре

$$A = \alpha \mathbf{a} \mathbf{x} + \beta \mathbf{b} \mathbf{y}$$

векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ векторами

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = -\mathbf{b} + \mathbf{w}.$$

Для этого нужно выразить векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - \mathbf{y}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{w} - \mathbf{v},$$

и затем подставить эти значения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ в тензор:

$$A = \alpha \mathbf{a} \mathbf{x} + \beta \mathbf{b} \mathbf{y} = \alpha \mathbf{a}(2\mathbf{u} - \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{w} - \mathbf{v})\mathbf{y} = 2\alpha \mathbf{a} \mathbf{u} - \alpha \mathbf{a} \mathbf{y} + \beta \mathbf{w} \mathbf{y} - \beta \mathbf{v} \mathbf{y},$$

откуда

$$A = 2\alpha \mathbf{a} \mathbf{u} - \alpha \mathbf{a} \mathbf{y} + \beta \mathbf{w} \mathbf{y} - \beta \mathbf{v} \mathbf{y}.$$

Проверка правильности полученного выражения может быть проведена путем подстановки в него приведенных выше значений векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Произведя такую подстановку, получаем для тензора A исходное значение $\alpha \mathbf{a} \mathbf{x} + \beta \mathbf{b} \mathbf{y}$.

Известно, что в линейном пространстве множество базисов может быть разбито на два класса так, что внутри каждого класса базисы преобразуются друг в друга с помощью тензоров (операторов), имеющих положительные определители, а базисы, относящиеся к разным классам, преобразуются один в другой посредством тензоров с отрицательными определителями. О базисах, принадлежащих одному и тому же классу, говорят, что они *одинаково ориентированы*, а о базисах, принадлежащих разным классам, — что они *различно (противоположно) ориентированы*. В случае трехмерного пространства принято называть базисы одного из классов *правоориентированными* или просто *правыми*, а базисы из другого класса *левоориентированными* или *левыми*. (Иногда эти термины употребляются и по отношению к базисам в пространствах других размерностей.)

Ориентацией пространства называется выбор одного из указанных классов базисов. Очевидно, что для того, чтобы ориентировать пространство, достаточно выбрать какой-нибудь один из базисов, так как этим определяется весь класс одинаково ориентированных с ним базисов.

В случае евклидова пространства (см. следующий раздел) ориентация пространства может быть задана наряду с выбором базиса также путем выбора какого-либо геометрического объекта, допускающего, как и базис, существование двух энантиоморфных модификаций (то есть модификаций, каждая из которых является зеркально асимметричной, но которые переходят одна в другую при зеркальном отражении). Если такой объект связан по определенному закону с базисом из одного класса, то зеркально симметричный ему объект будет по тому же закону связан с базисом из другого класса. Тем самым этот объект

(вместе с данным законом) определяет ориентацию пространства. Отметим, что объект, задающий ориентацию пространства, должен иметь размерность, совпадающую с размерностью пространства. В плоскости к таким объектам относятся, например, спираль и окружность с заданным на ней направлением обхода. В трехмерном пространстве в их роли могут выступать, в частности, винтовая линия или конус, вращающийся вокруг своей оси.

В некоторых задачах геометрии и физики используются так называемые псевдоскаляры, псевдовекторы и псевдотензоры. Они вводятся следующим образом.

Фиксируется ориентация пространства (указанным выше способом) и задается *единичный псевдоскаляр* Δ , определяемый так: $\Delta = 1$ для всех базисов и геометрических объектов, имеющих выбранную ориентацию, и $\Delta = -1$ для всех базисов и геометрических объектов, имеющих ориентацию противоположную выбранной.

Тензор (в том числе вектор), умноженный на единичный псевдоскаляр Δ , называется *псевдотензором* (*псевдовектором*). Псевдотензор отличается от тензора тем, что при переходе к базису или геометрическому объекту противоположной ориентации он меняет знак. Нулевой псевдотензор совпадает с нулевым тензором. Из $\Delta^2 = 1$ следует, что псевдотензор, умноженный на Δ , является тензором.

Поскольку всякий тензор при умножении на единичный псевдоскаляр Δ становится псевдотензором, а всякий псевдотензор, умноженный на Δ , становится тензором, то множество тензоров и множество псевдотензоров равномощны. Отметим, что приставка «псевдо» в наименованиях псевдоскаляра, псевдовектора и псевдотензора указывает на то, что знаки этих величин зависят от выбора исследователем ориентации рассматриваемого пространства. Примерами псевдовекторов в математике и физике служат векторное произведение векторов, угловая скорость вращения тела, напряженность магнитного поля.

Завершая настоящий раздел, подчеркнем, что *тензоры и операции над ними являются инвариантными (каноническими) математическими объектами*, так как они не зависят от задания базисов в исходном линейном пространстве V и в соответствующем тензорном пространстве $V^{\otimes r}$. Это свойство тензоров и операций над ними позволяет применять их в формулировках физических законов.

Многие объекты материального мира и их характеристики описываются посредством тензоров. К ним относятся, в частности, электромагнитное поле, деформация и напряжение в твердых телах, диэлектрическая проницаемость анизотропных кристаллов.

3. Евклидово и псевдоевклидово пространства

При рассмотрении евклидовых пространств принято называть их элементы точками.

Евклидовым пространством называется множество E , которому поставлено в соответствие конечномерное вещественное линейное пространство V со скалярным умножением векторов, причем каждой упорядоченной паре точек множества E отвечает один и только один вектор из V . Считается, что вектор имеет *начало* в первой и *конец* во второй точке пары. Связь между парами точек и векторами устанавливается отображением Φ , которое удовлетворяет определенным требованиям. Таким образом, евклидово пространство представляет собой тройку величин (E, V, Φ) . Однако обычно это пространство обозначают одним символом E (тем же, что и исходное множество). Иногда это пространство называют *точечно-векторным*.

В математической литературе рассматривается также случай, когда в линейном пространстве V не задано скалярное умножение векторов. В этом случае пространство E называется *аффинным*. Этот случай мы не будем рассматривать.

Линейное пространство V , фигурирующее в приведенном выше определении, называется пространством, *ассоциированным* с евклидовым пространством E (или пространством, *присоединенным* к E). О векторах пространства V принято говорить как о векторах самого евклидова пространства E . Размерность и тип (сигнатура) пространства V считаются *размерностью* и *типом (сигнатурой)* пространства E . Поскольку пространство V является вещественным, то и пространство E называется *вещественным*.

Евклидово пространство, имеющее тип $(n, 0)$ (где $n = \dim V$), называется *собственно евклидовым*. В таком пространстве любой ненулевой вектор имеет положительный скалярный квадрат ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ для любого $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). Пространству типа $(0, n)$ не дается самостоятельного названия. Это связано с тем, что оно обладает геометрическими свойствами такими же, как пространство типа $(n, 0)$, ибо отличается от него только знаками скалярных произведений векторов. Фактически пространство типа $(0, n)$ тоже является собственно евклидовым (хотя в нем любой ненулевой вектор имеет отрицательный скалярный квадрат: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} < 0$ для любого $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). Евклидовы пространства всех других типов называются *псевдоевклидовыми*.

Принципиальное отличие псевдоевклидова пространства от собственно евклидова состоит в том, что в нем имеются ненулевые векторы не только с положительными скалярными квадратами, как в собственно евклидовом пространстве, но также с отрицательными и нулевыми скалярными квадратами.

Ненулевой вектор, скалярный квадрат которого равен нулю ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$), имеет, согласно (1.1), нулевую длину. Такой вектор называется *изотропным*.

Отметим, что собственно евклидово пространство часто именуют просто *евклидовым*. Иногда евклидовым пространством называют конечномерное линейное пространство со скалярным умножением векторов.

Повторим сказанное в разд. 1, что скалярное произведение векторов принято называть также метрической формой. При этом о пространствах типов $(n, 0)$ и $(0, n)$ говорят, что они наделены положительно определенной и отрицательно определенной метрическими формами соответственно. В физической литературе тип (сигнатура) пространства обозначается с помощью знаков $+$ и $-$.

Примером собственно евклидова пространства служит обычная евклидова плоскость, изучаемая в школьном курсе геометрии. Она имеет тип $(2, 0)$ или, что то же самое, сигнатуру $(++)$. Рассматриваемое в специальной теории относительности пространство Минковского представляет собой четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство типа $(1, 3)$, то есть сигнатуры $(+---)$.

Гиперповерхностью в n -мерном евклидовом пространстве называется гладкое или кусочно гладкое подмножество размерности $n-1$ (при $n \geq 4$). Частным случаем гиперповерхности является *гиперплоскость*. Она представляет собой $(n-1)$ -мерное подпространство n -мерного евклидова пространства.

Расстояние между двумя точками евклидова пространства определяется как длина вектора, соединяющего эти точки. Например, расстояние между точками A и B есть неотрицательное число

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}|}, \quad (3.1)$$

где $\overrightarrow{AB}$ — вектор, имеющий начало в точке A и конец в точке B ; $|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора $\overrightarrow{AB}$, определяемая формулой (1.1). Очевидно, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

Рассмотрим псевдоевклидову плоскость типа $(+ -)$ или $(- +)$ (что фактически одно и то же). Пусть $\mathbf{a}$ — изотропный вектор, лежащий

в этой плоскости и имеющий начало в некоторой точке O . Совокупность концов векторов $k\mathbf{a}$ при $k \in R$ образует прямую в этой плоскости, проходящую через точку O . Поскольку из $|\mathbf{a}| = 0$ следует $|k\mathbf{a}| = 0$ (при всех k), то расстояние между любыми двумя точками этой прямой равно нулю. Такая прямая называется *изотропной*.

Известно, что через каждую точку псевдоевклидовой плоскости проходят две пересекающиеся изотропные прямые. Они разбивают плоскость на четыре сектора. При этом одна пара противоположно расположенных секторов и другая пара противоположно расположенных секторов обладают разными свойствами. А именно, все векторы, которые соединяют точку пересечения прямых с внутренними точками одной пары секторов, имеют положительные скалярные квадраты, а все векторы, соединяющие точку пересечения с внутренними точками другой пары секторов, имеют отрицательные скалярные квадраты.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два ненулевых вектора евклидова пространства, имеющие общее начало. Тогда, как известно, существует плоскость, содержащая оба вектора, причем если векторы не коллинеарны, то такая плоскость единственная.

Угол φ между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, принадлежащими евклидовой плоскости с сигнатурой s , определяется формулами

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (\cos \varphi \in [-1, 1], \varphi \in [0, \pi]) \quad \text{при } s = (+ +); \quad (3.2)$$

$$\cos \varphi = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (\cos \varphi \in [-1, 1], \varphi \in [0, \pi]) \quad \text{при } s = (- -); \quad (3.3)$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (\operatorname{ch} \varphi \in [1, +\infty), \varphi \in (-\infty, +\infty)) \quad (3.4)$$

при $s = (+ -)$ или $s = (- +)$,

где $\operatorname{ch} \varphi$ — гиперболический косинус угла φ (график этой функции приведен в конце разд. 10 главы 3).

Формула (3.2) заимствована из обычного курса геометрии. Но там ей придается несколько иной смысл. В геометрии длина вектора и угол между векторами считаются понятиями известными (как величины, измеряемые линейкой и транспортиром), а скалярное произведение векторов определяется с их помощью на основе формулы (3.2), записанной в виде $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$. В линейной же алгебре, наоборот, сначала задается скалярное произведение векторов, а длина вектора и угол между векторами определяются через скалярное произведение посредством формул (1.1) и (3.2). Мы следуем именно этому подходу.

В формуле (3.3) знак минус обусловлен отрицательной определенностью метрической формы в плоскости сигнатуры $(- -)$. Поскольку эта плоскость отличается от плоскости сигнатуры $(+ +)$ лишь знаками скалярных произведений векторов, то она имеет одинаковые с последней геометрические свойства, то есть эта плоскость фактически тоже является собственно евклидовой.

Формула (3.4) задает два значения угла φ , различающиеся знаком (знак φ выбирается, исходя из конкретных условий решаемой задачи). Следует отметить, что в случае псевдоевклидовой плоскости, к которому относится формула (3.4), понятие угла между векторами вводится не для любой пары векторов. А именно, в формуле (3.4) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ должны быть неизотропными и должны удовлетворять следующему условию. Если совместить начала векторов в одной точке плоскости (путем параллельного перенесения), то концы векторов должны оказаться внутри одного и того же из четырех секторов, на которые плоскость разбивается парой изотропных прямых, проходящих через эту точку.

Подчеркнем, что если в данной ситуации хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ является изотропным или же концы векторов находятся внутри разных секторов, то угол между такими векторами не определен. Из этого, в частности, следует, что в случае псевдоевклидовой плоскости понятие ортогональности векторов (определяемое условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$) не связано ни с какой величиной угла, так как неизотропные взаимно ортогональные векторы принадлежат разным секторам.

Углом между прямыми (лучами, прямолинейными отрезками) называется угол между их направляющими векторами. Если плоскость является псевдоевклидовой, то направляющие векторы должны удовлетворять указанному выше условию существования угла.

Мы продолжим обсуждение понятия угла между векторами в следующем разделе.

Из формул (1.1), (3.1)–(3.4) видно, что в евклидовом пространстве расстояния и углы определяются через скалярные произведения векторов. В связи с этим принято говорить, что операция скалярного умножения векторов задает в пространстве *метрику*. В зависимости от типа пространства эта метрика называется собственно евклидовой или псевдоевклидовой.

Важнейшая для физики роль евклидовых и других геометрических пространств заключается в том, что они дают возможность использовать геометрические фигуры (различных размерностей и форм) в качестве моделей материальных тел.

4. Тензоры (операторы) поворота в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях

В этом разделе считается, что плоскость не вложена ни в какое объемлющее пространство. Считается также, что плоскость неподвижна (ибо нет объекта, по отношению к которому можно было бы рассматривать ее движение).

Сначала анализируется поворот векторов, затем — их вращение (поворот на угол, изменяющийся со временем). Поворот векторов происходит внутри плоскости и рассматривается по отношению к базису, неподвижному относительно плоскости.

А. Поворот векторов

Двухвалентные тензоры, как отмечено в разд. 2, могут выполнять роль линейных операторов. Построим тензоры, которые осуществляют поворот в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Будем называть их *тензорами (операторами) поворота*.

Рассмотрим вначале собственно евклидову плоскость. Точку плоскости, вокруг которой осуществляется поворот, назовем *центром поворота* или просто *центром* и обозначим через O . Из определения евклидова пространства следует, что каждой точке плоскости может быть поставлен в соответствие вектор с началом в центре поворота O и концом в данной точке. Будем описывать поворот точки вокруг центра O как поворот этого вектора. Напомним, что собственно евклидова плоскость имеет тип $(2, 0)$ и что в ней все ненулевые векторы имеют положительные скалярные квадраты.

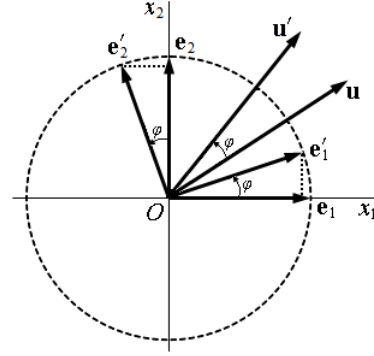
Зададим в плоскости ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в центре поворота O . Ортонормированность базиса в пространстве типа $(2, 0)$ означает, что

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1; \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (4.1)$$

Повернем векторы, принадлежащие плоскости, на угол φ вокруг точки O (рис. 4.1). При этом базисные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ перейдут в векторы, которые обозначим через $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ соответственно. Разложим их по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. С помощью рис. 4.1 нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рис. 4.1. Поворот векторов в собственно евклидовой плоскости на угол φ .



Пусть A — тензор, который осуществляет этот поворот в соответствии с первым из законов (2.18):

$$\mathbf{u} \mapsto A \cdot \mathbf{u} \quad \text{для всех векторов } \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

Введем диадный базис $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\}$ и разложим тензор A по этому базису:

$$A = a_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad (4.4)$$

где a_{ij} — компоненты тензора A в этом базисе ($i, j = 1, 2$).

Так как тензор A переводит векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$, то, согласно (4.3), имеем: $A \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$ и $A \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2$. Подставим сюда значения величин $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и A из (4.2) и (4.4). Используя правило скалярного умножения диады на вектор (2.4) и зависимости (4.1), получаем:

$$A \cdot \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2;$$

$$A \cdot \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2.$$

Умножим скалярно среднюю и правую части первого выражения на вектор $\mathbf{e}_1$. Учитывая (4.1), находим: $a_{11} = \cos \varphi$. Далее умножим это же выражение на вектор $\mathbf{e}_2$ и затем умножим аналогичным образом на $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ второе выражение. Это даст значения остальных компонент тензора A . В итоге получим следующую матрицу компонент тензора A :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Отсюда и из (4.4) вытекает, что тензор поворота A имеет вид

$$A = \cos \varphi \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \sin \varphi \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2. \quad (4.6)$$

Проверим, что тензор A поворачивает векторы на угол φ без изменения их длины.

Пусть $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, лежащий в рассматриваемой плоскости и имеющий начало в точке O (см. рис. 4.1). Разложим его по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2, \quad (4.7)$$

где u_1 и u_2 — компоненты вектора $\mathbf{u}$.

Подействуем на вектор $\mathbf{u}$ тензором A . Обозначая получающийся вектор через $\mathbf{u}'$ и используя зависимости (4.1), (4.6) и (4.7), можем записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= A \cdot \mathbf{u} = \\ &= (\cos \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \cdot (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) = \\ &= (u_1 \cos \varphi - u_2 \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + (u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из выражений (1.1), (3.2), (4.1), (4.7) и (4.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \sqrt{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}|} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{|\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'|} = |\mathbf{u}'|; \\ \cos(\widehat{\mathbf{u}', \mathbf{u}}) &= \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}'| |\mathbf{u}|} = \cos \varphi \quad (\text{при } |\mathbf{u}| \neq 0). \end{aligned}$$

Эти зависимости показывают, что тензор A действительно поворачивает векторы на угол φ без изменения их длины.

Тензор A вида (4.6) является ортогональным. Это можно доказать, пользуясь тем, что он сохраняет длину векторов, но мы докажем это непосредственно по определению ортогональности тензора.

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два произвольных вектора. Разложим их по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2.$$

Действуя на эти векторы тензором A , получаем для $A \cdot \mathbf{u}$ и $A \cdot \mathbf{v}$ выражения, которые аналогичны выражению, стоящему в правой части формулы (4.8):

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{u} &= (u_1 \cos \varphi - u_2 \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + (u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_2; \\ A \cdot \mathbf{v} &= (v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + (v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (4.1) находим:

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Вследствие произвольности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, выполнение этой зависимости означает, что тензор A удовлетворяет условию (2.20), определяющему ортогональный тензор. Значит, тензор A действительно ортогональный.

Построим для рассматриваемого случая собственно евклидовой плоскости единичный тензор I и тензоры A^* и A^{-1} — соответственно транспонированный и обратный к тензору A .

Согласно (2.26), единичный тензор I имеет в данном случае вид

$$I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad (4.9)$$

где учтено, что базис $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, совпадает с $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (это вытекает из формул (2.24) и (4.1)).

Тензор A^* , транспонированный (сопряженный) к тензору A , получается перестановкой местами векторов в каждом слагаемом в формуле (4.6):

$$A^* = \cos \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2. \quad (4.10)$$

Тензор A^{-1} , обратный к тензору A , есть

$$A^{-1} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \sin \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2. \quad (4.11)$$

Доказательство того, что этот тензор является обратным к A , может быть проведено двумя способами. Во-первых, можно убедиться в том, что выполняется зависимость (2.17), определяющая обратный тензор: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (для этого нужно воспользоваться значениями (4.6) и (4.11) тензоров A и A^{-1} , соотношениями (4.1) и формулой (4.9), конкретизирующей вид единичного тензора I для данного случая).

Во-вторых, можно заменить в формуле (4.6) угол φ на $-\varphi$; при этом правая часть формулы совпадет с правой частью формулы (4.11). Это означает, что тензор A^{-1} поворачивает векторы на угол $-\varphi$, то есть он действительно осуществляет преобразование, обратное к производимому тензором A .

Сравнение формул (4.10) и (4.11) дает: $A^* = A^{-1}$. Это равенство, согласно (2.21), является критерием ортогональности тензора, поэтому из него снова следует, что тензор A ортогональный.

Завершая рассмотрение собственно евклидовой плоскости, выпишем уравнение окружности единичного радиуса с центром в центре поворота O . Напомним, что *окружность* есть множество точек, равноудаленных от заданной точки, называемой *центром окружности*. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек окружности относительно O . Так как

расстояние от O до точек окружности равно $\sqrt{|\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}|}$, причем в собственном евклидовом случае $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \geq 0$, то уравнение интересующей нас окружности имеет вид

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 1. \quad (4.12)$$

Разложим вектор $\mathbf{R}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: $\mathbf{R} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Подставляя это разложение в уравнение (4.12) и учитывая соотношения (4.1), получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) есть уравнение окружности единичного радиуса в собственно евклидовой плоскости. На рис. 4.1 эта окружность изображена штриховой линией.

Перейдем к рассмотрению *псевдоевклидовой плоскости*. Как и ранее, будем называть точку, вокруг которой осуществляется поворот, центром поворота и будем обозначать ее буквой O . Поворот точки вокруг центра O опишем, подобно предыдущему, как поворот вектора, имеющего начало в O и конец в этой точке.

Введем в плоскости ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ с началом в центре поворота O (мы нумеруем векторы базиса цифрами 0 и 1, а не 1 и 2, в соответствии с тем, как это принято делать в теории относительности). Псевдоевклидова плоскость имеет тип $(1, 1)$ (или, что то же самое, сигнатуру $(+ -)$), поэтому ортонормированный базис в ней удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1; \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (4.14)$$

Начнем с задания уравнения окружности с центром в центре поворота O . Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек окружности относительно O . Так как радиус окружности равен $\sqrt{|\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}|}$, то на псевдоевклидовой плоскости существуют окружности двух типов: с положительным и с отрицательным скалярным квадратом радиуса-вектора. Они задаются уравнениями

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -R^2, \quad (4.15)$$

где R — радиус окружности ($R > 0$).

Нас будут интересовать окружности единичного радиуса. Разложим вектор $\mathbf{R}$ по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$: $\mathbf{R} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1$. Подставим это разложение в уравнения (4.15). Учитывая соотношения (4.14), получаем при $R = 1$ уравнения двух окружностей единичного радиуса:

$$x_0^2 - x_1^2 = 1; \quad x_0^2 - x_1^2 = -1. \quad (4.16)$$

Эти окружности имеют вид гипербола (рис. 4.2). Первая состоит из верхней и нижней гипербола, вторая — из левой и правой гипербола. Поскольку окружности имеют единичный радиус, а базисные векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ имеют единичную длину, то при вращении векторов $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ вокруг точки O их концы будут перемещаться вдоль этих гипербола.

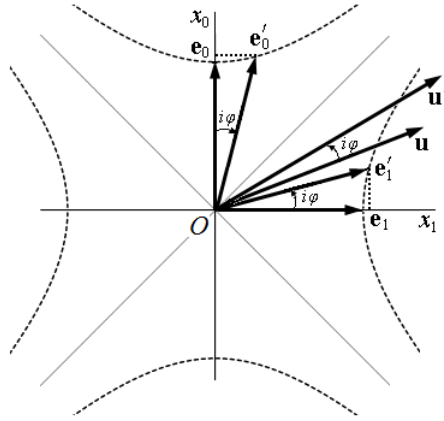


Рис. 4.2. Поворот векторов в псевдоевклидовой плоскости на угол φ .

Штриховые линии — окружности единичного радиуса; тонкие наклонные линии — изотропные прямые; символ мнимой единицы i в обозначениях углов указывает на то, что при оперировании с этими углами следует использовать гиперболические функции вместо тригонометрических.

Асимптотами указанных гипербола являются изотропные прямые $x_0 = \pm x_1$, пересекающиеся в начале координат. На рис. 4.2 они показаны тонкими наклонными линиями. Направляющими векторами асимптот служат векторы $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1$. Их изотропность (то есть равенство нулю скалярных квадратов) подтверждается зависимостью

$$(\mathbf{e}_0 \pm \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_0 \pm \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \pm \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 0,$$

где учтены соотношения (4.14).

Итак все точки гипербола, изображенных на рис. 4.2, находятся на одном и том же единичном расстоянии от точки O (потому что, согласно (4.15), $\sqrt{|\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}|} = 1$ при $R = 1$). Между тем, непосредственно видно, что расстояния от точки O до разных точек гипербола различны. Это

противоречие объясняется тем, что уравнения (4.15) описывают ситуацию в рамках псевдоевклидовой метрики. Рисунок же изображен на листе бумаги, обладающем собственно евклидовой метрикой. Псевдоевклидово и собственно евклидово пространства различаются как раз своими метрическими свойствами, то есть теми свойствами, которые связаны со скалярным произведением векторов. При этом их линейные свойства одинаковы (например, в обоих пространствах сумма векторов может быть найдена по правилу параллелограмма).

Отметим, что если бы мы имели дело с трехмерными пространствами (собственно евклидовым и псевдоевклидовым), то сферы в них можно было бы получить путем вращения окружностей, показанных на рис. 4.1 и 4.2, вокруг их диаметров. А именно, в случае собственно евклидова пространства (имеющего тип $(3, 0)$) вращение окружности, задаваемой уравнением (4.13), вокруг любого ее диаметра дает обычную сферу. В случае псевдоевклидова пространства типа $(1, 2)$ вращение окружностей, описываемых первым и вторым уравнениями (4.16), вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_0$ дает соответственно двуполостный и однополостный гиперболоиды. Эти гиперболоиды имеют общую асимптотическую коническую поверхность, называемую обычно асимптотическим конусом. Этот конус именуется изотропным, так как его образующие — изотропные прямые. В теории относительности, где используется четырехмерное псевдоевклидово пространство типа $(1, 3)$, соответствующий изотропный конус (представляющий собой трехмерную гиперповерхность) называется световым конусом.

Вернемся к рассмотрению псевдоевклидовой плоскости.

Теорема 4.1. Пусть P — псевдоевклидова плоскость; $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ — ортонормированный базис в P . Тогда тензор

$$B = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad (4.17)$$

действующий на векторы в соответствии с законом

$$\mathbf{u} \mapsto B \cdot \mathbf{u} \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in P,$$

поворачивает неизотропные векторы на угол φ без изменения их длины.

Здесь базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ удовлетворяет соотношениям (4.14); $\operatorname{ch} \varphi$ и $\operatorname{sh} \varphi$ — гиперболические косинус и синус угла φ , их графики имеются в конце разд. 10 главы 3; нулевой вектор исключаем из рассмотрения, потому что для него угол поворота не определен.

Доказательство. Возьмем произвольный ненулевой неизотропный вектор

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1, \quad (4.18)$$

принадлежащий плоскости (см. рис. 4.2). Подействуем на него тензором B . Обозначая получающийся вектор через $\mathbf{u}'$ и используя зависимости (4.14), (4.17) и (4.18), имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= B \cdot \mathbf{u} = \\ &= (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot (u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1) = \\ &= (u_0 \operatorname{ch} \varphi + u_1 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_0 + (u_0 \operatorname{sh} \varphi + u_1 \operatorname{ch} \varphi) \mathbf{e}_1.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Из (1.1), (3.4), (4.18) и (4.19), учитывая формулу $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$, находим:

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}| &= \sqrt{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}|} = \sqrt{|u_0^2 - u_1^2|} = \sqrt{|\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'|} = |\mathbf{u}'|; \\ \operatorname{ch}(\widehat{\mathbf{u}', \mathbf{u}}) &= \frac{|\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}'| |\mathbf{u}|} = \operatorname{ch} \varphi,\end{aligned}$$

где знаменатель не равен нулю, так как $|\mathbf{u}| \neq 0$ и $|\mathbf{u}'| \neq 0$ (ибо $\mathbf{u}$ — ненулевой неизотропный вектор и $|\mathbf{u}'| = |\mathbf{u}|$ в силу первой цепочки равенств). Отсюда следует, что тензор B вида (4.17) действительно поворачивает неизотропные векторы на угол φ без изменения их длины. ■

Характерной особенностью тензора B является то, что он не изменяет направления изотропных векторов. В самом деле, пусть $\mathbf{a}$ — изотропный вектор, то есть $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$. Подставим сюда его разложение по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$: $\mathbf{a} = a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1$. С учетом (4.14) получаем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1) \cdot (a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1) = a_0^2 - a_1^2 = 0,$$

откуда $a_1 = \pm a_0$. Это означает, что изотропные векторы имеют вид $a(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)$ или $a(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1)$, где a — любое ненулевое число. Подействуем на эти векторы тензором B . С помощью (4.17) находим:

$$\begin{aligned}B \cdot a(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) &= (\operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi) a(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1); \\ B \cdot a(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) &= (\operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi) a(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что результат действия тензора B на изотропные векторы $a(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)$ и $a(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1)$ заключается в умножении их на положительный скалярный множитель $\operatorname{ch} \varphi \pm \operatorname{sh} \varphi$. Значит, тензор B действительно не изменяет направления изотропных векторов. Отсюда же вытекает, что тензор B не меняет длину (нулевую) изотропных векторов и не меняет направления изотропных прямых (прямых, имеющих изотропные направляющие векторы).

Покажем, как тензор B преобразует базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$.

Пусть в результате действия тензора B базисные векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ переходят в векторы $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$ соответственно. На основании (4.14) и (4.17) можем записать:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_0 &= B \cdot \mathbf{e}_0 = \\ &= (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_0 = \\ &= \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1; \\ \mathbf{e}'_1 &= B \cdot \mathbf{e}_1 = \\ &= (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 = \\ &= \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1,\end{aligned}$$

следовательно, базисные векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ преобразуются в векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_0 &= \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1; \\ \mathbf{e}'_1 &= \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Пара векторов $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1\}$ является, как и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$, ортонормированным базисом. В самом деле, из (4.14), (4.20) и формулы $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$ находим:

$$\mathbf{e}'_0 \cdot \mathbf{e}'_0 = 1; \quad \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = -1; \quad \mathbf{e}'_0 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0,\tag{4.21}$$

откуда вытекает, что $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1\}$ есть ортонормированная система векторов. Вместе с тем, векторы $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$ линейно независимы (ибо в противном случае было бы $\mathbf{e}'_0 = \alpha \mathbf{e}'_1$, и поэтому их скалярные квадраты имели бы один и тот же знак, вопреки (4.21), здесь $\alpha \in R$). А так как количество этих векторов совпадает с размерностью пространства, то из сказанного следует, что $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1\}$ — ортонормированный базис.

Таким образом, в результате поворота, производимого тензором B , ортонормированный базис переходит в ортонормированный базис.

На рис. 4.2 показаны векторы $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$, которые связаны с векторами $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ законом (4.20). Обратим внимание на то, что при преобразовании базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ в $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1\}$ векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ поворачиваются в противоположных направлениях (навстречу друг другу), а не в одном направлении, как в случае, изображенном на рис. 4.1. Именно благодаря этому обстоятельству изотропные прямые сохраняют свои направления. Действительно, из (4.20) следует, что при любом φ изотропный вектор $\mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1$ имеет одно и то же направление, совпадающее с направлением вектора $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ (аналогичным свойством обладает изотропный вектор $\mathbf{e}'_0 - \mathbf{e}'_1$). Тот факт, что на рис. 4.2 векторы $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$ выглядят

не как взаимно ортогональные объясняется тем, что лист бумаги, на котором изображен рисунок, наделен собственно евклидовой, а не псевдоевклидовой метрикой.

Итак, тензор B не изменяет длины векторов и направления изотропных векторов, а также переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Теорема 4.2. *Тензор B вида (4.17) является ортогональным.*

Доказательство. Эту теорему можно доказать, основываясь на том, что тензор B сохраняет длины векторов. Однако мы воспользуемся для доказательства определением ортогональности тензора.

Пусть $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_1$ — произвольные векторы, принадлежащие рассматриваемой плоскости. Действуя на них тензором B , получаем для $B \cdot \mathbf{u}$ и $B \cdot \mathbf{v}$ выражения, которые аналогичны выражению стоящему в правой части формулы (4.19):

$$B \cdot \mathbf{u} = (u_0 \operatorname{ch} \varphi + u_1 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_0 + (u_0 \operatorname{sh} \varphi + u_1 \operatorname{ch} \varphi) \mathbf{e}_1;$$

$$B \cdot \mathbf{v} = (v_0 \operatorname{ch} \varphi + v_1 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_0 + (v_0 \operatorname{sh} \varphi + v_1 \operatorname{ch} \varphi) \mathbf{e}_1.$$

Отсюда с помощью (4.14) и формулы $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$ находим:

$$(B \cdot \mathbf{u}) \cdot (B \cdot \mathbf{v}) = u_0 v_0 - u_1 v_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

В силу произвольности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, выполнение данной зависимости означает, что тензор B удовлетворяет условию (2.20), определяющему ортогональный тензор. Следовательно, тензор B действительно ортогональный. ■

Построим для рассматриваемого случая псевдоевклидовой плоскости тензоры I , B^* и B^{-1} .

Из (2.26) вытекает, что единичный тензор I имеет в данном случае вид

$$I = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad (4.22)$$

где $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*\}$ — базис, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$; учтено, что $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*\} = \{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1\}$ (это следует из формул (2.24) и (4.14)).

Отметим, что тензор I , задаваемый выражением (4.22), отличается от единичного тензора (4.9), относящегося к случаю собственно евклидовой плоскости, наличием знака минус перед одной из диад. Тот факт, что в данном случае единичный тензор имеет именно такой вид, легко проверить, рассмотрев его действие на векторы. Так, пусть $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1$ — произвольный вектор. Тогда с помощью (4.14) и (4.22) получаем:

$$I \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot (u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1) = u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{u},$$

откуда следует, что тензор I удовлетворяет условию (2.15), определяющему единичный тензор, значит, он в самом деле является единичным тензором.

Тензор B^* , транспонированный к тензору B , получается перестановкой местами векторов в каждом слагаемом в формуле (4.17):

$$B^* = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1. \quad (4.23)$$

Тензор B^{-1} , обратный к тензору B , имеет вид

$$B^{-1} = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1. \quad (4.24)$$

Доказательство того, что этот тензор является обратным к B , может быть проведено способами, аналогичными упомянутым при рассмотрении формулы (4.11). А именно, можно проверить выполнение зависимости $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$, определяющей обратный тензор (подставив сюда значения (4.17), (4.22) и (4.24) тензоров B , I и B^{-1}). А также можно заменить в формуле (4.17) угол φ на $-\varphi$; при этом правая часть формулы совпадет с правой частью формулы (4.24). Это означает, что тензор B^{-1} поворачивает векторы на угол $-\varphi$, то есть осуществляет преобразование, обратное к производимому тензором B .

На основании (4.23) и (4.24) имеем: $B^* = B^{-1}$. Данное равенство служит критерием ортогональности тензора, поэтому мы вновь получаем, что B — ортогональный тензор.

Из (4.17) вытекает, что матрица компонент тензора B в диадном базисе $\{\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1\}$ есть

$$\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & -\operatorname{sh} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi & -\operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Выпишем, для сравнения, совместно тензоры (операторы) A и B , поворачивающие векторы в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Они задаются выражениями (4.6) и (4.17):

$$\begin{aligned} A &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2; \\ B &= \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где φ — угол поворота; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ — ортонормированные базисы в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях соответственно (первый базис удовлетворяет соотношениям (4.1), второй — соотношениям (4.14)).

При отсутствии поворота, то есть при $\varphi = 0$, имеем согласно формулам (4.9), (4.22) и (4.26): $A = I$ и $B = I$. Так и должно быть, потому что поворот на нулевой угол является тождественным преобразованием (здесь единичный тензор свой для каждой плоскости).

Выражения (4.26) представляют собой разложения тензоров A и B по диадным базисам соответственно $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\}$ (своему для каждой плоскости). Из (4.26) (или из (4.5) и (4.25)) следует, что матрицы компонент тензоров A и B в этих базисах есть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad (4.27)$$

$$\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & -\text{sh } \varphi \\ \text{sh } \varphi & -\text{ch } \varphi \end{pmatrix}.$$

На основании (4.9) и (4.22) заключаем, что единичный тензор I имеет в диадных базисах $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\}$ матрицы компонент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (в случаях собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей соответственно). Этот же результат вытекает из выражения (4.27), если положить в нем $\varphi = 0$, что отвечает ситуации $A = I$ и $B = I$ (тензор I свой для каждой плоскости).

Построим в рассматриваемых плоскостях базисы $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ и $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*\}$, взаимные к базисам $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$. Из определения взаимного базиса (2.24) и соотношений (4.1) и (4.14) следуют равенства $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*\} = \{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1\}$. С помощью этих равенств и выражений (4.9), (4.22) и (4.26) находим матрицы компонент тензоров I , A и B в смешанных диадных базисах $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*\}$ и $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*\}$. Тензор A (в первом из этих базисов), тензор B (во втором базисе) и единичный тензор I (в обоих базисах) имеют матрицы компонент соответственно

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Определители всех трех матриц равны единице. А так как определитель матрицы компонент тензора в смешанном базисе есть определитель тензора, то из (4.28) следует $\det A = \det B = \det I = 1$. Подчеркнем, что в других диадных базисах эти же тензоры могут иметь матрицы компонент, определители которых отличны от единицы. Например, из предыдущего вытекает, что в базисе $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\}$ матрицы компонент тензоров B и I имеют определители, равные -1 .

Итак, тензоры (операторы) A и B вида (4.26) поворачивают векторы в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях соответственно. Оба тензора являются ортогональными, имеют единичные определители и при $\varphi \rightarrow 0$ переходят в единичный тензор (свой для каждой плоскости). Эти тензоры называются *тензорами (операторами) поворота*. Преобразование векторов в псевдоевклидовой плоскости, производимое тензором B , называется *гиперболическим поворотом* или *бустом*.

Теорема 4.3. *Тензоры A и B вида (4.26) — единственные тензоры, осуществляющие поворот векторов в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях согласно законам*

$$\mathbf{u} \mapsto A \cdot \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathbf{v} \mapsto B \cdot \mathbf{v},$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ — произвольные векторы, принадлежащие соответственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостям соответственно.

Доказательство. Пусть имеются еще тензоры A' и B' , производящие поворот векторов такой же, какой производят тензоры A и B . Тогда $A' \cdot \mathbf{u} = A \cdot \mathbf{u}$ и $B' \cdot \mathbf{v} = B \cdot \mathbf{v}$ для любых векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (принадлежащих соответствующим плоскостям). Отсюда $(A' - A) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $(B' - B) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Из этого, благодаря невырожденности операции скалярного умножения тензора на вектор (см. (2.8)), вытекает, что $A' - A = \hat{0}$ и $B' - B = \hat{0}$. Значит, $A' = A$ и $B' = B$, то есть тензоры A и B действительно единственные. ■

В дальнейшем индексы при тензорах A и B обозначают угол поворота.

Теорема 4.4. *Тензоры поворота A_φ и A_θ коммутируют при любых значениях углов φ и θ , их скалярное произведение представляет собой тензор $A_{\varphi+\theta}$, поворачивающий векторы на суммарный угол $\varphi+\theta$; это же верно для тензоров поворота B_φ и B_θ :*

$$\begin{aligned} A_\varphi \cdot A_\theta &= A_\theta \cdot A_\varphi = A_{\varphi+\theta}; \\ B_\varphi \cdot B_\theta &= B_\theta \cdot B_\varphi = B_{\varphi+\theta}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Доказательство. На основании (4.26), пользуясь правилом скалярного умножения тензоров (см. разд. 2), соотношениями (4.1) и свойствами тригонометрических функций, находим: $A_\varphi \cdot A_\theta = A_{\varphi+\theta}$. Объединяя это равенство с очевидным равенством $A_{\varphi+\theta} = A_{\theta+\varphi}$, получаем: $A_\varphi \cdot A_\theta = A_{\varphi+\theta} = A_{\theta+\varphi} = A_\theta \cdot A_\varphi$, что дает первую из зависимостей (4.29). Вторая зависимость получается аналогичным образом с помощью соотношений (4.14) и свойств гиперболических функций. ■

Теорема 4.5. *Тензор поворота A имеет вид (4.26) при использовании любого ортонормированного базиса, который может быть получен путем поворота базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Аналогичное утверждение верно для тензора B . Иначе говоря, чтобы перейти в формулах (4.26) к ортонормированным базисам, повернутым относительно базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$, нужно просто заменить в этих формулах векторы данных базисов векторами повернутых базисов.*

Доказательство. Рассмотрим собственно евклидову плоскость. Пусть $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ — ортонормированный базис, получаемый поворотом базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на угол θ . Тогда $\mathbf{e}'_1 = A_\theta \cdot \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_2 = A_\theta \cdot \mathbf{e}_2$. Отсюда $\mathbf{e}_1 = A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}_2 = A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_2$, где A_θ^{-1} — тензор, обратный к A_θ (тензор A_θ^{-1} существует, так как тензор A_θ ортогональный). Подставим эти значения векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в выражение (4.26) для тензора $A (= A_\varphi)$:

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \dots + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \\ &= \cos \varphi (A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1)(A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1) - \dots + \cos \varphi (A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_2)(A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_2). \end{aligned}$$

На основании критерия ортогональности тензора (2.21) и свойства транспонированного тензора (2.11) имеем: $A_\theta^{-1} = A_\theta^*$ и $A_\theta^* \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i \cdot A_\theta$, где A_θ^* — тензор, транспонированный к A_θ ($i = 1, 2$). Преобразуем выписанное выше выражение с помощью этих равенств и правила скалярного умножения тензоров:

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \cos \varphi (A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1)(A_\theta^* \cdot \mathbf{e}'_1) - \dots + \cos \varphi (A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_2)(A_\theta^* \cdot \mathbf{e}'_2) = \\ &= \cos \varphi (A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1)(\mathbf{e}'_1 \cdot A_\theta) - \dots + \cos \varphi (A_\theta^{-1} \cdot \mathbf{e}'_2)(\mathbf{e}'_2 \cdot A_\theta) = \\ &= A_\theta^{-1} \cdot (\cos \varphi \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1 - \dots + \cos \varphi \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_2) \cdot A_\theta. \end{aligned}$$

Умножим скалярно крайние части этой цепочки равенств слева на A_θ и справа на A_θ^{-1} . Используя определение обратного тензора (2.17) и свойства единичного тензора (2.16), находим:

$$A_\theta \cdot A_\varphi \cdot A_\theta^{-1} = \cos \varphi \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1 - \dots + \cos \varphi \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_2.$$

Из теоремы 4.4 следует, что тензоры A_φ и A_θ коммутируют, поэтому $A_\theta \cdot A_\varphi \cdot A_\theta^{-1} = A_\varphi \cdot A_\theta \cdot A_\theta^{-1} = A_\varphi \cdot I = A_\varphi$, что окончательно дает:

$$A_\varphi = \cos \varphi \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1 - \dots + \cos \varphi \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_2.$$

Сравнение этого выражения с (4.26) показывает с учетом произвольности угла θ , что тензор A действительно имеет одинаковый вид при использовании любого ортонормированного базиса, получаемого поворотом базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Для тензора B данное утверждение доказывается таким же способом. ■

Б. Свойства угла между векторами

Продолжим обсуждение понятия угла между векторами, начатое в разд. 3.

Рассмотрим собственно евклидову и псевдоевклидову плоскости совместно. Согласно формулам (4.2) и (4.20), единичный вектор $\mathbf{e}'_1$, образующий с базисным ортом $\mathbf{e}_1$ угол φ , задается в этих плоскостях равенствами $\mathbf{e}'_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1 = \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1$ соответственно. Введем вектор $\overrightarrow{OM} = r\mathbf{e}'_1$ (он имеет длину r и направлен так же, как $\mathbf{e}'_1$; $r > 0$; O — начало базисных ортов). Из выписанных равенств вытекает, что этот вектор имеет в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях вид соответственно

$$\overrightarrow{OM} = r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM} = r \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 + r \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0, \quad (4.30)$$

где во втором равенстве мы переставили местами слагаемые, чтобы сделать более наглядным сходство этих равенств.

На рис. 4.3 показаны окружности радиуса r с центром в точке O и векторы $\overrightarrow{OM}$ вида (4.30) для случаев собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей. Пусть N — проекция точки M на ось, направленную вдоль $\mathbf{e}_1$. В обоих случаях в треугольниках OMN стороны ON и MN взаимно ортогональны. Из формул (4.30) и рис. 4.3 видно, что зависимости между углом φ и длинами сторон треугольника OMN различаются в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях только тем, что в первой плоскости используются тригонометрические функции угла, а во второй — гиперболические. Именно с целью подчеркнуть необходимость применения гиперболических функций при оперировании с углами в псевдоевклидовой плоскости мы включаем в обозначения углов на рисунках, изображающих эту плоскость, символ мнимой единицы i .

Теорема 4.6. Пусть в плоскости (собственно евклидовой или псевдоевклидовой) задана окружность радиуса r и два луча с началами в центре окружности и углом φ между ними. Тогда длина l дуги окружности, заключенной между лучами, связана с углом φ равенством

$$l = r|\varphi|. \quad (4.31)$$

Мы поставили величину φ под знак модуля, так как при трактовке ее как угловой переменной, она может принимать отрицательные значения. В случае псевдоевклидовой плоскости лучи должны удовлетворять условию существования угла, сформулированному в пояснении к формуле (3.4).

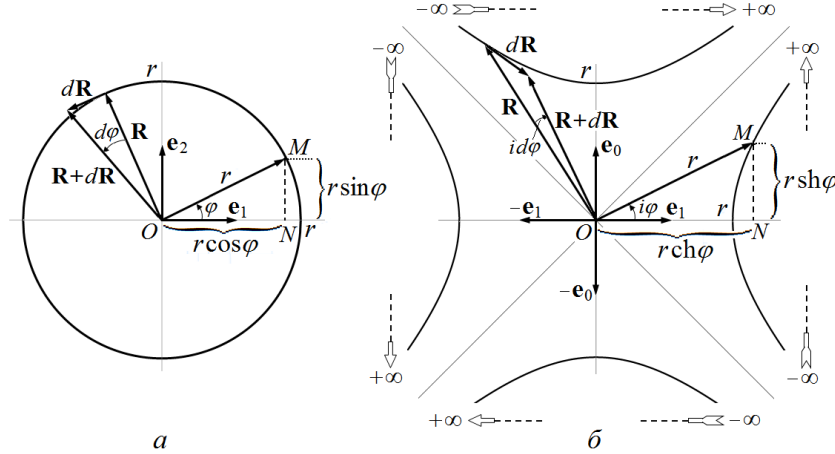


Рис. 4.3. Иллюстрация аналогии между свойствами углов в собственно евклидовой (а) и псевдоевклидовой (б) плоскостях.

На рис. б гиперболы — псевдоевклидовы окружности радиуса r ; тонкие наклонные линии — изотропные прямые, они разбивают плоскость на четыре сектора; контурные стрелки показывают направления возрастания угла φ в каждом из секторов (угол отсчитывается от вектора $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_0$ или $-\mathbf{e}_1$, своего для каждого сектора).

Доказательство. Уравнение окружности (для обеих плоскостей) имеет вид

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \pm r^2, \quad (4.32)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек окружности относительно ее центра O ; знак плюс относится к обеим плоскостям, знак минус — только к псевдоевклидовой плоскости.

Будем считать, что вектор $\mathbf{R}$ является функцией угла, отсчитываемого от одного из заданных лучей в направлении другого. Дифференцируя обе части равенства (4.32), получаем: $d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 0$, откуда

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 0. \quad (4.33)$$

На рис. 4.3, а и б, изображены векторы $\mathbf{R}$, $d\mathbf{R}$ и $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$, образующие треугольники с углом $d\varphi$ между векторами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$. Из геометрии известно, что дифференциал радиуса-вектора точек гладкой линии направлен по касательной к ней, поэтому вектор $d\mathbf{R}$ касателен к окружности. Равенство (4.33) означает, что стороны треугольников,

образуемые векторами $\mathbf{R}$ и $d\mathbf{R}$, взаимно ортогональны. Из этого следует, что для собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей выполняются зависимости соответственно

$$|d\mathbf{R}| = |\mathbf{R}| \operatorname{tg}(d\varphi) \quad \text{и} \quad |d\mathbf{R}| = |\mathbf{R}| \operatorname{th}(d\varphi) \quad (\text{при } d\varphi > 0). \quad (4.34)$$

Обозначим: dl — дифференциал длины дуги окружности. Так как вектор $d\mathbf{R}$ касателен к окружности, то при малом $|d\mathbf{R}|$ будет $dl \approx |d\mathbf{R}|$. Кроме того, $|\mathbf{R}| = r$, $\operatorname{tg}(d\varphi) \approx d\varphi$, $\operatorname{th}(d\varphi) \approx d\varphi$ (при малом $d\varphi$). Подставляя эти значения величин в (4.34), получаем для обеих плоскостей: $dl = r d\varphi$ (при $d\varphi \rightarrow 0$). Интегрирование обеих частей этого равенства по угловой переменной в пределах от 0 до φ (при $\varphi > 0$) дает: $l = r\varphi$. В связи с тем, что величина φ может принимать отрицательные значения (при рассмотрении ее как угловой переменной), заключаем ее под знак модуля и получаем требуемую формулу (4.31). ■

Вычислим длину окружности в псевдоевклидовой плоскости.

Рассмотрим окружность единичного радиуса, изображенную на рис. 4.2, и найдем длину ее дуги, расположенной в верхнем секторе правее вертикальной оси (то есть при $x_1 \geq 0$). Из первого уравнения (4.16) (заменяя обозначения координат x_0 и x_1 привычными y и x) имеем:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{с учетом } y > 0), \quad \text{откуда} \quad dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx. \quad (4.35)$$

Разложим радиус-вектор точек окружности по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$: $\mathbf{R} = y\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1$. Отсюда, в силу постоянства базиса,

$$d\mathbf{R} = dy\mathbf{e}_0 + dx\mathbf{e}_1. \quad (4.36)$$

Известно, что дифференциал радиуса-вектора точек гладкой кривой направлен по касательной к ней, поэтому вектор $d\mathbf{R}$ касателен к окружности. Значит, дифференциал длины дуги окружности dl примерно равен $|d\mathbf{R}|$ (при малом $|d\mathbf{R}|$). На основании данного факта и зависимостей (4.14), (4.35) и (4.36), находим:

$$\begin{aligned} dl \approx |d\mathbf{R}| &= \sqrt{|d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}|} = \sqrt{|(dy)^2 - (dx)^2|} = \sqrt{(dx)^2 - (dy)^2} = \\ &= dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{при } dx > 0), \end{aligned}$$

где учтено, что из (4.35) следует неравенство $(dy)^2 < (dx)^2$. Длину участка дуги, заключенного между точками с абсциссами 0 и x (при

$x > 0$), вычислим интегрированием:

$$l = \int_0^x dl = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| \Big|_0^x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (4.37)$$

Координата x точек рассматриваемой дуги может принимать любые значения вплоть до бесконечности, поэтому из (4.37) вытекает, что дуга имеет бесконечную длину. Вследствие симметричности окружности, такую же длину имеет дуга, которая находится на рис. 4.2 в верхнем секторе левее вертикальной оси. Значит, длина всей части окружности, расположенной в верхнем секторе, бесконечна. Такова же, очевидно, длина той части окружности, которая находится в нижнем секторе. Следовательно, вся окружность, описываемая первым уравнением (4.16), имеет бесконечную длину. Понятно, что такую же длину имеет окружность, задаваемая вторым уравнением (4.16). Мы рассмотрели окружности единичного радиуса. А так как из теоремы 4.6 вытекает, что длина окружности пропорциональна ее радиусу, то полученный результат относится к окружностям любого радиуса.

Таким образом, в псевдоевклидовой плоскости все окружности имеют бесконечную длину.

Из формул (4.20) следует, что в псевдоевклидовой плоскости базисные векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ поворачиваются при $\varphi > 0$ навстречу друг другу, а при $\varphi < 0$ удаляясь друг от друга (см. рис. 4.2). Поэтому векторы $-\mathbf{e}_0$ и $-\mathbf{e}_1$, противоположные к $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$, также поворачиваются при $\varphi > 0$ навстречу друг другу, а при $\varphi < 0$ удаляясь друг от друга. Отсюда и из формулы (4.31) вытекает с учетом бесконечности длин окружностей, что в каждом из четырех секторов угол φ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, при этом направления возрастания угла φ во всех секторах таковы, как показано контурными стрелками на рис. 4.3,б.

Обратим внимание на то, что знак угла φ и направление его возрастания зависят от выбора базиса. Например, если бы на рис. 4.3,б базисный вектор $\mathbf{e}_1$ был направлен в противоположную сторону (в сторону левого сектора), то во всех секторах знаки углов и направления их возрастания поменялись бы на противоположные. Отметим еще, что не вводятся понятия угла между изотропными векторами и угла между такими неизотропными векторами, которые имеют общее начало, но концы которых принадлежат разным секторам. Вместе с тем, условно принимается, что изотропный вектор образует бесконечный угол с любым неизотропным вектором, начало которого совпадает с началом изотропного вектора, а конец принадлежит сектору, примыкающему к изотропному вектору.

Вновь рассмотрим окружность единичного радиуса и ее дугу, которая находится в верхнем секторе справа вертикальной оси (см. рис. 4.2). Из формул (4.35) и (4.37) вытекает, что участок этой дуги, заключенный между точками с абсциссами 0 и x (при $x > 0$), имеет длину, равную

$$l = \ln(x + y). \quad (4.38)$$

Поскольку в данном случае $r = 1$ и $\varphi > 0$, то, по (4.31), $\varphi = l$. Вместе с (4.38) это дает:

$$\varphi = \ln(x + y).$$

Потенцируя, получаем:

$$x + y = e^\varphi. \quad (4.39)$$

Теперь рассмотрим дугу, находящуюся в том же секторе слева от вертикальной оси. Ее точкам соответствуют отрицательные значения координат φ и x . Для удобства, будем обозначать эти координаты со знаками минус: $-\varphi$ и $-x$, где $\varphi > 0$ и $x > 0$. Так как эта дуга задается тем же уравнением, что и дуга, находящаяся справа от вертикальной оси, то длина ее участка между точками с абсциссами $-x$ и 0 описывается выражением, аналогичным (4.37):

$$l = \int_{-x}^0 dl = \int_{-x}^0 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = -\ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln(-x + y),$$

где учтена зависимость (4.35). Поскольку в данном случае тоже выполняется равенство $\varphi = l$, то $\varphi = -\ln(-x + y)$ (заметим, что здесь $-\ln(-x + y) > 0$). Отсюда

$$-x + y = e^{-\varphi}. \quad (4.40)$$

С помощью (4.39), (4.40) и определения гиперболических функций $\text{sh } \varphi$ и $\text{ch } \varphi$ находим:

$$x = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} = \text{sh } \varphi; \quad y = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} = \text{ch } \varphi. \quad (4.41)$$

Вектор $\mathbf{e}'_0$ играет роль радиуса-вектора точек обеих дуг (см. рис. 4.2). Разложим его по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$: $\mathbf{e}'_0 = y\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1$. Подставляя сюда значения (4.41) координат x и y , получаем:

$$\mathbf{e}'_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0 + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_1.$$

Это выражение совпадает с первой из формул (4.20), что еще раз показывает, что при оперировании с углами в псевдоевклидовой плоскости следует использовать гиперболические функции, а не тригонометрические, как в случае собственно евклидовой плоскости.

В. Вращение векторов

Рассмотрим *вращение* векторов, то есть поворот векторов на угол φ , который меняется с течением времени: $\varphi = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывная функция времени t . Далее будем считать, что функция $\varphi(t)$ является непрерывно дифференцируемой на некотором интервале времени.

Начнем с собственно евклидовой плоскости. Зададим в ней ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в центре поворота O . Пусть $\mathbf{u}_0$ — вектор в плоскости, имеющий начало в O , длину a и образующий с базисным вектором $\mathbf{e}_1$ угол φ_0 (угол отсчитывается от $\mathbf{e}_1$ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$). Тогда вектор $\mathbf{u}_0$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{u}_0 = a \cos \varphi_0 \mathbf{e}_1 + a \sin \varphi_0 \mathbf{e}_2, \quad (4.42)$$

где $a \cos \varphi_0$ и $a \sin \varphi_0$ — координаты вектора $\mathbf{u}_0$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; $a > 0$. Назовем этот вектор начальным. Пусть ему соответствует момент времени t_0 , который тоже будем называть начальным.

Вращение вектора в плоскости может быть описано любым из следующих способов. Во-первых, можно заменить в формуле (4.42) фиксированный угол φ_0 углом $\varphi(t) + \varphi_0$, зависящим от времени t :

$$\mathbf{u}(t) = a \cos(\varphi(t) + \varphi_0) \mathbf{e}_1 + a \sin(\varphi(t) + \varphi_0) \mathbf{e}_2, \quad (4.43)$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = 0$ (это условие обеспечивает равенство $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$). Вектор $\mathbf{u}(t)$ повернут относительно начального вектора $\mathbf{u}_0$ на угол $\varphi(t)$ (это наглядно видно из сравнения выражений (4.42) и (4.43), а также может быть строго доказано с использованием формулы (3.2)).

Во-вторых, можно ввести с помощью формул (4.2) вращающийся базис $\{\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t)\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1(t) &= \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{e}'_2(t) &= -\sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (4.44)$$

и принять, что в любой момент t вектор $\mathbf{u}(t)$ имеет в этом базисе вид такой же, какой вектор $\mathbf{u}_0$ имеет в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (см. (4.42)):

$$\mathbf{u}(t) = a \cos \varphi_0 \mathbf{e}'_1(t) + a \sin \varphi_0 \mathbf{e}'_2(t); \quad (4.45)$$

в выражениях (4.44) функция $\varphi(t)$ та же, что в (4.43). Очевидно, что $\{\mathbf{e}'_1(t_0), \mathbf{e}'_2(t_0)\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$.

В-третьих, можно придать зависимость от времени тензору A , поворачивающему векторы в собственно евклидовой плоскости. Для этого нужно заменить в первом из выражений (4.26) фиксированную величину φ функцией $\varphi(t)$ (той же, что выше):

$$A(t) = \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2; \quad (4.46)$$

функция $\varphi(t)$, напомним, удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = 0$. Понятно, что тензор A остается ортогональным при такой замене.

Вращение вектора описывается в этом случае законом

$$\mathbf{u}(t) = A(t) \cdot \mathbf{u}_0, \quad (4.47)$$

где $\mathbf{u}_0$ — начальный вектор вида (4.42). Из (4.46) и (4.47) вытекает, что $A(t_0) = I$ и $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ ($I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2$ — единичный тензор в собственно евклидовой плоскости; см. (4.9)).

Нетрудно убедиться в том, что формулы (4.43), (4.45) и (4.47) определяют один и тот же закон вращения вектора, поэтому все три способа описания вращения эквивалентны. В силу произвольности вектора $\mathbf{u}_0$, эти формулы описывают вращение всех векторов, принадлежащих плоскости.

Следует отметить, что термин «вращение» имеет здесь смысл, который отличается от смысла, придаваемого ему в физическом опыте. Там термин «вращение тела» отражает тот факт, что некоторые прямые в теле меняют свои направления с течением времени. В геометрии же никакие векторы не меняют свои направления. А термин «вращение вектора» фактически означает лишь задание непрерывного отображения интервала времени (то есть некоторого отрезка числовой оси $[t_1, t_2]$) в пространство векторов. При этом векторы, являющиеся образами точек интервала $[t_1, t_2]$, трактуются как один вектор, занимающий последовательно места этих векторов. Мы будем придерживаться этой трактовки.

Найдем производную функции $\mathbf{u}(t)$ по времени. Будем обозначать оператор d/dt точкой над символом. Величину $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ назовем *угловой скоростью* вращения вектора. В дальнейшем аргумент t при

угловой скорости и других функциях зачастую будем опускать. Дифференцируя по t левую и правую части любого из выражений (4.43), (4.45) или (4.47), получаем:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -a\omega \sin(\varphi(t) + \varphi_0)\mathbf{e}_1 + a\omega \cos(\varphi(t) + \varphi_0)\mathbf{e}_2. \quad (4.48)$$

Из (4.1), (4.43) и (4.48) вытекают равенства

$$|\mathbf{u}| = a; \quad |\dot{\mathbf{u}}| = a|\omega|; \quad \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.49)$$

выполняющиеся при всех t . Последнее равенство означает, что векторы $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ взаимно ортогональны.

Отметим, что ортогональность векторов $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ является следствием постоянства длины вектора $\mathbf{u}$. Действительно, из определения длины вектора следует $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = a^2$. Дифференцируя крайние части этого выражения по t , имеем: $\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$, откуда $\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$, то есть векторы $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ ортогональны.

Поскольку начало вектора $\mathbf{u}$ фиксировано, то производная $\dot{\mathbf{u}}$ представляет собой скорость конца вектора $\mathbf{u}$. Из равенств (4.49) вытекает хорошо известный в механике факт, что если вектор лежит в плоскости и вращается в ней вокруг своего начала, то скорость конца вектора направлена перпендикулярно вектору и равна по модулю произведению длины вектора на модуль угловой скорости вращения.

Нас будут интересовать тензоры (операторы), которые связывают производную вектора с самим вектором в двух его состояниях — в начальный момент t_0 и в текущий момент t .

Из (4.46) и (4.47) получаем:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{A}(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad (4.50)$$

$$\dot{A}(t) = \omega [-\sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2], \quad (4.51)$$

где, напомним, $\omega = \dot{\varphi}$. Тензор $\dot{A}$ связывает $\dot{\mathbf{u}}$ с начальным вектором $\mathbf{u}_0$.

Пусть Ω — тензор, связывающий $\dot{\mathbf{u}}$ с текущим значением вектора $\mathbf{u}$:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Omega(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.52)$$

На основании (4.47) и (4.52) можем записать:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Omega(t) \cdot \mathbf{u}(t) = \Omega(t) \cdot (A(t) \cdot \mathbf{u}_0) = (\Omega(t) \cdot A(t)) \cdot \mathbf{u}_0, \quad (4.53)$$

где использована ассоциативность операции скалярного умножения (см. (2.5)).

Из равенства левых частей выражений (4.50) и (4.53) вытекает равенство их правых частей: $(\Omega \cdot A) \cdot \mathbf{u}_0 = \dot{A} \cdot \mathbf{u}_0$, поэтому $(\Omega \cdot A - \dot{A}) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Отсюда, благодаря произвольности вектора $\mathbf{u}_0$ и невырожденности операции скалярного умножения (см. (2.8)), имеем: $\Omega \cdot A - \dot{A} = \hat{0}$, то есть $\Omega \cdot A = \dot{A}$. Значит,

$$\Omega = \dot{A} \cdot A^{-1} = \dot{A} \cdot A^*, \quad (4.54)$$

где применено равенство $A^{-1} = A^*$ (вытекающее из ортогональности тензора A). Выражение (4.54) выполняется при любых t .

Подставим в (4.54) значение (4.51) тензора $\dot{A}$ и значение тензора A^* , получающееся транспонированием правой части равенства (4.46). Применяя правило скалярного умножения тензоров (см. разд. 2), находим:

$$\Omega(t) = \omega(t)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2). \quad (4.55)$$

Отсюда $\Omega^* = -\Omega$, поэтому Ω — антисимметричный тензор (бивектор). В связи с тем, что тензор Ω пропорционален угловой скорости ω , будем называть его *тензором угловой скорости*. Тензор Ω и угловая скорость $\omega (= \dot{\varphi})$ имеют одинаковую размерность $(\text{время})^{-1}$ (при безразмерной величине φ).

Формула (4.55) выражает текущее значение тензора Ω через векторы исходного (неподвижного) базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Однако из (4.44) вытекает, что $\mathbf{e}'_2(t)\mathbf{e}'_1(t) - \mathbf{e}'_1(t)\mathbf{e}'_2(t) = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ при любом t , поэтому в (4.55) можно заменить векторы базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ векторами вращающегося базиса $\{\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t)\}$.

Тензор Ω , напомним, связывает производную $\dot{\mathbf{u}}$ с вектором $\mathbf{u}$ с помощью формулы (4.52). Повторим эту формулу:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Omega(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.56)$$

Последняя из зависимостей (4.49) и формула (4.56) приводят к равенству $\mathbf{u} \cdot \Omega \cdot \mathbf{u} = 0$. Поскольку здесь вектор $\mathbf{u}$ может быть произвольным, то из этого равенства, по теореме 7.1 (приведенной в разд. 7 настоящей главы), также следует антисимметричность тензора Ω .

Определение (3.2) угла между векторами включает в себя условие $\varphi \in [0, \pi]$. Однако при описании вращения векторов допускаются любые значения угла $\varphi(t)$ от $-\infty$ до $+\infty$ (в этом случае вектор возвращается в начальное положение после каждого поворота на угол 2π , что непосредственно вытекает из (4.42) и (4.43)). Вектор вращается при $\omega > 0$ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, а при $\omega < 0$ — в противоположном направлении.

Из (4.54) и (4.55) следует антисимметричность тензора $\dot{A} \cdot A^*$. Отметим, что тензор $\dot{A} \cdot A^*$ является антисимметричным для любого ортогонального тензора A , а не только для тензора A вида (4.46).

В самом деле, по определению обратного тензора, $A \cdot A^{-1} = I$. Так как тензор A ортогональный, то $A^{-1} = A^*$, поэтому $A \cdot A^* = I$. Дифференцируя обе части этого равенства по t , имеем: $\dot{A} \cdot A^* + A \cdot \dot{A}^* = \hat{0}$, откуда $A \cdot \dot{A}^* = -\dot{A} \cdot A^*$. Данное равенство и выражение $(\dot{A} \cdot A^*)^* = (A^*)^* \cdot (\dot{A})^* = A \cdot \dot{A}^*$ (основанное на формулах (2.10) и перестановочности операций дифференцирования и транспонирования) дают: $(\dot{A} \cdot A^*)^* = -\dot{A} \cdot A^*$, что подтверждает антисимметричность тензора $\dot{A} \cdot A^*$.

Теперь рассмотрим плоскость сигнатуры $(- -)$. Напомним, что она отличается от собственно евклидовой плоскости только знаками скалярных произведений векторов. Введем в ней ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; он удовлетворяет условиям

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1; \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (4.57)$$

В этой плоскости начальный вектор $\mathbf{u}_0$ и текущий вектор $\mathbf{u}$ задаются теми же формулами (4.42) и (4.43), что и в случае собственно евклидовой плоскости, а тензор поворота A_- , связывающий эти векторы, отличается только знаком от тензора A вида (4.46):

$$\mathbf{u}_0 = a \cos \varphi_0 \mathbf{e}_1 + a \sin \varphi_0 \mathbf{e}_2; \quad (4.58)$$

$$\mathbf{u}(t) = a \cos(\varphi(t) + \varphi_0) \mathbf{e}_1 + a \sin(\varphi(t) + \varphi_0) \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{u}(t) = A_-(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad (4.59)$$

$$A_-(t) = -\cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad (4.60)$$

где угол определяется формулой (3.3). Функция $\varphi(t)$, как и в случае собственно евклидовой плоскости, возрастает в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$ и удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = 0$ (благодаря этому условию, выполняются равенства $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ и $A_-(t_0) = I_-$, где $I_- = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2$ — единичный тензор в плоскости сигнатуры $(- -)$). Так как $A_- = -A$, то A_- , как и A , — ортогональный тензор.

Из (4.58) находим производную $\dot{\mathbf{u}}$:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -a\omega \sin(\varphi(t) + \varphi_0) \mathbf{e}_1 + a\omega \cos(\varphi(t) + \varphi_0) \mathbf{e}_2, \quad (4.61)$$

где $\omega = \dot{\varphi}$ — *угловая скорость* вращения вектора в рассматриваемой плоскости. Формула (4.61) совпадает с (4.48).

На основании (4.59) и (4.60) получаем:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{A}_-(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad (4.62)$$

$$\dot{A}_-(t) = \omega [\sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2]. \quad (4.63)$$

Формула (4.62) аналогична формуле (4.50). Из (4.51) и (4.63) видно, что $\dot{A}_- = -\dot{A}$. Тензор $\dot{A}_-$ связывает вектор $\dot{\mathbf{u}}$ с начальным вектором $\mathbf{u}_0$.

Введем тензор Ω_- , связывающий вектор $\dot{\mathbf{u}}$ с текущим вектором $\mathbf{u}$:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Omega_-(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.64)$$

Понятно, что $\Omega_- = -\Omega$, поэтому, согласно (4.55),

$$\Omega_-(t) = \omega(t)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \quad (4.65)$$

(справедливость этой формулы легко проверяется путем подстановки в (4.64) величин $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ и Ω_- из (4.58), (4.61), (4.65) и использования соотношений (4.57)). Тензор Ω_- антисимметричный. Будем называть его, как и Ω , *тензором угловой скорости*.

Рассмотрим псевдоевклидову плоскость. Она имеет тип $(1, 1)$ или, что то же самое, сигнатуру $(+ -)$. Вращение вектора в этой плоскости может быть описано способами, аналогичными тем, которыми было описано вращение в собственно евклидовой плоскости. А именно, можно принять, что угол между вектором и фиксированным начальным вектором зависит от времени (аналогично тому, как получена формула (4.43)). Можно ввести вращающийся базис и принять, что вектор имеет в нем вид такой же, какой начальный вектор имеет в исходном базисе (подобно тому, как получена формула (4.45)). И, наконец, можно сделать зависимым от времени тензор B , поворачивающий векторы в псевдоевклидовой плоскости. Воспользуемся последним способом.

Примем, что в выражении (4.17), определяющем тензор B , величина φ зависит от времени t :

$$B(t) = \text{ch } \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \text{sh } \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \text{sh } \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \text{ch } \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad (4.66)$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = 0$ (t_0 — начальный момент времени); $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ — ортонормированный базис, подчиняющийся соотношениям (4.14). Очевидно, что тензор B остается ортогональным при таком преобразовании и что $B(t_0) = I$ (где $I = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1$ — единичный тензор в псевдоевклидовой плоскости; см. (4.22)).

Вращение вектора $\mathbf{u}$ задается в данном случае законом

$$\mathbf{u}(t) = B(t) \cdot \mathbf{u}_0, \quad (4.67)$$

где $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t_0)$ — начальный вектор.

Из (4.66) и (4.67) находим:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{B}(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad (4.68)$$

$$\dot{B}(t) = \psi [\operatorname{sh} \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{ch} \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1], \quad (4.69)$$

где $\psi = \dot{\varphi}$. Тензор $\dot{B}$ связывает $\dot{\mathbf{u}}$ с начальным вектором $\mathbf{u}_0$.

Пусть Ψ — тензор, связывающий $\dot{\mathbf{u}}$ с текущим вектором $\mathbf{u}$:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.70)$$

С помощью (4.67) и (4.70) получаем:

$$\dot{\mathbf{u}} = \Psi \cdot \mathbf{u} = \Psi \cdot (B \cdot \mathbf{u}_0) = (\Psi \cdot B) \cdot \mathbf{u}_0, \quad (4.71)$$

где использована ассоциативность скалярного умножения (см. (2.5)).

На основании (4.68) и (4.71) можем записать: $(\Psi \cdot B) \cdot \mathbf{u}_0 = \dot{B} \cdot \mathbf{u}_0$. Отсюда $(\Psi \cdot B - \dot{B}) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, что с учетом произвольности вектора $\mathbf{u}_0$ дает: $\Psi \cdot B - \dot{B} = \hat{0}$. Значит, $\Psi \cdot B = \dot{B}$, поэтому

$$\Psi = \dot{B} \cdot B^{-1} = \dot{B} \cdot B^*, \quad (4.72)$$

где использовано равенство $B^{-1} = B^*$ (являющееся следствием ортогональности тензора B). Выражение (4.72) справедливо при всех t .

Подставим в (4.72) значение (4.69) тензора $\dot{B}$ и значение тензора B^* , получающееся путем транспонирования правой части равенства (4.66). Вычисляя с помощью соотношений (4.14) скалярное произведение тензоров, находим:

$$\Psi(t) = \psi(t)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1). \quad (4.73)$$

Из (4.73) следует, что $\Psi^* = -\Psi$, поэтому Ψ — антисимметричный тензор (бивектор). Тензор Ψ и величина $\psi (= \dot{\varphi})$ имеют размерность $(\text{время})^{-1}$. В силу специфики гиперболических поворотов (в псевдоевклидовой плоскости), названия «тензор угловой скорости» и «угловая скорость» по отношению к величинам Ψ и ψ не применяются.

В формуле (4.73) векторы исходного (неподвижного) базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ могут быть заменены векторами вращающегося базиса $\{\mathbf{e}'_0(t), \mathbf{e}'_1(t)\}$, так как из (4.20) при векторах $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$, зависящих от времени t , имеем: $\mathbf{e}'_1(t)\mathbf{e}'_0(t) - \mathbf{e}'_0(t)\mathbf{e}'_1(t) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ при любом t .

Итак, вращение векторов в плоскостях осуществляют следующие тензоры.

В собственно евклидовой плоскости, имеющей сигнатуру $(++)$, это тензоры, задаваемые выражениями (4.46), (4.51) и (4.55):

$$\begin{aligned} A(t) &= \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2; \\ \dot{A}(t) &= \omega(t) [-\sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2]; \\ \Omega(t) &= \omega(t) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2); \end{aligned} \quad (4.74)$$

эти тензоры действуют на векторы в соответствии с законами (4.47), (4.50) и (4.56):

$$\mathbf{u}(t) = A(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{A}(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \Omega(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.75)$$

В плоскости сигнатуры $(--)$ это тензоры (4.60), (4.63) и (4.65), отличающиеся только знаками от тензоров (4.74):

$$A_-(t) = -A(t); \quad \dot{A}_-(t) = -\dot{A}(t); \quad \Omega_-(t) = -\Omega(t); \quad (4.76)$$

их действие на векторы определяется законами (4.59), (4.62) и (4.64), аналогичными законам (4.75):

$$\mathbf{u}(t) = A_-(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{A}_-(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \Omega_-(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.77)$$

В псевдоевклидовой плоскости, имеющей сигнатуру $(+-)$, вращение векторов осуществляют тензоры (4.66), (4.69) и (4.73):

$$\begin{aligned} B(t) &= \operatorname{ch} \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + \operatorname{sh} \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1; \\ \dot{B}(t) &= \psi(t) [\operatorname{sh} \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi(t) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + \operatorname{ch} \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1]; \\ \Psi(t) &= \psi(t) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1), \end{aligned} \quad (4.78)$$

действующие в соответствии с законами (4.67), (4.68) и (4.70):

$$\mathbf{u}(t) = B(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{B}(t) \cdot \mathbf{u}_0; \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.79)$$

Единичные тензоры в плоскостях с сигнатурами $(++)$, $(--)$ и $(+-)$ имеют вид соответственно

$$I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2; \quad I_- = -I = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2; \quad I = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1. \quad (4.80)$$

В формулах (4.74) – (4.80) обозначено: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ – ортонормированные базисы с началом в центре поворота, они удовлетворяют соотношениям (4.1), (4.14) и (4.57) в случаях плоскостей с сигнатурами $(++)$, $(+-)$ и $(--)$ соответственно; φ – угол поворота (в плоскостях с сигнатурами $(++)$ и $(--)$ угол отсчитывается от $\mathbf{e}_1$ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$; в плоскости сигнатуры $(+-)$ направление возрастания угла показано стрелками на рис. 4.3,б); t – время; точка над символом – оператор дифференцирования по t ; $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость (для плоскостей с сигнатурами $(++)$ и $(--)$); $\psi = \dot{\varphi}$ (для плоскости сигнатуры $(+-)$); $\mathbf{u}(t)$ – вектор в текущий момент времени t ; $\mathbf{u}_0$ – начальный вектор ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t_0)$); t_0 – начальный момент времени. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = 0$ и считается непрерывно дифференцируемой на рассматриваемом промежутке времени. Тензоры $\dot{A}$, $\dot{A}_-$, $\dot{B}$, Ω , Ω_- , Ψ и скаляры ω и ψ имеют размерность (время) $^{-1}$ (при безразмерной величине φ).

Тензоры A , A_- и B ортогональные. В моменты времени t_k , определяемые условием $\varphi(t_k) = 2\pi k$ (k – целое число), тензоры A и A_- совпадают с единичным тензором. Тензор B совпадает с единичным тензором только в начальный момент t_0 (единичный тензор свой для каждой плоскости). Тензоры Ω , Ω_- и Ψ антисимметричны (бивекторы). Тензоры $\dot{A}$, $\dot{A}_-$ и $\dot{B}$ не являются в общем случае ни ортогональными, ни симметричными, ни антисимметричными.

Г. Резюме

Рассмотрены плоскости сигнатур $(++)$, $(--)$ и $(+-)$. Предполагается, что плоскость неподвижна и не вложена ни в какое объемлющее пространство. Поворот точек плоскости вокруг центра O описывается как поворот векторов, имеющих начала в O и концы в этих точках. Угол поворота отсчитывается от векторов базиса, неподвижного относительно плоскости. Проанализированы поворот векторов на фиксированный угол и вращение векторов (то есть поворот на угол, непрерывно зависящий от времени). Тензоры, реализующие вращение векторов, и законы вращения задаются формулами (4.74) – (4.80). Эти тензоры единственные (в том смысле, что любые тензоры, вращающие векторы по тем же законам, совпадают с ними). Из теоремы 4.5 следует, что в этих формулах векторы указанного базиса могут быть заменены векторами любого ортонормированного базиса, который может быть получен путем поворота данного базиса.

Тензоры A , A_- и B называются *тензорами поворота*. Тензоры Ω и Ω_- называются *тензорами угловой скорости*. Преобразование векторов в псевдоевклидовой плоскости, производимое тензором B , именуется *гиперболическим поворотом* или *бустом*.

Термин «вращение вектора» фактически означает здесь, как и вообще в геометрии, не реальное изменение направления вектора, а лишь наличие непрерывного отображения некоторого интервала времени в пространство векторов. При этом векторы, являющиеся образами точек интервала, трактуются как один вектор, занимающий последовательно места этих векторов.

5. Пространство Минковского

Пространством Минковского называется четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство типа $(1, 3)$ (то есть сигнатуры $(+ - - -)$).

Мы будем обозначать пространство Минковского и ассоциированное с ним линейное (векторное) пространство одним символом M и будем называть векторы ассоциированного пространства векторами пространства Минковского. (Определения линейного и псевдоевклидова пространств и определение типа пространства приведены в разд. 1 и 3 настоящей главы.)

Иногда пространством Минковского называют пространство сигнатуры $(-+++)$. Это пространство имеет геометрические свойства такие же, как пространство сигнатуры $(+---)$ (потому что эти пространства переводятся друг в друга путем изменения знаков скалярных произведений векторов). В ряде случаев пространством Минковского называют также двумерное и трехмерное вещественные псевдоевклидовы пространства.

Напомним некоторые обозначения и определения.

Векторы обозначаются полужирным шрифтом (иногда — стрелкой над символом, например, $\overrightarrow{AB}$ — вектор, имеющий начало в точке A и конец в точке B). Операция скалярного умножения векторов обозначается точкой, например, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in R$; R — множество вещественных чисел).

Скалярным квадратом вектора $\mathbf{a}$ называется скалярное произведение вектора на себя, то есть вещественное число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$.

Длина (модуль) вектора $\mathbf{a}$ определяется формулой (1.1), это есть вещественное неотрицательное число

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|}. \quad (5.1)$$

Векторы, имеющие единичную длину, именуются *единичными векторами* или *ортами*. Иногда вектор $\mathbf{a}$ называют *единичным*, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$, и *мнимоединичным*, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1$. Таким образом, термин «единичный вектор» может относиться, в зависимости от контекста, либо ко всем векторам единичной длины, либо только к тем из них, скалярный квадрат которых равен $+1$.

Расстояние между двумя точками пространства Минковского определяется как длина вектора, соединяющего эти точки, то есть если A и B — точки пространства M , то расстояние между ними представляет собой, согласно (5.1), неотрицательное число

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}|}. \quad (5.2)$$

Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортогональными* (иногда *взаимно ортогональными*), если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, и называются *коллинеарными* или *параллельными*, если $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$, где k — вещественное число.

Два подпространства пространства M называются *ортогональными*, если каждый вектор одного из них ортогонален всем векторам другого. Два подпространства одинаковой размерности называются *параллельными*, если они имеют общее ассоциированное векторное пространство. Параллельные подпространства могут быть совмещены друг с другом путем параллельного перемещения одного из них на вектор, соединяющий произвольную его точку с произвольной точкой другого подпространства.

Мы будем использовать значки $\perp$ и $\parallel$ для обозначения соответственно ортогональности и параллельности векторов, прямолинейных отрезков и подпространств. Например, запись $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ означает ортогональность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а запись $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$ — параллельность векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$.

Вводимые далее термины «*временеподобный*», «*пространственноподобный*» и «*световой*» заимствованы из теории относительности. При рассмотрении геометрических свойств пространства Минковского нужно понимать эти термины просто как абстрактные названия (без связи с понятиями времени, пространства и света, рассматриваемыми в физике).

Все ненулевые векторы пространства Минковского подразделяются на *временеподобные*, *пространственноподобные* и *изотропные*. Первые имеют положительные скалярные квадраты, вторые — отрицательные, третьи — нулевые.

Иногда принимают, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ относится к каждому из этих типов векторов. Удобство этого допущения состоит в том, что в этом случае из условия принадлежности вектора $\mathbf{a}$ какому-либо из указанных типов следует, что вектор $k\mathbf{a}$ принадлежит тому же типу векторов при любом $k \in R$, в том числе при $k = 0$. Мы будем пользоваться в ряде случаев этим допущением, причем без явного упоминания его, если заведомо очевидно, что обсуждаемое утверждение выполняется для нулевого вектора. Бывает удобно считать также, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ ортогонален всем векторам (так как $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$ при всех $\mathbf{a}$). Этим допущением мы фактически уже воспользовались, когда в приведенном выше определении ортогональности подпространств не стали указывать, что векторы должны быть ненулевыми.

Изотропные векторы имеют нулевую длину, и каждый изотропный вектор ортогонален сам себе.

Действительно, пусть $\mathbf{a}$ — изотропный вектор. Это означает, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$. Отсюда, по определению длины вектора и по определению ортогональности векторов, имеем: $|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|} = 0$ и $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$, что доказывает высказанное утверждение.

Известно, что в пространстве M , как и в любом псевдоевклидовом пространстве, изотропные векторы существуют. Примеры изотропных векторов в псевдоевклидовой плоскости имеются в разд. 4.

Напомним определения гладкой и кусочно-гладкой линий. Непрерывная линия называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль линии (за исключением линии, имеющей точку возврата, рис. 5.1). *Кусочно-гладкой* называется непрерывная линия, которая состоит из гладких звеньев и не является гладкой в точках раздела звеньев. Эти точки именуются *точками излома* линии. Предполагается, что любой ограниченный участок линии содержит не более конечного числа точек излома.

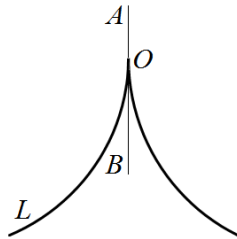


Рис. 5.1. Линия, имеющая точку возврата. Касательная AB к линии L переходит через точку возврата O непрерывным образом, однако эта линия считается не гладкой, а кусочно-гладкой.

Гладкая или кусочно-гладкая линия в пространстве Минковского называется *времениподобной*, *пространственноподобной* или *изотропной*, если все касательные векторы к ней относятся к соответствующе-

му типу (если линия имеет граничные точки или точки излома, то предельные значения касательных векторов в этих точках должны относиться к этому же типу). В частности, прямая и прямолинейный отрезок имеют тот же тип, что и их направляющие векторы.

Гиперповерхностью в четырехмерном пространстве M называется любое трехмерное гладкое или кусочно гладкое подмножество. Частным случаем гиперповерхности является *гиперплоскость*. Она представляет собой трехмерное подпространство пространства M .

Важнейшим свойством пространства Минковского, не имеющим аналога в собственно евклидовом пространстве, является наличие объектов называемых световыми конусами.

Световым или *изотропным конусом* с вершиной в заданной точке называется множество всех точек пространства Минковского, расстояние от которых до данной точки равно нулю. Согласно формуле (5.2), определяющей расстояние между точками, световой конус задается уравнением

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек конуса относительно его вершины.

Из уравнения (5.3) вытекает, что все векторы, соединяющие вершину светового конуса с точками конуса, являются изотропными. Выполнение уравнения (5.3) для вектора $\mathbf{R}$ влечет выполнение аналогичного уравнения для вектора $k\mathbf{R}$ при любом вещественном числе k . (Действительно, в силу (5.3), $k\mathbf{R} \cdot k\mathbf{R} = k^2\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$.) Из этого следует, что световой конус образован изотропными прямыми, проходящими через его вершину. Световой конус, как известно, представляет собой трехмерную гиперповерхность в четырехмерном пространстве M . Он является аналогом круговой конической поверхности в трехмерном собственно евклидовом пространстве (рис. 5.2). Две части светового конуса, расположенные по разные стороны от его вершины, называются *лобами* конуса.

Каждой точке пространства Минковского отвечает свой световой конус с вершиной в этой точке. Вследствие однородности пространства Минковского, все световые конусы в нем одинаковы. Любые два световых конуса могут быть совмещены друг с другом путем параллельного перемещения одного из них на вектор, соединяющий их вершины.

Световой конус разбивает пространство Минковского на три подмножества: сам конус, внутренность конуса и его внешнюю область. *Внутренность* светового конуса есть, по определению, множество всех точек пространства M , удовлетворяющих условию

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} > 0, \quad (5.4)$$

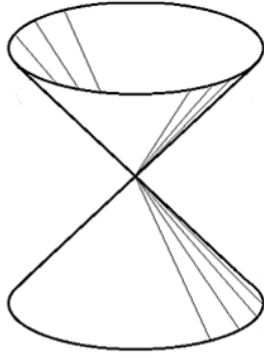


Рис. 5.2. Круговая коническая поверхность в трехмерном собственном евклидовом пространстве.

Поверхность неограниченно продолжается вверх и вниз.

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек относительно вершины конуса. Внутренность конуса — несвязное множество (поэтому она не является областью); внутренность конуса состоит из двух частей, являющихся внутренними областями пол конуса.

Внешняя область светового конуса определяется как множество всех точек, радиусы-векторы $\mathbf{R}$ которых подчиняются неравенству

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} < 0. \quad (5.5)$$

Внешняя область конуса — связное множество.

Отметим, что в случае двумерного псевдоевклидова пространства световой конус вырождается в две пересекающиеся изотропные прямые (см. рис. 4.2 на с. 45). В этом случае множество точек, удовлетворяющих неравенству (5.5), — несвязное множество.

Напомним, что тензор (оператор), действующий на векторы линейного пространства в соответствии с первым из законов (2.18), называется *ортогональным*, если он не меняет скалярные произведения векторов, то есть удовлетворяет условию (2.20). Совокупность всех таких тензоров образует группу (определение группы приведено на с. 26).

В случае пространства Минковского группа ортогональных тензоров (операторов) называется *группой Лоренца* (иногда *общей группой Лоренца*). Известно, что группа Лоренца состоит из четырех непересекающихся связных компонент. Та из них, которая содержит единичный тензор (тождественный оператор), сама является группой. Обычно ее называют группой ограниченных преобразований Лоренца. Мы будем называть ее *ограниченной группой Лоренца*. В ряде случаев именно эту группу именуют группой Лоренца.

Принимая во внимание, что ортогональные тензоры не меняют скалярные произведения векторов и что уравнение (5.3), определяющее световой конус, содержит только скалярное произведение векторов, заключаем, что *световой конус инвариантен (симметричен) относительно преобразований, осуществляемых тензорами группы Лоренца*, или, как принято говорить, *лоренц-инвариантен*. Отметим, что в число элементов симметрии светового конуса входит инверсия относительно вершины (так как уравнение (5.3) остается верным при замене вектора $\mathbf{R}$ на $-\mathbf{R}$). При инверсии светового конуса его полюсы переходят друг в друга. Это означает, что их геометрические свойства одинаковы.

Пространство Минковского M имеет тип $(1, 3)$, поэтому оно может быть представлено в виде прямой суммы взаимно ортогональных одномерного и трехмерного подпространств, имеющих типы $(1, 0)$ и $(0, 3)$ соответственно (в первом из этих подпространств все ненулевые векторы времениподобные, во втором — пространственноподобные). Эти подпространства могут быть выбраны не единственным способом. Подпространства типа $(1, 0)$ являются времениподобными прямыми. Подпространства типа $(0, 3)$ представляют собой трехмерные гиперплоскости. Эти гиперплоскости называются *пространственноподобными* в соответствии с типом принадлежащих им векторов.

Благодаря тому, что пространства типов $(0, 3)$ и $(3, 0)$ различаются только знаками скалярных произведений векторов, они имеют одинаковые геометрические свойства, поэтому пространственноподобная гиперплоскость фактически является трехмерным собственно евклидовым пространством.

Теорема 5.1. *Через каждую точку пространства Минковского M проходит бесконечное множество времениподобных прямых и бесконечное множество трехмерных пространственноподобных гиперплоскостей. Каждой времениподобной прямой соответствует единственная ортогональная к ней пространственноподобная гиперплоскость, проходящая через произвольно заданную точку пространства M , и, наоборот, каждой пространственноподобной гиперплоскости отвечает единственная ортогональная к ней времениподобная прямая, проходящая через заданную точку пространства M .*

Доказательство. Пространство M имеет тип $(1, 3)$, поэтому в нем имеется по крайней мере один ненулевой времениподобный вектор $\mathbf{a}$ и имеется мнимоединичный вектор $\mathbf{e}$, ортогональный $\mathbf{a}$. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ линейно независимы (ибо в противном случае они были бы коллинеарными и, значит, их скалярные квадраты имели бы один знак вопреки тому, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ и $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} < 0$).

Пусть a — длина вектора $\mathbf{a}$ ($a = \sqrt{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|}$). Так как вектор $\mathbf{a}$ ненулевой и не изотропный, то $a > 0$. Следовательно, числовой интервал $(0, a) \neq \emptyset$. Возьмем некоторое число $\varepsilon \in (0, a)$. Образует вектор $\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}$ и найдем его скалярный квадрат:

$$(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\varepsilon \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \varepsilon^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}.$$

Из свойств векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ имеем: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0$, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = -1$. Подставляя эти значения скалярных произведений в выписанное выше равенство и учитывая, что $0 < \varepsilon < a$, находим:

$$(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) = a^2 - \varepsilon^2 > 0.$$

Отсюда вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0, a)$ вектор $\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}$ времениподобный.

Рассмотрим два вектора $\mathbf{a} + \mu \mathbf{e}$ и $\mathbf{a} + \nu \mathbf{e}$, где μ и ν — произвольные числа. Докажем, что при $\mu \neq \nu$ они не коллинеарны.

Допустим, что указанные векторы коллинеарны. Это означает, что существует число k , для которого $\mathbf{a} + \mu \mathbf{e} = k(\mathbf{a} + \nu \mathbf{e})$, что эквивалентно равенству $(1 - k)\mathbf{a} = (k\nu - \mu)\mathbf{e}$. Так как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ линейно независимы, то это равенство выполняется в том и только том случае, когда коэффициенты при $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ — нули, то есть когда $k = 1$ и $k\nu - \mu = 0$, откуда $\mu = \nu$. Следовательно, если векторы $\mathbf{a} + \mu \mathbf{e}$ и $\mathbf{a} + \nu \mathbf{e}$ коллинеарны, то обязательно $\mu = \nu$. Поэтому действительно при $\mu \neq \nu$ векторы $\mathbf{a} + \mu \mathbf{e}$ и $\mathbf{a} + \nu \mathbf{e}$ не коллинеарны.

Пусть, как и ранее, $\varepsilon \in (0, a)$. Поскольку интервал $(0, a)$ содержит бесконечное множество чисел, то из доказанного следует, что имеется бесконечное множество векторов вида $\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}$, каждый из которых не коллинеарен ни одному другому из этих векторов. При этом, согласно ранее доказанному, все эти векторы являются времениподобными.

Из общих свойств линейных пространств вытекает, что вместе с каждым времениподобным вектором $\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}$ пространство M содержит векторы $k(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e})$ при любых вещественных k , причем при $k \neq 0$ все они времениподобные (действительно, из $(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) > 0$ следует $k(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot k(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) = k^2(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}) > 0$ при $k \neq 0$). Это означает, что пространство M содержит времениподобную прямую с направляющим вектором $\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}$. Так как существует бесконечное множество не коллинеарных времениподобных векторов такого вида, то имеется бесконечное множество не параллельных времениподобных прямых. В силу однородности пространства M , в качестве начала векторов может быть принята произвольная точка пространства. Значит,

через каждую точку пространства M проходит бесконечное множество времениподобных прямых, как утверждается в теореме.

Каждой времениподобной прямой может быть поставлена в соответствие ортогональная к ней трехмерная пространственноподобная гиперплоскость, которая в прямой сумме с данной прямой дает пространство M (местоположение этой гиперплоскости в M определено с точностью до параллельного перемещения). При этом не параллельным прямым соответствуют не параллельные гиперплоскости. А так как имеется бесконечное множество не параллельных времениподобных прямых, то имеется и бесконечное множество не параллельных между собой пространственноподобных гиперплоскостей. Посредством параллельного перемещения гиперплоскостей можно сделать так, чтобы все они проходили через произвольно заданную точку пространства. Таким образом, действительно через каждую точку пространства M проходит бесконечное множество трехмерных пространственноподобных гиперплоскостей.

Выберем некоторую времениподобную прямую и построим ортогональную к ней пространственноподобную гиперплоскость. Так как местоположение этой гиперплоскости в M определено с точностью до параллельного перемещения, то фиксированием точки, через которую проходит гиперплоскость, она задается единственным образом. Это означает, что действительно каждой времениподобной прямой соответствует единственная ортогональная к ней пространственноподобная гиперплоскость, проходящая через заданную точку пространства.

Если, наоборот, выбрать некоторую пространственноподобную гиперплоскость, то ей будет соответствовать некоторая ортогональная к ней времениподобная прямая, в прямой сумме с которой они образуют пространство M . Положение этой прямой тоже определено с точностью до параллельного перемещения и однозначно фиксируется выбором точки, через которую она проходит. Поэтому каждой пространственноподобной гиперплоскости отвечает единственная ортогональная к ней времениподобная прямая, проходящая через заданную точку пространства. Этим доказательство теоремы завершается. ■

Известно, что в четырехмерном пространстве Минковского M наибольшая размерность евклидова подпространства, проходящего через вершину светового конуса и в остальном принадлежащего внутренности конуса, равна единице, а наибольшая размерность евклидова подпространства, проходящего через вершину светового конуса и в остальном лежащего во внешней области конуса, равна трем. Из условий (5.4) и (5.5) следует, что указанными одномерным и трехмерным подпро-

странствами являются соответственно любая времениподобная прямая и любая пространственноподобная гиперплоскость, проходящие через вершину конуса.

Пространственноподобная гиперплоскость имеет тип $(0, 3)$ и, как отмечалось, обладает такими же геометрическими свойствами, как пространство типа $(3, 0)$. Поэтому, повторим, пространственноподобная гиперплоскость фактически является трехмерным собственно евклидовым пространством.

Сформулируем без доказательства следующую лемму.

Лемма. *Всякая времениподобная прямая и всякая пространственноподобная гиперплоскость пересекаются в некоторой точке, причем эта точка единственная.*

Теорема 5.2. *Сечение светового конуса трехмерной пространственноподобной гиперплоскостью Γ представляет собой двумерную сферу; это есть «обычная» сфера в трехмерном собственно евклидовом пространстве Γ (рис. 5.3). Центр сферы A находится в точке пересечения гиперплоскости Γ и времениподобной прямой L , проходящей через вершину O светового конуса и ортогональной гиперплоскости Γ . Радиус сферы равен расстоянию от вершины светового конуса O до центра сферы A . Если гиперплоскость проходит через вершину конуса, то сфера вырождается в точку.*

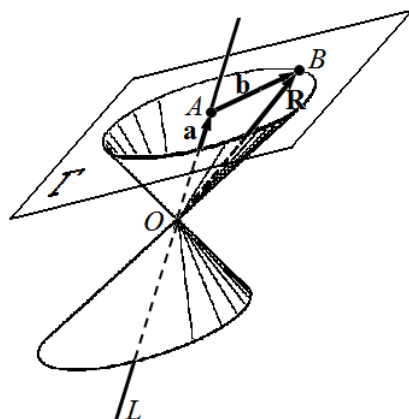


Рис. 5.3. Световой конус, пересекаемый пространственноподобной гиперплоскостью Γ , и времениподобная прямая L , ортогональная к Γ .

Гиперплоскость изображена прозрачной; гиперплоскость и световой конус даны с понижением размерности на единицу.

Доказательство. Рассмотрим световой конус и какую-либо пересекающую его пространственноподобную гиперплоскость Γ (см. рис. 5.3). Пусть L — времениподобная прямая, ортогональная Γ и проходящая через вершину конуса O (такая прямая существует и един-

ственна в силу теоремы 5.1). Из леммы следует, что L и Γ пересекаются в некоторой точке. Обозначим: $A = L \cap \Gamma$; $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$; $a = |\mathbf{a}|$ ($a \geq 0$). Отметим, что a равно расстоянию от вершины светового конуса O до точки A .

Возьмем в Γ произвольную точку B . Найдем условие ее принадлежности световому конусу.

Введем векторы $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{R} = \overrightarrow{OB}$. Очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Из $L \perp \Gamma$, $\mathbf{a} \in L$ и $\mathbf{b} \in \Gamma$ вытекает взаимная ортогональность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Отсюда получаем:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.$$

Из этого выражения следует, что вектор $\mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению светового конуса (5.3) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (5.6)$$

Так как $\mathbf{b}$ — пространственноподобный вектор и $\mathbf{a}$ — времениподобный вектор, то в соответствии с определением длины вектора (5.1) имеем: $|\mathbf{b}|^2 = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ и $a^2 = |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. Поэтому (5.6) эквивалентно равенству

$$|\mathbf{b}| = a. \quad (5.7)$$

На основании этих выкладок заключаем, что критерием принадлежности точки B световому конусу является выполнение равенства (5.7), в котором $|\mathbf{b}|$ есть расстояние между точками A и B (ибо $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$).

Таким образом, сечение светового конуса гиперплоскостью Γ состоит из всех тех и только тех точек гиперплоскости, которые находятся от точки A на одном и том же расстоянии a . Так как a равно расстоянию от вершины светового конуса до точки A , $A = L \cap \Gamma$ и гиперплоскость Γ является трехмерным собственно евклидовым пространством, то приходим к выводу, что сечение светового конуса гиперплоскостью Γ действительно представляет собой «обычную» двумерную сферу с указанными в теореме центром и радиусом. В частном случае, когда гиперплоскость проходит через вершину конуса O , точка A совпадает с O , поэтому радиус сферы, равный $|\overrightarrow{OA}|$, обращается в нуль и сфера вырождается в точку. ■

Следствие 1. Пусть L — времениподобная прямая, проходящая через вершину O светового конуса; A — некоторая точка прямой L . Тогда расстояние от точки A до светового конуса, измеренное вдоль любого направления, ортогонального L , одинаково и равно $|\overrightarrow{OA}|$.

Доказательство. Построим гиперплоскость Γ , проходящую через точку A и ортогональную прямой L . Согласно теореме 5.2, сечение светового конуса гиперплоскостью Γ представляет собой сферу радиуса $|\vec{OA}|$ с центром в A . Расстояние от точки A до светового конуса, о котором идет речь в следствии 1, измеряется вдоль направлений, принадлежащих Γ , поэтому оно равно радиусу сферы $|\vec{OA}|$. ■

Световой конус образован изотропными прямыми. В связи с этим может показаться, что любая линия на нем является изотропной. Формулируемое ниже следствие устанавливает, что это не так.

Следствие 2. *Не всякая линия на световом (изотропном) конусе является изотропной.*

Доказательство. Из теоремы 5.2 вытекает, что сечение светового конуса пространственноподобной гиперплоскостью представляет собой сферу. Любая линия на этой сфере принадлежит световому конусу. Вместе с тем, она является пространственноподобной, а не изотропной, так как содержится в пространственноподобной гиперплоскости, значит, следствие 2 верно. ■

Нам потребуется следующее определение.

Поворотом n -мерного евклидова пространства называется такое преобразование множества точек пространства, при котором, во-первых, сохраняются расстояния между всеми точками, во-вторых, остаются неподвижными: при $n = 2$ точка, при $n = 3$ точка или прямая, при $n = 4$ точка, прямая или плоскость (другие значения n нам не потребуются), и, в-третьих, переход от исходного состояния к конечному может быть реализован непрерывным образом с выполнением двух первых требований во всех промежуточных состояниях. Поворот точек пространства описывается как поворот векторов, имеющих начала в неподвижной точке и концы в рассматриваемых точках пространства. Поворот векторов осуществляется ортогональными тензорами (операторами). Углы поворота отсчитываются от векторов базиса, неподвижного относительно пространства.

Ортогональные тензоры могут осуществлять преобразования пространства, которые не являются поворотами, например, инверсию или отражение в $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости (эти преобразования не являются поворотами, так как не удовлетворяют третьему требованию, входящему в определение поворота).

Поворот обычно понимается как дискретное преобразование. Если же углы поворота являются непрерывными функциями времени, то такой поворот называется *вращением*. Повторим сказанное в разд. 4, что в геометрии термин «вращение вектора» означает не реальное измене-

ние направления вектора, а лишь наличие непрерывного отображения некоторого интервала времени в пространство векторов. При этом векторы, являющиеся образами точек интервала, трактуются как один вектор, занимающий последовательно места этих векторов.

Если при повороте или вращении пространства остается неподвижной только одна точка, то она называется *центром поворота* (*центром вращения*), если только одна прямая, то она именуется *осью поворота* (*осью вращения*). В этих случаях говорят, что поворот (вращение) происходит вокруг соответственно центра или оси. Будем говорить и применительно к случаю неподвижной плоскости, что поворот (вращение) происходит *вокруг плоскости*.

Пусть в евклидовом пространстве задан некоторый геометрический объект. Если существует такая прямая, что при любом повороте вокруг нее данный объект приходит в совмещение сам с собой, то эта прямая называется *осью симметрии* данного объекта или, точнее, *поворотной осью симметрии бесконечного порядка*.

Теорема 5.3. *Любая времениподобная прямая, проходящая через вершину светового конуса, является его поворотной осью симметрии бесконечного порядка.*

Доказательство. Рассмотрим световой конус и некоторую времениподобную прямую L , проходящую через вершину конуса (см. рис. 5.3).

Пусть B — произвольная точка светового конуса. Построим трехмерную пространственноподобную гиперплоскость Γ , проходящую через точку B и ортогональную прямой L (из теоремы 5.1 следует, что такая гиперплоскость существует и единственна). Сечение светового конуса гиперплоскостью Γ представляет собой, согласно теореме 5.2, двумерную сферу с центром в точке $A = L \cap \Gamma$. Обозначим эту сферу через S . Так как точка B принадлежит одновременно световому конусу и гиперплоскости Γ , то $B \in S$.

Произведем какой-либо поворот пространства вокруг прямой L . В силу ортогональности оператора, осуществляющего поворот, это преобразование сохраняет взаимную ортогональность прямой L и гиперплоскости Γ . А так как, по теореме 5.1, гиперплоскость Γ является единственной гиперплоскостью, ортогональной L и проходящей через точку A , то она преобразуется при повороте сама в себя. Отсюда, принимая во внимание, что сфера S лежит в Γ , что ее центр A является неподвижным (ибо $A \in L$) и что ортогональное преобразование сохраняет расстояния между точками, заключаем, что сфера S инвариантна относительно рассматриваемого поворота.

Из сказанного следует, что точка B , которая принадлежала сфере S до поворота, остается на сфере и после поворота. Вместе с тем, из теоремы 5.2 вытекает, что после поворота гиперплоскость Γ пересекает световой конус по той же сфере S , что и до поворота. Следовательно, точка B остается после поворота на световом конусе. А так как B — произвольная точка конуса, то это означает, что световой конус инвариантен относительно рассматриваемого преобразования. В силу произвольности поворота отсюда заключаем, что прямая L есть его поворотная ось симметрии бесконечного порядка. Учитывая, что L — произвольная времениподобная прямая, проходящая через вершину конуса, приходим к выводу, что любая такая прямая является осью симметрии светового конуса. ■

Согласно теореме 5.1, существует бесконечное множество времениподобных прямых, проходящих через вершину светового конуса. Из этого и из теоремы 5.3 вытекает, что *световой конус имеет бесконечное множество осей симметрии*. Этим он принципиально отличается от круговой конической поверхности в трехмерном собственно евклидовом пространстве, которая имеет всего одну поворотную ось симметрии бесконечного порядка.

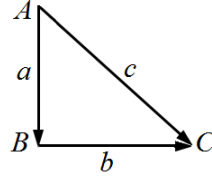
Тот факт, что каждая времениподобная прямая, проходящая через вершину светового конуса, является его осью симметрии, свидетельствует о том, что все такие прямые расположены по отношению к световому конусу одинаковым образом. Это — проявление того факта, что *среди времениподобных прямых нет выделенных, все они с точки зрения геометрии пространства Минковского равноправны*. Разумеется, точно так же равноправны между собой все пространственноподобные прямые; то же относится и к изотропным прямым.

Любая плоскость в пространстве Минковского, содержащая времениподобную прямую, имеет сингнатуру $(+ -)$, то есть является псевдоевклидовой. Геометрические свойства такой плоскости существенно отличаются от свойств собственно евклидовой плоскости, что демонстрируют следующие две теоремы.

Теорема 5.4. Теорема Пифагора (для псевдоевклидовой плоскости). Пусть в псевдоевклидовой плоскости задан треугольник ABC с времениподобным катетом AB длины a , пространственноподобным катетом BC длины b , ортогональным AB , и гипотенузой AC длины c (рис. 5.4). Тогда квадрат длины гипотенузы равен разности квадратов длин катетов:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (\text{при } a \geq b); \quad c^2 = b^2 - a^2 \quad (\text{при } b \geq a). \quad (5.8)$$

Рис. 5.4. Иллюстрация к теореме Пифагора.



Доказательство. Введем векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ (их длины равны a , b и c). Очевидно, что $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, поэтому

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = a^2 - b^2, \quad (5.9)$$

где учтено, что по условию теоремы $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ и что $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ и $b^2 = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ (так как $\mathbf{a}$ — времениподобный вектор и $\mathbf{b}$ — пространственноподобный вектор). В силу $c^2 = |\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}|$, из (5.9) вытекает (5.8). ■

Следствие. Вектор $\mathbf{c}$ является времениподобным, пространственноподобным или изотропным вектором тогда и только тогда, когда соответственно $a > b$, $a < b$ или $a = b$. (Это следует из (5.9).)

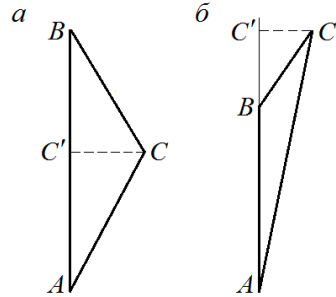
Теорема 5.5. Неравенство треугольника (для псевдоевклидовой плоскости). Пусть в псевдоевклидовой плоскости задан треугольник ABC , у которого все стороны времениподобные, а проекция вершины C на прямую, содержащую сторону AB , находится между вершинами A и B (проецирование ортогональное: $CC' \perp AB$, где C' — проекция точки C ; рис. 5.5,а). Тогда

$$|AB| \geq |AC| + |BC|, \quad (5.10)$$

причем равенство имеет место только при $C \in AB$, то есть когда треугольник вырождается в отрезок.

Рис. 5.5. Иллюстрация к теореме о неравенстве треугольника.

Теорема выполняется для случая а. Случай б, когда проекция C' точки C на прямую, содержащую сторону AB , находится вне AB , не рассматривается.



В связи с тем, что в привычном случае собственно евклидовой плоскости знак неравенства в выражении, аналогичном (5.10), противопо-

ложен указанному в (5.10), будем называть выражение (5.10) *обратным неравенством треугольника*.

Доказательство. Треугольники ACC' и BCC' на рис. 5.5,а удовлетворяют условиям теоремы 5.4, так как у них стороны AC , AC' , BC и BC' времениподобные, а общая сторона CC' пространственноподобная и ортогональна сторонам AC' и BC' (пространственноподобность стороны CC' вытекает из ее ортогональности времениподобному отрезку AB). Поэтому на основании (5.8) можем записать: $|AC|^2 = |AC'|^2 - |CC'|^2$ и $|BC|^2 = |BC'|^2 - |CC'|^2$. Значит, $|AC'|^2 \geq |AC|^2$ и $|BC'|^2 \geq |BC|^2$, причем равенства выполняются лишь в случае $|CC'| = 0$, то есть при $C \in AB$. Из этих неравенств, благодаря положительности входящих в них величин, следует $|AC'| \geq |AC|$ и $|BC'| \geq |BC|$. Отсюда, в силу $|AB| = |AC'| + |BC'|$, вытекает $|AB| \geq |AC| + |BC|$, что означает справедливость неравенства (5.10), при этом равенство выполняется только в случае $C \in AB$. ■

Поясним теоремы 5.4 и 5.5. В теореме 5.4 присутствие знака минус в формуле (5.8) обусловлено тем обстоятельством, что в треугольнике ABC на рис. 5.4 катет BC является пространственноподобным. Вектор, направленный вдоль такого катета, имеет отрицательный скалярный квадрат ($\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = -b^2 < 0$). По этой причине правая часть выражения (5.9) оказывается равной $a^2 - b^2$, а не $a^2 + b^2$, как было бы в случае собственно евклидовой плоскости. Если бы рассматриваемая плоскость была собственно евклидовой, то формула в теореме Пифагора имела бы обычный вид $c^2 = a^2 + b^2$.

В теореме 5.5 непривычный знак неравенства объясняется, как видно из ее доказательства, наличием знака минус в формуле (5.8). Если бы плоскость была собственно евклидовой, то теорема Пифагора имела бы обычный вид и знак неравенства в (5.10) был бы противоположным.

Вернемся от рассмотрения псевдоевклидовой плоскости к рассмотрению пространства Минковского.

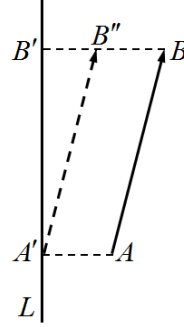
Теорема 5.6. *В пространстве Минковского длина проекции любого времениподобного вектора (или прямолинейного отрезка) на любую времениподобную прямую не меньше длины самого вектора (отрезка), причем равенство длин имеет место в том и только том случае, когда вектор (отрезок) параллелен прямой:*

$$|\overrightarrow{A'B'}| \geq |\overrightarrow{AB}|, \quad (5.11)$$

где A' и B' — ортогональные проекции концов вектора (отрезка) $\overrightarrow{AB}$ на прямую (рис. 5.6).

Рис. 5.6. Иллюстрация к теореме о длине проекции времениподобного вектора на времениподобную прямую.

Изображен случай, когда прямая L и вектор $\overrightarrow{AB}$ лежат в одной плоскости. Если L и $\overrightarrow{AB}$ не лежат в одной плоскости, то при параллельном перенесении вектора $\overrightarrow{AB}$ в положение $\overrightarrow{A'B''}$ точка B'' не принадлежит прямой, проходящей через точки B и B' .



Доказательство. Пусть имеются произвольные времениподобные прямая L и отрезок AB (см. рис. 5.6). Обозначим: A' и B' — ортогональные проекции точек A и B на прямую L .

Сначала рассмотрим случай, когда отрезок AB параллелен прямой L . Тогда, как известно, существует плоскость, содержащая L и AB . В ней противоположные стороны четырехугольника $ABB'A'$ попарно параллельны, поэтому они имеют одинаковые длины, в частности, $|A'B'| = |AB|$. Аналогичное равенство, очевидно, справедливо и для векторов. Следовательно, в данном случае теорема выполняется (со знаком равенства в (5.11)).

Теперь проанализируем ситуацию, когда отрезок AB не параллелен прямой L . Если конец A отрезка не лежит на прямой L , то перенесем отрезок параллельно самому себе так, чтобы точка A совпала с A' . При этом конец B окажется в некоторой точке B'' ($B'' \notin L$, потому что $AB \not\parallel L$), а длина сохранится: $|A'B''| = |AB|$. Поскольку при параллельном перенесении отрезка его концы перемещаются по параллельным траекториям, то $BB'' \parallel AA'$. Отсюда и из $AA' \perp L$ вытекает $BB'' \perp L$. Все отрезки, ортогональные прямой L и содержащие точку B , принадлежат пространственноподобной гиперплоскости Γ , проходящей через B и ортогональной прямой L . Поэтому из $BB'' \perp L$ и $BB' \perp L$ следует $B'' \in \Gamma$ и $B' \in \Gamma$. Значит, $B'B'' \in \Gamma$. Вместе с $\Gamma \perp L$ и $B' \in L$ это означает, что ортогональная проекция точки B'' на L совпадает с B' , откуда $B'B'' \perp A'B'$. Построим плоскость, проходящую через точки A' , B' и B'' . Она псевдоевклидова, потому что содержит времениподобную прямую L . Нас будет интересовать в этой плоскости треугольник $A'B'B''$. Мы рассмотрели ситуацию, когда конец A отрезка AB не лежит на прямой L . Если же $A \in L$, то переносить отрезок не нужно, и мы сразу имеем указанный треугольник (в котором на месте точек A' и B'' находятся точки A и B).

В треугольнике $A'B'B''$ стороны $A'B'$ и $A'B''$ времениподобные, а сторона $B'B''$ пространственноподобная и ортогональна стороне $A'B'$ (пространственноподобность стороны $B'B''$ вытекает из ее принадлежности пространственноподобной гиперплоскости Γ). Этот треугольник удовлетворяет условиям теоремы Пифагора, поэтому, согласно (5.8), имеем: $|A'B''|^2 = |A'B'|^2 - |B'B''|^2$. Отсюда, в силу $|A'B''| = |AB|$, получаем: $|A'B'| > |AB|$ (здесь поставлен знак строгого неравенства, ибо из $B'' \notin L$ следует $|B'B''| \neq 0$). При учете рассмотренного ранее случая $AB \parallel L$, нужно заменить знак строгого неравенства знаком нестрогого неравенства: $|A'B'| \geq |AB|$. Понятно, что все сказанное остается верным и тогда, когда вместо отрезка AB используется вектор $\vec{AB}$, поэтому в полученном неравенстве отрезки могут быть заменены векторами, что дает требуемое неравенство (5.11). ■

В собственно евклидовой плоскости, как известно, проекция вектора на прямую не длиннее самого вектора. В псевдоевклидовой же плоскости, согласно теореме 5.6, проекция времениподобного вектора на времениподобную прямую не короче вектора. Этот эффект можно проиллюстрировать с помощью рисунков 4.1 и 4.2 (с. 41 и 45). Так, из рис. 4.1, относящегося к случаю собственно евклидовой плоскости, видно, что конец единичного вектора $\mathbf{e}'_2$ проецируется на вертикальную ось в точку, которая находится внутри единичной окружности. Следовательно, длина проекции этого вектора меньше единицы, то есть меньше длины самого вектора. На рис. 4.2, относящемся к случаю псевдоевклидовой плоскости, проекция на вертикальную ось конца единичного вектора $\mathbf{e}'_0$ находится вне единичной окружности, значит, длина проекции этого вектора больше единицы, то есть превосходит длину вектора. Такой же вывод о соотношении длин векторов и их проекций может быть сделан на основании формул (4.2) и (4.20) при учете того, что $|\cos \varphi| \leq 1$ и $\operatorname{ch} \varphi \geq 1$.

Отметим, что в псевдоевклидовой плоскости проекция пространственноподобного вектора на пространственноподобную прямую тоже не короче самого вектора (в этом можно убедиться с помощью рис. 4.2 и формул (4.20)). Однако в пространстве Минковского это не всегда так. Здесь пространственноподобные вектор и прямая могут оказаться лежащими в одной пространственноподобной гиперплоскости. Поскольку последняя обладает свойствами собственно евклидова пространства, то в этом случае проекция вектора на прямую будет не длиннее вектора.

Следующая теорема устанавливает некоторые свойства *гладких* времениподобных линий. Кусочно-гладкие времениподобные линии мо-

гут как иметь, так и не иметь эти свойства. (Определения гладкой и кусочно-гладкой линий приведены на с. 70.)

Теорема 5.7. *В пространстве Минковского каждая гладкая времениподобная линия обладает следующими свойствами:*

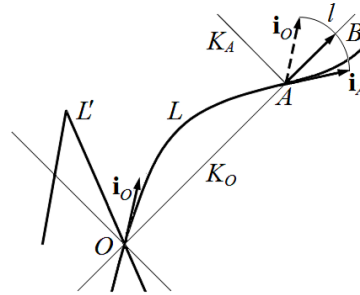
а) *если построить световой конус с вершиной в любой точке линии, то вся она, за исключением данной точки, будет находиться во внутренности этого конуса;*

б) *вектор (или прямолинейный отрезок), соединяющий любые две несовпадающие точки такой линии, является времениподобным.*

Доказательство. Свойство а докажем методом «от противного». Рассмотрим гладкую времениподобную линию L . Обозначим через $\mathbf{i}$ единичный касательный вектор к L (при необходимости будем указывать точку касания индексом при $\mathbf{i}$). Вектор $\mathbf{i}$ времениподобный, по определению времениподобной линии. Построим световой конус с вершиной в какой-либо точке O линии L . Из времениподобности вектора $\mathbf{i}$ следует, что в точке O он направлен внутрь одной из пол светового конуса. В связи с тем, что гладкая линия близка к своей касательной в ближайшей окрестности точки касания, из этого свойства вектора $\mathbf{i}$ вытекает, что участки линии L , которые непосредственно примыкают к точке O (с двух сторон от нее), находятся во внутренности светового конуса (рис. 5.7).

Рис. 5.7. Иллюстрация к доказательству теоремы 5.7.

L — гладкая линия; $\mathbf{i}$ — касательный вектор к L (индекс при нем указывает точку касания); тонкие наклонные линии — сечения световых конусов K_O и K_A с вершинами в точках O и A соответственно (у конуса K_A показана только одна пола); L' — кусочно-гладкая времениподобная линия.



Предположим, что линия L пересекает световой конус в некоторой точке A , выходя из внутренности конуса в его внешнюю область. Поскольку при задании касательного вектора можно направить его в любую сторону вдоль касательной прямой, направим вектор $\mathbf{i}$ в вершине конуса O в сторону той полу конуса, которой принадлежит точка A (при этом его направление во всех других точках линии L определится по непрерывности). Назовем эту полу верхней, а сам световой конус обозначим символом K_O .

Построим еще один световой конус K_A с вершиной в точке A и перенесем вектор $\mathbf{i}_O$ параллельно самому себе так, чтобы его начало оказалось в точке A (см. рис. 5.7). Понятно, что в новом положении конец вектора $\mathbf{i}_O$ будет находиться во внутренней той полы конуса K_A , которая может быть получена путем параллельного перемещения верхней полы конуса K_O на вектор $\overrightarrow{OA}$. На рисунке показана именно эта пола конуса K_A . Ее тоже будем называть верхней полкой. Очевидно, что внутренность этой полы является подмножеством внутренней верхней полы светового конуса K_O .

В точке O касательный вектор $\mathbf{i}$ направлен внутрь верхней полы конуса K_O . По непрерывности, отсюда следует, что в точке A , где линия L выходит изнутри этой полы наружу, касательный вектор $\mathbf{i}$ направлен от точки A во вне этой полы. А так как верхняя пола светового конуса K_A содержится в верхней полке конуса K_O , то в точке A конец вектора $\mathbf{i}$ находится вне верхней полы конуса K_A .

Таким образом, вершина A светового конуса K_A служит началом векторов $\mathbf{i}_O$ и $\mathbf{i}_A$ таких, что конец первого вектора содержится во внутренней верхней полке конуса K_A , а конец второго — в ее внешней области. Перенесем мысленно все векторы $\mathbf{i}$, касающиеся линии L в точках дуги OA , параллельно самим себе так, чтобы их начала оказались в точке A . По условию, линия L является гладкой, поэтому концы этих векторов будут образовывать непрерывную линию l , граничными точками которой служат концы векторов $\mathbf{i}_O$ и $\mathbf{i}_A$ (см. рис. 5.7). Поскольку одна из граничных точек находится внутри полы конуса K_A , а другая — вне ее, и сама линия l непрерывна, то она обязательно пересекает полу в некоторой точке B . В связи с тем, что эта линия образована концами касательных векторов, отсюда следует, что линия L имеет внутри дуги OA касательный вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Этот вектор изотропный, потому что его начало A находится в вершине светового конуса, а конец B на самом конусе. Следовательно, линия L имеет в некоторой своей точке изотропный касательный вектор. А это противоречит тому, что она является времениподобной. Отсюда заключаем, что гладкая времениподобная линия не может пересечь световой конус, вершина которого находится в одной из ее точек. Значит, такая линия действительно находится целиком во внутренней этого светового конуса (за исключением точки, совпадающей с вершиной конуса). Свойство *a* доказано.

Докажем свойство *б*. Пусть C и D — произвольные несовпадающие точки гладкой времениподобной линии. Нас интересует вектор $\overrightarrow{CD}$, соединяющий эти точки. Построим световой конус с вершиной в C . Из

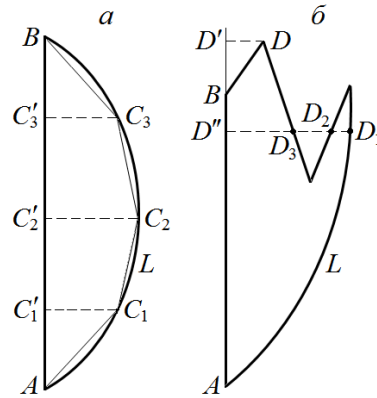
свойства a вытекает, что точка D принадлежит внутренности этого конуса. Следовательно, вектор $\overrightarrow{CD}$ имеет начало в вершине светового конуса и конец в его внутренности. Такой вектор является времениподобным. Времениподобным является и отрезок CD , потому что таков его направляющий вектор $\overrightarrow{CD}$. Свойство b тоже доказано. ■

Из теоремы 5.7 следует, что гладкая времениподобная линия не может пересекать световой конус, имеющий вершину в некоторой ее точке. Вместе с тем, кусочно-гладкая времениподобная линия может пересекать световой конус с вершиной на ней. Примером такой линии служит линия L' на рис. 5.7.

Теорема 5.8. Пусть в пространстве Минковского заданы времениподобный прямолинейный отрезок AB и гладкая или кусочно-гладкая времениподобная линия L , которая соединяет точки A и B и удовлетворяет следующему условию: ортогональные проекции всех точек линии L на прямую, содержащую отрезок AB , принадлежат отрезку AB , причем разные точки линии L проецируются в разные точки отрезка AB (рис. 5.8, a). Тогда длина линии L не превосходит длины отрезка AB , при этом равенство их длин имеет место только при совпадении линии L с отрезком AB . Другими словами, прямолинейный времениподобный отрезок длиннее любой не совпадающей с ним времениподобной линии, соединяющей его концы и удовлетворяющей указанному условию.

Рис. 5.8. Иллюстрация к теореме о максимальности длины времениподобного отрезка.

Теорема выполняется для случая a ; случай b исключается из рассмотрения, так как здесь линия L не удовлетворяет требуемому условию (проекция D' точки D находится вне отрезка AB , а точки D_1 , D_2 и D_3 проецируются в одну и ту же точку D''). Линия L , соединяющая концы отрезка AB , может быть не плоской.



Доказательство. В псевдоевклидовом пространстве длина непрямолинейной линии определяется, как и в собственно евклидовом пространстве, как предел длины вписанных в нее ломаных при неогра-

ниченном увеличении числа их звеньев и при условии устремления к нулю длины наибольшего звена.

Пусть L и AB — времениподобные линия и прямолинейный отрезок, удовлетворяющие условию теоремы (см. рис. 5.8, a). Построим вписанную в линию L ломаную $C_0C_1C_2 \dots C_n$ с вершинами C_i , лежащими на L (здесь $C_0 = A$; $C_n = B$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$; n — количество звеньев). Если линия L является кусочно-гладкой, то ломаная должна быть такой, чтобы во всех точках излома линии L находились вершины ломаной. Обозначим: $C'_0, C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ — ортогональные проекции точек $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ на прямую, содержащую отрезок AB ($C'_0 = C_0 = A$; $C'_n = C_n = B$).

По условию теоремы, точки $C'_0, C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ принадлежат отрезку AB и не совпадают между собой, поэтому каждому звену ломаной отвечает свой участок отрезка AB . Так как разные точки линии L проецируются в разные точки отрезка AB , то очевидно, что и разные точки ломаной проецируются в разные точки отрезка AB . Значит, участки отрезка AB , являющиеся проекциями звеньев ломаной, не имеют общих точек (за исключением их граничных точек C'_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, принадлежащих каждая двум соседним участкам). Из того, что ломаная непрерывна и ее концы совпадают с концами отрезка AB , следует, что ортогональные проекции ее точек на AB тоже образуют непрерывную линию с концами в точках A и B , то есть они целиком заполняют отрезок AB . Это означает, что участки отрезка AB , являющиеся проекциями звеньев ломаной, покрывают весь отрезок AB . Отсюда и из отсутствия у этих участков общих внутренних точек вытекает, что суммарная длина этих участков совпадает с длиной отрезка AB .

Линия L является, по условию теоремы, либо гладкой, либо кусочно-гладкой, при этом вписанная в нее ломаная построена так, что во всех точках излома находятся вершины ломаной. Следовательно, каждое звено ломаной соединяет две точки гладкой времениподобной дуги линии L . Отсюда, по теореме 5.7, вытекает, что каждое звено ломаной является времениподобным отрезком. Из этого, на основании теоремы 5.6, заключаем, что каждое звено ломаной имеет длину, не большую длины его проекции на отрезок AB , при этом равенство длин достигается только при параллельности звена отрезку AB . Принимая во внимание, что каждому звену ломаной отвечает свой участок отрезка AB (являющийся его проекцией) и что сумма длин всех этих участков равна длине отрезка AB , приходим к выводу, что суммарная длина всех звеньев ломаной не превосходит длины отрезка AB . При этом равенство длин имеет место только при параллельности всех звеньев отрез-

ку AB . А так как ломаная непрерывна и ее конечные точки совпадают с точками A и B , то равенство длин ломаной и отрезка AB реализуется лишь при совпадении ломаной с отрезком AB . Переходя к пределу при устремлении количества звеньев ломаной к бесконечности, получаем отсюда, что длина линии L не превосходит длины отрезка AB , причем равенство длин имеет место только при совпадении линии L с отрезком AB . Доказательство завершено. ■

С помощью теоремы 5.7 можно доказать, что если линия L , фигурирующая в теореме 5.8, является гладкой, то она заведомо удовлетворяет указанному в этой теореме условию. Поэтому из теоремы 5.8 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Прямолинейный времениподобный отрезок длиннее любой не совпадающей с ним гладкой времениподобной линии, соединяющей его концы.*

В случае «обычного» пространства принято говорить на бытовом языке, что «прямая — самый короткий путь». Данное следствие позволяет сказать, что в пространстве Минковского «времениподобная прямая — самый длинный путь».

В пространстве Минковского операция скалярного умножения векторов удовлетворяет всем требованиям, которые входят в определение этой операции, приведенное в разд. 1. В частности, она является *невыврожденной*. Это означает, что не существует ненулевого вектора, который был бы ортогонален всем векторам пространства. Между тем, в пространстве Минковского имеются подпространства такие, что сужение операции скалярного умножения на эти подпространства оказывается *вырожденным*: а именно, в каждом из этих подпространств существуют ненулевые векторы, ортогональные всем векторам подпространства. Такие подпространства называются *изотропными*. Приведем примеры этих подпространств.

Одномерными изотропными подпространствами пространства Минковского являются изотропные прямые. Действительно, любой вектор $\mathbf{k}$, принадлежащий изотропной прямой, может быть представлен в виде $\mathbf{k} = k\mathbf{a}$, где k — вещественное число, $\mathbf{a}$ — изотропный направляющий вектор данной прямой ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$). Отсюда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{a} \cdot k\mathbf{a} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 0$, то есть ненулевой вектор $\mathbf{a}$, принадлежащий прямой, ортогонален всем векторам этой прямой, включая себя самого. Значит, всякая изотропная прямая является изотропным подпространством.

Двумерные и трехмерные изотропные подпространства пространства Минковского могут быть построены следующим образом. Возьмем

произвольную времениподобную прямую и рассмотрим какую-либо содержащую ее плоскость. Поскольку пространство Минковского имеет сигнатуру $(+ - - -)$, то эта плоскость имеет сигнатуру $(+ -)$, то есть она является псевдоевклидовой. В такой плоскости существуют изотропные прямые. Выберем одну из них. Пусть $\mathbf{a}$ — ее направляющий вектор (вектор $\mathbf{a}$ ненулевой и изотропный: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$). Так как пространство Минковского четырехмерное, то можно задать две пространственноподобные прямые, которые ортогональны между собой и каждая из которых ортогональна указанной плоскости. Обозначим направляющие векторы этих прямых через $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Все три вектора — $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — ненулевые и попарно ортогональные. Совместим их начала в одной точке путем параллельного перенесения векторов. Интересующими нас двумерным и трехмерным изотропными подпространствами будут линейные оболочки соответственно двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. В самом деле, в каждом из этих подпространств все векторы раскладываются по данным векторам. А так как вектор $\mathbf{a}$ изотропный и ортогонален векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то в каждом из этих подпространств вектор $\mathbf{a}$ ортогонален всем векторам, в том числе самому себе. Значит, построенные подпространства изотропные.

Напомним, что $(n-1)$ -мерное подпространство n -мерного евклидова пространства называется *гиперплоскостью*. Прямая называется *нормалью* к гиперплоскости, если ее направляющий вектор ортогонален всем векторам гиперплоскости.

Специфической чертой изотропной гиперплоскости является то, что нормаль к ней лежит в самой гиперплоскости. Действительно, в такой гиперплоскости существует изотропный вектор, ортогональный всем ее векторам. По определению нормали, этот вектор служит направляющим вектором нормали к гиперплоскости. Так как он лежит в гиперплоскости, то вместе с ним и нормаль лежит в гиперплоскости.

Можно показать, что в пространстве Минковского трехмерные гиперплоскости, касательные к световому конусу, являются изотропными подпространствами. Касание происходит вдоль изотропных образующих светового конуса (рис. 5.9).

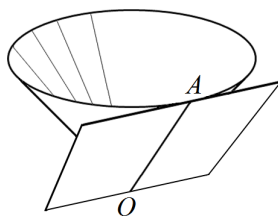


Рис. 5.9. Изотропная гиперплоскость, касающаяся светового конуса.

O — вершина светового конуса; OA — изотропная образующая светового конуса, являющаяся линией касания; показана только одна половина светового конуса; рисунок дан с понижением размерности на единицу.

6. Сферы в пространстве Минковского

В евклидовом пространстве *сферой* с центром в некоторой точке называется множество всех точек пространства, равноудаленных от данной точки. *Радиусом* сферы называется расстояние от точек сферы до ее центра; радиусом сферы называется также прямолинейный отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо ее точкой. В случае пространства Минковского сферу иногда называют *псевдосферой*.

Из формулы (5.2), определяющей расстояние между точками, следует, что в пространстве Минковского существуют сферы двух видов: с времениподобными и с пространственноподобными радиусами. Они задаются соответственно уравнениями

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2; \quad (6.1)$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -R^2, \quad (6.2)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек сферы относительно ее центра; R — радиус сферы ($R > 0$). Поскольку векторы $\mathbf{R}$, входящие в уравнения (6.1) и (6.2), удовлетворяют неравенствам (5.4) и (5.5) соответственно, то сфера первого вида располагается во внутренней световой конусе, а сфера второго вида — в его внешней области.

Запишем уравнения (6.1) и (6.2) в координатной форме.

Введем в пространстве Минковского M ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в центре сферы. Так как пространство M имеет тип $(1, 3)$, то ортонормированность базиса означает выполнение соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Разложим радиус-вектор $\mathbf{R}$ по этому базису:

$$\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \quad (6.4)$$

где x_i — координаты точки, имеющей радиус-вектор $\mathbf{R}$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

Подставляя значение (6.4) вектора $\mathbf{R}$ в уравнения (6.1) и (6.2) и учитывая соотношения (6.3), получаем уравнения:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = R^2; \quad (6.5)$$

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -R^2. \quad (6.6)$$

Уравнения (6.5) и (6.6) допускают обратный переход к уравнениям (6.1) и (6.2) (при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$). Следовательно, они эквивалентны уравнениям (6.1), (6.2) и задают те же два вида сфер.

Если в уравнениях (6.5) и (6.6) положить $x_3 = 0$, то они совпадут с уравнениями соответственно двуполостного и однополостного гиперboloидов в трехмерном собственнo евклидовом пространстве (рис. 6.1). Поэтому можно считать, что сфера, определяемая уравнением (6.1) или (6.5), есть аналог двуполостного гиперboloида, а сфера, задаваемая уравнением (6.2) или (6.6), — аналог однополостного гиперboloида. Каждая из сфер представляет собой трехмерную гиперповерхность в четырехмерном пространстве M .

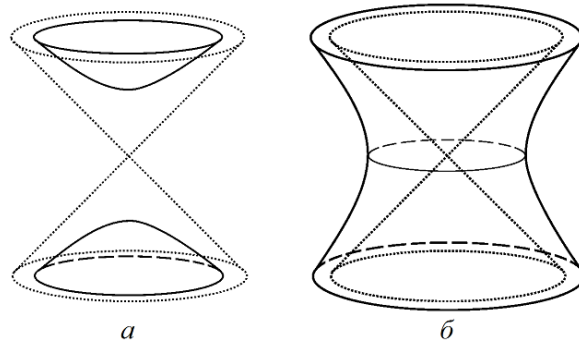


Рис. 6.1. Двуполостный (а) и однополостный (б) гиперboloиды в трехмерном собственнo евклидовом пространстве.

Оба гиперboloида неограниченно продолжаются вверх и вниз; пунктирные линии — асимптотические конические поверхности.

Теорема 6.1. *Сферы в пространстве Минковского лоренц-инвариантны.*

Доказательство. Уравнения (6.1) и (6.2), задающие два вида сфер, содержат только константы и скалярные произведения векторов. Эти величины не меняются при действии ортогональных операторов, которыми являются операторы группы Лоренца, поэтому сферы обоих видов лоренц-инвариантны. ■

Напомним, что пространственноподобная гиперплоскость в пространстве M имеет геометрические свойства, совпадающие со свойствами трехмерного собственнo евклидова пространства, поэтому она сама может считаться собственнo евклидовым пространством.

Теорема 6.2. Пусть Ω — сфера в пространстве Минковского, задаваемая уравнением (6.1) или (6.2) (рис. 6.2). Сечение сферы Ω трехмерной пространственноподобной гиперплоскостью Γ представляет собой «обычную» двумерную сферу S (в собственно евклидовой Γ). Центр сферы S находится в точке пересечения гиперплоскости Γ и времениподобной прямой L , проходящей через центр сферы Ω и ортогональной Γ . Радиус сферы S равен $\sqrt{a^2 \mp R^2}$, где a есть расстояние от центра сферы Ω до центра сферы S (оба центра лежат на прямой L), R — радиус сферы Ω , верхний и нижний знаки относятся к сферам видов (6.1) и (6.2) соответственно (в случае сферы вида (6.1) гиперплоскость Γ пересекает сферу Ω только при $a \geq R$).

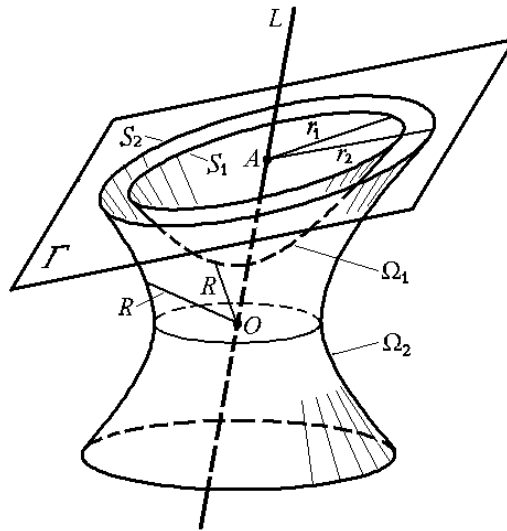


Рис. 6.2. Сферы, пересекаемые пространственноподобной гиперплоскостью Γ , и времениподобная прямая L , ортогональная Γ и проходящая через общий центр сфер O .

Рисунок дан с понижением размерности на единицу; гиперплоскость Γ изображена прозрачной; Ω_1 и Ω_2 — трехмерные псевдоевклидовы сферы с центром в O , задаваемые уравнениями (6.1) и (6.2) соответственно; R — их радиус; S_1 и S_2 — сечения сфер Ω_1 и Ω_2 гиперплоскостью Γ (они представляют собой двумерные собственно евклидовы сферы с центром в точке $A = L \cap \Gamma$); r_1 и r_2 — радиусы сечений S_1 и S_2 .

Доказательство теоремы 6.2 аналогично доказательству теоремы 5.2 о пересечении светового конуса гиперплоскостью. Нужно только рассмотреть вместо светового конуса сферу и заменить уравнение светового конуса (5.3) уравнением сферы (6.1) или (6.2). Критерием того, что некоторая точка B гиперплоскости Γ принадлежит сфере Ω , будет выступать в этом случае вместо (5.7) равенство

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{a^2 \mp R^2}, \quad (6.7)$$

где $\mathbf{b}$ — вектор, который, как и в доказательстве теоремы 5.2, соединяет точку $A = L \cap \Gamma$ с точкой B , его длина $|\mathbf{b}|$, задаваемая выражением (6.7), равна радиусу сферы S .

Теорема 6.3. *В пространстве Минковского любая времениподобная прямая, проходящая через центр сферы, является ее поворотной осью симметрии бесконечного порядка.*

Доказательство теоремы 6.3 практически дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 5.3 для светового конуса (в нем следует только заменить термины «световой конус» и «вершина конуса» терминами «сфера» и «центр сферы» и сослаться вместо теоремы 5.2 на теорему 6.2).

Свойство сферы в пространстве M , указанное в теореме 6.3, аналогично свойству «обычной» сферы в трехмерном собственно евклидовом пространстве, где любая прямая, проходящая через центр сферы, служит ее поворотной осью симметрии бесконечного порядка.

Теорема 6.4. *Сфера в пространстве Минковского имеет асимптотическую гиперповерхность; ею является световой (изотропный) конус с вершиной в центре сферы.*

Доказательство. Рассмотрим сферу с центром в точке O . Введем в пространстве M систему координат $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ с началом в O и ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, который удовлетворяет соотношениям (6.3). Обозначим через L координатную ось с направляющим вектором $\mathbf{e}_0$ (ось L — времениподобная прямая, проходящая через центр сферы O).

В такой системе координат сфера задается уравнением (6.5) или уравнением (6.6). Представим их в виде одного уравнения:

$$x_0^2 - r^2 = \pm R^2, \quad (6.8)$$

где

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (6.9)$$

Возьмем произвольную точку $A \in M$, не лежащую на оси L , и построим двумерную плоскость P , содержащую ось L и точку A (известно, что такая плоскость существует и единственна).

Введем в плоскости P ортогональную систему координат $\{x_0, r\}$ с началом в O и координатами x_0 и r , отсчитываемыми соответственно вдоль оси L и вдоль оси, ортогональной L . В этой системе координат уравнение (6.8) задает гиперболы (лежащие в P). Их асимптотами, как известно, являются прямые, описываемые уравнением

$$x_0 = \pm r$$

или в эквивалентном виде

$$x_0^2 - r^2 = 0. \quad (6.10)$$

Указанные гиперболы представляют собой сечение рассматриваемой сферы плоскостью P . Так как точка A , через которую проходит плоскость P , является произвольной точкой пространства (лежащей вне L), то плоскость P может быть произвольным образом повернута вокруг оси L . При этом во всех случаях сечение сферы будет одинаковым, описываемым уравнением (6.8). (Это — проявление того факта, что времениподобная прямая, проходящая через центр сферы, служит осью симметрии сферы, см. теорему 6.3.) Каждому такому сечению соответствуют асимптоты, задаваемые уравнением (6.10). Совокупность асимптот, отвечающих всем возможным положениям плоскости P , образует гиперповерхность в пространстве M , являющуюся асимптотической для рассматриваемой сферы.

Найдем уравнение этой гиперповерхности.

Подставим в уравнение асимптот (6.10) значение (6.9) величины r^2 :

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (6.11)$$

Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек пространства относительно центра сферы O . Так как координаты точек в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ есть x_i , то

$$\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

С помощью этого выражения и соотношений (6.3) находим, что левая часть уравнения (6.11) равна $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$. Поэтому точки асимптотической гиперповерхности удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0.$$

Множество всех таких точек образует, согласно уравнению (5.3), световой конус с вершиной, которая совпадает с началом вектора $\mathbf{R}$, то есть находится в центре сферы.

Таким образом, сфера в пространстве M действительно имеет асимптотическую гиперповерхность в виде светового конуса с вершиной в центре сферы. ■

Поверхность (гиперповерхность) называется *линейчатой*, если она может быть представлена как совокупность прямых.

Теорема 6.5. *Сфера вида (6.2) представляет собой линейчатую гиперповерхность с изотропными образующими (рис. 6.3). Через каждую ее точку проходит бесконечное множество образующих, которые составляют в совокупности двумерную коническую поверхность с вершиной в этой точке. Сфера вида (6.1) не является линейчатой гиперповерхностью.*

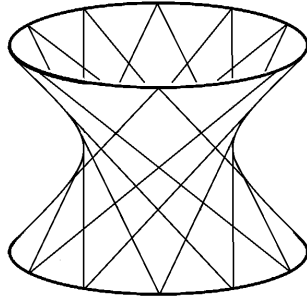


Рис. 6.3. Сфера вида (6.2) и прямолинейные образующие на ней.

Сфера изображена с понижением размерности на единицу, поэтому она выглядит как однополостный гиперболоид в трехмерном собственно евклидовом пространстве.

Доказательство. Рассмотрим сферу вида (6.2). Зафиксируем произвольную ее точку A . Обозначим: $\mathbf{R}_A$ — радиус-вектор точки A относительно центра сферы. Согласно уравнению (6.2), имеем:

$$\mathbf{R}_A \cdot \mathbf{R}_A = -R^2, \quad (6.12)$$

где R — радиус сферы ($R > 0$). Отметим, что из $R \neq 0$ следует $\mathbf{R}_A \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — нулевой вектор).

Пусть L — прямая, проходящая через точку A ; $\mathbf{a}$ — ее направляющий вектор ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$); $\mathbf{R}_L$ — радиус-вектор точек L относительно центра сферы. Тогда параметрическое уравнение прямой L имеет вид

$$\mathbf{R}_L = \mathbf{R}_A + k\mathbf{a}, \quad (6.13)$$

где k — параметр, $k \in (-\infty, +\infty)$.

Выведем условие принадлежности прямой L заданной сфере.

Прямая L принадлежит сфере в том и только том случае, если при всех k радиус-вектор ее точек $\mathbf{R}_L$ удовлетворяет уравнению сферы:

$$\mathbf{R}_L \cdot \mathbf{R}_L = -R^2. \quad (6.14)$$

Подставим в (6.14) значение радиуса-вектора $\mathbf{R}_L$ из (6.13):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_L \cdot \mathbf{R}_L &= (\mathbf{R}_A + k \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{R}_A + k \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{R}_A + 2k \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_A + k^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -R^2.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (6.12), находим:

$$2k \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_A + k^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (6.15)$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием того, что прямая L принадлежит сфере, является выполнение равенства (6.15) при всех значениях параметра k . При $k = 0$ это равенство выполняется для любых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R}_A$. Если $k \neq 0$, то, сокращая на k , получаем:

$$2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_A + k \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (6.16)$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R}_A$ не зависят от k , то выполнение равенства (6.16) при всех $k \neq 0$ возможно тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_A = 0. \quad (6.17)$$

Таким образом, критерием принадлежности прямой L заданной сфере является одновременное выполнение двух равенств (6.17). Первое из них, в силу $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, означает, что $\mathbf{a}$ — изотропный вектор. Второе равенство (с учетом $\mathbf{R}_A \neq \mathbf{0}$) свидетельствует о том, что вектор $\mathbf{a}$ лежит в трехмерной гиперплоскости, ортогональной $\mathbf{R}_A$. Все такие гиперплоскости параллельны между собой. Рассмотрим ту из них, которая проходит через точку A ; обозначим ее Γ_A (очевидно, что такая гиперплоскость существует). Принимая во внимание, что прямая L имеет направляющий вектор $\mathbf{a}$ и проходит через точку A , заключаем из сказанного, что прямая L принадлежит сфере в том и только том случае, если она является изотропной и принадлежит гиперплоскости Γ_A .

Так как вектор $\mathbf{R}_A$, согласно (6.12), пространственноподобен, то ортогональная к нему гиперплоскость Γ_A представляет собой трехмерное псевдоевклидово пространство типа $(1, 2)$. Известно, что в таком пространстве через каждую точку проходит бесконечное множество изотропных прямых; они образуют в совокупности двумерную коническую поверхность с вершиной в этой точке.

Это означает, что в нашем случае через точку A проходит бесконечное множество изотропных прямых, которые лежат в гиперплоскости Γ_A и образуют коническую поверхность с вершиной в A . Все они, по доказанному выше, принадлежат сфере. Отсюда и из того факта,

что A — произвольная точка сферы, вытекает, что через каждую точку сферы проходят прямые, принадлежащие сфере, поэтому сфера является линейчатой гиперповерхностью. Учитывая отмеченные свойства этих прямых, заключаем, что сфера вида (6.2) в самом деле представляет собой линейчатую гиперповерхность с изотропными образующими и что образующие, проходящие через любую точку сферы, составляют в совокупности двумерную коническую поверхность с вершиной в данной точке.

Теперь рассмотрим сферу вида (6.1). Рассуждая способом, аналогичным приведенному выше, можно прийти к заключению, что критерием принадлежности прямой L сфере вида (6.1) служит выполнение тех же равенств (6.17), что и в случае сферы вида (6.2). Из этих равенств вытекает, что вектор $\mathbf{a}$ должен быть изотропным и должен принадлежать трехмерной гиперплоскости, ортогональной вектору $\mathbf{R}_A$. Однако в случае сферы вида (6.1) вектор $\mathbf{R}_A$ является времениподобным, поэтому ортогональная к нему гиперплоскость оказывается пространственноподобной. Такая гиперплоскость не содержит изотропных векторов, и, значит, требуемого вектора $\mathbf{a}$ не существует. Следовательно, сфера вида (6.1) действительно не является линейчатой гиперповерхностью. ■

Отметим, что в случае трехмерного псевдоевклидова пространства сфера, описываемая уравнением (6.2), представляет собой однополостный гиперболоид. Через каждую точку такой сферы проходят только две изотропные образующие (см. рис. 6.3).

Световой конус является, как и сфера вида (6.2), линейчатой гиперповерхностью, потому что он образован изотропными прямыми, проходящими через его вершину. Принимая во внимание, что уравнения сферы (6.1) и (6.2) переходят при $R = 0$ в уравнение светового конуса (5.3), можно сказать, что *световой конус представляет собой сферу нулевого радиуса*.

7. Критерий антисимметричности двухвалентного тензора

В последующем изложении существенную роль играют антисимметричные тензоры второго ранга. Сформулируем критерии антисимметричности тензора применительно к общему случаю произвольного линейного пространства (в настоящем разделе) и применительно к случаю пространства Минковского (в следующем разделе).

Напомним некоторые положения теории тензоров.

Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство со скалярным умножением векторов; $V \otimes V$ — пространство двухвалентных тензоров; A — двухвалентный тензор; A^* — тензор, транспонированный (сопряженный) к A (тензор A^* получается из A переменой местами векторов в каждой из диад, входящих в A ; см. (2.7) и (2.9)).

Верны следующие утверждения.

Для любого тензора $A \in V \otimes V$ и любого вектора $\mathbf{a} \in V$ выполняются равенства (2.11):

$$A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot A^*; \quad A^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot A. \quad (7.1)$$

где точка — знак скалярного умножения.

В пространстве $V \otimes V$ операция скалярного умножения тензора на вектор является невырожденной; это означает выполнение эквивалентности (2.8):

$$(A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ или } \mathbf{a} \cdot A = \mathbf{0} \text{ при всех } \mathbf{a} \in V) \iff A = \hat{0}, \quad (7.2)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; $\hat{0}$ — нулевой тензор.

Двухвалентный тензор A называется *симметричным* или *самосопряженным*, если $A^* = A$, и называется *антисимметричным* или *косимметричным*, если $A^* = -A$ (см. формулы (2.12) и (2.13)).

Напомним, что термин «*критерий*» означает «необходимое и достаточное условие».

Теорема 7.1. Критерий антисимметричности тензора второго ранга. Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство со скалярным умножением векторов; $A \in V \otimes V$ — тензор второго ранга. Тензор A является антисимметричным тогда и только тогда, когда для любого вектора $\mathbf{a} \in V$ выполняется равенство

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (7.3)$$

Доказательство. Пусть A — антисимметричный тензор ($A^* = -A$). Для любого вектора $\mathbf{a} \in V$ можем записать цепочку равенств

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (A \cdot \mathbf{a}) = (A \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot A^*) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot A^* \cdot \mathbf{a},$$

где использованы ассоциативность и симметричность операции скалярного умножения и первая из формул (7.1). Отсюда с учетом антисимметричности A получаем:

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a}.$$

Переносим выражение, стоящее в правой части равенства, в левую часть, находим: $2\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$, откуда сразу следует требуемое равенство (7.3). Так как вектор $\mathbf{a}$ произвольный, то необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть тензор A такой, что при любом $\mathbf{a} \in V$ выполняется равенство (7.3). Возьмем произвольные векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Так как $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \in V$, то на основании сделанного допущения имеем: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot A \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$. Раскроем здесь скобки:

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot A \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot A \cdot \mathbf{b} = 0.$$

В левой части равенства первое и последнее слагаемые равны нулю в силу принятого допущения, поэтому

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись свойствами операции скалярного умножения и первой из формул (7.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot A \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot (A \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot A^*) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot A) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot A^*) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot A + \mathbf{a} \cdot A^*) \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{a} \cdot (A + A^*)] \cdot \mathbf{b} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $[\mathbf{a} \cdot (A + A^*)] \cdot \mathbf{b} = 0$. Поскольку данная зависимость выполняется при любом $\mathbf{b} \in V$, то, вследствие невырожденности операции скалярного умножения векторов, из нее вытекает, что $\mathbf{a} \cdot (A + A^*) = \mathbf{0}$. А так как это равенство справедливо при любом $\mathbf{a} \in V$, то по (7.2) оно влечет равенство $A + A^* = \hat{0}$. Значит, $A^* = -A$, то есть тензор A действительно антисимметричный. Достаточность тоже доказана. ■

8. Критерий антисимметричности двухвалентного тензора в пространстве Минковского

В случае пространства Минковского требование, которому должен удовлетворять тензор, чтобы он был антисимметричным, может быть сделано менее ограничительным по сравнению с указанным в теореме 7.1. А именно, достаточно потребовать, чтобы равенство (7.3) выполнялось не для всех векторов из V , а лишь для определенного их подмножества. Предваряя формулировку соответствующей теоремы, введем ряд определений и докажем леммы.

Напомним, что каждой точке пространства Минковского отвечает свой световой конус с вершиной в этой точке. Любые два световых конуса могут быть совмещены друг с другом путем параллельного перемещения одного из них на вектор, соединяющий их вершины. Две части светового конуса, располагающиеся по разные стороны от вершины, называются *полами* конуса. С геометрической точки зрения обе половины светового конуса одинаковы (ибо они переходят друг в друга при инверсии конуса относительно вершины).

В определениях, вводимых далее, фигурируют термины «будущее», «прошлое» и «временная ориентация». Их использование объясняется предназначением строящейся теории для применения в задачах теории относительности. При рассмотрении геометрических свойств пространства Минковского следует понимать эти термины просто как абстрактные названия (без связи со свойствами времени, изучаемыми в физике). Аналогичное замечание относится к терминам «временноподобный», «пространственноподобный» и «световой».

Возьмем световой конус с вершиной в некоторой точке. Выберем какую-либо из его пол и назовем ее *полой будущего* или *световым конусом будущего*. Другую полу назовем *полой прошлого* или *световым конусом прошлого*. Такие же наименования дадим полам всех световых конусов, причем сделаем это согласованным образом для всех конусов. А именно так, чтобы при совмещении любых двух световых конусов (путем их параллельного перемещения) обязательно совмещались между собой пола будущего с полой будущего и пола прошлого с полой прошлого.

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор пространства Минковского и световой конус с вершиной, совпадающей с началом вектора. Если конец вектора лежит во внутренней области пола будущего или

на самой поле, то вектор называется *ориентированным* (или *направленным*) *в сторону будущего*. Если же конец вектора лежит во внутренней области поля прошлого или на самой поле, то вектор называется *ориентированным (направленным) в сторону прошлого*. О любых двух векторах, которые оба ориентированы в сторону будущего или в сторону прошлого, говорят, что они имеют *одинаковую временную ориентацию*. Если же один из векторов ориентирован в сторону будущего, а другой — в сторону прошлого, то говорят, что они имеют *противоположные временные ориентации*.

Световой конус задается равенством (5.3): $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$, его внутренность — неравенством (5.4): $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} > 0$ ($\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек пространства относительно вершины конуса). Отсюда следует, что любой вектор, начало которого находится в вершине светового конуса, а конец — во внутренней конуса или на самом конусе (вне вершины), является ненулевым времениподобным или изотропным вектором. Учитывая это, заключаем на основании приведенных выше определений, что *всякий ненулевой времениподобный или изотропный вектор имеет определенную временную ориентацию (в сторону будущего или в сторону прошлого)*. Нулевой вектор и все пространственноподобные векторы свойством временной ориентации не обладают.

Благодаря согласованности наименований пол всех световых конусов, временная ориентация векторов не изменяется при их параллельном перенесении.

В нижеследующих леммах обозначено: V — линейное пространство, ассоциированное с пространством Минковского.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{a}$ — ненулевой времениподобный вектор; $\mathbf{b}$ — ненулевой времениподобный или изотропный вектор ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$). Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковую временную ориентацию тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}$ — ненулевой времениподобный вектор. Тогда $|\mathbf{a}| > 0$ и $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ — единичный времениподобный вектор.

Введем в пространстве V ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с времениподобным ортом $\mathbf{e}_0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ (в соответствии со свойствами пространства V такой базис существует). Векторы этого базиса удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Обозначим через Γ линейную оболочку векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Из (8.1)

следует, что Γ есть трехмерная пространственноподобная гиперплоскость, ортогональная вектору $\mathbf{e}_0$.

Возьмем какой-либо ненулевой времениподобный или изотропный вектор $\mathbf{b} \in V$. Разложим его по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{b} = b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3, \quad (8.2)$$

где b_i — компоненты вектора $\mathbf{b}$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Легко убедиться в том, что $b_0 \neq 0$. Действительно, если бы было $b_0 = 0$, то вектор $\mathbf{b}$ представлял бы собой, согласно (8.2), линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ и поэтому принадлежал бы гиперплоскости Γ . В таком случае он был бы пространственноподобным вектором, что противоречит тому, что он является времениподобным или изотропным вектором, следовательно, $b_0 \neq 0$. Это означает, что либо $b_0 < 0$, либо $b_0 > 0$.

Вектор $\mathbf{b}$, являясь ненулевым времениподобным или изотропным вектором, обладает определенной временной ориентацией (в направлении будущего или прошлого). Будем считать, что вектор $\mathbf{b}$ и базисные векторы $\mathbf{e}_i$ имеют начало в одной и той же точке пространства Минковского и что гиперплоскость Γ проходит через эту же точку. Очевидно, что при $b_0 < 0$ концы векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}_0$ находятся по разные стороны от гиперплоскости Γ , а при $b_0 > 0$ — по одну сторону от нее. Так как две полы светового конуса, имеющего вершину в этой же точке, располагаются по разные стороны от гиперплоскости Γ , то из сказанного вытекает, что векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковую временную ориентацию тогда и только тогда, когда $b_0 > 0$. Поскольку вектор $\mathbf{a}$ сонаправлен с $\mathbf{e}_0$ (ибо $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_0$ и $|\mathbf{a}| > 0$), то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ также имеют одинаковую временную ориентацию тогда и только тогда, когда $b_0 > 0$. С помощью (8.1), (8.2) и равенства $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_0$ находим: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = b_0 |\mathbf{a}|$. Отсюда в силу $|\mathbf{a}| > 0$ вытекает, что знак b_0 совпадает со знаком скалярного произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. С учетом вышесказанного это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковую временную ориентацию тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$, что и требовалось доказать. ■

Обозначим: V_+ — множество всех времениподобных единичных векторов, ориентированных в сторону будущего ($V_+ \subset V$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ для всех $\mathbf{u} \in V_+$).

Лемма 2. Любые два вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_+$ удовлетворяют зависимостям $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) > 0$ и $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_+$. В соответствии с определением множества V_+ , векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ направлены в сторону будущего, значит, они имеют одинаковую временную ориентацию. В таком слу-

чае, согласно лемме 1, выполняется первая из требуемых зависимостей: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Составим скалярное произведение вектора $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ на себя и раскроем в нем скобки:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (8.3)$$

Вследствие $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_+$, выполняется $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$; вместе с тем, как доказано выше, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$. Отсюда и из (8.3) получаем вторую искомую зависимость: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) > 0$. Из этого неравенства вытекает третья искомая зависимость: $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})} \neq 0$. ■

Лемма 3. Пусть тензор $A \in V \otimes V$ удовлетворяет условию: $\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{u} = 0$ для всех векторов $\mathbf{u} \in V_+$. Тогда для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_+$ выполняется равенство

$$\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot A \cdot \mathbf{u}. \quad (8.4)$$

Доказательство. Возьмем два любых вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_+$ и образуем с их помощью вектор $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|}$ (здесь $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \neq 0$ в силу леммы 2). Принимая во внимание вытекающие из леммы 2 неравенства $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ и $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) > 0$ и учитывая единичность вектора $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$), легко убедиться в том, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} > 0$ и $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 1$. Отсюда и из леммы 1 заключаем, что вектор $\mathbf{w}$ является времениподобным единичным вектором, ориентированным, как и $\mathbf{u}$, в сторону будущего. Значит, $\mathbf{w} \in V_+$. В соответствии с условием доказываемой леммы из этого следует, что $\mathbf{w} \cdot A \cdot \mathbf{w} = 0$. Распишем это равенство подробно:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot A \cdot \mathbf{w} &= \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} \cdot A \cdot \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2} (\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot A \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot A \cdot \mathbf{v}) = 0. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые, стоящие в скобках, равны нулю по условию леммы. Следовательно, остальные два слагаемые дают в сумме нуль. А это означает выполнение требуемого равенства (8.4). ■

Напомним, что V — линейное пространство, ассоциированное с пространством Минковского; V_+ — множество всех времениподобных единичных векторов, ориентированных в сторону будущего ($V_+ \subset V$).

Лемма 4. Пусть тензор $A \in V \otimes V$ удовлетворяет условию: $\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{u} = 0$ для всех векторов $\mathbf{u} \in V_+$. Тогда для любого вектора $\mathbf{a} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$.

Доказательство. Зададим в пространстве V какой-либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с времениподобным и направленным в сторону будущего ортом $\mathbf{e}_0$ и пространственноподобными остальными ортами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Рассмотрим четверку векторов:

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{e}_0; \quad \mathbf{g}_1 = \sqrt{2}\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{g}_2 = \sqrt{2}\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{g}_3 = \sqrt{2}\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_3. \quad (8.6)$$

Легко проверить с помощью (8.5), что $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i = 1$ и $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_0 > 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Это означает с учетом леммы 1, что все $\mathbf{g}_i$ являются времениподобными единичными векторами, ориентированными, как и вектор $\mathbf{e}_0$, в сторону будущего. Следовательно, $\mathbf{g}_i \in V_+$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

Докажем, что $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ — базис в V . Составим линейную комбинацию векторов $\mathbf{g}_i$ и приравняем ее нулевому вектору:

$$c_0\mathbf{g}_0 + c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + c_3\mathbf{g}_3 = \mathbf{0}, \quad (8.7)$$

где c_i — числовые коэффициенты ($i = 0, 1, 2, 3$). Подставим в (8.7) значения векторов $\mathbf{g}_i$ из (8.6). После очевидных преобразований имеем:

$$\left[c_0 + \sqrt{2}(c_1 + c_2 + c_3) \right] \mathbf{e}_0 + c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в V , то из данного равенства вытекает, что все коэффициенты при векторах $\mathbf{e}_i$ равны нулю, из чего сразу следует, что $c_i = 0$ при всех i . Таким образом, равенство (8.7) выполняется в единственном случае, когда все коэффициенты в нем нулевые. Это означает, что векторы $\mathbf{g}_i$ линейно независимы. А так как пространство V четырехмерное, то, следовательно, четверка векторов $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ — базис в V .

Пусть выполняется условие леммы: тензор A удовлетворяет равенству $\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{u} = 0$ для всех $\mathbf{u} \in V_+$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{a} \in V$ и образуем произведение $\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a}$. В это произведение подставим разложение вектора $\mathbf{a}$ по базису $\{\mathbf{g}_i\}$: $\mathbf{a} = \sum_{i=0}^3 a_i \mathbf{g}_i$ (a_i — компоненты вектора $\mathbf{a}$). Тогда получим:

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_{i=0}^3 a_i \mathbf{g}_i \right) \cdot A \cdot \left(\sum_{j=0}^3 a_j \mathbf{g}_j \right) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_i a_j \mathbf{g}_i \cdot A \cdot \mathbf{g}_j. \quad (8.8)$$

Двойная сумма, стоящая справа в (8.8), содержит слагаемые двух видов. Во-первых, в нее входят слагаемые, в которых тензор A умножается слева и справа на один и тот же вектор (например, $a_1 a_1 \mathbf{g}_1 \cdot A \cdot \mathbf{g}_1$). Во-вторых, она содержит слагаемые, в которых тензор A умножается слева и справа на разные векторы, причем эти слагаемые, как легко убедиться, входят парами, у которых левый и правый сомножители при A меняются местами (например, $a_0 a_2 \mathbf{g}_0 \cdot A \cdot \mathbf{g}_2 + a_2 a_0 \mathbf{g}_2 \cdot A \cdot \mathbf{g}_0$). Слагаемые первого вида равны нулю по условию леммы, так как $\mathbf{g}_i \in V_+$. А указанные пары слагаемых второго вида дают в сумме нуль согласно лемме 3. Таким образом, из (8.8) получаем, что для любого вектора $\mathbf{a} \in V$ выполняется $\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 8.1. Критерий антисимметричности двухвалентного тензора в пространстве Минковского. Пусть M — пространство Минковского; V — векторное пространство, ассоциированное с M ; V_+ — множество всех времениподобных единичных векторов, ориентированных в сторону будущего ($V_+ \subset V$); A — двухвалентный тензор ($A \in V \otimes V$). Тензор A является антисимметричным тогда и только тогда, когда для любого вектора $\mathbf{u} \in V_+$ выполняется равенство

$$\mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (8.9)$$

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 7.1, а достаточность — из леммы 4 и теоремы 7.1.

Действительно, пусть A — антисимметричный тензор. Тогда из теоремы 7.1 следует выполнение равенства $\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$ для любого вектора $\mathbf{a} \in V$. Благодаря $V_+ \subset V$, это влечет выполнение равенства (8.9) для любого вектора $\mathbf{u} \in V_+$, что доказывает необходимость.

Теперь допустим, что для любого $\mathbf{u} \in V_+$ выполняется равенство (8.9). Тогда из леммы 4 вытекает, что для всякого вектора $\mathbf{a} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$. Отсюда на основании теоремы 7.1 следует, что тензор A является антисимметричным. Тем самым доказана и достаточность. ■

Глава 3

ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Вообразите, уважаемый читатель, что в тихий солнечный день Вы находитесь на берегу моря. Глядя на его бескрайнюю гладь и далекую линию горизонта, ответьте честно, какую форму имеет Земля? Ответ очевиден: конечно же, Земля плоская. Она и не может быть шарообразной, так как иначе люди на противоположной ее стороне ходили бы вверх ногами и падали бы с нее.

Земля не может вращаться, потому что иначе все предметы сдувались бы с нее неподвижным ветром (ведь когда мы вращаем мяч, воздух вокруг него не вращается). Еще несколько веков назад был проведен такой опыт: из пушки стреляли вертикально вверх и определяли отклонение места падения ядра от места выстрела. Если бы Земля вращалась, то место выстрела сдвигалось бы на некоторое расстояние за время полета ядра вверх и вниз. В результате все ядра падали бы с одной определенной стороны от этого места. Однако такого не наблюдалось, значит, Земля не вращается.

Солнце движется по небосводу вокруг Земли, а не Земля вокруг Солнца. Чтобы убедиться в этом, достаточно просто взглянуть на небо. Даже в астрономических календарях говорится о «восходе и заходе Солнца», а вовсе не о повороте Земли.

С неба не могут падать камни. Когда в XIX веке французские крестьяне приносили упавшие метеориты, то французская Академия наук запретила их принимать по той причине, что «с неба не могут падать камни, потому что их там нет».

Невозможно создать прибор, который позволял бы из Европы видеть и слышать то, что делается в Америке, потому что, во-первых, свет и звук затухают с расстоянием и, во-вторых, свет распространяется по прямой линии, поэтому он не может попасть из Америки в Европу, находящуюся в другом полушарии Земли.

Не могут летать тела более тяжелые, чем воздух. Это сразу следует из закона Архимеда. Летать могут только воздушные шары, заполненные легким газом, а не тяжелые металлические аппараты.

Невозможно передавать энергию по металлическому проводу, потому что он сплошной и сквозь него ничего пройти не может. Можно передать энергию только по пустотелой трубе, например, прокачивая по ней воду или воздух.

Все приведенные примеры свидетельствуют о том, что органы чувств и сознание человека весьма несовершенны и что наши представления об окружающем мире, кажущиеся нам очевидными, зачастую абсолютно не соответствуют реальности.

Путь науки как раз и состоит в отказе от привычных и очевидных представлений о мире, в ряде случаев даже подтвержденных научными опытами. В методологии естественных наук, коей является материалистическая философия, это положение выражается известными словами: «...если бы форма проявления и сущность вещей непосредственно совпадали, то всякая наука была бы излишня...» [8].

Еще одно очевидное представление об окружающем мире состоит в восприятии мира как трехмерного. Например, комната имеет три размера — длину, ширину и высоту, — которые измеряются вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. И совершенно очевидно, что не существует четвертого направления, которое было бы перпендикулярно всем этим трем.

Между тем, имеются серьезные основания полагать, что это не так и что в действительности наш мир четырехмерен. При этом четвертое направление является временным, ориентированным в будущее и в прошлое. Теория, утверждающая это, называется теорией относительности. Она разработана в начале XX века А. Эйнштейном на основании анализа законов электродинамики. (Однако по какой-то не известной науке причине мы не можем заглянуть в четвертое, временное измерение и увидеть самих себя в прошлом и будущем.)

1. Исходные постулаты

Далее используются понятия пространства Минковского, светового конуса, временной ориентации, времениподобной, пространственноподобной и изотропной линий. Определения этих понятий даны в разд. 5 и 8 главы 2.

Специальная теория относительности основывается на следующих положениях.

1. Базисным геометрическим пространством, отражающим пространственные и временные свойства мира, является *пространство Минковского* M — четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(+ - - -)$.

2. Пространство M наделено *временной ориентацией*. Это означает, что полы всех световых конусов подразделены согласованным образом на *полы будущего* и *полы прошлого* (эти полы называются также *световыми конусами будущего* и *световыми конусами прошлого*). Согласованность подразделения пол означает, что при совмещении любых двух световых конусов путем их параллельного перемещения обязательно совмещаются между собой пола будущего с полой будущего и пола прошлого с полой прошлого.

3. Материальные тела изображаются в пространстве M точками. Каждая точка характеризуется определенным положительным или нулевым числом, называемым *массой*. Этот геометрический образ тела называется *материальной точкой*. Материальная точка нулевой массы именуется *изотропной*, *светоподобной* или *безмассовой*. (Изотропные материальные точки служат геометрическими образами фотонов и некоторых других элементарных частиц.) Масса материальной точки называется также массой моделируемого ею тела.

Подчеркнем, что в теории относительности всем материальным телам, которые рассматриваются в классической механике, приписывается та же самая масса, какой они наделяются в классической механике. Эта масса, как и в классической механике, не зависит от состояния и движения тела (за исключением случаев распада и слияния тел). Рассмотрение тел нулевой массы является специфической чертой теории относительности. Классическая механика не изучает такие тела.

4. Материальная точка, имеющая ненулевую массу, движется в пространстве M вдоль времениподобной линии (такая линия является гладкой или кусочно-гладкой, см. с. 70). Изотропная материальная точка движется вдоль изотропной прямой. Линия, вдоль которой происходит движение материальной точки, называется *мировой линией* материальной точки. Ее называют также мировой линией моделиру-

емого материального тела. Мировая линия неподвижна относительно пространства M .

Временная ориентация пространства M задает на мировой линии направление, называемое *направлением от прошлого к будущему*. Оно определяется следующим образом: берется точка мировой линии и строится световой конус с вершиной в этой точке. Задаваемое направление соответствует переходу вдоль линии из полу прошлого в полу будущего. Это направление согласовано для всех точек всех мировых линий, благодаря согласованности подразделения пол световых конусов на полу будущего и полу прошлого.

5. Каждой материальной точке ненулевой массы ставится в соответствие переменная величина, называемая собственным временем. Оно представляет собой натуральный параметр на мировой линии и характеризует длину пройденного материальной точкой участка мировой линии. Точнее, *собственное время* есть числовая переменная, которая отсчитывается вдоль мировой линии, начиная с произвольной ее точки, возрастает в направлении от прошлого к будущему и в каждой точке мировой линии принимает значение, равное по модулю длине участка мировой линии, отделяющего данную точку от точки начала отсчета. Для изотропных (светоподобных) материальных точек понятие собственного времени не вводится, так как вследствие изотропности их мировых линий длина любого участка этих линий равна нулю. Собственное время материальной точки называется также собственным временем моделируемого тела.

Натуральный параметр на линии — это такой параметр, для которого длина участка линии между любыми двумя ее точками равна разности значений параметра в этих точках (разность берется по модулю). Параметризация линии с помощью натурального параметра называется *естественной* параметризацией.

6. Собственное время материальной точки является уточненным понятием *времени*, используемым в других разделах физики. Именно эта величина должна применяться в качестве временной переменной в уравнениях теории относительности.

В дальнейшем мы приведем также другие положения, на которых базируется специальная теория относительности. Будем называть все эти положения *постулатами*.

Обсудим сформулированные постулаты.

Начнем с постулата 6. Его можно назвать важнейшим, потому что именно он превращает геометрические построения, устанавливаемые другими постулатами, в физическую теорию. Поясним. В главе 2 отмечалось, что при рассмотрении геометрических свойств пространства

Минковского следует понимать термины «временеподобный», «временная ориентация», «будущее» и «прошлое» просто как абстрактные названия, не имеющие отношения к понятию времени, используемому в физике. Это же относится к термину «собственное время», вводимому постулатом 5. Только благодаря постулату 6 все эти термины оказываются связанными с понятием времени, применяемым при описании физических процессов. В результате геометрическая теория становится теорией физической.

Пространство Минковского, согласно приведенным постулатам, содержит мировые линии всех материальных точек. Следовательно, *в пространстве Минковского сосуществуют все прошлые, настоящие и будущие состояния (положения) всех материальных точек*. Данное обстоятельство изменяет обычный смысл понятия движения. Здесь мы не можем понимать под движением материальной точки процесс перемещения ее из того места, где она находится, в то место, где ее еще нет, потому что она уже там имеется.

*В теории относительности понятие **движения** материальной точки означает только наличие параметризации мировой линии материальной точки ее собственным временем.* Иными словами, это понятие означает лишь то, что каждому расположению материальной точки на мировой линии отвечает определенное значение ее собственного времени. Употребление здесь термина «движение» фактически есть дань традиции, идущей от классической механики.

Отметим, что в случае изотропных материальных точек, не наделяемых собственным временем, параметризация их мировых линий вводится другим способом (см. разд. 8 настоящей главы).

Согласно постулату 5, собственное время материальной точки, имеющей ненулевую массу, характеризует длину ее мировой линии, поэтому оно измеряется в единицах длины. Вместе с тем, поскольку ему приписывается смысл физического времени, то принято измерять его в единицах времени. В связи с этим, в теории относительности вводится *переводная константа* с размерности скорости, которая осуществляет связь между значениями собственного времени, выраженными в этих двух единицах. Эта связь задается формулой

$$l = ct_* \quad (c = \text{const}; c > 0), \quad (1.1)$$

где l и t_* — собственное время материальной точки, выраженное в единицах длины и в единицах времени соответственно. В разд. 8 будет показано, что константа c равна скорости изотропных материальных точек. Так как последние служат геометрическими образами фотонов, то есть квантов света, то константу c называют *скоростью света*.

2. Парадокс близнецов

Обратим внимание на интересный эффект, вытекающий из постулатов, приведенных в разд. 1.

Рассмотрим ситуацию, когда два брата-близнеца в какой-то момент времени улетаю́т в космос в разных направлениях, долго путешествуют, затем возвращаются и встречаются. Понятно, что участки их мировых линий, заключенные между точками расставания и встречи, будут иметь в общем случае разные длины (рис. 2.1). Это означает, что в общем случае различны промежутки их собственных времен, прошедшие от момента расставания до момента встречи. Следовательно, имея при расставании одинаковый возраст, братья-близнецы могут оказаться при встрече имеющими разный возраст. Тот брат, чья мировая линия короче, будет моложе другого брата, чья мировая линия длиннее. Этот эффект называется в теории относительности *парадоксом близнецов*.

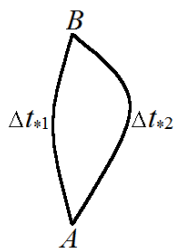


Рис. 2.1. Мировые линии двух братьев-близнецов.

Длины мировых линий между точкой расставания A и точкой встречи B в общем случае различны, поэтому различны и приращения собственных времен братьев: $\Delta t_{*1} \neq \Delta t_{*2}$.

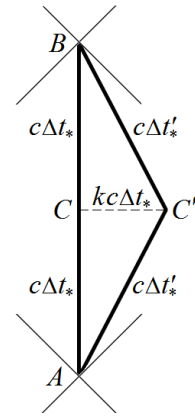
Нужно отметить, что термин «парадокс» употреблен здесь не по прямому своему значению. В точном смысле он означает ситуацию, когда некоторое строго выведенное в теории утверждение противоречит какому-либо другому утверждению этой теории. Здесь же описанный эффект есть непосредственное следствие определения собственного времени материальной точки, и он не противоречит никаким другим положениям теории. Противоречие имеется только с нашим привычным представлением о времени, которое сложилось под влиянием идей классической механики и состоит в убеждении, что время течет одинаково для всех физических систем, независимо от их движений и происходящих с ними изменений. Понятно, что такое представление о времени не обязано быть истинным.

Приведем пример. Пусть мировая линия одного брата-близнеца — времениподобный прямолинейный отрезок AB , а мировая линия другого брата — времениподобная линия $AC'B$, состоящая из двух пря-

молинейных отрезков, причем ортогональная проекция точки C' на отрезок AB находится в его средней точке C (рис. 2.2). Из теоремы 5.8 (глава 2, с. 87) следует, что прямолинейный отрезок AB длиннее непрямолинейной линии $AC'B$, поэтому брат, имеющий мировую линию AB , окажется при встрече старше брата, имеющего мировую линию $AC'B$. Оценим этот эффект количественно.

Рис. 2.2. Мировые линии братьев-близнецов: одна мировая линия — времениподобный прямолинейный отрезок AB , другая — двузвенная времениподобная линия $AC'B$.

C — ортогональная проекция точки C' на прямую AB ; $|AC| = |BC| = c\Delta t_*$; $|AC'| = |BC'| = c\Delta t'_*$; c — константа, входящая в формулу (1.1); Δt_* и $\Delta t'_*$ — приращения собственных времен братьев; k — коэффициент ($\Delta t_* > 0$; $\Delta t'_* > 0$; $k \geq 0$); тонкие наклонные линии — сечения световых конусов плоскостью рисунка (вершины конусов — точки A и B). Отрезки AB , AC' и BC' являются времениподобными, так как у каждого из них один конец находится в вершине светового конуса, а другой конец — во внутренности конуса (при $k < 1$).



Треугольники ACC' и BCC' имеют каждый две времениподобные стороны и ортогональную одной из них пространственноподобную сторону CC' (пространственноподобность CC' вытекает из ее ортогональности времениподобному отрезку AB). Поэтому они удовлетворяют теореме Пифагора для псевдоевклидовой плоскости (с. 80). На основании этой теоремы можем записать (в обозначениях, использованных на рис. 2.2):

$$(c\Delta t'_*)^2 = (c\Delta t_*)^2 - (kc\Delta t_*)^2$$

при $kc\Delta t_* < c\Delta t_*$, то есть при $k < 1$. Отсюда получаем:

$$\Delta t'_* = \Delta t_* \sqrt{1 - k^2}. \quad (2.1)$$

Взглянем на ситуацию с позиции брата, имеющего мировую линию AB . Допустим, что он имеет возможность наблюдать мировую линию второго брата. Тогда он может видеть, что второй брат удаляется от него на расстояние $kc\Delta t_*$ за время Δt_* , из чего может заключить, что второй брат движется относительно него со скоростью $v = kc$, откуда $k = v/c$. Подстановка этого значения коэффициента k

в формулу (2.1) дает:

$$\Delta t'_* = \Delta t_* \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Между моментами расставания и встречи у одного брата проходит время $2\Delta t'_*$, у другого — $2\Delta t_*$ (см. рис. 2.2). Из зависимости (2.2) следует, что отношение этих времен равно $\sqrt{1 - (v/c)^2}$, где v — скорость, с которой движется брат, имеющий мировую линию $AC'B$, с точки зрения брата, имеющего мировую линию AB (здесь $0 \leq v < c$, так как $v = kc$ и $0 \leq k < 1$). Например, указанное отношение составляет при $v = 0.5c$ примерно 0.87, а при $v = 0.9c$ примерно 0.44. Это означает, что если брат, имеющий мировую линию AB , прожил 1 год, то другой брат прожил в первом случае около 10 месяцев, а во втором случае — всего лишь около 5 месяцев.

Выше мы воспользовались понятием скорости, не приведя определения этого понятия. Перейдем к формулированию определений скорости и других кинематических характеристик материальной точки, применяемых в специальной теории относительности.

3. Кинематика материальной точки в пространстве Минковского

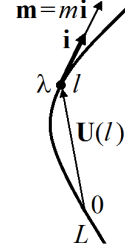
Кинематика — раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел без исследования причин, вызывающих движения.

Рассмотрим материальную точку λ , имеющую ненулевую массу m ($m > 0$) и движущуюся в пространстве Минковского M вдоль мировой линии L (рис. 3.1). Согласно постулату 4, мировая линия L является времениподобной. Из постулата 5 следует, что на L определен натуральный параметр l — собственное время материальной точки, возрастающее в направлении будущего. Введем единичный касательный вектор $\mathbf{i}$ к линии L , ориентированный в сторону будущего, и будем рассматривать его как функцию собственного времени l : $\mathbf{i} = \mathbf{i}(l)$.

Вектор $\mathbf{i}$ представляет собой скорость движения материальной точки λ относительно пространства M . Докажем это.

Пусть $\mathbf{U}(l)$ — вектор перемещения материальной точки (его началом и концом служат две точки мировой линии L — точка начала отсчета собственного времени и точка, отвечающая текущему значению собственного времени, см. рис. 3.1). Так как l есть натуральный параметр на L , возрастающий в сторону будущего, то $d\mathbf{U}/dl$ является

Рис. 3.1. Материальная точка λ , движущаяся вдоль мировой линии L .



единичным касательным вектором к L , направленным в сторону будущего. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{U}}{dl} = \mathbf{i}.$$

В механике производная вектора перемещения материальной точки по времени называется скоростью материальной точки. На основании этого определения и последнего равенства заключаем, что вектор $\mathbf{i}$ действительно представляет собой *скорость* материальной точки. Это есть скорость относительно пространства M , потому что вектор $\mathbf{U}$ и вместе с ним вектор $\mathbf{i}$ задают движение материальной точки вдоль мировой линии, неподвижной относительно M (см. постулат 4). Вектор $\mathbf{i}$ называют также *4-скоростью* материальной точки, чтобы подчеркнуть размерность пространства M и отличить эту скорость от скорости материальной точки относительно системы отсчета (см. разд. 6).

Таким образом, каждая материальная точка, имеющая ненулевую массу, движется вдоль своей мировой линии со скоростью $\mathbf{i}$, являющейся единичным касательным вектором к мировой линии. Скорость $\mathbf{i}$ — *безразмерная величина* (так как $\mathbf{U}$ и l имеют размерность длины). Зачастую бывает удобно использовать в качестве скорости вместо безразмерной производной $d\mathbf{U}/dl$ производную $d\mathbf{U}/dt_*$ размерности скорости, где t_* — собственное время, измеряемое в единицах времени и связанное с l формулой (1.1). С помощью этой формулы находим: $d\mathbf{U}/dt_* = c d\mathbf{U}/dl = c\mathbf{i}$, поэтому *скорость материальной точки относительно пространства M , выраженная в единицах скорости, задается вектором $c\mathbf{i}$ и равна по модулю константе c* .

Функция $\mathbf{i}(l)$ описывает форму мировой линии, но она не учитывает характеристику материальной точки, называемую массой.

Каждой материальной точке ненулевой массы ставятся в соответствие наряду с вектором $\mathbf{i}$ также *вектор массы $\mathbf{m}$* и *4-импульс $\mathbf{P}$* , определяемые формулами

$$\mathbf{m} = m\mathbf{i}; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{P} = mc\mathbf{i}, \quad (3.2)$$

где m — масса материальной точки; c — константа, входящая в формулу (1.1) ($m > 0$; $c > 0$); вектор массы показан на рис. 3.1. Название «4-импульс» для вектора $\mathbf{P}$ объясняется тем, что аналогично обычному импульсу $\mathbf{p}$, рассматриваемому в классической механике, он представляет собой произведение массы m и скорости $\mathbf{c}\dot{\mathbf{i}}$ материальной точки. Цифра «4» в его названии отражает размерность пространства M и призвана отличить вектор $\mathbf{P}$ от $\mathbf{p}$. В разд. 7 будет показано, что 4-импульс $\mathbf{P}$ непосредственно связан с импульсом $\mathbf{p}$.

Вектор массы $\mathbf{m}$ и 4-импульс $\mathbf{P}$ различаются лишь постоянным множителем c , поэтому их можно применять как равноправные при описании движения материальных точек, имеющих ненулевую массу.

Из постулата 3 следует, что существуют материальные точки, имеющие нулевую массу. Они именуются изотропными, светоподобными или безмассовыми. Согласно постулату 4, мировые линии таких материальных точек являются изотропными прямыми. 4-импульс $\mathbf{P}$ материальной точки, имеющей нулевую массу, задается как некоторый изотропный вектор, направленный вдоль ее мировой линии (подробнее об этом будет сказано в разд. 8). Вектор массы для таких материальных точек не вводится.

В разд. 1 мы сформулировали шесть исходных постулатов специальной теории относительности. Дополним их следующим постулатом, который имеет собственное название.

Закон сохранения 4-импульса. Пусть в некоторой точке пространства Минковского M происходит разделение (распад) одной или более материальных точек на две или несколько других материальных точек, либо, наоборот, происходит соединение (слияние) двух или более материальных точек с образованием одной или нескольких других материальных точек. Тогда сумма 4-импульсов всех материальных точек, вычисленная непосредственно перед таким превращением, равна сумме 4-импульсов всех материальных точек, вычисленной сразу после превращения. Другими словами, при указанных превращениях суммарный 4-импульс материальных точек сохраняется.

Отметим, что если в превращении участвуют только материальные точки ненулевой массы, то в формулировке закона 4-импульс может быть заменен вектором массы. Если указанные превращения следуют одно за другим, то суммарный 4-импульс материальных точек, сохраняясь при каждом отдельном превращении, остается в конце совокупности превращений таким же, каким он был при их начале.

Рассмотрим, для примера, ситуацию, когда материальная точка ненулевой массы разделяется в некоторый момент времени на две мате-

риальные точки, тоже имеющие ненулевые массы и движущиеся вдоль разных мировых линий (рис. 3.2).

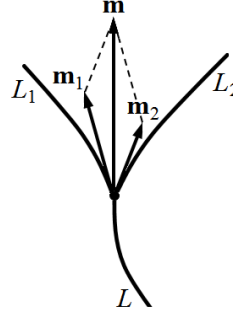


Рис. 3.2. Разделение материальной точки на две материальные точки.

На рисунке показаны: L — мировая линия исходной материальной точки, L_1 и L_2 — мировые линии материальных точек, образовавшихся при разделении. Пусть $\mathbf{m}$ — вектор массы исходной материальной точки в момент, непосредственно предшествующий ее разделению; $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ — векторы массы образовавшихся материальных точек в момент, непосредственно следующий за актом разделения. В соответствии с (3.1) можем записать:

$$\mathbf{m} = m\mathbf{i}; \quad \mathbf{m}_1 = m_1\mathbf{i}_1; \quad \mathbf{m}_2 = m_2\mathbf{i}_2, \quad (3.3)$$

где m, m_1, m_2 — массы материальных точек (положительные числа); $\mathbf{i}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ — единичные касательные векторы к мировым линиям L, L_1 и L_2 в их общей точке, где происходит акт разделения (все три вектора времениподобные и ориентированы в сторону будущего).

В силу закона сохранения 4-импульса (с учетом сделанного после него замечания) имеем:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) отражает тот факт, что при разделении материальной точки, имеющей ненулевую массу, суммарный вектор массы не изменяется. Вместе с тем, из этого же равенства следует, что суммарная масса материальных точек может изменяться при таком превращении.

В самом деле, геометрическим представлением равенства (3.4) является параллелограмм векторов на рис. 3.2. Рассмотрим любой из треугольников, на которые параллелограмм разбивается вектором $\mathbf{m}$. Из (3.3) вытекает, что длина вектора массы равна массе материальной точки, поэтому одна из сторон треугольника имеет длину m , а сумма

длин двух других сторон равна $m_1 + m_2$. Поскольку пространство M является псевдоевклидовым, то в нем выполняется, согласно теореме 5.5 из главы 2, обратное неравенство треугольника, поэтому

$$m_1 + m_2 \leq m, \quad (3.5)$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, когда векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ направлены вдоль одной прямой.

Таким образом, *масса материальной точки не меньше суммы масс материальных точек, на которые она разделяется.*

Легко убедиться в том, что неравенство (3.5) выполняется и тогда, когда две материальные точки с массами m_1 и m_2 соединяются и образуют одну материальную точку массы m . Это означает, что *масса материальной точки, образующейся в результате соединения двух материальных точек, не меньше суммы их масс.*

Следует отметить, что в реакциях ядерного синтеза масса ядра, образующегося в результате слияния других ядер, меньше суммы масс этих ядер. Данный эффект, называемый *дефектом массы*, описывается выражением, знак неравенства в котором противоположен знаку неравенства в (3.5). Это различие знаков неравенств объясняется тем, что при реакциях ядерного синтеза излучаются фотоны, которые не присутствуют в рассмотренном выше примере. При учете 4-импульсов излученных фотонов получается нужный знак неравенства.

Повторим сказанное в разд. 1, что *в теории относительности масса, приписываемая материальным телам, та же, что в классической механике.* При этом, как и в классической механике, считается, что масса тела не изменяется при любом его движении. Изменение массы тела может происходить только при превращениях, указанных в законе сохранения 4-импульса. Отметим, что при таких превращениях суммарная масса тел, согласно представлениям классической механики, не изменяется, тогда как в теории относительности, как показано выше, она может изменяться.

В начале раздела было доказано, что скорость материальной точки относительно пространства Минковского есть вектор $\mathbf{i}$ (или $c\mathbf{i}$). В связи с тем, что этот вектор имеет постоянную длину, материальная точка движется относительно пространства Минковского с постоянной по модулю скоростью. Вместе с тем, вектор скорости может менять свое направление в пространстве. Характеристикой изменения скорости служит производная скорости по времени, то есть ускорение. Поскольку скорость — это вектор $\mathbf{i}$ или $c\mathbf{i}$, то *ускорение материальной точки относительно пространства Минковского представляет собой вектор*

$d\mathbf{i}/dl$ или $c d\mathbf{i}/dt_*$ (первое выражение относится к случаю, когда роль собственного времени материальной точки выполняет натуральный параметр l на мировой линии, второе выражение относится к случаю, когда в этой роли выступает величина t_* , имеющая размерность времени и связанная с l формулой (1.1)).

Теорема 3.1. *Скорость $\mathbf{i}$ (или $c\mathbf{i}$) и ускорение $d\mathbf{i}/dl$ (или $c d\mathbf{i}/dt_*$) материальной точки ортогональны, то есть*

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dl} = 0; \quad c\mathbf{i} \cdot c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} = 0. \quad (3.6)$$

Доказательство. Данный результат является следствием постоянства длины вектора скорости. Действительно, так как $\mathbf{i}$ — единичный вектор, то $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. Дифференцируя обе части этого равенства по l и учитывая симметричность скалярного произведения векторов, находим: $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = (d\mathbf{i}/dl) \cdot \mathbf{i} + \mathbf{i} \cdot (d\mathbf{i}/dl) = 2\mathbf{i} \cdot (d\mathbf{i}/dl) = 0$, откуда следует первая из формул (3.6). Вторая формула получается таким же образом путем дифференцирования по t_* обеих частей равенства $c\mathbf{i} \cdot c\mathbf{i} = c^2$. ■

В следующих разделах мы продолжим описание кинематических характеристик материальной точки в пространстве Минковского.

4. Уравнение расхода массы фотонной ракеты

Предположим, что мы летим в просторах космоса в ракете, движение которой осуществляется за счет излучения фотонов (образуемых, например, в процессе аннигиляции вещества и антивещества). Найдём связь между ускорением ракеты и расходом ее массы, связанным с излучением фотонов.

Будем моделировать ракету материальной точкой λ , движущейся в пространстве Минковского M вдоль времениподобной мировой линии L (рис. 4.1). В качестве собственного времени материальной точки примем величину t_* , связанную с натуральным параметром l на линии L формулой (1.1). Массу ракеты m будем рассматривать как функцию собственного времени t_* : $m = m(t_*)$.

Фотон, как известно, моделируется изотропной материальной точкой. Такая материальная точка имеет, согласно постулатам 3 и 4, нулевую массу, а ее мировая линия является изотропной прямой.

Рассмотрим движение материальной точки λ на промежутке собственного времени от момента t_* до момента $t_* + \Delta t_*$ (см. рис. 4.1).

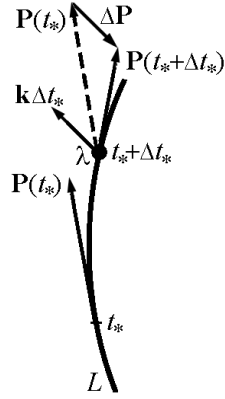


Рис. 4.1. Фотонная ракета, моделируемая материальной точкой λ .

L , t_* и $\mathbf{P}$ — мировая линия, собственное время и 4-импульс материальной точки λ соответственно; $\mathbf{k}\Delta t_*$ — суммарный 4-импульс фотонов, излученных за промежуток собственного времени Δt_* ($\mathbf{k}$ — изотропный вектор); $\Delta \mathbf{P}$ — приращение 4-импульса $\mathbf{P}$ материальной точки за промежуток времени Δt_* ($\Delta \mathbf{P} = -\mathbf{k}\Delta t_*$).

Пусть в течение этого промежутка времени фотоны излучаются равномерно и в одном направлении (равномерно — по часам, находящимся внутри ракеты; в одном направлении — относительно удаленных звезд). Так как длительность промежутка равна Δt_* , то данное допущение позволяет считать, что на этом промежутке времени суммарный 4-импульс изотропных материальных точек, моделирующих фотоны, имеет вид $\mathbf{k}\Delta t_*$, где $\mathbf{k}$ — изотропный вектор, не зависящий от времени.

Обозначим: $\mathbf{P}$ — 4-импульс материальной точки λ . Согласно закону сохранения 4-импульса, имеем:

$$\mathbf{P}(t_*) = \mathbf{P}(t_* + \Delta t_*) + \mathbf{k}\Delta t_*.$$

Отсюда находим приращение 4-импульса материальной точки λ за промежуток времени $[t_*, t_* + \Delta t_*]$:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}(t_* + \Delta t_*) - \mathbf{P}(t_*) = -\mathbf{k}\Delta t_*.$$

Из этого равенства вытекает, что уносимая фотонами часть 4-импульса ракеты равна $\mathbf{k}\Delta t_*$. Разделим крайние части выражения на Δt_* и перейдем к пределу при Δt_* , стремящемся к нулю. Тогда получим с учетом постоянства $\mathbf{k}$ на рассматриваемом промежутке времени:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt_*} = -\mathbf{k}. \quad (4.1)$$

Так как $\mathbf{k}$ — изотропный вектор ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$), то из (4.1) следует, что производная 4-импульса $\mathbf{P}$ материальной точки по собственному времени t_* является изотропным вектором, то есть

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt_*} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt_*} = 0.$$

Подставим в это равенство значение (3.2) 4-импульса $\mathbf{P}$:

$$\frac{d(m\mathbf{i})}{dt_*} \cdot \frac{d(m\mathbf{i})}{dt_*} = \left(\frac{dm}{dt_*} \mathbf{i} + mc \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} \right) \cdot \left(\frac{dm}{dt_*} \mathbf{i} + mc \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} \right) = 0,$$

где использовано постоянство величины c . Из данного выражения с помощью равенства $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и второй из формул (3.6) находим:

$$c^2 \left(\frac{dm}{dt_*} \right)^2 + m^2 c^2 \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} = 0. \quad (4.2)$$

Вектор $c d\mathbf{i}/dt_*$ есть ускорение материальной точки λ (см. разд. 3). Обозначим модуль ускорения через a :

$$a = \sqrt{\left| c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} \cdot c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} \right|} \quad (a \geq 0). \quad (4.3)$$

Согласно (3.6), ускорение $c d\mathbf{i}/dt_*$ ортогонально времениподобному вектору $\mathbf{i}$, поэтому оно является пространственноподобным вектором, то есть его скалярный квадрат не положителен. Учитывая это, из (4.3) имеем:

$$a^2 = -c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} \cdot c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*},$$

что вместе с (4.2) дает:

$$c^2 \left(\frac{dm}{dt_*} \right)^2 = m^2 a^2.$$

Отсюда, пользуясь тем, что $c > 0$, $m > 0$, $a \geq 0$ и что по физическому смыслу задачи масса ракеты не возрастает ($dm/dt_* \leq 0$), получаем искомое *уравнение расхода массы фотонной ракеты*

$$c \frac{dm}{dt_*} = -ma, \quad (4.4)$$

здесь c — константа размерности скорости, входящая в формулу (1.1); m — масса ракеты; t_* — собственное время ракеты; a — модуль вектора ускорения ракеты (величины m , t_* и a относятся, строго говоря, к материальной точке, моделирующей ракету, но мы трактуем их как характеристики самой ракеты). Изменение массы ракеты, описываемое уравнением (4.4), происходит вследствие излучения фотонов.

Обратим внимание на то, что уравнение (4.4) не содержит характеристик излучаемых фотонов. При выводе этого уравнения было использовано только то свойство фотонов, что их 4-импульс является изотропным вектором.

Рассмотрим, для примера, движение ракеты с ускорением, постоянным по модулю ($a = \text{const} > 0$). Решая уравнение (4.4), находим, что в этом случае масса ракеты изменяется с течением времени по закону

$$m = m_0 e^{-\frac{a}{c} t_*}, \quad (4.5)$$

где m_0 — масса ракеты в момент $t_* = 0$. Из (4.5) следует, что масса фотонной ракеты, движущейся с постоянным по модулю ускорением, экспоненциально убывает с течением времени.

Покажем, что вектор $\mathbf{k}$, характеризующий 4-импульс излучаемых фотонов, пропорционален произведению массы ракеты m и модуля ее ускорения a .

В самом деле, представим ускорение материальной точки $c \, d\mathbf{i}/dt_*$ в виде

$$c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} = a\mathbf{j}, \quad (4.6)$$

где a — модуль ускорения ракеты, задаваемый формулой (4.3); $\mathbf{j}$ — единичный пространственноподобный вектор. Запишем цепочку равенств, применяя последовательно формулы (4.1), (3.2), (4.4) и (4.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= -\frac{d\mathbf{P}}{dt_*} = -\frac{d(m c \mathbf{i})}{dt_*} = \\ &= -\frac{dm}{dt_*} c \mathbf{i} - m c \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} = m a \mathbf{i} - m a \mathbf{j} = m a (\mathbf{i} - \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{k} = m a (\mathbf{i} - \mathbf{j}). \quad (4.7)$$

Поскольку векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ не зависят от m и a , то из (4.7) вытекает, что вектор $\mathbf{k}$ действительно пропорционален произведению ma .

Убедимся в том, что вектор $\mathbf{k}$ является изотропным. Векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ единичные, причем первый времениподобный, а второй пространственноподобный. Так как вектор $\mathbf{i}$ направлен вдоль скорости материальной точки, а вектор $\mathbf{j}$ — вдоль ее ускорения, то, по теореме 3.1, они ортогональны. Следовательно, эти векторы удовлетворяют зависимостям

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -1; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) находим: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = m^2 a^2 (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 0$, поэтому вектор $\mathbf{k}$, как и должно быть, является изотропным вектором.

5. Системы отсчета в пространстве Минковского

Согласно теории относительности, наш мир четырехмерен, причем одно из его измерений является временным. Однако временное направление скрыто от нас. Мы не способны перемещаться в этом направлении так же свободно, как перемещаемся в пространственных направлениях. Не можем мы и заглянуть во временное направление, чтобы увидеть самих себя в прошлом и будущем.

Такое ограничение наших возможностей существенно влияет на методику сравнения теоретических результатов с опытными данными. В рамках «обычных» представлений классической механики это сравнение производится способом, который можно проиллюстрировать на следующем простейшем примере. Пусть имеется стержень, растягиваемый заданными силами. Мы производим расчет и находим, что в результате действия сил стержень будет иметь такую-то длину. Сравнение теории с опытом производится путем измерения с помощью линейки действительной длины стержня и сравнения рассчитанного значения длины с измеренным.

По-другому обстоит дело в рамках представлений теории относительности. По этой теории, в окружающем мире существуют объекты, протяженные во временном направлении (например, мировые линии). Допустим, что мы рассчитали длину такого объекта. Однако мы не имеем линейки, которую могли бы приложить к этому объекту и измерить его временную длину.

Аналогичная ситуация имеет место при сравнении рассчитываемого движения материальных тел с фактическим. Поскольку в четырехмерном мире сосуществуют все прошлые, настоящие и будущие состояния (положения) материальных тел, то для проверки правильности расчета достаточно было бы просто переместиться в предсказанное теорией место этого четырехмерия и убедиться в наличии (или отсутствии) там изучаемого тела. Однако мы не можем сделать это, потому что не способны свободно перемещаться во временном направлении. Нам доступно для непосредственного изучения только трехмерное сечение четырехмерного мира. По этой причине движение тел изучается с позиции теории относительности, описывающей мир как четырехмерный, тем же способом, что и с позиции классической механики, трактующей мир как трехмерный. А именно, выбирается некоторое материальное тело, и движение других тел рассматривается по отношению к нему. При этом движение тел описывается с помощью системы отсчета.

Система отсчета включает в себя материальное тело, по отношению к которому изучается движение других тел, часы, измеряющие время, и приборы, позволяющие определять пространственные координаты тел.

Тело, по отношению к которому изучается движение других тел, именуется *телом отсчета*. Время t , измеряемое часами системы отсчета, называется *координатным* или *лабораторным временем*. Приборы, позволяющие определять пространственные координаты тел, условно назовем «*линейками*». С помощью «линеек» вводится трехмерная пространственная система координат в окрестности тела отсчета. В качестве ее начала принимается какая-либо фиксированная точка тела отсчета, например, его центр масс. Часы и система координат считаются неподвижно скрепленными с телом отсчета.

Во многих теоретических построениях конкретный вид этой трехмерной системы координат не имеет значения, а важен только сам факт фиксации положений точек пространства относительно тела отсчета. Данное обстоятельство позволяет считать, что с телом отсчета связана не какая-то определенная система координат, а само трехмерное пространство. Оно называется *физическим пространством*.

Таким образом, *система отсчета*, используемая в опыте, состоит из тела отсчета, часов, отсчитывающих координатное время t , и «линеек», с помощью которых задается неподвижное относительно тела отсчета трехмерное физическое пространство.

В специальной теории относительности, где движение тел рассматривается как происходящее внутри четырехмерного мира, тело отсчета моделируется материальной точкой, движущейся в пространстве Минковского M вдоль времениподобной мировой линии. Поскольку часы считаются расположенными в том же месте, где находится тело отсчета, то отсчитываемое ими координатное время t является собственным временем тела отсчета. Оно представляет собой параметр на мировой линии тела отсчета, измеряемый в единицах времени и возрастающий в направлении будущего. Координатное время, измеряемое в единицах длины, равно ct , где c — константа размерности скорости, входящая в формулу (1.1). Величина ct служит натуральным параметром на мировой линии тела отсчета (см. разд. 1). В дальнейшем материальную точку, моделирующую тело отсчета, тоже будем называть *телом отсчета*.

Обозначим через τ единичный касательный вектор к мировой линии тела отсчета, ориентированный в сторону будущего. Будем рассматривать его как функцию координатного времени t : $\tau = \tau(t)$.

Физическое пространство системы отсчета моделируется в пространстве M трехмерной пространственноподобной гиперплоскостью Γ . Она движется вдоль мировой линии тела отсчета вместе с самим телом отсчета, при этом в каждый момент времени t она ортогональна вектору τ : $\Gamma(t) \perp \tau(t)$ при всех t . Эту гиперплоскость будем также называть *физическим пространством* (рис. 5.1).

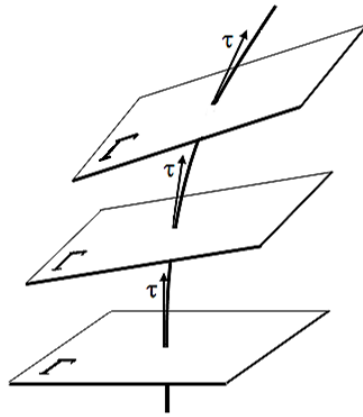


Рис. 5.1. Физическое пространство Γ , движущееся вдоль мировой линии тела отсчета.

Гиперплоскость Γ изображена с понижением размерности на единицу. Показанное изменение наклона гиперплоскости Γ при движении вдоль мировой линии соответствует свойствам псевдоевклидова пространства Минковского. Кажущееся нарушение условия $\Gamma \perp \tau$ при двух верхних положениях Γ обусловлено тем, что рисунок выполнен на листе бумаги, несущем не псевдоевклидову, а собственно евклидову метрику (этот эффект аналогичен кажущемуся эффекту неортогональности векторов e'_0 и e'_1 на рис. 4.2 главы 2).

Таким образом, система отсчета, применяемая в физическом эксперименте, моделируется в пространстве Минковского времениподобной мировой линией (с отсчитываемым вдоль нее координатным временем t) и трехмерным физическим пространством Γ , движущимся вдоль мировой линии и ортогональным касательному к ней вектору τ . Весь этот геометрический объект будем тоже называть *системой отсчета*. Для того, чтобы не путать этот геометрический объект с системой отсчета, используемой в физическом эксперименте, будем добавлять к названию последней прилагательное «материальная».

Итак, *материальная система отсчета* — это совокупность тела отсчета, часов и «линеек» (приборов для определения координат тел). А *система отсчета* (без прилагательного «материальная») — указанный выше геометрический объект, моделирующий материальную систему отсчета в пространстве Минковского. Наличие соответствия между этими системами отсчета позволяет связать между собой теоретические результаты и экспериментальные данные.

Часы и «линейки», входящие в состав материальной системы отсчета считаются близкими к идеальным. Подчеркнем, что определение идеальных часов и «линеек» не может быть введено на основании одних только экспериментальных данных, без использования теоретических представлений об устройстве мира. Это вытекает из методологии физики, согласно которой «не бывает парадигмально независимых экспериментальных данных» [9]. С позиции излагаемой парадигмы идеальные часы и «линейки» могут быть определены следующим образом.

Согласно теории относительности, наш мир четырехмерен. В рамках этого представления *идеальные часы* и *идеальные «линейки»* являются приборами, которые позволяют с высокой точностью измерять расстояния внутри такого мира. При этом идеальные «линейки» предназначены для измерения расстояний в пространственноподобных направлениях, идеальные часы — во времениподобных направлениях (фактически идеальные часы измеряют длину их собственной мировой линии).

Обратим внимание на то, что два рассматриваемых физических пространства — физическое пространство материальной системы отсчета и физическое пространство системы отсчета — имеют разные сигнатуры. Действительно, первое является собственно евклидовым пространством, поэтому имеет сигнатуру $(+++)$, второе представляет собой пространственноподобную гиперплоскость, поэтому обладает сигнатурой $(---)$. Однако это различие не является принципиальным, потому что эти пространства переходят одно в другое путем изменения знаков всех скалярных произведений векторов, в связи с чем они обладают одинаковыми геометрическими свойствами.

Для осуществления измерений, разработки теории и решения задач требуется участие исследователя. Поэтому материальная система отсчета фактически включает в себя исследователя (на некоторых этапах работы он может быть заменен автоматизированным устройством). Вследствие того, что временное направление скрыто от нас, исследователь воспринимает себя и изучаемые материальные тела как находящиеся внутри трехмерного физического пространства материальной

системы отсчета. Отметим, что иногда восприятие исследователем себя как части мира переносится в теоретические рассуждения. Это проявляется, например, в использовании в научных текстах выражений типа «движение материальной точки воспринимается изнутри гиперплоскости как происходящее в направлении такого-то вектора».

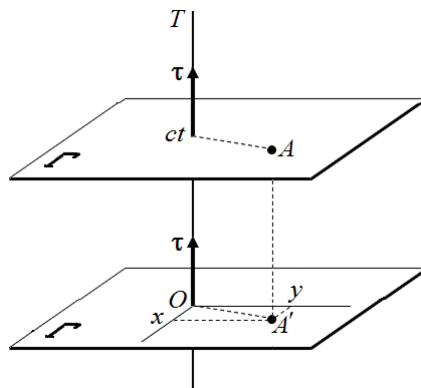
В механике вводится следующее определение.

Движение материального тела (или геометрического объекта) называется *поступательным*, если каждая прямая, проведенная в нем, перемещается параллельно самой себе. При поступательном движении тела (геометрического объекта) все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения.

Из всех систем отсчета, которые могут быть заданы в пространстве Минковского, наиболее удобными при решении многих задач являются инерциальные системы отсчета. Система отсчета в пространстве Минковского называется инерциальной, если мировая линия тела отсчета прямолинейна, а физическое пространство движется вдоль нее поступательно. В этом случае мировая линия тела отсчета называется осью времени. Уточним это определение.

Инерциальная система отсчета в пространстве Минковского M представляет собой пару $\{T, G\}$, где T — ось времени; G — физическое пространство (рис. 5.2). *Ось времени* T является неподвижной относительно M времениподобной прямой, вдоль которой отсчитывается координатное время t . *Физическое пространство* G есть трехмерная гиперплоскость, ортогональная к оси времени T и движущаяся вдоль нее поступательно в направлении от прошлого к будущему. Введенный ранее касательный вектор τ к мировой линии тела отсчета представляет собой в данном случае направляющий орт оси времени T . Он ориентирован в сторону будущего и не зависит от времени t . Вектор τ задает скорость движения гиперплоскости G относительно пространства M . Вследствие поступательного движения гиперплоскости G , эта скорость одинакова для всех точек гиперплоскости; она равна по модулю единице, так как $|\tau| = 1$. (Понятие «скорость относительно пространства M » определяется по обычным правилам механики, см. разд. 3.)

Использование прилагательного «инерциальная» в названии данной системы отсчета отражает тот факт, что такие системы отсчета, как будет показано в следующем разделе, служат математическими моделями материальных систем отсчета, называемых в механике *инерциальными*. Название последних обусловлено тем, что в них выполняется закон инерции Галилея.

Рис. 5.2. Инерциальная система отсчета $\{T, \Gamma\}$.

T — ось времени; τ — направляющий орт оси T , ориентированный в сторону будущего; Γ — физическое пространство; O — начало отсчета координатного времени; A — произвольная точка пространства Минковского; A' — проекция точки A на физическое пространство Γ при его расположении, проходящем через точку O ; ct — временная координата точки A ; x и y — пространственные координаты точки A (третья пространственная координата не показана, так как гиперплоскость Γ изображена двумерной).

Закон инерции Галилея (первый закон Ньютона). *Существуют материальные системы отсчета, относительно которых центр масс тела движется прямолинейно и равномерно или покоится, если тело свободно от внешних сил или действующие силы взаимно уравновешены.* Такие материальные системы отсчета называются *инерциальными*.

Опыт показывает, что в инерциальных материальных системах отсчета одинаковые физические процессы протекают одинаково. Это означает выполнение следующего утверждения.

Принцип относительности Галилея. *Не существует физических экспериментов, позволяющих выделить какую-либо одну из инерциальных материальных систем отсчета, то есть все эти системы отсчета равноправны.*

Г. Галилей сформулировал этот принцип в 1636 г. применительно к механическим явлениям. А. Эйнштейн распространил его на электромагнитные явления при создании в 1905 г. теории относительности.

Ранее отмечалось, что с геометрической точки зрения все времениподобные прямые равноправны (см. с. 80). Равноправны и все пространственноподобные гиперплоскости, потому что они ортогональны равноправным времениподобным прямым. Так как инерциальная система отсчета $\{T, G\}$ состоит из времениподобной прямой T и ортогональной к ней пространственноподобной гиперплоскости G , движущейся вдоль T с единичной скоростью, то с позиции геометрии все инерциальные системы отсчета, задаваемые в пространстве Минковского, равноправны. Поскольку они соответствуют инерциальным материальным системам отсчета, то из принципа относительности Галилея следует, что они равноправны и с точки зрения физики.

Допустим, что в пространстве Минковского M задана инерциальная система отсчета $\{T, G\}$, где T — ось времени; G — трехмерное физическое пространство; $G \perp T$. Введем с ее помощью систему координат в пространстве M .

Рассмотрим расположение физического пространства G , при котором оно проходит через точку $O \in T$, отвечающую началу отсчета координатного времени t ($O = T \cap G$ при $t = 0$). Зададим в гиперплоскости G ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в точке O . Присоединим к нему направляющий орт оси времени T , поменяв его обозначение с $\boldsymbol{\tau}$ на $\mathbf{e}_0$. Так как $G \perp T$, то $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис пространства M . Поскольку пространство M имеет сигнатуру $(+ - - -)$, то ортонормированность базиса означает выполнение соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек пространства M относительно O . Разложим его по базису $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$. Координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) этого разложения поставим в соответствие той точке, для которой вектор $\mathbf{R}$ служит радиусом-вектором. Тем самым в пространстве M оказывается заданной система координат. В связи с тем, что она определяется инерциальной системой отсчета, ее называют *инерциальной системой координат*. Одна из координатных осей этой системы координат совпадает с осью времени T , три другие лежат в гиперплоскости G при ее расположении в M , проходящем через точку O . Так как ось T и это расположение гиперплоскости G фиксированы в M , то координатные оси и вместе с ними вся система координат неподвижны относительно пространства Минковского, как и должно быть при задании системы координат в геометрическом пространстве.

В пространстве Минковского допускается сложение векторов, направленных вдоль временной оси, с векторами, направленными вдоль пространственных осей, поэтому координаты вдоль всех осей должны измеряться в одинаковых физических единицах. В физике принято измерять координаты в пространстве M в единицах длины. По этой причине временная координата, измеряемая вдоль оси времени T , задается в виде ct , где c — константа, входящая в формулу (1.1), t — координатное время (ct — натуральный параметр на оси времени T).

Временная координата произвольной точки пространства M находится путем ортогонального проецирования точки на ось времени T . Из этого, в частности, следует в силу $\Gamma \perp T$, что всем точкам физического пространства Γ (при каждом его расположении в M) соответствует один и тот же момент времени t . Поэтому физическое пространство Γ может быть названо *гиперплоскостью одновременных событий*.

Пространственные координаты материальной точки находятся путем ортогонального проецирования ее на расположение физического пространства Γ , отвечающее начальному моменту времени $t_0 = 0$, и последующего нахождения пространственных координат проекции в Γ (см. рис. 5.2).

Подчеркнем, что в эксперименте мы измеряем пространственные координаты тел в текущий момент времени t и не можем измерить их в начальный момент времени t_0 . Использование инерциальной материальной системы отсчета и соответствующей ей инерциальной системы отсчета в пространстве Минковского позволяет преодолеть это затруднение. Действительно, возьмем произвольную точку пространства M и рассмотрим ее ортогональную проекцию на гиперплоскость Γ . Так как в инерциальной системе отсчета гиперплоскость Γ движется поступательно в ортогональном к себе направлении, то такая проекция имеет в Γ одни и те же координаты при любом расположении Γ в M . Поэтому при использовании инерциальной материальной системы отсчета пространственные координаты материального тела, измеренные в текущий момент времени t , можно считать относящимися к начальному моменту времени t_0 .

Данное обстоятельство позволяет не обращаться каждый раз к системе координат (неподвижной относительно M), а пользоваться для описания движения материальной точки инерциальной системой отсчета с движущимся вдоль оси T физическим пространством Γ .

Рассмотрим какую-либо систему отсчета в пространстве Минковского M (не обязательно инерциальную). Она включает в себя времениподобную мировую линию и движущееся вдоль нее трехмерное фи-

зическое пространство (см. рис. 5.1). Каждой материальной точке соответствует в пространстве M определенная мировая линия, неподвижная относительно M . При движении в M физического пространства точка пересечения с ним мировой линии прочерчивает в физическом пространстве некоторую кривую. Эта кривая называется *траекторией* материальной точки в физическом пространстве, и именно ее прообраз в реальном мире, называемый траекторией соответствующего материального тела, мы определяем в опыте (рис. 5.3).

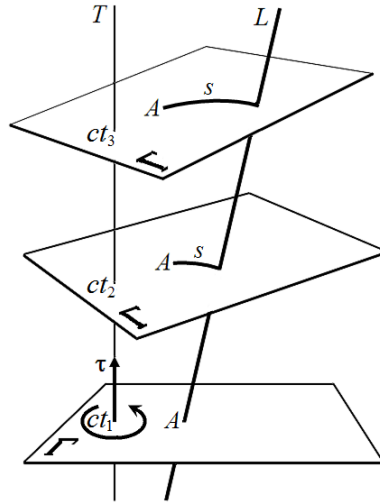


Рис. 5.3. Траектория материальной точки в физическом пространстве G , которое перемещается вдоль оси времени T с одновременным вращением вокруг этой оси.

Материальная точка движется в пространстве Минковского вдоль мировой линии L . Изнутри физического пространства G ее движение воспринимается как происходящее вдоль траектории s — линии, которую точка $L \cap G$ прочерчивает в физическом пространстве G при его движении вдоль оси T . Мировая линия не зависит от системы отсчета. Траектория зависит от системы отсчета. Здесь A — точка физического пространства G , в которой мировая линия L пересекает G в момент координатного времени t_1 (точка A неподвижна относительно G). Направление вращения физического пространства G показано стрелкой. Изображены участки траектории s , соответствующие промежуткам времени $[t_1, t_2]$ и $[t_1, t_3]$. Гиперплоскость G дана с понижением размерности на единицу.

В общем случае конфигурация траектории и конфигурация мировой линии могут быть совершенно различными, что объясняется возможным вращением или деформированием физического пространства при его движении в M . Например, на фотографии звездного неба, снятой с длительной выдержкой, звёзды выглядят в виде дуг окружностей с общим центром, находящимся вблизи Полярной звезды. Эти дуги есть изображения траекторий, которые мировые линии звезд прочерчивают в нашем физическом пространстве. Сами же мировые линии звезд на таких промежутках времени являются с высокой точностью прямолинейными. Различие в конфигурациях траекторий и мировых линий звезд обусловлено в данном случае вращением нашего физического пространства, скрепленного с вращающейся Землей.

Инерциальные материальные системы отсчета и соответствующие им инерциальные системы отсчета в пространстве Минковского обладают важными свойствами, отличающими их от других систем отсчета.

В инерциальных материальных системах отсчета и только в них выполняется закон инерции Галилея, причем все эти системы отсчета равноправны (см. с. 128).

Следующее свойство сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.1. *В пространстве Минковского M в инерциальной системе отсчета траектория материальной точки совпадает с ортогональной проекцией ее мировой линии на физическое пространство (при расположении физического пространства в M , соответствующем любому моменту времени). В неинерциальных системах отсчета это свойство в общем случае не имеет места.*

Доказательство. Зададим в пространстве M мировую линию L материальной точки и инерциальную систему отсчета $\{T, G\}$ с осью времени T и физическим пространством G . Спроецируем линию L на физическое пространство G при некотором его расположении в M . Обозначим линию-проекцию через p ($p \subset G$). Пусть точка A мировой линии L проецируется в точку B линии p . Рассмотрим движение физического пространства G в M . В инерциальных системах отсчета (и только в них) физическое пространство движется поступательно в ортогональном к себе направлении, то есть вдоль направления проецирования. Поэтому найдется такое расположение G , при котором точка B совпадает с точкой A . Поскольку $B \in G$, $A \in L$ и $B = A$, то в этой ситуации мировая линия L пересекает G в точке B . Отсюда следует, по определению траектории (с. 131), что точка B принадлежит траектории s материальной точки. Таким образом, ортогональная проекция произвольной точки мировой линии на произвольное распо-

ложение физического пространства принадлежит траектории s . Это означает, что $p \subset s$.

Верно и обратное. Так как каждая точка траектории движется вместе с физическим пространством Γ прямолинейно в ортогональном к нему направлении и при некотором его расположении совпадает с одной из точек мировой линии L , то она является проекцией этой точки мировой линии на Γ . Значит, всякая точка траектории s принадлежит проекции p , то есть $s \subset p$. Вместе с доказанным ранее это приводит к равенству $s = p$. Следовательно, траектория материальной точки действительно совпадает с проекцией мировой линии на физическое пространство.

В неинерциальных системах отсчета движение физического пространства не является поступательным в ортогональном к нему направлении, в связи с чем в общем случае не существует такого расположения физического пространства, при котором точка B совпала бы с точкой A . Поэтому в неинерциальных системах отсчета данное свойство в общем случае не выполняется. ■

Для отдельных материальных точек свойство, указанное в теореме 5.1, может выполняться и в неинерциальных системах отсчета. Например, на рис. 5.3 материальная точка, моделирующая тело отсчета, движется в пространстве M вдоль мировой линии, являющейся осью времени T . Ее траекторией в физическом пространстве Γ служит точка $T \cap \Gamma$, и эта точка совпадает с ортогональной проекцией мировой линии T на физическое пространство Γ .

Приведем два следствия, вытекающие из теоремы 5.1.

Допустим, что мы знаем траекторию материальной точки в физическом пространстве инерциальной системы отсчета и знаем, какому моменту времени соответствует каждая точка траектории. Тогда, благодаря указанному в теореме 5.1 свойству этих систем отсчета, мы можем восстановить всю мировую линию материальной точки в пространстве M . Для этого нужно в каждой точке траектории построить нормаль к физическому пространству и выбрать на ней точку, временная координата которой совпадает с моментом времени, соответствующим данной точке траектории. Объединение всех этих точек даст искомую мировую линию. А так как мировая линия есть фиксированная кривая в M , то она будет одной и той же при использовании любой инерциальной системы отсчета (хотя траектории материальной точки в них различны). Следовательно, изучая поведение тел в трехмерном пространстве любой инерциальной материальной системы отсчета, мы можем установить законы движения тел в четырехмерном мире.

При использовании неинерциальных материальных систем отсчета установление законов движения тел существенно затруднено, так как измеряемые в них характеристики движения тел зависят от движения физического пространства.

Еще одно следствие теоремы 5.1 состоит в том, что *в инерциальных системах отсчета прямолинейной мировой линии соответствует прямолинейная траектория*. Это объясняется тем, что ортогональная проекция прямой линии на гиперплоскость прямолинейна. (Возможна также траектория в виде точки, если мировая линия ортогональна физическому пространству.) Обратное утверждение, заметим, неверно: в инерциальной системе отсчета прямолинейная траектория может соответствовать не только прямолинейной мировой линии, но и криволинейной мировой линии, если последняя лежит в плоскости, содержащей нормаль к физическому пространству, ибо вся такая плоскость проецируется на физическое пространство в прямую линию (рис. 5.4).

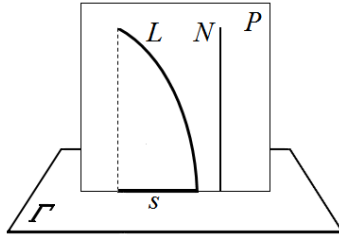


Рис. 5.4. Криволинейная мировая линия L , которой соответствует прямолинейная траектория s .

Мировая линия L содержится в плоскости P , проходящей через нормаль N к физическому пространству Γ .

Отметим, что в пространстве Минковского система координат может быть задана не только способом, изложенным выше (с помощью радиуса-вектора точек пространства). Ее можно ввести также следующим способом. Зададим в пространстве M систему отсчета (не обязательно инерциальную). В физическом пространстве этой системы отсчета построим систему координат. При движении физического пространства вдоль мировой линии тела отсчета эта система координат будет порождать такие же системы координат в сечениях пространства M , через которые проходит физическое пространство. Если движение физического пространства является непрерывным, то объединение этих трехмерных систем координат будет представлять собой четырехмерную систему координат в пространстве M .

Следует иметь в виду, что если мировая линия тела отсчета не прямолинейна, то задать таким способом систему координат можно только в некоторой окрестности этой мировой линии, а не во всем пространстве M . Дело в том, что любые две гиперплоскости, ортогональные

касательному вектору к кривой в двух ее близких точках, пересекаются в центре кривизны кривой. Поэтому на расстояниях от непрямолинейной мировой линии, равных или больших ее радиуса кривизны, не будет обеспечено взаимно однозначное соответствие между точками пространства и значениями координат. Во всем пространстве Минковского можно задать систему координат лишь с помощью либо инерциальной системы отсчета, либо такой неинерциальной системы отсчета, у которой мировая линия тела отсчета прямолинейна (потому что в этом случае физическое пространство движется вдоль мировой линии параллельно самому себе и его расположения, отвечающие разным моментам времени, не пересекаются, хотя они и могут быть повернуты относительно друг друга, см. рис. 5.3).

Строго говоря, ввести систему координат во всем пространстве Минковского можно и при криволинейной мировой линии тела отсчета. Для этого нужно представить физическое пространство не в виде гиперплоскости, а в виде криволинейной гиперповерхности, которая меняет свою кривизну при движении в M таким образом, что ее расположения, соответствующие разным моментам времени, заполняют все пространство M , но не пересекаются между собой. Однако этот вариант введения системы координат не представляет практического интереса, так как не имеется ни теоретических, ни экспериментальных оснований задавать в пространстве Минковского физическое пространство криволинейным, да еще с кривизной, зависящей от времени. (По-другому обстоит дело в рамках общей теории относительности, так как там в качестве базисного пространства используется криволинейное псевдориманово пространство, но обсуждение этой ситуации не входит в нашу задачу.)

Сравним инерциальные системы отсчета, задаваемые в специальной теории относительности и в классической механике (рис. 5.5 и 5.6). Не повторяя детали их устройства, изложенные в подписях к рисункам, остановимся на основных различиях.

В специальной теории относительности все системы отсчета, включая инерциальные, являются подмножествами единого четырехмерного базисного пространства — пространства Минковского, — объемлющего все материальные точки. Оно считается неподвижным (потому что нет объекта, по отношению к которому можно было бы рассматривать его движение). В классической механике невозможно задать подобное неподвижное объемлющее пространство, так как в противном случае соответствующая ему материальная система отсчета была бы выделенной (абсолютно неподвижной), что не допускается принципом относительности Галилея. В классической механике каждая система отсчета наделена своим трехмерным геометрическим пространством. Все эти пространства накладываются друг на друга и имеют одина-

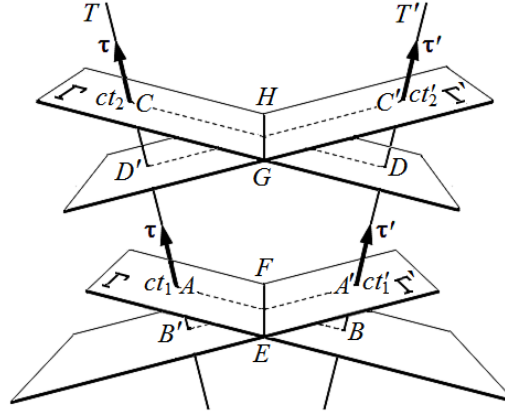


Рис. 5.5. Инерциальные системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ в специальной теории относительности.

T и T' — оси времени; Γ и Γ' — физические пространства; направляющие орты τ и τ' осей времени T и T' ориентированы в сторону будущего (кажущееся нарушение условий $\Gamma \perp \tau$ и $\Gamma' \perp \tau'$ объясняется причиной, указанной в подписи к рис. 5.1). Показаны расположения физического пространства Γ в моменты времени t_1 и t_2 (определяемые по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$) и расположения физического пространства Γ' в моменты t'_1 и t'_2 (по часам системы $\{T', \Gamma'\}$, моменты времени t'_1 и t'_2 не связаны с t_1 и t_2). В четырехмерном пространстве M непараллельные трехмерные гиперплоскости Γ и Γ' пересекаются по двумерной плоскости (на рисунке она имеет вид прямых EF и GH , потому что Γ и Γ' изображены двумерными). Так как физическое пространство является гиперплоскостью одновременных событий, то с позиции системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ тело отсчета системы $\{T', \Gamma'\}$ находится в момент t_1 в точке B на расстоянии $|AB|$ от тела отсчета системы $\{T, \Gamma\}$, а в момент t_2 в точке D на расстоянии $|CD|$ от него. Аналогично с позиции системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ тело отсчета системы $\{T, \Gamma\}$ находится в моменты t'_1 и t'_2 в точках B' и D' на расстояниях соответственно $|A'B'|$ и $|C'D'|$ от тела отсчета системы $\{T', \Gamma'\}$. Выполняются равенства $|AC| = c(t_2 - t_1)$ и $|A'C'| = c(t'_2 - t'_1)$.

ковую собственно евклидову метрику. Подчеркнем, что специальная теория относительности удовлетворяет принципу относительности Галилея, ибо в этой теории все инерциальные системы отсчета, как было показано, равноправны. Отсутствие в данном случае абсолютной систе-

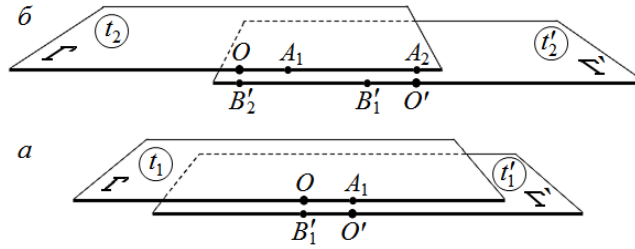


Рис. 5.6. Инерциальные системы отсчета $\{O, \Gamma, \mathcal{t}\}$ и $\{O', \Gamma', \mathcal{t}'\}$ в классической механике.

В классической механике материальная система отсчета моделируется тройкой $\{O, \Gamma, \mathcal{t}\}$, называемой системой отсчета (без слова «материальная»), где O — материальная точка, изображающая тело отсчета (начало координат), Γ — трехмерное физическое пространство, неподвижное относительно O , $\mathcal{t}$ — абстрактный образ часов. В каждой системе отсчета физическое пространство свое, при этом все они накладываются друг на друга. Так как всем точкам физического пространства отвечает один и тот же момент времени и все физические пространства накладываются друг на друга, то между моментами времени, определяемыми в разных системах отсчета, имеется взаимно однозначное соответствие. Постулируется, что промежуток времени между двумя событиями, измеренный в любых системах отсчета, одинаков. Инерциальные системы отсчета определяются как математические модели инерциальных материальных систем отсчета. По отношению друг к другу инерциальные системы отсчета или покоятся, или движутся равномерно, прямолинейно и поступательно.

На рисунке физические пространства Γ и Γ' изображены двумерными. Для наглядности, одно из них приподнято над другим (в действительности они накладываются друг на друга). На рис. а показаны расположения физических пространств Γ и Γ' в момент времени t_1 по часам системы $\{O, \Gamma, \mathcal{t}\}$ (этому моменту соответствует момент t'_1 в системе $\{O', \Gamma', \mathcal{t}'\}$). На рис. б показаны расположения пространств Γ и Γ' в момент t_2 (которому соответствует момент t'_2). С позиции системы отсчета $\{O, \Gamma, \mathcal{t}\}$ начало O' системы $\{O', \Gamma', \mathcal{t}'\}$ находится в момент t_1 в точке A_1 , а в момент t_2 в точке A_2 . С позиции системы отсчета $\{O', \Gamma', \mathcal{t}'\}$ начало O системы $\{O, \Gamma, \mathcal{t}\}$ находится в моменты t'_1 и t'_2 в точках B'_1 и B'_2 соответственно. Выполняются равенства $|A_1 A_2| = |B'_1 B'_2|$ и $|t_2 - t_1| = |t'_2 - t'_1|$.

мы отсчета объясняется тем, что не существует материальных точек, неподвижных относительно M . Все они движутся в M вдоль своих мировых линий, причем с одинаковыми по модулю скоростями (равными единице при вычислении скоростей в безразмерных единицах и равными c в размерных единицах, см. разд. 3).

Еще одно существенное различие между инерциальными системами отсчета, рассматриваемыми в специальной теории относительности и в классической механике, заключается в способах их задания.

В классической механике инерциальная система отсчета определяется как математическая модель материальной инерциальной системы отсчета. Последняя вводится первым законом Ньютона, представляющим собой теоретическое обобщение экспериментальных фактов (см. с. 128 и подпись к рис. 5.6).

В специальной теории относительности инерциальная система отсчета имеет чисто геометрическое определение. Это такая система отсчета в пространстве Минковского, которая образована взаимно ортогональными времениподобной прямой T и пространственноподобной гиперплоскостью G , движущейся поступательно вдоль T . Ее называют инерциальной, так как она служит моделью материальной инерциальной системы отсчета (это будет показано в разд. 6).

Важное различие между системами отсчета, применяемыми в обсуждаемых теориях, связано с понятием одновременности событий. Это различие имеет место для любых систем отсчета, а не только для инерциальных. Пусть два события происходят одновременно по часам некоторой материальной системы отсчета. Построим в каждой из теорий систему отсчета, соответствующую данной материальной системе отсчета. В каждой из этих систем отсчета рассматриваемые события будут одновременными. В классической механике они будут одновременными и во всех других системах отсчета (потому что в этой теории физические пространства всех систем отсчета накладываются друг на друга и всем точкам физического пространства отвечает один и тот же момент времени). В специальной теории относительности рассматриваемые события могут оказаться неодновременными в других системах отсчета. Это объясняется тем, что здесь физические пространства в общем случае наклонены по отношению друг к другу. Например, на рис. 5.5 в системе отсчета $\{T, G\}$ одновременными являются события, происходящие в точках A , E и B пространства M . А в системе отсчета $\{T', G'\}$ одновременны события, происходящие в точках A' , E и B' .

Следующее различие между инерциальными системами отсчета, используемыми в специальной теории относительности и в классической

механике, связано с той ролью, которую они играют в этих теориях. Для объяснения этого различия нам потребуются в дополнение к первому закону Ньютона второй и третий законы Ньютона.

Приводимые ниже формулировки законов относятся к телам, размерами и собственным вращением которых можно пренебречь. В классической механике такие тела моделируются материальными точками, то есть геометрическими точками, каждая из которых характеризуется определенным положительным числом, называемым массой. Считается, что масса материальной точки не зависит от ее движения.

Второй закон Ньютона.

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{f}$ — суммарная сила, действующая на материальную точку; m — масса материальной точки; $\mathbf{a}$ — ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета ($\mathbf{f}$ и $\mathbf{a}$ — векторы; m — скаляр, $m > 0$).

Легко убедиться в том, что этот закон согласован с первым законом Ньютона. В самом деле, пусть материальная точка свободна от сил или действующие на нее силы взаимно уравновешены, то есть $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Из (5.2) следует, что $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Так как ускорение $\mathbf{a}$ является производной вектора скорости $\mathbf{v}$ по времени, то последнее равенство выполняется в том и только том случае, если материальная точка движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, то есть прямолинейно и равномерно. Именно этого требует первый закон Ньютона при $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Значит, второй закон Ньютона согласован с первым.

Имеются разные трактовки второго закона Ньютона. Мы будем придерживаться той из них, согласно которой формула (5.2) является определением понятия силы (в предположении, что масса материальной точки известна; ускорение вычисляется по правилам кинематики).

Из принципа относительности Галилея (с. 128) следует, что формула (5.2) должна приводить к одному и тому же значению силы $\mathbf{f}$ при использовании любой инерциальной системы отсчета. С учетом постоянства массы m это означает, что во всех инерциальных системах отсчета ускорение $\mathbf{a}$ должно быть одинаковым. Это требование накладывает ограничение на взаимное движение инерциальных систем отсчета. Из теоремы о сложении ускорений (теоремы Кориолиса) вытекает, что указанное требование выполняется в том и только том случае, если физические пространства любых двух инерциальных систем отсчета либо покоятся относительно друг друга, либо движутся по отношению друг к другу со скоростью, которая постоянна по величине и направлению и

одинакова во всех точках физического пространства. Этот вывод можно перефразировать так: *в классической механике любые две инерциальные системы отсчета по отношению друг к другу или покоятся, или движутся равномерно, прямолинейно и поступательно.*

Классическая механика строится на предположении, что источником силы, действующей на тело, всегда служит некоторое другое тело. Таким образом, сила представляет собой результат взаимодействия по крайней мере двух тел.

Третий закон Ньютона. *Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, равны по модулю и противоположны по направлению, то есть*

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{f}_1$ — сила, которая действует на первую материальную точку со стороны второй; $\mathbf{f}_2$ — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой; обе силы действуют одновременно.

Если предметом рассмотрения является одна из взаимодействующих материальных точек, то в этом случае сила, приложенная к ней, называется силой *действия*, а сила, приложенная к другой материальной точке, называется силой *противодействия*. В этих терминах третий закон Ньютона может быть сформулирован следующим образом: *действие всегда есть равное и противоположно направленное противодействие.*

Отметим, что силы, с которыми материальные точки воздействуют друг на друга, могут быть направлены как вдоль прямой, соединяющей материальные точки, так и вдоль параллельных прямых, не совпадающих с этой прямой (рис. 5.7).

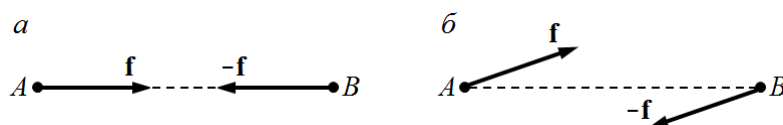


Рис. 5.7. Материальные точки A и B , взаимодействующие в соответствии с третьим законом Ньютона.

В случае a силы направлены вдоль прямой AB (в этой ситуации суммарное количество движения и суммарный момент количества движения материальных точек не изменяются); в случае b линии действия сил параллельны, но не совпадают с прямой AB (в этой ситуации суммарное количество движения сохраняется, а суммарный момент количества движения изменяется).

Обратим внимание на то, что понятие силы, участвующее в законах Ньютона, относится только к инерциальным системам отсчета. Поясним это на простом примере. Пусть материальная точка массы m покоится относительно какой-либо инерциальной системы отсчета. Согласно как первому, так и второму законам Ньютона, на нее не действуют силы (или они уравновешены). Рассмотрим эту материальную точку с позиции вращающейся (неинерциальной) системы отсчета. В ней траектория точки представляет собой криволинейную дугу. Следовательно, относительно этой системы отсчета материальная точка движется с некоторым ускорением $\mathbf{a}$. Если бы для данного случая формула (5.2) выполнялась, то это означало бы, что на материальную точку действует сила $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, что противоречит выводу об отсутствии силы, вытекающему из первого и второго законов Ньютона. Кроме того, отсутствует тело, являющееся источником этой силы и подверженное противодействию, что противоречит третьему закону Ньютона. Поэтому введенное понятие силы действительно относится только к инерциальным системам отсчета.

Вернемся к обсуждению различий между инерциальными системами отсчета, применяемыми в специальной теории относительности и в классической механике.

В этих теориях существенно различна роль инерциальных систем отсчета. Так, из законов Ньютона следует, что классическая механика в самих своих основах базируется на представлении об инерциальных системах отсчета, более того, она в принципе не может быть сформулирована без представления о них. В противоположность этому, исходные постулаты специальной теории относительности формулируются без упоминания каких-либо систем отсчета (см. разд. 1 настоящей главы). Кроме того, как будет видно из содержания главы 4, закон взаимодействия тел тоже задается без применения системы отсчета (по крайней мере, в случае электромагнитного взаимодействия). Таким образом, инерциальные системы отсчета играют основополагающую роль в классической механике и лишь вспомогательную роль в специальной теории относительности.

В специальной теории относительности использование систем отсчета, прежде всего инерциальных, оказывается полезным в двух случаях. Во-первых, при сравнении полученных теоретических результатов с опытными данными (в этом случае в пространстве Минковского должна быть задана система отсчета, соответствующая материальной системе отсчета, применяемой в эксперименте). Во-вторых, при привлечении математического аппарата аналитической геометрии к решению

задач (для этого в пространстве Минковского должна быть введена система координат, что делается с помощью системы отсчета). Нужно подчеркнуть, что не все задачи теории относительности требуют использования систем отсчета. Например, без введения систем отсчета в разд. 2 и 4 настоящей главы рассчитан парадокс близнецов и получено уравнение расхода массы фотонной ракеты.

В завершение раздела отметим, что каждая физическая теория, даже самая лучшая, имеет свои недостатки. К недостаткам классической механики относится следующее.

1. Использование понятия системы отсчета в исходных законах. Дело в том, что в природе не существуют системы отсчета. Система отсчета задается исследователем, а законы природы не могут зависеть от субъективного выбора исследователем той или иной системы отсчета.

2. Наличие в исходных законах логического круга: в первом законе Ньютона инерциальные системы отсчета определяются через понятие силы, а во втором законе Ньютона сила определяется с помощью понятия инерциальной системы отсчета.

3. Использование в третьем законе Ньютона допущения о дальности и мгновенности передачи взаимодействия на конечное расстояние. (Это допущение обычно не формулируется в явном виде, но фактически присутствует в данном законе, потому что из наличия ненулевого расстояния между взаимодействующими материальными точками следует, что их воздействие друг на друга мгновенно переносится через пустой пространственный промежуток.) Такое же допущение используется в законе тяготения Ньютона.

В отличие от классической механики, специальная теория относительности не имеет указанных недостатков. Это объясняется тем, что ее исходные постулаты не включают в себя понятие системы отсчета, а постулируемый закон взаимодействия тел базируется на принципе близкодействия (см. разд. 1 настоящей главы и разд. 2 главы 4).

Разумеется, специальная теория относительности обладает своими недостатками. Наиболее важный из них, присущий как специальной, так и общей теориям относительности, заключается в представлении об окружающем мире как о полностью детерминированной системе. Это представление с неизбежностью вытекает из использования в качестве модели мира четырехмерного пространства-времени, в котором сосуществуют все прошлые, настоящие и будущие состояния всех материальных тел. Теория относительности является теорией даже более детерминированной, нежели классическая механика, потому что в последней могут существовать ветвления решений, которых не мо-

жет быть в теории относительности, потому что в ней мировые линии всех тел уже предзаданы (хотя мы их и не видим).

Итак, специальная теория относительности описывает окружающий нас мир как четырехмерный. Но мы не способны наблюдать сегодня вчерашнее и завтрашнее местоположения изучаемого материального тела. По этой причине экспериментальное изучение движения тел осуществляется в рамках представлений специальной теории относительности тем же методом, что и в рамках представлений классической механики, а именно, с помощью материальных систем отсчета. Математические модели последних, тоже называемые системами отсчета, играют в классической механике и в специальной теории относительности принципиально разные роли. В классической механике их роль является основополагающей, так как исходные законы этой теории включают в себя понятие инерциальной системы отсчета. В противоположность этому, в специальной теории относительности роль систем отсчета является вспомогательной. Исходные постулаты этой теории формулируются без использования систем отсчета.

6. Описание движения материальной точки с помощью инерциальной системы отсчета

Рассмотрим материальную точку λ , движущуюся в пространстве Минковского M вдоль гладкой времениподобной мировой линии L . Согласно постулатам 3 и 4 из разд. 1, она имеет ненулевую массу m ($m > 0$). Опишем ее движение с помощью инерциальной системы отсчета $\{T, G\}$, где T — ось времени; G — физическое пространство, движущееся поступательно вдоль оси T ($G \perp T$). Обозначим: t — координатное время; O — точка оси времени T , отвечающая началу отсчета координатного времени; G_0 — физическое пространство в момент времени $t = 0$ ($G_0 \cap T = O$); $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек мировой линии L относительно точки O (будем называть его также радиусом-вектором материальной точки λ); $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к мировой линии L , ориентированный в сторону будущего; t_* — собственное время материальной точки λ (рис. 6.1).

Представим радиус-вектор $\mathbf{R}$ в виде суммы составляющих вдоль оси времени T и вдоль физического пространства G_0 :

$$\mathbf{R} = ct\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}, \quad (6.1)$$

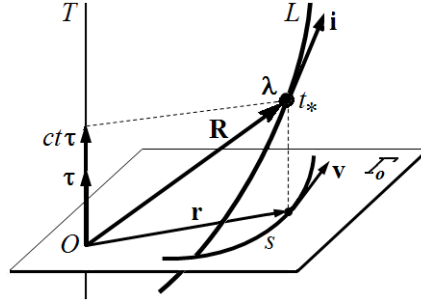


Рис. 6.1. Материальная точка λ , движущаяся вдоль мировой линии L , и ее траектория s в физическом пространстве G_0 .

Гиперплоскость G_0 показана с понижением размерности на единицу.

где c — константа размерности скорости, входящая в формулу (1.1); ct — натуральный параметр на оси времени T ; τ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в направлении будущего; $\mathbf{r}$ — составляющая вектора $\mathbf{R}$ вдоль физического пространства G_0 ; $\tau \in T$; $\mathbf{r} \in G_0$; $\tau \perp \mathbf{r}$ (см. рис. 6.1).

Равенство (6.1) ставит в соответствие каждой точке мировой линии L определенное значение координатного времени t . Тем самым мировая линия L оказывается параметризованной наряду с собственным временем t_* также координатным временем t . Вследствие временной ориентированности пространства M (см. постулаты 2 и 4 в разд. 1), направления возрастания параметров t_* и t на линии L совпадают.

Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{R}$ материальной точки λ как функцию ее собственного времени t_* : $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t_*)$. Так как величина ct_* является натуральным параметром на мировой линии L (см. разд. 1), то производная радиуса-вектора $\mathbf{R}$ по параметру ct_* есть единичный касательный вектор к мировой линии L , направленный в сторону возрастания времени t_* . Значит, эта производная равна вектору $\mathbf{i}$:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d(ct_*)} = \mathbf{i} \quad (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1). \quad (6.2)$$

Вектор $\mathbf{r}$, входящий в (6.1), представляет собой ортогональную проекцию вектора $\mathbf{R}$ на физическое пространство G_0 . В связи с тем, что в инерциальной системе отсчета физическое пространство движется в ортогональном к себе направлении, проекция вектора $\mathbf{R}$ на физическое пространство G одинакова при любом расположении G в M ,

поэтому можно считать, что $\mathbf{r} \in \Gamma$ при любом t . Пусть s — траектория материальной точки λ в физическом пространстве Γ (определение траектории дано на с. 131). Так как система отсчета $\{T, \Gamma\}$ является инерциальной, то по теореме 5.1 траектория s совпадает с проекцией мировой линии L на Γ при любом расположении Γ в M . Очевидно, что вектор $\mathbf{r}$ служит радиусом-вектором точек траектории s относительно точки $\Gamma \cap T$. Производная вектора $\mathbf{r}$ по времени есть *скорость* $\mathbf{v}$ материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ (или в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (6.3)$$

Поскольку $\mathbf{r} \in \Gamma$ при всех t , то из (6.3) вытекает, что $\mathbf{v} \in \Gamma$. А так как дифференциал радиуса-вектора точек гладкой линии направлен вдоль касательной к линии, то из (6.3) следует, что скорость $\mathbf{v}$ является касательным вектором к траектории s материальной точки λ (см. рис. 6.1). Модуль скорости обозначим через v :

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|} \quad (v \geq 0), \quad (6.4)$$

величину v принято называть, так же как $\mathbf{v}$, *скоростью* материальной точки (относительно рассматриваемой системы отсчета).

Из $\mathbf{v} \in \Gamma$ следует, что $\mathbf{v}$ — пространственноподобный вектор, значит, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \leq 0$. Учитывая это, получаем из (6.4):

$$v^2 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.5)$$

С помощью (6.1) и (6.3) находим производную вектора $\mathbf{R}$ по параметру ct :

$$\frac{d\mathbf{R}}{d(ct)} = \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (6.6)$$

С учетом (6.2) эта производная может быть вычислена по-другому:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d(ct)} = \frac{d\mathbf{R}}{d(ct_*)} \frac{d(ct_*)}{d(ct)} = \mathbf{i} \frac{dt_*}{dt}. \quad (6.7)$$

На основании (6.6) и (6.7) имеем:

$$\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c} = \mathbf{i} \frac{dt_*}{dt}. \quad (6.8)$$

Равенство векторов влечет равенство их скалярных квадратов:

$$\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) \left(\frac{dt_*}{dt}\right)^2. \quad (6.9)$$

Раскроем скобки в левой части выражения. Принимая во внимание зависимость $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, формулу (6.5) и ортогональность векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{v}$ ($\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0$, так как $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{v} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$), получаем из (6.9):

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{dt_*}{dt}\right)^2. \quad (6.10)$$

В выражениях (6.7)–(6.10) присутствует производная dt_*/dt . Для ее существования требуется, чтобы функция $t_*(t)$ была дифференцируемой. Функция $t_*(t)$ представляет собой зависимость между величинами t_* и t , задаваемую равенством (6.1): $\mathbf{R}(t_*) = ct\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}$. Из этого равенства и из рис. 6.1 видно, что связь между величинами t_* и t устанавливается путем ортогонального проецирования точек мировой линии L на ось времени T . Можно сказать также, что функция $t_*(t)$ устанавливает связь между точками оси времени T и одномоментными с ними точками мировой линии L (одномоментность определяется в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$).

При гладкой времениподобной мировой линии L функция $t_*(t)$, как можно доказать, является взаимно однозначной и дифференцируемой. Значит, производная dt_*/dt существует и не равна нулю. В силу совпадения направлений возрастания параметров t_* и t на L , эта производная положительна ($dt_*/dt > 0$). Поскольку $dt_*/dt \neq 0$, то правая часть равенства (6.10) положительна, поэтому положительна и его левая часть: $1 - (v/c)^2 > 0$. Отсюда и из неравенств $v \geq 0$ и $c > 0$ вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 6.1. Об ограниченности скорости материальной точки ненулевой массы. Материальная точка ненулевой массы, имеющая гладкую времениподобную мировую линию, движется относительно произвольной инерциальной системы отсчета со скоростью v , меньшей по модулю константы c , входящей в формулу (1.1):

$$v < c. \quad (6.11)$$

Учитывая положительность производной dt_*/dt и трактуя ее как отношение двух дифференциалов, получаем с помощью (6.10) зависимость между собственным временем t_* материальной точки и ее координатным временем t :

$$dt_* = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (6.12)$$

Из (6.8) и (6.12) находим:

$$\mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (6.13)$$

где, напомним, $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к времениподобной мировой линии L ; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T (векторы $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau}$ направлены в сторону будущего); $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки относительно инерциальной системы отсчета $\{T, G\}$ (она является касательным вектором к траектории материальной точки, $\mathbf{v} \in G$, см. рис. 6.1); $v = |\mathbf{v}|$; c — константа, входящая в формулу (1.1).

Согласно (1.1) и постулату 5, собственное время материальной точки l , выраженное в единицах длины, связано с величиной t_* равенством $l = ct_*$ и представляет собой натуральный параметр на мировой линии материальной точки. Отсюда и из (6.12) следует, что длина Δl участка мировой линии между точками, соответствующими значениям t_1 и t_2 координатного времени, есть

$$\Delta l = c\Delta t_* = c \int_{t_1}^{t_2} dt_* = c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt; \quad (6.14)$$

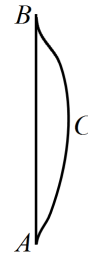
отметим, что скорость v , входящая в эту и предыдущие формулы в общем случае зависит от времени: $v = v(t)$.

Формулы (6.11)–(6.14) являются одними из основных в специальной теории относительности.

Проиллюстрируем применение формулы (6.14) на примере парадокса близнецов, рассмотренного в разд. 2. Пусть один из братьев-близнецов остается на Земле, а другой улетает в космос, долго путешествует и затем возвращается. По космическим масштабам мировая линия брата-домоседа близка к прямолинейной (рис. 6.2).

Рис. 6.2. Мировые линии братьев-близнецов.

A — точка расставания; B — точка встречи; мировая линия брата-домоседа — прямолинейный времениподобный отрезок AB ; мировая линия брата-путешественника — гладкая времениподобная линия ACB .



Введем в пространстве Минковского инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени T , совпадающей с мировой линией брата-домоседа. Пусть v — скорость брата-путешественника относительно этой системы отсчета; t_A и t_B — моменты времени, определяемые в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ и отвечающие точкам расставания A и встречи B соответственно ($t_B > t_A$). Промежуток времени между моментами расставания и встречи составляет по часам брата-домоседа величину

$$\Delta t = t_B - t_A,$$

а по часам брата-путешественника, с учетом формулы (6.14), величину

$$\Delta t_* = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt;$$

очевидно, что $\Delta t_* < \Delta t$ (при $v \neq 0$). Этот результат иллюстрирует справедливость следствия к теореме 5.8 (глава 2, с. 89), согласно которому прямолинейный времениподобный отрезок длиннее любой не совпадающей с ним гладкой времениподобной линии, соединяющей его концы.

Обратим внимание на то, что промежутки времени, отсчитываемые неподвижными и движущимися часами, разнятся на величину, которая зависит от модуля скорости движущихся часов и не зависит ни от направления скорости, ни от ускорения, ни от каких-либо других характеристик движения (часы считаются идеальными, см. с. 126).

Теорема 6.2. *Имеет место эквивалентность*

$$\mathbf{i} = \text{const} \iff \mathbf{v} = \text{const}. \quad (6.15)$$

Здесь и в доказательстве использованы обозначения, указанные в пояснении к формуле (6.13).

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} = \text{const}$. Тогда, в силу $\boldsymbol{\tau} = \text{const}$ и $c = \text{const}$, правая часть равенства (6.13) постоянна, поэтому постоянная и его левая часть, то есть $\mathbf{i} = \text{const}$.

Теперь пусть $\mathbf{i} = \text{const}$. Умножим скалярно обе части выражения (6.13) на вектор $\boldsymbol{\tau}$. Учитывая, что $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0$, получаем: $\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Так как левая часть этого равенства постоянна, то постоянна и правая часть, поэтому $v = \text{const}$. Из (6.13) имеем: $\mathbf{v} = c(\mathbf{i}\sqrt{1 - (v/c)^2} - \boldsymbol{\tau})$, откуда, вследствие постоянства c , $\mathbf{i}$, v и $\boldsymbol{\tau}$, вытекает $\mathbf{v} = \text{const}$. С учетом предыдущего это означает выполнение эквивалентности (6.15). ■

Движение материальной точки относительно некоторой системы отсчета называется *прямолинейным*, если вектор скорости имеет постоянное направление, и называется *равномерным*, если вектор скорости имеет постоянную длину (при $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Материальная точка называется *покоящейся* или *неподвижной* относительно системы отсчета, если ее скорость относительно этой системы отсчета равна нулю ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Подчеркнем, что речь идет о покое именно относительно системы отсчета. Относительно пространства M покоящаяся материальная точка, как и любая другая материальная точка, движется со скоростью, равной вектору $\mathbf{i}$ (см. разд. 3).

Из этих определений следует, что *материальная точка покоится или движется прямолинейно и равномерно в том и только том случае, если ее вектор скорости постоянен*. Отсюда, принимая во внимание, что условие $\mathbf{i} = \text{const}$ означает прямолинейность мировой линии L , заключаем, что теорема 6.2 может быть переформулирована в виде следующей теоремы.

Теорема 6.3. *Материальная точка имеет прямолинейную мировую линию тогда и только тогда, когда она покоится или движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы отсчета.*

В силу независимости мировой линии от выбора системы отсчета, из теоремы 6.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если материальная точка покоится или движется прямолинейно и равномерно относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, то она покоится или движется таким же образом относительно любой инерциальной системы отсчета.*

Теорема 6.4. *Мировая линия материальной точки представляет собой прямую, параллельную оси времени инерциальной системы отсчета (то есть $\mathbf{i} = \boldsymbol{\tau}$ при всех t), тогда и только тогда, когда материальная точка покоится относительно этой системы отсчета во все моменты времени ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при всех t).*

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при всех t . Тогда из (6.13) сразу следует, что $\mathbf{i} = \boldsymbol{\tau}$ при всех t .

Если же $\mathbf{i} = \boldsymbol{\tau}$, то из (6.13) имеем: $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\tau}(\sqrt{1 - (v/c)^2} - 1)$. В левой части этого равенства стоит пространственноподобный вектор, в правой части — времениподобный вектор. Такое равенство выполняется в единственном случае, когда оба вектора нулевые, поэтому $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Значит, условие $\mathbf{i} = \boldsymbol{\tau}$ при всех t влечет $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при всех t . Вместе с предыдущим это доказывает теорему. ■

До сих пор мы рассматривали кинематику материального тела, то есть занимались описанием движения тела без исследования причин, вызывающих движение. Такими причинами являются внешние воздействия на тело. Отметим, что использование термина «воздействие» вместо термина «сила», употребляемого в классической механике, объясняется тем, что сила описывается вектором, тогда как в четырехмерном пространстве-времени воздействие описывается посредством тензора (см. главу 4). Сформулируем следующий постулат.

Закон инерции (в специальной теории относительности).

Если тело не подвержено воздействиям со стороны других тел или эти воздействия взаимно уравновешены (то есть суммарное воздействие равно нулю), то центр масс тела движется в пространстве Минковского вдоль прямолинейной мировой линии.

Обратное утверждение не имеет места, так как существуют воздействия, которые могут деформировать тело или вращать его вокруг центра масс, не искривляя мировую линию центра масс. Например, магнитное поле вызывает вращение электрона, см. разд. 19. Подчеркнем, что в специальной теории относительности, в отличие от классической механики, закон инерции не включает в себя понятие системы отсчета.

Данный закон не распространяется на процесс распада тела, который может быть обусловлен внутренним состоянием тела и регулируется законом сохранения 4-импульса, см. разд. 3.

При рассмотрении тела, подверженного воздействию, будем говорить, что воздействию подвержен также моделирующий его геометрический объект.

Из закона инерции и теорем 6.3 и 6.4 вытекает, что *если тело не подвержено внешним воздействиям или воздействия взаимно уравновешены, то центр масс тела покоится или движется прямолинейно и равномерно в любой инерциальной системе отсчета*. Такое движение тела и моделирующего его геометрического объекта называется *инерциальным*.

Сравнение этого результата с законом инерции Галилея (с. 128) приводит к выводу, что *инерциальные системы отсчета в пространстве Минковского, введенные в разд. 5 (с. 127), служат математическими моделями материальных инерциальных систем отсчета*.

Внимание! Самодействие тела может вносить коррективы в закон инерции. Например, если внезапно отключить внешнее электрическое поле, действующее на заряд, то его мировая линия не станет мгновенно прямолинейной, так как его собственное поле будет еще некоторое время действовать на него. Самодействие рассмотрено в главе 5.

7. Масса, энергия, импульс

Продолжим рассмотрение материальной точки, движущейся в пространстве Минковского M вдоль гладкой времениподобной мировой линии L . Пусть m — ее масса (согласно постулатам 3 и 4 из разд. 1, $m > 0$); $\mathbf{P}$ — 4-импульс, определяемый формулой (3.2):

$$\mathbf{P} = mc\mathbf{i}, \quad (7.1)$$

где c — константа размерности скорости, входящая в формулу (1.1); $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к мировой линии L , ориентированный в сторону будущего. Введем в пространстве M инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ и найдем составляющие 4-импульса $\mathbf{P}$ вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ (рис. 7.1).

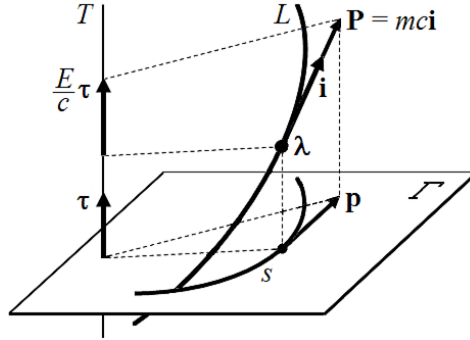


Рис. 7.1. Разложение 4-импульса $\mathbf{P}$ материальной точки λ на составляющие вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ .

L — мировая линия материальной точки; s — траектория материальной точки (она совпадает с ортогональной проекцией мировой линии L на физическое пространство Γ , см. теорему 5.1); гиперплоскость Γ изображена с понижением размерности на единицу.

Подставим в (7.1) значение (6.13) вектора $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{P} = mc\mathbf{i} = mc \frac{\tau + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{mc\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (7.2)$$

где, как и ранее, $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$; v — модуль скорости $\mathbf{v}$.

Поскольку $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{v} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$, то формула (7.2) задает разложение 4-импульса $\mathbf{P}$ на сумму двух взаимно ортогональных составляющих. Одна из них направлена вдоль оси времени T , другая — вдоль физического пространства Γ .

Разложим первое и второе слагаемые в правой части формулы (7.2) по степеням v/c , воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \underset{v \ll c}{\approx} 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Ограничиваясь разложением до первых членов, содержащих скорость, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{mc\boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} &= \frac{mc^2\boldsymbol{\tau}}{c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \underset{v \ll c}{\approx} \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{mv^2}{2} \right) \boldsymbol{\tau}; \\ \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} &\underset{v \ll c}{\approx} m\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Отсюда вытекает, что в случае малых скоростей второе слагаемое в правой части формулы (7.2) представляет собой импульс $m\mathbf{v}$ материальной точки, а первое слагаемое включает в себя ее кинетическую энергию $mv^2/2$. Следующий постулат обобщает этот результат на случай произвольных скоростей.

Энергия и импульс материальной точки ненулевой массы. В инерциальной системе отсчета материальная точка ненулевой массы m имеет энергию E и импульс $\mathbf{p}$ вида

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (7.4)$$

где c — константа, входящая в формулу (1.1); $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки в данной инерциальной системе отсчета; $v = |\mathbf{v}|$ (согласно (6.11), $v < c$); из $m > 0$ следует $E > 0$.

В этом постулате величины E и $\mathbf{p}$, определяемые формулами (7.4), названы энергией и импульсом, так как считается, что именно они являются теми энергией и импульсом тела, которые находятся в опыте.

На основании (7.3) и (7.4) заключаем, что при малых скоростях

$$E \underset{v \ll c}{\approx} mc^2 + \frac{mv^2}{2}; \quad \mathbf{p} \underset{v \ll c}{\approx} m\mathbf{v}. \quad (7.5)$$

Формулы (7.4) приводят к зависимостям

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}; \quad p = \frac{Ev}{c^2}, \quad (7.6)$$

где $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}|}$ — модуль вектора $\mathbf{p}$. Величина p называется, как и $\mathbf{p}$, *импульсом* материальной точки ($p \geq 0$). Из $\mathbf{v} \in \Gamma$ следует $\mathbf{p} \in \Gamma$, то есть $\mathbf{p}$ — пространственноподобный вектор. Значит, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \leq 0$, поэтому

$$p^2 = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}. \quad (7.7)$$

С помощью (7.2) и (7.4) получаем разложение 4-импульса $\mathbf{P}$ в виде

$$\mathbf{P} = m\mathbf{ci} = \frac{E}{c}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{p}, \quad (7.8)$$

см. рис. 7.1.

Выражение (7.8) влечет равенство скалярных квадратов векторов, стоящих в его средней и правой частях:

$$(m\mathbf{ci}) \cdot (m\mathbf{ci}) = \left(\frac{E}{c}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} \right) \cdot \left(\frac{E}{c}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} \right).$$

Отсюда, учитывая зависимость $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, формулу (7.7) и ортогональность векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{p}$ ($\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} = 0$, ибо $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{p} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$), имеем: $m^2c^2 = (E/c)^2 - p^2$ или, что то же самое,

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2. \quad (7.9)$$

Результаты изучения свойств элементарных частиц в ускорителях подтверждают формулу (7.9). Это свидетельствует об обоснованности принятия для энергии E и импульса $\mathbf{p}$ значений (7.4).

Если материальная точка покоится относительно используемой инерциальной системы отсчета (то есть $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), то, согласно (7.4), $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. В этом случае энергия материальной точки называется *энергией покоя* и обозначается символом E_0 . Из (7.4) находим:

$$E_0 = mc^2. \quad (7.10)$$

При аннигиляции элементарных частиц эта энергия выделяется в виде электромагнитного излучения.

В теоретической физике иногда применяется система единиц физических величин, в которой константа c приравнена единице. В такой системе единиц выражения (7.9) и (7.10) принимают форму

$$E^2 = m^2 + p^2; \quad E_0 = m. \quad (7.11)$$

Из второго равенства в (7.11) вытекает, что *энергия покоя и масса материальной точки — фактически одно и то же*.

8. Скорость света c

Пусть материальная точка λ движется в пространстве Минковского M вдоль прямолинейной мировой линии L . Согласно постулату 4 из разд. 1, прямая L является либо времениподобной (при ненулевой массе материальной точки), либо изотропной (при нулевой массе).

Введем в M такую инерциальную систему отсчета $\{T, G\}$, у которой ось времени T проходит через некоторую точку O мировой линии L , но не совпадает с L . Обозначим: τ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; t — координатное время, отсчитываемое вдоль оси T от точки O .

Построим плоскость P , содержащую пересекающиеся прямые T и L . Она является псевдоевклидовой, то есть имеет сигнатуру $(+ -)$ (потому что пространство M имеет сигнатуру $(+ - - -)$, а сама плоскость содержит времениподобную прямую T). Проведем в плоскости P прямую X , ортогональную оси времени T и проходящую через точку O . Из $X \perp T$ вытекает, что X — пространственноподобная прямая. Так как мировая линия L является времениподобной или изотропной, а прямая X пространственноподобная, то X отлична от L . Вследствие $X \perp T$, прямая X принадлежит физическому пространству G (при его расположении в M , отвечающем моменту времени $t = 0$) (рис. 8.1).

В связи с тем, что плоскость P содержит прямую T , ортогональную физическому пространству G , вся она, включая линию L , проецируется на G в прямую X . Поэтому прямая X служит ортогональной проекцией мировой линии L на G . Отсюда, по теореме 5.1, следует, что прямая X совпадает с траекторией материальной точки λ в физическом пространстве G . Значит, скорость $\mathbf{v}$ материальной точки относительно инерциальной системы отсчета $\{T, G\}$ направлена вдоль X . Примем в качестве направляющего орта прямой X вектор $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ (здесь $|\mathbf{v}| \neq 0$, ибо $T \nparallel L$, см. теорему 6.4). Поскольку $X \perp T$, то пара векторов $\{\tau, \mathbf{e}\}$ образует ортонормированный базис в рассматриваемой

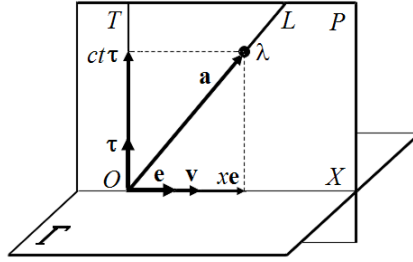


Рис. 8.1. Материальная точка λ , движущаяся вдоль прямолинейной мировой линии L .

$\{T, \Gamma\}$ — инерциальная система отсчета; P — плоскость, содержащая ось времени T и мировую линию L ; физическое пространство Γ дано с понижением размерности на единицу.

плоскости. С учетом псевдоевклидовости плоскости, это означает, что

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1; \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = -1; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (8.1)$$

Рассмотрим какое-либо расположение материальной точки λ на мировой линии L , отличное от O . Пусть при этом расположении точка λ отстоит от O на вектор $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \in L$; $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). Разложим этот вектор по базису $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}\}$:

$$\mathbf{a} = ct\boldsymbol{\tau} + x\mathbf{e}, \quad (8.2)$$

где ct и x — координаты вектора $\mathbf{a}$ вдоль осей T и X соответственно (они отсчитываются от точки O и возрастают в направлениях, задаваемых векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{e}$); c — константа, входящая в формулу (1.1) (см. рис. 8.1). Здесь $t \neq 0$ и $x \neq 0$ (потому что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \in L$ и оси T и X не совпадают с L), при этом величины t и x имеют одинаковый знак, так как вектор $\mathbf{e}$ сонаправлен скорости $\mathbf{v}$.

Изнутри физического пространства Γ , движущегося вдоль оси времени T , движение материальной точки λ воспринимается как происходящее в направлении вектора $\mathbf{e}$. За время $|t|$ материальная точка перемещается внутри Γ на расстояние $|x|$ (мы поставили знаки модуля, так как при нахождении точки λ на L ниже точки O на рис. 8.1 координаты будут иметь отрицательные значения). Согласно теореме 6.3, прямолинейная мировая линия отвечает равномерному прямолинейному движению материальной точки относительно инерциальной системы отсчета, поэтому скорость материальной точки λ относительно систе-

мы отсчета $\{T, \Gamma\}$ есть (по модулю)

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{x}{t} = \text{const} > 0, \quad (8.3)$$

где учтено, что величины x и t имеют одинаковый знак и $t \neq 0$.

Вычислим скалярный квадрат вектора $\mathbf{a}$. Из (8.2) с помощью (8.1) и (8.3) находим:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (ct)^2 - x^2 = (ct)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]. \quad (8.4)$$

Отсюда заключаем, что в случае времениподобной мировой линии L , то есть при $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, скорость v материальной точки меньше константы c (ср. с (6.11)).

Если же мировая линия L является изотропной ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$), то из (8.4) вытекает, что $v = c$. Обратим внимание на то обстоятельство, что этот результат не зависит от того, какая используется инерциальная система отсчета. Иными словами, в случае изотропной мировой линии скорость v одна и та же в любой инерциальной системе отсчета.

Строго говоря, здесь использована инерциальная система отсчета не самого общего вида, а такая, у которой ось времени пересекает мировую линию материальной точки. Однако сделанное заключение верно для любой инерциальной системы отсчета. Действительно, для произвольной инерциальной системы отсчета с осью времени T можно построить инерциальную систему отсчета, ось времени которой параллельна T и пересекает изотропную мировую линию L . А поскольку скорость материальной точки относительно этих систем отсчета, как можно доказать, одинакова, то данный результат выполняется для всех инерциальных систем отсчета.

Напомним, что согласно постулату 4 из разд. 1 изотропные прямолинейные мировые линии отвечают материальным точкам, имеющим нулевую массу, поэтому полученный результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 8.1. О скорости материальной точки нулевой массы. *Материальная точка нулевой массы движется относительно любой инерциальной системы отсчета со скоростью, равной (по модулю) константе c , входящей в формулу (1.1).*

Известно, что материальные точки нулевой массы являются геометрическими образами фотонов и некоторых других элементарных частиц. В связи с тем, что фотоны есть кванты электромагнитного излучения, в частности, видимого света, константа c называется *скоростью света в вакууме* или просто *скоростью света*. Измеренное

в опыте ее значение составляет

$$c \approx 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 300\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}; \quad (8.5)$$

именно эта константа входит в формулу (1.1) и другие формулы специальной теории относительности.

Многие формулы теории относительности содержат величину $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ (в случае тел ненулевой массы; например, формулы (6.12) – (6.14)). Из (8.5) следует, что влияние этой величины на численные значения характеристик тел существенно лишь при очень больших скоростях тел, близких к скорости света c , иначе говоря при так называемых *субсветовых* скоростях (приставка «суб» от латинского «sub», означающего «под», отражает выполнение для тел ненулевой массы неравенства (6.11): $v < c$). Такое влияние обычно называют *релятивистским* эффектом (по созвучию с английским наименованием теории относительности — the theory of relativity).

Для материальных точек нулевой массы 4-импульс $\mathbf{P}$ не может быть введен с помощью формулы (3.2) (потому что она включает в себя массу m материальной точки). Эта характеристика вводится следующим постулатом.

4-импульс материальной точки нулевой массы. *Материальная точка нулевой массы обладает изотропным 4-импульсом $\mathbf{P}$, который направлен вдоль ее прямолинейной изотропной мировой линии в сторону будущего, постоянен вдоль всей мировой линии и не зависит от системы отсчета. Разложение вектора $\mathbf{P}$ на составляющие, направленные вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ произвольной инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, имеет тот же вид, что и в случае материальной точки ненулевой массы:*

$$\mathbf{P} = \frac{E}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p}, \quad (8.6)$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2} = \frac{E}{c} \mathbf{e}; \quad p = \frac{E}{c}; \quad (8.7)$$

E и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс материальной точки в данной системе отсчета; $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки относительно этой системы отсчета ($|\mathbf{v}| = c$); $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ($|\mathbf{e}| = 1$); $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$ — модуль вектора $\mathbf{p}$, называемый, как и $\mathbf{p}$, импульсом материальной точки ($p \geq 0$); $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{e} \in \Gamma$; вторая зависимость в (8.7) является следствием первой (с учетом $E > 0$ и $c > 0$) (см. (7.6), (7.8) и рис. 7.1).

Покажем, что вектор $\mathbf{P}$ вида (8.6) действительно направлен вдоль мировой линии материальной точки. Из (8.6) и (8.7) имеем:

$$\mathbf{P} = \frac{E}{c} (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}). \quad (8.8)$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}$ — изотропный вектор, так как соотношения (8.1) влекут изотропность вектора $\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$: $(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}) = 0$. При $v = c$ из (8.2) и (8.3) находим:

$$\mathbf{a} = ct(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}), \quad (8.9)$$

откуда с учетом $\mathbf{a} \in L$ следует $(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}) \in L$. В силу (8.8), это означает, что в самом деле $\mathbf{P} \in L$.

Сформулированный постулат не задает энергию E и импульс $\mathbf{p}$ материальной точки, хотя и устанавливает связь между ними (в форме соотношений (8.7)). Значения этих величин для фотонов и других элементарных частиц с нулевой массой конкретизируются в квантовой механике. Согласно этой теории, каждая элементарная частица характеризуется определенной частотой ν . Позаимствуем из квантовой механики постулат, задающий энергию и импульс.

Энергия и импульс материальной точки нулевой массы.
В инерциальной системе отсчета материальная точка нулевой массы ($m = 0$) обладает следующими энергией E и импульсом p :

$$E = h\nu; \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}, \quad (8.10)$$

где h — постоянная Планка ($h \approx 6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж · с); ν — частота, соответствующая моделируемой элементарной частице. Вторая формула в (8.10) согласована с (8.7).

Два приведенных постулата позволяют вывести зависимость между значениями частоты ν в различных системах отсчета (см. эффект Доплера в разд. 13).

В связи с тем, что рассматриваемые материальные точки имеют нулевую массу, их называют *безмассовыми*, а так как они движутся со скоростью света и имеют изотропные мировые линии, их называют еще *светоподобными* или *изотропными*.

Для светоподобных материальных точек понятие собственного времени не может быть введено, так как длина любого отрезка их изотропных мировых линий равна нулю. Учитывая, что из (6.12) при $v = c$ вытекает $dt_* = 0$, можно условно сказать, что собственное время таких материальных точек не течет. По этой причине параметризация мировых линий светоподобных материальных точек не может быть осуществлена посредством собственного времени, как это делается в случае материальных точек ненулевой массы. Вместе с тем, поскольку каждой точке мировой линии отвечает свой вектор $\mathbf{a}$, то

равенство (8.9) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек изотропной мировой линии и множеством значений координатного времени (см. рис. 8.1, где в данном случае $x = ct$, благодаря (8.3) и равенству $v = c$). Следовательно, изотропные мировые линии могут быть параметризованы координатным временем. Подчеркнем, что эта параметризация не является внутренней характеристикой светоподобной материальной точки, так как она зависит от выбора системы отсчета.

С помощью координатного времени можно параметризовать любые прямые в пространстве M , которые не ортогональны оси времени (не только времениподобные и изотропные, но и пространственноподобные). Для этого нужно ввести радиус-вектор $\mathbf{R}$ точек прямой и разложить его на сумму составляющих вдоль оси времени и вдоль физического пространства: $\mathbf{R} = ct\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}$ (см. формулу (6.1) и рис. 6.1). Очевидно, что это разложение устанавливает взаимно однозначное соответствие между значениями координатного времени t и точками прямой (при условии, что прямая не ортогональна оси времени). Если прямая проходит через начало координат, то указанное разложение радиуса-вектора $\mathbf{R}$ принимает вид (8.2): $\mathbf{a} = ct\boldsymbol{\tau} + x\mathbf{e}$, где $\mathbf{a}$ — вектор, соединяющий начало координат с рассматриваемой точкой прямой. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Так как вектор $\mathbf{a}$ направлен вдоль прямой, то в случае пространственноподобной прямой будет $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} < 0$. Отсюда и из формулы (8.4) следует, что если бы пространственноподобные прямые служили мировыми линиями материальных точек, то последние двигались бы со скоростями, превосходящими скорость света c .

Гипотетические материальные тела, геометрическими образами которых служат такие материальные точки, называются *тахиионами*. Пока что в опыте тахионы не обнаружены.

Отметим, что для тахионов не может быть введена временная ориентация, не зависящая от системы отсчета. Это связано с тем, что если фиксировать на пространственноподобной прямой одно из направлений, то всегда можно ввести две такие инерциальные системы отсчета, что в одной из них это направление является направлением из прошлого в будущее, а в другой оно же является направлением из будущего в прошлое (рис. 8.2). Можно задать также систему отсчета в которой данная пространственноподобная прямая лежит в ее физическом пространстве. В таком случае окажется, что тахион существует в один и тот же момент времени во всех точках своей мировой линии. Учитывая сказанное, можно предположить, что тахионы не существуют.

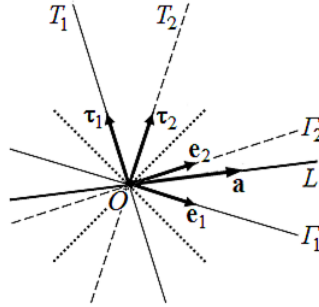


Рис. 8.2. Пространственноподобная прямая L с заданным на ней направлением.

$\{T_1, G_1\}$ и $\{T_2, G_2\}$ — две инерциальные системы отсчета. В каждой системе отсчета физическое пространство разделяет пространство Минковского на полупространство прошлого и полупространство будущего. Движение вдоль прямой L в направлении вектора $\mathbf{a}$ приводит к переходу в точке O из полупространства прошлого в полупространство будущего в системе отсчета $\{T_1, G_1\}$ и, наоборот, из полупространства будущего в полупространство прошлого в системе отсчета $\{T_2, G_2\}$.

На рисунке изображена псевдоевклидова плоскость, содержащая оси времени T_1 и T_2 . Пунктирные прямые — сечение светового конуса этой плоскостью. Здесь $\tau_1, \mathbf{e}_1, \tau_2, \mathbf{e}_2$ — единичные векторы; $\tau_1 \perp \mathbf{e}_1$; $\tau_2 \perp \mathbf{e}_2$; $\tau_1 + \mathbf{e}_1$ и $\tau_2 + \mathbf{e}_2$ — изотропные векторы, имеющие одинаковое направление. Кажущееся отсутствие ортогональности между векторами τ_i и $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$) обусловлено тем, что рисунок выполнен на листе бумаги, имеющем собственно евклидову, а не псевдоевклидову, метрику (этот эффект аналогичен кажущемуся эффекту неортогональности векторов $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$ на рис. 4.2 в главе 2, с. 45).

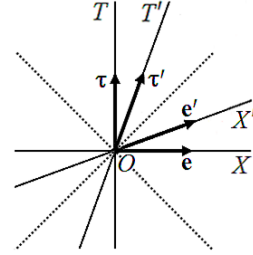
9. Преобразования Лоренца

Введем в пространстве Минковского M две инерциальные системы отсчета $\{T, G\}$ и $\{T', G'\}$, оси времени T и T' которых проходят через некоторую точку $O \in M$. Построим плоскость, содержащую эти оси (рис. 9.1). Она является псевдоевклидовой, так как пространство M имеет сигнатуру $(+ - - -)$ и плоскость содержит времениподобную прямую T . Проведем в этой плоскости пространственноподобные оси X и X' , проходящие через точку O и ортогональные осям T и T' соответственно. Поскольку трехмерные физические пространства G и G'

являются ортогональными дополнениями осей времени T и T' , то оси X и X' лежат в физических пространствах соответственно Γ и Γ' (при их расположениях в M , проходящих через точку O).

Рис. 9.1. Псевдоевклидова плоскость, содержащая оси времени двух инерциальных систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$.

Пунктирные прямые — сечение светового конуса этой плоскостью.



Обратим внимание на то, что взаимно ортогональные оси T' и X' расположены на рис. 9.1 таким образом, что для совмещения с ними осей T и X нужно повернуть последние вокруг точки O в противоположных направлениях (навстречу друг другу), а не в одном направлении, как было бы в случае собственно евклидовой плоскости. В этом состоит специфика псевдоевклидовой плоскости (подробнее об этом сказано в разд. 4 главы 2, см. там рис. 4.2 на с. 45 и его обсуждение на с. 48).

Цель настоящего раздела — вывод формул преобразования базисных векторов и координат точек пространства Минковского при переходе от системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ к системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ и обратно, а также получение следствий из этих формул.

Пусть τ и τ' — направляющие орты осей времени T и T' , ориентированные в сторону будущего (эта ориентация означает, что оба вектора направлены от точки O внутрь светового конуса будущего, имеющего вершиной O ; см. постулат 2 в разд. 1). Будем отсчитывать координатное время в обеих системах отсчета, начиная от точки O .

Ось времени T' представляет собой мировую линию тела отсчета системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$, поэтому направляющий орт τ' этой оси равен правой части формулы (6.13):

$$\tau' = \frac{\tau + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\tau' \cdot \tau' = 1), \quad (9.1)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость движения тела отсчета, принадлежащего системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$, относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $v = |\mathbf{v}|$; c — скорость света.

Так как мировая линия тела отсчета (ось T') прямолинейна, то, согласно теореме 6.2, $\mathbf{v} = \text{const}$, причем $v < c$ (по теореме 6.1). По определению инерциальной системы отсчета (разд. 5, с. 127), физическое пространство Γ' , скрепленное с телом отсчета, движется вдоль оси T' поступательно с одинаковой во всех ее точках скоростью $\boldsymbol{\tau}'$ (относительно пространства M). С учетом (9.1) отсюда вытекает, что физическое пространство Γ' движется относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ с одинаковой во всех ее точках скоростью $\mathbf{v}$. Далее будем говорить о движении самой системы отсчета (хотя ось времени неподвижна относительно пространства M) и будем называть величину $\mathbf{v}$ *скоростью инерциальной системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$* . Повторим, что $\mathbf{v} = \text{const}$ и $v = |\mathbf{v}| < c$.

Для упрощения рассуждений будем считать, что система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ движется относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ с ненулевой скоростью ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). При этом, согласно (9.1), $\boldsymbol{\tau}' \neq \boldsymbol{\tau}$, откуда $T' \nparallel T$ и, значит, гиперплоскости Γ' и Γ , ортогональные осям соответственно T' и T , не параллельны ($\Gamma' \nparallel \Gamma$). Отметим, что получаемые далее формулы преобразования базисных векторов и координат остаются верными и при $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (в этом легко убедиться подстановкой в них значения $v = 0$). Из (9.1) видно, что в случае $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ будет $\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}$, откуда $T' \parallel T$, а так как оси T' и T имеют общую точку O , то они совпадают, поэтому совпадают и ортогональные им физические пространства Γ' и Γ . Следовательно, при $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ совпадает с $\{T, \Gamma\}$.

Вектор скорости $\mathbf{v}$ принадлежит физическому пространству Γ (см. разд. 6). Вместе с тем, вектор $\mathbf{v}$ принадлежит плоскости, показанной на рис. 9.1, потому что из (9.1) вытекает, что он может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}'$, лежащих в этой плоскости. Принимая во внимание, что эта плоскость и физическое пространство Γ пересекаются по оси X , заключаем, что вектор $\mathbf{v}$ направлен вдоль X . Из $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{v} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$ следует $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{v}$, то есть $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Введем на оси X единичный вектор $\mathbf{e} = \mathbf{v}/v$, сонаправленный вектору скорости $\mathbf{v}$ (здесь $v \neq 0$, так как мы приняли, что $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{e}$ образуют ортонормированный базис в рассматриваемой плоскости (потому что они имеют единичную длину и служат направляющими векторами взаимно ортогональных осей T и X). Поскольку эта плоскость является псевдоевклидовой, то выполняются зависимости

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1; \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = -1; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (9.2)$$

Зададим на оси X' направляющий орт $\mathbf{e}'$, выбрав то из двух возможных его направлений, при котором изотропные векторы $\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\tau}' + \mathbf{e}'$

сонаправлены (см. рис. 9.1). Так как вектор $\mathbf{e}'$ является единичным и лежит на оси X' , ортогональной оси T' , то векторы $\boldsymbol{\tau}'$ и $\mathbf{e}'$ образуют еще один ортонормированный базис в данной плоскости, поэтому они удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}' = 1; \quad \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}' = -1; \quad \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{e}' = 0. \quad (9.3)$$

Разложим вектор $\mathbf{e}'$ по базису $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}\}$:

$$\mathbf{e}' = x\boldsymbol{\tau} + y\mathbf{e}, \quad (9.4)$$

где x и y — координаты вектора $\mathbf{e}'$ в этом базисе. Для определения координат x и y подставим значение (9.4) вектора $\mathbf{e}'$ во второе и третье равенства (9.3). Пользуясь формулами (9.1), (9.2) и равенством $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$, а также учитывая условие сонаправленности векторов $\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\tau}' + \mathbf{e}'$, после несложных преобразований находим координаты x и y . Подставляя их в (9.4), получаем разложение вектора $\mathbf{e}'$ по базису $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}\}$ в виде

$$\mathbf{e}' = \frac{\frac{v}{c}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (9.5)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что векторы $\boldsymbol{\tau}'$ и $\mathbf{e}'$ вида (9.1) и (9.5) действительно удовлетворяют условиям (9.3) и что вектор $\boldsymbol{\tau}' + \mathbf{e}'$ является изотропным и сонаправлен вектору $\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$.

Векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\tau}'$ и $\mathbf{e}'$ лежат в одной плоскости (показанной на рис. 9.1). В связи с тем, что пространство Минковского M четырехмерное, в нем существует плоскость, ортогональная этой плоскости. Точнее, существует бесконечное множество параллельных между собой плоскостей, ортогональных данной плоскости. Все они являются пространственноподобными, потому что плоскость, которой они ортогональны, псевдоевклидова. Все эти плоскости, вследствие их параллельности, имеют одно и то же ассоциированное векторное пространство, поэтому если какое-либо векторное равенство выполняется в одной из этих плоскостей, то такое же равенство имеет место и во всех других плоскостях.

Рассмотрим трехмерные гиперплоскости Γ и Γ' в расположениях, при которых они проходят через точку O . Так как они ортогональны осям соответственно T и T' и не параллельны между собой, то они пересекаются по одной из указанных плоскостей (ортогональных плоскости, показанной на рис. 9.1). Зафиксируем в плоскости $\Gamma \cap \Gamma'$ произвольную пару взаимно ортогональных ортов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поскольку

эта плоскость является пространственноподобной, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ подчиняются зависимостям

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = -1; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0; \quad (9.6)$$

а так как эта плоскость ортогональна плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\tau}'$ и $\mathbf{e}'$, то выполняются зависимости

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}' = 0; \\ \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}' = 0. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Объединим введенные векторы в две четверки, дав им новые обозначения: $\{\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{e}'_0 = \boldsymbol{\tau}', \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}', \mathbf{e}'_2 = \mathbf{a}, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{b}\}$. Первая четверка векторов принадлежит системе отсчета $\{T, \Gamma\}$, вторая — системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ (ибо $\boldsymbol{\tau} \in T$; $\mathbf{e} \in \Gamma$; $\mathbf{a} \in \Gamma \cap \Gamma'$; $\mathbf{b} \in \Gamma \cap \Gamma'$; $\boldsymbol{\tau}' \in T'$; $\mathbf{e}' \in \Gamma'$). Из (9.2), (9.3), (9.6) и (9.7) заключаем, что каждая из четверок удовлетворяет условию ортонормированности (5.1) (с. 129). Следовательно, $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ — ортонормированные базисы пространства M . Будем считать, что начала всех базисных векторов находятся в точке O . Согласно (9.1), (9.5) и определению этих векторов, векторы базиса $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ связаны с векторами базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ формулами

$$\mathbf{e}'_0 = \frac{\mathbf{e}_0 + \frac{v}{c} \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_1 + \frac{v}{c} \mathbf{e}_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3, \quad (9.8)$$

где учтено, что $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$.

Выражая из (9.8) векторы $\{\mathbf{e}_i\}$ через $\{\mathbf{e}'_i\}$, находим:

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{e}'_0 - \frac{v}{c} \mathbf{e}'_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}'_1 - \frac{v}{c} \mathbf{e}'_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3. \quad (9.9)$$

Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек пространства M относительно точки O . Разложим его по базисам $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$:

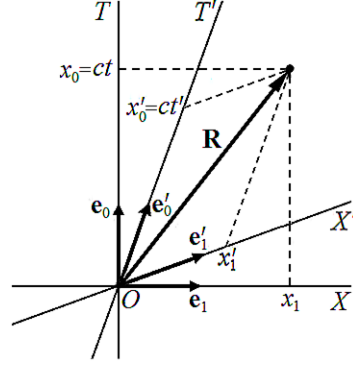
$$\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3; \quad (9.10)$$

$$\mathbf{R} = x'_0 \mathbf{e}'_0 + x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 \quad (9.11)$$

(рис. 9.2).

Рис. 9.2. Разложение радиус-вектора $\mathbf{R}$ по базисам $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Изображен случай, когда вектор $\mathbf{R}$ лежит в плоскости, содержащей оси времени инерциальных систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$.



Два набора коэффициентов разложения $\{x_i\}_{i=0}^3$ и $\{x'_i\}_{i=0}^3$ образуют две инерциальные системы координат в M (определение инерциальной системы координат дано в разд. 5, с. 129), при этом

$$x_0 = ct; \quad x'_0 = ct', \quad (9.12)$$

где c — скорость света; t — координатное время в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$; t' — координатное время в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ (величины t и t' отсчитываются вдоль осей соответственно T и T' , начиная от точки O).

Найдем связь между координатами x_i и x'_i . Подставляя в (9.10) значения базисных векторов $\mathbf{e}_i$ из (9.9) и учитывая (9.12), после очевидных преобразований получаем:

$$\mathbf{R} = \frac{ct - \frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{e}'_0 + \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{e}'_1 + x_2 \mathbf{e}'_2 + x_3 \mathbf{e}'_3. \quad (9.13)$$

В силу единственности разложения вектора по базису, из (9.11) и (9.13) с учетом (9.12) находим:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3. \quad (9.14)$$

Отсюда, выражая координаты x_i через x'_i , имеем:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3. \quad (9.15)$$

Преобразования базисных векторов и координат, описываемые соотношениями (9.8), (9.9), (9.14) и (9.15), а также сами эти соотношения называются *преобразованиями Лоренца* (эти соотношения называются также *формулами Лоренца*). Первая пара соотношений связывает между собой базисные векторы систем отсчета $\{T, G\}$ и $\{T', G'\}$. Вторая пара связывает координаты точек пространства Минковского во введенных выше системах координат $\{ct, x_1, x_2, x_3\}$ и $\{ct', x'_1, x'_2, x'_3\}$. Эти две пары соотношений эквивалентны, так как каждая из них может быть выведена из другой. Ниже мы введем еще одно преобразование Лоренца, а в разд. 10 запишем все эти преобразования с использованием гиперболических функций.

В механике рассматривают два типа преобразований базиса и системы координат: пассивные и активные.

При *пассивном* преобразовании изменяется базис используемой системы отсчета, а само пространство не меняется, то есть все его точки остаются на своих местах. Поскольку базис меняется, а точки пространства остаются неподвижными, то их координаты относительно исходного и преобразованного базисов оказываются различными.

Активное преобразование — это преобразование самого пространства. Оно осуществляется следующим образом. Фиксируется некоторая точка O пространства и рассматривается множество векторов, имеющих начало в O . Каждой точке пространства ставится в соответствие вектор из этого множества, концом которого она является. Векторы подвергаются преобразованию (с сохранением их начал в O) и принимается, что каждая точка пространства перемещается вместе с концом соответствующего вектора. В связи с тем, что в этом случае точки пространства и векторы базиса преобразуются совместно, каждая точка имеет в исходном и новом базисах одни и те же координаты.

Преобразования Лоренца (9.14) и (9.15) относятся к пассивным преобразованиям, так как они оставляют неподвижными точки пространства (это видно из равенства левых частей выражений (9.10) и (9.11), задающих радиус-вектор точек пространства). Для того, чтобы преобразование было активным, нужно принять, что все векторы пространства M преобразуются при переходе от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$ по

тому же закону, по которому преобразуются базисные векторы. Это означает, что радиус-вектор $\mathbf{R}$ вида (9.10):

$$\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \quad (9.16)$$

должен перейти в радиус-вектор $\mathbf{R}'$, координаты которого в базисе $\{\mathbf{e}'_i\}$ совпадают с координатами вектора $\mathbf{R}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{R}' = x_0 \mathbf{e}'_0 + x_1 \mathbf{e}'_1 + x_2 \mathbf{e}'_2 + x_3 \mathbf{e}'_3. \quad (9.17)$$

Найдем координаты вектора $\mathbf{R}'$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Помечая их двумя штрихами, можем записать:

$$\mathbf{R}' = x''_0 \mathbf{e}_0 + x''_1 \mathbf{e}_1 + x''_2 \mathbf{e}_2 + x''_3 \mathbf{e}_3. \quad (9.18)$$

Подстановка в (9.17) векторов $\mathbf{e}'_i$ из (9.8) с учетом (9.12) дает:

$$\mathbf{R}' = \frac{ct + \frac{v}{c} x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{e}_0 + \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (9.19)$$

Сравнение (9.18) с (9.19) приводит к формулам

$$t'' = \frac{t + \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x''_1 = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad x''_2 = x_2; \quad x''_3 = x_3, \quad (9.20)$$

где $\{ct = x_0, x_1, x_2, x_3\}$ и $\{ct'' = x''_0, x''_1, x''_2, x''_3\}$ — координаты точек до и после преобразования (относительно исходного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$).

Преобразование пространства Минковского, которое переводит вектор $\mathbf{R}$ вида (9.16) в вектор $\mathbf{R}'$ вида (9.19) и переводит точки пространства с координатами x_i в точки с координатами x''_i (связанными с x_i формулами (9.20)), тоже называется *преобразованием Лоренца*. Это преобразование Лоренца является активным.

Пусть $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$ — радиусы-векторы двух точек пространства Минковского относительно начала координат O . Произведем над ними активное преобразование Лоренца, переведя их в векторы $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{P}'$ согласно правилу перехода от (9.16) к (9.19). Нетрудно проверить, что при этом скалярное произведение векторов не изменится: $\mathbf{R}' \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$. Следовательно, оператор (тензор), осуществляющий это преобразование, принадлежит группе Лоренца (определение группы Лоренца дано в разд. 5 главы 2, с. 72; ее описанию будет посвящен разд. 11).

Выведем два следствия из преобразований Лоренца (9.14) и (9.15).

Начнем с установления зависимости между показаниями часов в системах отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$. Точнее, зафиксируем время t по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ и определим время t' , которое показывают часы системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ при нахождении их в точке пространства M , соответствующей моменту t . В связи с тем, что часы считаются скрепленными с телом отсчета, им отвечают нулевые пространственные координаты (в системе отсчета, к которой они относятся). Подставляя в формулы (9.14) или (9.15) нулевые значения координат x'_1, x'_2 и x'_3 , приходим к следующему результату. В тот момент, когда часы системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ показывают время t , часы системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ находятся в точке физического пространства Γ с координатами $x_1 = vt, x_2 = 0, x_3 = 0$ и показывают время

$$t' = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}; \quad (9.21)$$

мы обсудим эту формулу после вывода еще одного следствия. Отметим, что формула (9.21) вытекает также из формулы (6.12). Действительно, применим формулу (6.12) к описанию движения тела отсчета системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Поскольку время t' есть собственное время тела отсчета, то в данном случае можно заменить в (6.12) величину t_* на t' . Кроме того, мировая линия тела отсчета является прямолинейной (ибо совпадает с осью T'), параметры t и t' на осях T и T' отсчитываются от одной и той же точки $O \in M$ и скорость v является константой. Все это позволяет перейти в выражении (6.12) от дифференциалов к конечным значениям величин, что и дает формулу (9.21).

Теперь найдем зависимость между линейными размерами тела, определяемыми в системах отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$.

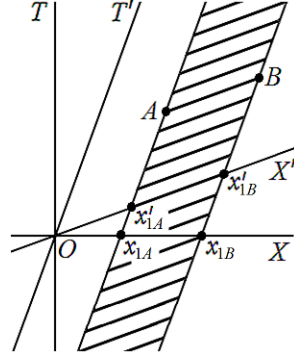
Рассмотрим стержень длины l' , неподвижный относительно материальной системы отсчета, которой в пространстве M соответствует система отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Будем моделировать стержень прямолинейным отрезком в пространстве M , параллельным оси X' . Далее именно этот отрезок будем называть стержнем. Каждой точке стержня отвечает в M прямолинейная мировая линия, параллельная оси времени T' . Объединение мировых линий всех точек стержня образует полосу (рис. 9.3).

Пусть концы A и B стержня имеют в физическом пространстве Γ' координаты соответственно

$$(x'_{1A}, 0, 0) \quad \text{и} \quad (x'_{1B}, 0, 0), \quad (9.22)$$

Рис. 9.3. Стержень AB , неподвижный относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$.

Полоса изображает временную эволюцию стержня в пространстве Минковского M . Отрезки на ней, параллельные оси X' , показывают расположения стержня в M в различные моменты его собственного времени. С точки зрения системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ этот стержень представляет собой отрезок $x_{1A}x_{1B}$, движущийся параллельно самому себе вдоль этой же полосы. Здесь оси X и X' те же, что на рис. 9.1 и 9.2.



где $x'_{1B} > x'_{1A}$, как показано на рис. 9.3. Благодаря неподвижности стержня относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$, координаты x'_{1A} и x'_{1B} не зависят от времени t' . Длина стержня l' равна их разности:

$$l' = x'_{1B} - x'_{1A}. \quad (9.23)$$

Поскольку физические пространства Γ и Γ' наклонены по отношению друг к другу (при $v \neq 0$), то точки A и B , являющиеся одномоментными в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$, не являются таковыми в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$. Поэтому для того, чтобы измерить длину стержня в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$, нужно определить положения его концов в какой-либо фиксированный момент времени t и затем найти расстояние между этими точками. Подставляя в (9.14) или (9.15) координаты (9.22) концов стержня, находим их координаты в физическом пространстве Γ в момент t (по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$):

$$\begin{aligned} (x_{1A} &= x'_{1A} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + vt, \quad x_{2A} = 0, \quad x_{3A} = 0); \\ (x_{1B} &= x'_{1B} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + vt, \quad x_{2B} = 0, \quad x_{3B} = 0); \end{aligned} \quad (9.24)$$

на рис. 9.3 отмечены координаты x_{1A} и x_{1B} , соответствующие моменту времени $t = 0$.

Из (9.24) вытекает при учете (9.23), что в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ длина стержня l имеет следующее значение:

$$l = x_{1B} - x_{1A} = (x'_{1B} - x'_{1A}) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

откуда

$$l = l' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (9.25)$$

Итак, если тело, имеющее в некотором направлении длину l' , движется в этом направлении со скоростью v относительно инерциальной материальной системы отсчета, то его длина l , измеренная в этой системе отсчета, оказывается меньшей l' в отношении $\sqrt{1 - (v/c)^2} : 1$. Вместе с тем, в направлениях, перпендикулярных направлению движения, размеры тела, измеренные в материальной системе отсчета, относительно которой оно движется, совпадают с размерами, определенными в материальной системе отсчета, относительно которой тело покоится (это сразу вытекает из совпадения координат x_2, x_3 с координатами x'_2, x'_3 в формулах (9.14) и (9.15)).

Эффекты, описываемые зависимостями (9.21) и (9.25), являются следствиями преобразований Лоренца (9.14) и (9.15) и называются соответственно *замедлением времени в движущихся системах отсчета* (или *отставанием движущихся часов*) и *сокращением размеров движущихся тел*.

Причина этих эффектов заключается в том, что в пространстве Минковского системы отсчета, движущиеся относительно друг друга, наклонены по отношению друг к другу. Из-за этого, наблюдая за объектами некоторой материальной системы отсчета изнутри другой материальной системы отсчета, мы измеряем не сами пространственные и временные интервалы, относящиеся к наблюдаемой системе отсчета, а лишь проекции этих интервалов на оси координат нашей системы отсчета. Вследствие взаимного наклона осей координат двух систем отсчета, длины проекций оказываются отличными от длин самих интервалов. В реальности, конечно же, ход часов и размеры тел никак не зависят от того, наблюдает их или нет какой-либо исследователь и какой системой отсчета он пользуется (при условии, что процесс наблюдения не сопровождается физическим воздействием на наблюдаемый объект).

Таким образом, указанные эффекты отставания движущихся часов и сокращения размеров движущихся тел фактически являются кажущимися, несмотря на то, что они могут быть инструментально зарегистрированы.

Поясним эту ситуацию на простом примере. Представим, что мы стоим на дороге и провожаем взглядом уходящих по ней вдаль друзей. Мы видим, что чем дальше они уходят, тем меньше становятся. Этот эффект мы можем зарегистрировать инструментально, сфотографировав друзей. Измерив изображение, мы убеждаемся в том, что рост друзей в самом деле уменьшается с их удалением. Тем не менее, понятно, что данный эффект лишь кажущийся. Аналогичным образом кажущи-

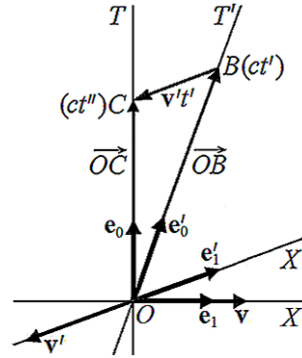
мися являются описанные эффекты замедления времени и сокращения размеров тел. Отметим также следующее. Поскольку друзья видятся нам уменьшающимися при удалении, то, казалось бы, мы должны видаться им увеличивающимися. Ан нет, мы тоже видимся им уменьшающимися. Подобным образом, из того факта, что согласно (9.21) время в движущейся системе отсчета представляется нам замедленным, вовсе не следует, что наше время изнутри движущейся системы отсчета представляется убыстренным. Оно тоже представляется замедленным (подробнее об этом будет сказано далее).

Обсудим полученные результаты.

Прежде всего обратим внимание на такое обстоятельство. В приведенных рассуждениях фигурирует скорость $\mathbf{v}$ движения системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. Пусть $\mathbf{v}'$ — скорость системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Если бы мы рассматривали движение тел в рамках классической механики, то эти скорости были бы связаны равенством $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Однако в специальной теории относительности это равенство не выполняется. Действительно, вектор скорости принадлежит физическому пространству той системы отсчета, по отношению к которой изучается движение тел (см. разд. 6). Поэтому вектор $\mathbf{v}$ лежит в физическом пространстве Γ , а вектор $\mathbf{v}'$ — в физическом пространстве Γ' . При этом, как было показано ранее, $\mathbf{v} \in X$. Вместе с тем, $\mathbf{v}' \in X'$ (это будет доказано ниже). А так как $X' \not\parallel X$ (при $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), то $\mathbf{v}' \not\parallel \mathbf{v}$, значит, $\mathbf{v}' \neq -\mathbf{v}$ (здесь оси X и X' те же, которые были введены в начале раздела) (рис. 9.4).

Рис. 9.4. Движение инерциальных систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ относительно друг друга.

Система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ движется относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ со скоростью $\mathbf{v} \in X$; система отсчета $\{T, \Gamma\}$ движется относительно $\{T', \Gamma'\}$ со скоростью $\mathbf{v}' \in X'$ ($\mathbf{v}' \neq -\mathbf{v}$).



Найдем связь между векторами $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$.

Будем считать, что основной системой отсчета является $\{T', \Gamma'\}$, и рассмотрим движение относительно нее системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. За-

фиксируем некоторую точку $B \in T'$ (см. рис. 9.4). Пусть ей отвечает момент t' координатного времени системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Поскольку тело отсчета системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ находится в начальный момент времени в начале координат O , то, двигаясь равномерно со скоростью $\mathbf{v}'$ относительно $\{T', \Gamma'\}$, оно оказывается в момент t' в точке $C \in T$, отстоящей от B на вектор $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}'t'$. Так как C есть точка, одномоментная точке B (по часам системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$), то $C = T \cap \Gamma'$ при расположении Γ' , проходящем через точку B (на рис. 9.4 точка C определяется условием $CB \parallel X'$). Обозначим: t'' — момент координатного времени системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, соответствующий точке C . Из равенства $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, учитывая, что $\overrightarrow{OC} = ct''\mathbf{e}_0$, $\overrightarrow{OB} = ct'\mathbf{e}'_0$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}'t'$, имеем:

$$ct''\mathbf{e}_0 = ct'\mathbf{e}'_0 + \mathbf{v}'t'.$$

Подставим сюда значение вектора $\mathbf{e}_0$ из (9.9):

$$\frac{ct''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\mathbf{e}'_0 - \frac{vt''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\mathbf{e}'_1 = ct'\mathbf{e}'_0 + \mathbf{v}'t'. \quad (9.26)$$

Умножим скалярно обе части этого выражения на вектор $\mathbf{e}'_0$ и воспользуемся равенствами $\mathbf{e}'_0 \cdot \mathbf{e}'_0 = 1$, $\mathbf{e}'_0 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0$ и $\mathbf{e}'_0 \cdot \mathbf{v}' = 0$ (последнее равенство вытекает из того, что $\mathbf{e}'_0 \in T'$, $\mathbf{v}' \in \Gamma'$ и $\Gamma' \perp T'$). В результате получаем:

$$t'' = t' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (9.27)$$

При таком значении величины t'' выражение (9.26) преобразуется к виду

$$\mathbf{v}' = -v\mathbf{e}'_1, \quad (9.28)$$

откуда сразу следует равенство

$$|\mathbf{v}'| = v. \quad (9.29)$$

Подставляя в (9.28) значение вектора $\mathbf{e}'_1$ из (9.8) и учитывая, что $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$, находим искомую связь между векторами $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}' = -\frac{v^2}{c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\mathbf{e}_0 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\mathbf{v}. \quad (9.30)$$

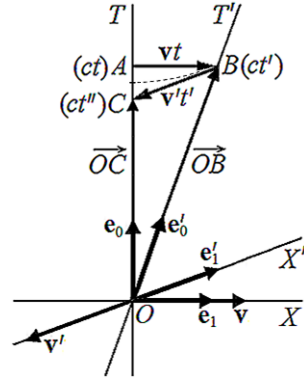
Итак, из (9.30) следует, что, как и утверждалось ранее, $\mathbf{v}' \neq -\mathbf{v}$ (при $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Вместе с тем, по (9.29), вектор $\mathbf{v}'$ имеет такую же длину v , как и вектор $\mathbf{v}$ ($|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}| = v$). Это означает, что если система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ движется относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ со скоростью, равной (по модулю) v , то система отсчета $\{T, \Gamma\}$ движется относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ со скоростью, тоже равной v . На основании (9.28) заключаем, что вектор $\mathbf{v}'$ действительно лежит на оси X' , имеющей направляющий орт $\mathbf{e}'_1$, как показано на рис. 9.4.

Обратимся к формулам (9.21) и (9.27). Допустим, что мы проводим измерения, пользуясь некоторой инерциальной материальной системой отсчета. Наблюдая за другой материальной системой отсчета, движущейся относительно нас со скоростью v , мы обнаруживаем, как следует из (9.21), что время в ней течет медленнее нашего времени в отношении $\sqrt{1 - (v/c)^2} : 1$. Вместе с тем, исследователь, находящийся в той системе отсчета и наблюдающий за нашей системой отсчета, обнаруживает согласно (9.27), что, наоборот, наше время течет медленнее его времени в таком же отношении. Данный результат еще раз демонстрирует равноправие инерциальных материальных систем отсчета.

Проиллюстрируем этот результат с помощью рисунка. Дополним рис. 9.4 точкой $A \in T$, для которой точка B является одномоментной с ней по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ (рис. 9.5).

Рис. 9.5. Эффект замедления времени в движущихся относительно друг друга инерциальных системах отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$.

Точка B является одномоментной точкой A по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; точка C одномоментна точке B по часам системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Тонкая штриховая линия — дуга (псевдо)окружности радиуса ct' с центром в O ; она проходит через точку B и пересекает ось T между точками A и C .



Пусть в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ точке A соответствует момент времени t . Рассмотрим движение системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. Поскольку тело отсчета системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ находится в начальный момент времени в начале координат O и движется относительно $\{T, \Gamma\}$ равномерно со скоростью $\mathbf{v}$, то в момент t , соответствующий точке A , оно оказывается в точке оси T' , от-

стоящей от A на вектор $\mathbf{v}t$. Так как эта точка является одномоментной точке A (по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$), то по условию выбора точки A это есть точка B . (Отметим, что из $\mathbf{v} \in X$ следует, что на рис. 9.5 точка A определяется при заданной точке B условием $AB \parallel X$.) В системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ точке B соответствует момент времени t' , связанный с t зависимостью (9.21): $t' = t\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Ранее было показано, что с позиции системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ данная ситуация представляется так, как будто тело отсчета системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ движется со скоростью $\mathbf{v}'$ и оказывается в момент t' в точке $C \in T$, которая отстоит от B на вектор $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}'t'$. При этом точке C соответствует в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ момент времени t'' , связанный с t' зависимостью (9.27): $t'' = t'\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Из двух приведенных зависимостей вытекает, в частности, что при $v \neq 0$

$$t > t' > t''. \quad (9.31)$$

С геометрической точки зрения рассматриваемая ситуация может быть пояснена следующим образом. Из $BC \perp OB$ и $AB \perp OA$ вытекает, что точка B представляет собой ортогональную проекцию точки C на ось T' , а точка A является ортогональной проекцией точки B на ось T . Понятно, что, спроецировав точку $C \in T$ на ось T' и затем спроецировав проекцию (точку B) обратно на ось T , мы не вернемся в исходную точку (при $T \nparallel T'$). Поэтому $A \neq C$ и $t \neq t''$. Известно, что в собственно евклидовой плоскости при проецировании отрезка на прямую, не параллельную ему, длина проекции оказывается меньшей длины отрезка. В псевдоевклидовой плоскости, наоборот, в такой ситуации длина проекции оказывается большей длины отрезка (если прямая и отрезок времениподобные; см. теорему 5.6 в главе 2, с. 82). В нашем случае отрезок OA является проекцией отрезка OB на ось T , а OB представляет собой проекцию отрезка OC на ось T' , поэтому $|OA| > |OB| > |OC|$ или, что то же самое, $ct > ct' > ct''$. Отсюда $t > t' > t''$, что совпадает с (9.31).

Напомним, что в псевдоевклидовой плоскости окружность, то есть множество точек, равноудаленных от заданной точки, имеет вид гиперболы (см. в главе 2 формулы (4.15), (4.16) и рис. 4.2, с. 44, 45); эту окружность называют также псевдоокружностью. На рис. 9.5 штриховая линия изображает дугу окружности радиуса ct' с центром в точке O . Она пересекает ось T в точке, находящейся между точками A и C , что еще раз иллюстрирует справедливость соотношения $t > t' > t''$. Отметим, что так как OB есть радиус указанной окружности и $BC \perp OB$, то $\overrightarrow{BC}$ является касательным вектором к окружности в точке B .

Вернемся к обсуждению формул Лоренца (9.8), (9.9), (9.14) и (9.15).

Все инерциальные системы отсчета, как отмечалось, равноправны. Между тем, для преобразования формул (9.8) в (9.9) и (9.14) в (9.15) (и наоборот) требуется не только поменять в них местами штрихованные и нештрихованные координаты, но еще изменить знак, стоящий перед величиной v в числителях дробных выражений. Это обстоятельство создает впечатление о неравноправности систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$.

В действительности, разумеется, эти системы отсчета равноправны. Отмеченное же обстоятельство объясняется тем, что базисы этих систем отсчета были введены не одинаковым способом. А именно, направление базисного орта $\mathbf{e}_1$ системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ было задано условием сонаправленности векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{v}$, а направление базисного орта $\mathbf{e}'_1$ системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ было задано условием сонаправленности векторов $\mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$. Эти условия привели к тому, что $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{v}' = -v\mathbf{e}'_1$ (см. (9.28)), откуда

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}'_1 = -\frac{\mathbf{v}'}{v} \quad (\text{при } v \neq 0; \quad v = |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|).$$

Таким образом, вектор $\mathbf{e}_1$ сонаправлен вектору скорости $\mathbf{v}$, тогда как вектор $\mathbf{e}'_1$ противонаправлен соответствующему вектору скорости $\mathbf{v}'$. Если это различие векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_1$ устранить, а именно заменить в выражениях (9.8), (9.9), (9.14) и (9.15) вектор $\mathbf{e}'_1$ на $-\mathbf{e}'_1$ и координату x'_1 на $-x'_1$ (последнее нужно для соблюдения равенства (9.11)), то мы получим формулы Лоренца в виде, при котором они преобразуются друг в друга путем только перемены местами штрихованных и нештрихованных базисных векторов и координат.

Обсуждаемые формулы Лоренца относятся к ситуации, когда оси времени T и T' рассматриваемых систем отсчета имеют общую точку O и все координаты, включая время, отсчитываются от этой точки. Проанализируем ситуацию, которая получается из данной ситуации путем перенесения начала системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ в произвольную точку $O' \in M$ вместе с параллельным перенесением базисных векторов $\mathbf{e}'_i$.

Пусть, как и ранее, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства M относительно начала O системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. Обозначим: $\mathbf{R}'$ — радиус-вектор той же точки пространства относительно начала O' системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$; $\mathbf{R}_0 = \overrightarrow{OO'}$. Понятно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}'$ или, что то же самое, $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}'$. Разложим векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$ системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, а вектор $\mathbf{R}'$ по базису $\{\mathbf{e}'_i\}$ системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Учитывая, что базисные векторы $\mathbf{e}'_i$ не меняются при

параллельном перенесении, имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 &= (x_0 - x_{00})\mathbf{e}_0 + (x_1 - x_{10})\mathbf{e}_1 + (x_2 - x_{20})\mathbf{e}_2 + (x_3 - x_{30})\mathbf{e}_3; \\ \mathbf{R}' &= x'_0\mathbf{e}'_0 + x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3,\end{aligned}\quad (9.32)$$

где x_i, x_{i0}, x'_i — координаты векторов соответственно $\mathbf{R}, \mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}'$ в указанных базисах ($i = 0, 1, 2, 3$).

Так как $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}'$, то левые части равенств (9.32) равны, значит, равны и их правые части. Ранее преобразование Лоренца (9.14) было выведено на основе равенства правых частей выражений (9.10) и (9.11) (с использованием зависимости между базисными векторами (9.9)). Поскольку при замене в (9.10) величин x_i величинами $x_i - x_{i0}$ правые части равенств (9.10) и (9.11) совпадают с правыми частями равенств (9.32), то преобразование Лоренца, выводимое с помощью равенств (9.32), будет отличаться от преобразования (9.14), полученного с помощью (9.10) и (9.11), также заменой x_i на $x_i - x_{i0}$. Произведя в (9.14) такую замену, получаем преобразование Лоренца в виде

$$t' = \frac{(t - t_0) - \frac{v}{c^2}(x_1 - x_{10})}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}; \quad x'_1 = \frac{(x_1 - x_{10}) - v(t - t_0)}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}; \quad x'_j = x_j - x_{j0}, \quad (9.33)$$

где $j = 2, 3$; учтено, что $x_0 = ct$, $x'_0 = ct'$, и обозначено $x_{00} = ct_0$. Преобразование Лоренца (9.33) относится к ситуации, при которой начала O и O' систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ отстоят друг от друга на вектор $\mathbf{R}_0 = \overrightarrow{OO'} = ct_0\mathbf{e}_0 + x_{10}\mathbf{e}_1 + x_{20}\mathbf{e}_2 + x_{30}\mathbf{e}_3$, а связь между базисными векторами систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ задается формулами (9.8) и (9.9). Здесь $t_0, x_{00}, x_{10}, x_{20}, x_{30}$ — константы; если все они равны нулю, то преобразование (9.33) совпадает с (9.14).

В пределе при $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ преобразование Лоренца (9.14) переходит в *преобразование Галилея* классической механики:

$$t' = t; \quad x'_1 = x_1 - vt; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3,$$

а равенство (9.30) переходит в равенство $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$, связывающее относительные скорости двух систем отсчета в классической механике.

Следует подчеркнуть, что из того факта, что преобразование Галилея является предельным случаем преобразования Лоренца, не вытекает, что классическая механика есть предельный случай специальной теории относительности. Дело в том, что четырехмерное пространство Минковского, служащее основой специальной теории относительности,

не может быть преобразовано никаким предельным переходом в трехмерное пространство, используемое в классической механике, так как ни при каком предельном переходе число 4 не может перейти в число 3.

Классическая механика и специальная теория относительности представляют собой две принципиально разные модели мира (хотя они и дают близкие количественные значения физических величин при описании результатов опытов, в которых относительные скорости тел пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света c).

10. Применение гиперболических функций для описания движения тел

Напомним определение угла между векторами в псевдоевклидовой плоскости, введенное в разд. 3 главы 2.

Рассмотрим псевдоевклидову плоскость. Известно, что через каждую ее точку проходят две изотропные прямые. Зафиксируем в плоскости некоторую точку O и построим проходящие через нее изотропные прямые. Они разбивают плоскость на четыре сектора.

Понятие угла между векторами в псевдоевклидовой плоскости вводится только для таких пар ненулевых векторов, которые удовлетворяют следующему условию. Если начала векторов поместить в точку O (путем параллельного перемещения векторов), то концы обоих векторов должны оказаться внутри одного и того же из указанных секторов. Понятно, что любые два вектора, подчиняющиеся этому условию, являются либо оба времениподобными, либо оба пространственноподобными.

Угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, удовлетворяющими данному условию, определяется формулой (3.4) из главы 2:

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (\operatorname{ch} \varphi \in [1, +\infty), \quad \varphi \in (-\infty, +\infty)), \quad (10.1)$$

где $\operatorname{ch} \varphi$ — гиперболический косинус угла φ . Вследствие четности функции $\operatorname{ch} \varphi$, эта формула определяет два значения угла φ , различающиеся знаком. Далее будем полагать, что $\varphi \geq 0$. Из однородности псевдоевклидовой плоскости следует, что введенное понятие угла не зависит от выбора точки O , которая фигурирует в приведенном выше условии.

Угол между изотропным вектором, направленным вдоль выходящего из O изотропного луча, и любым вектором с началом в O и концом внутри одного из прилегающих к лучу секторов условно считается

бесконечно большим. Это оправдано тем, что при формальном применении к такому случаю формулы (10.1) в ее знаменателе будет стоять нулевая длина изотропного вектора, что соответствует бесконечному значению угла φ .

Угол между векторами, имеющими начала в точке O и концы в разных секторах, не вводится. В частности, не вводится угол между времениподобным и пространственноподобным векторами. Подчеркнем в связи с этим, что в псевдоевклидовой плоскости понятие ортогональности векторов (заключающееся в равенстве нулю их скалярного произведения) не связано ни с какой числовой мерой угла. Это объясняется тем, что времениподобный вектор может быть ортогонален только пространственноподобному вектору, а угол между такими векторами, как сказано, не вводится. Данная ситуация принципиально отличается от случая собственно евклидовой плоскости, где угол между двумя взаимно ортогональными векторами определен и равен $\pi/2$.

Углом между двумя лучами (или прямолинейными отрезками), выходящими из одной точки пространства, называется угол между их направляющими векторами (если последний определен). *Углом* называется также сама геометрическая фигура, образованная такими лучами (отрезками), при этом они именуются *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла.

В связи с тем, что гиперболический косинус совпадает с косинусом мнимого аргумента ($\text{ch } \varphi = \cos(i\varphi)$, где i — мнимая единица), угол в псевдоевклидовой плоскости принято обозначать на рисунках с использованием символа мнимой единицы, например, $i\varphi$. Роль мнимой единицы сводится в этом случае к тому, чтобы обратить внимание читателя на необходимость применять при оперировании с этим углом гиперболические функции вместо тригонометрических.

Пользуясь понятием угла между векторами в псевдоевклидовой плоскости, можно записать ряд формул, аналогичных известным формулам обычной евклидовой геометрии. Приведем некоторые из них.

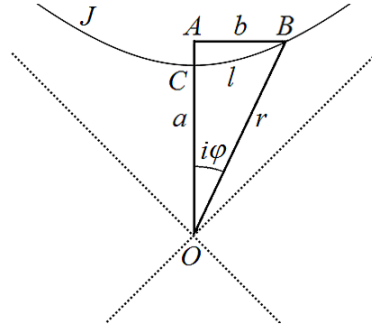
Пусть в псевдоевклидовой плоскости заданы (псевдо)окружность и угол с вершиной в центре окружности и со сторонами, пересекающими одну ветвь окружности (рис. 10.1). Этот угол вырезает из окружности дугу, длина l которой равна произведению радиуса окружности r на величину угла φ (измеренную в радианах):

$$l = r\varphi; \quad (10.2)$$

см. теорему 4.6 из главы 2 (с. 54); здесь учтено принятое выше допущение, что $\varphi \geq 0$. Формула (10.2) совпадает с аналогичной формулой, выполняющейся в собственно евклидовой плоскости.

Рис. 10.1. Окружность J радиуса r с центром в точке O и треугольник OAB со взаимно ортогональными сторонами OA и AB в псевдоевклидовой плоскости.

l — длина дуги CB ; φ — угол между отрезками OA и OB (символ мнимой единицы i в обозначении угла указывает на необходимость применять гиперболические функции при оперировании с этим углом); пунктирные прямые — сечение светового конуса.



Рассмотрим треугольник OAB с времениподобными сторонами OA и OB , углом φ между ними и с пространственноподобной стороной AB , ортогональной OA (см. рис. 10.1). Пусть длины сторон OA , AB и OB равны a , b и r соответственно. Тогда, как известно, выполняются зависимости

$$a = r \operatorname{ch} \varphi; \quad b = r \operatorname{sh} \varphi; \quad b = a \operatorname{th} \varphi, \quad (10.3)$$

где $\operatorname{ch} \varphi$, $\operatorname{sh} \varphi$ и $\operatorname{th} \varphi$ — гиперболические косинус, синус и тангенс угла φ (графики этих функций приведены в конце раздела; здесь $\varphi \geq 0$). Формулы (10.3) переходят в формулы собственно евклидовой геометрии для прямоугольного треугольника, если заменить в них гиперболические функции аналогичными тригонометрическими функциями.

Воспользуемся формулами (10.3) для описания движения материальной точки.

Рассмотрим материальную точку λ , которая движется в пространстве Минковского M вдоль прямолинейной времениподобной мировой линии L (рис. 10.2). Зададим в M инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени T , проходящей через точку $O \in L$. Будем отсчитывать координатное время t и собственное время материальной точки t_* , начиная от точки O (первое измеряется вдоль оси времени T , второе — вдоль мировой линии L). На рис. 10.2 изображена плоскость, содержащая прямые T и L . Она является псевдоевклидовой, так как пространство M имеет сигнатуру $(+ - - -)$ и плоскость содержит времениподобную прямую T .

Материальная точка λ движется по отношению к системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ со скоростью $\mathbf{v}$, лежащей в физическом пространстве Γ , причем $\mathbf{v} = \text{const}$, поскольку мировая линия L прямолинейна (это вытекает из определения скорости $\mathbf{v}$ и теоремы 6.2, см. разд. 6). Следовательно, за

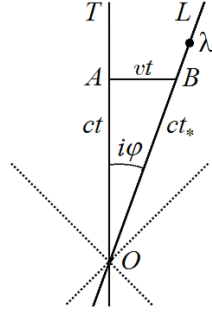


Рис. 10.2. Материальная точка λ , движущаяся вдоль прямолинейной времениподобной мировой линии L .

Пунктирные прямые — сечение светового конуса.

промежуток координатного времени $[0, t]$ ($t > 0$) материальная точка λ проходит в Γ прямолинейный отрезок длины vt , где $v = |\mathbf{v}| = \text{const}$. Пусть A — точка оси времени T , отвечающая моменту времени t . Так как в начальный момент времени материальная точка λ находилась в точке O , то в момент t она окажется в точке B мировой линии L , которая одномоментна точке A по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ и находится от A на расстоянии vt (см. рис. 10.2).

Рассмотрим треугольник OAB , показанный на рисунке. В нем сторона AB ортогональна стороне OA (потому что $A, B \in \Gamma$ и $\Gamma \perp T$). Длины сторон OA , AB и OB равны соответственно ct , vt и ct_* , где c — скорость света (ct и ct_* — натуральные параметры на T и L соответственно). Обозначим угол между прямыми T и L через φ . Поскольку плоскость является псевдоевклидовой, стороны OA и OB треугольника времениподобные и $AB \perp OA$, то можно применить формулы (10.3). Из третьей из них следует, что $vt = ct \operatorname{th} \varphi$, откуда $\operatorname{th} \varphi = v/c$. С помощью этого равенства и известных соотношений: $\operatorname{th} \varphi = \operatorname{sh} \varphi / \operatorname{ch} \varphi$ и $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$, получаем формулы, выражающие гиперболические функции через отношение v/c :

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \operatorname{th} \varphi = \frac{v}{c}, \quad (10.4)$$

здесь $0 \leq \varphi < +\infty$; $0 \leq v < c$ (см. теорему 6.1).

Формулы (10.4) получены при условии прямолинейности мировой линии материальной точки. Однако от этого условия можно отказаться. Действительно, при выводе формул была использована прямолинейность не всей мировой линии, а только ее отрезка, отвечающего промежутку времени $[0, t]$. А так как величина t не входит в форму-

лы (10.4), то можно считать, что она сколь угодно мала. Поэтому длина указанного отрезка может быть устремлена к нулю. Это означает, что условие прямолинейности мировой линии не является обязательным и, следовательно, формулы (10.4) справедливы для произвольной гладкой времениподобной мировой линии. При этом фигурирующая в них величина φ есть угол между осью времени и касательной к мировой линии в точке O , а величина v есть мгновенное значение скорости материальной точки в точке O .

При выводе формул (10.4) предполагалось также, что ось времени T проходит через точку $O \in L$ и что координатное время t отсчитывается от точки O . Вместе эти предположения означают, что начало системы отсчета находится в O . От этого условия тоже можно отказаться, потому что начало любой системы отсчета может быть совмещено с точкой O путем параллельного перенесения системы отсчета, что, очевидно, не меняет величин v и φ , входящие в (10.4).

Таким образом, формулы (10.4) справедливы для произвольной гладкой времениподобной мировой линии и произвольной инерциальной системы отсчета. Входящая в них величина v представляет собой скорость материальной точки относительно используемой инерциальной системы отсчета. Величина φ есть угол между направляющим ортом оси времени и направляющим ортом касательной к мировой линии (в соответствии с определением угла между векторами, оба орта должны иметь одинаковую временную ориентацию, при этом их начала могут находиться в разных точках пространства). Скорость v и угол φ относятся к одной и той же точке мировой линии. В случае не прямолинейной мировой линии эти величины принимают, вообще говоря, различные значения в разные моменты времени t , то есть являются функциями времени: $v = v(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$.

Формулы (10.4) позволяют записать некоторые соотношения теории относительности в более компактном виде.

Например, полученные ранее соотношения (6.12) и (6.13):

$$dt_* = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}; \quad \mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (10.5)$$

преобразуются с помощью формул (10.4) к виду соответственно

$$dt_* = \frac{dt}{\operatorname{ch} \varphi}; \quad (10.6)$$

$$\mathbf{i} = \operatorname{ch} \varphi \boldsymbol{\tau} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}, \quad (10.7)$$

где t_* — собственное время материальной точки; t — координатное время в используемой инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$; $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к мировой линии L ; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T (векторы $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau}$ ориентированы в сторону будущего); φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau}$; $\mathbf{e} = \mathbf{v}/v$ (при $v \neq 0$; $\mathbf{e} \perp \boldsymbol{\tau}$, так как $\mathbf{v} \in \Gamma$ и $\Gamma \perp T$). Если $v = 0$, то формулы (10.6) и (10.7) принимают вид $dt_* = dt$ и $\mathbf{i} = \boldsymbol{\tau}$. Отметим, что из (10.1) (с учетом $|\mathbf{i}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1$ и $\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\tau} > 0$) или из (10.7) (с учетом $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e} = 0$) вытекает равенство

$$\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\tau} = \operatorname{ch} \varphi. \quad (10.8)$$

Выражение (10.7) представляет собой разложение вектора $\mathbf{i}$ на составляющие вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ . Проиллюстрируем это разложение рисунком.

Пусть заданы гладкая мировая линия L и инерциальная система отсчета $\{T, \Gamma\}$. Зафиксируем произвольную точку O мировой линии L и рассмотрим касательный орт $\mathbf{i}$ к L , имеющий начало в этой точке. Перенесем систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ параллельно самой себе так, чтобы ее начало совпало с O . Понятно, что при этом составляющие вектора $\mathbf{i}$ в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ не изменятся. Поместим начало направляющего орта $\boldsymbol{\tau}$ оси времени T в точку O и построим плоскость, содержащую векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{i}$ (рис. 10.3).

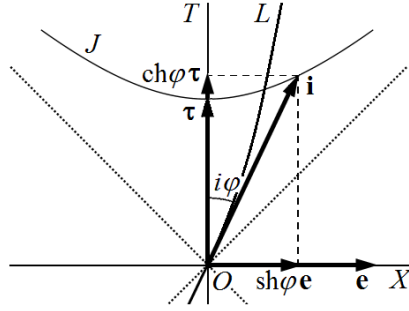


Рис. 10.3. Разложение единичного касательного вектора $\mathbf{i}$ к мировой линии L на составляющие вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ .

J — окружность единичного радиуса с центром в точке O ; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T ; $\mathbf{e}$ — единичный вектор, лежащий в физическом пространстве Γ ; φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau}$; пунктирные прямые — сечение светового конуса; мировая линия L может не лежать целиком в рассматриваемой плоскости.

Эта плоскость является псевдоевклидовой, (потому что она содержит времениподобную прямую T). Поскольку векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{i}$ единичные, ориентированы в сторону будущего и имеют начало в точке O , то их концы лежат на одной ветви (псевдо)окружности единичного радиуса с центром в O , как изображено на рисунке. Проведем в этой плоскости прямую X , ортогональную оси времени T и проходящую через точку O . Вследствие $X \perp T$, прямая X принадлежит физическому пространству Γ (при его расположении в M , проходящем через точку O). Из содержания разд. 9 вытекает, что скорость $\mathbf{v}$ материальной точки и вместе с ней единичный вектор $\mathbf{e} = \mathbf{v}/v$ направлены вдоль этой прямой. На основании формул (10.3), учитывая единичность вектора $\mathbf{i}$, заключаем, что длины проекций вектора $\mathbf{i}$ на оси T и X равны соответственно $\text{ch } \varphi$ и $\text{sh } \varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau}$. Отсюда следует, что составляющие вектора $\mathbf{i}$ вдоль осей T и X имеют вид, показанный на рис. 10.3, что и означает выполнение равенства (10.7).

Формулы (10.4) дают возможность записать более компактно преобразования Лоренца. Напомним, что, согласно введенному в разд. 9 определению, скорость v инерциальной системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ (относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$) представляет собой скорость ее тела отсчета. Поэтому в преобразованиях Лоренца величина v фактически есть скорость материальной точки. Данное обстоятельство позволяет использовать в записи этих преобразований формулы (10.4). Применяя их, получаем преобразования (формулы) Лоренца (9.8), (9.9), (9.14) и (9.15) в виде соответственно

$$\mathbf{e}'_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0 + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}'_1 = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_1 + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_0; \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3; \quad (10.9)$$

$$\mathbf{e}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{e}'_0 - \text{sh } \varphi \mathbf{e}'_1; \quad \mathbf{e}_1 = \text{ch } \varphi \mathbf{e}'_1 - \text{sh } \varphi \mathbf{e}'_0; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3; \quad (10.10)$$

$$ct' = ct \text{ch } \varphi - x_1 \text{sh } \varphi; \quad x'_1 = x_1 \text{ch } \varphi - ct \text{sh } \varphi; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3; \quad (10.11)$$

$$ct = ct' \text{ch } \varphi + x'_1 \text{sh } \varphi; \quad x_1 = x'_1 \text{ch } \varphi + ct' \text{sh } \varphi; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3, \quad (10.12)$$

где $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированные базисы систем отсчета $\{T', \Gamma'\}$ и $\{T, \Gamma\}$; φ — угол между осями времени T и T' ; $\{ct', x'_1, x'_2, x'_3\}$ и $\{ct, x_1, x_2, x_3\}$ — системы координат, соответствующие системам отсчета $\{T', \Gamma'\}$ и $\{T, \Gamma\}$. Формулы (10.11) и (10.12) описывают пассивное преобразование Лоренца, при котором точки пространства остаются неподвижными, но их координаты меняются, вследствие перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Активное преобразование Лоренца переводит радиус-вектор $\mathbf{R}$ вида (9.16) в радиус-вектор $\mathbf{R}'$ вида (9.19). При этом точки пространства, имеющие координаты x_i , переходят в точки, координаты x''_i которых

связаны с x_i зависимостями (9.20). С помощью формул (10.4) зависимости (9.20) могут быть записаны в виде

$$x_0'' = x_0 \operatorname{ch} \varphi + x_1 \operatorname{sh} \varphi; \quad x_1'' = x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_0 \operatorname{sh} \varphi; \quad x_2'' = x_2; \quad x_3'' = x_3, \quad (10.13)$$

где $x_0'' = ct''$ и $x_0 = ct$. Таким образом, активное преобразование Лоренца переводит радиус-вектор точек пространства

$$\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (10.14)$$

в радиус-вектор

$$\mathbf{R}' = x_0'' \mathbf{e}_0 + x_1'' \mathbf{e}_1 + x_2'' \mathbf{e}_2 + x_3'' \mathbf{e}_3, \quad (10.15)$$

координаты x_i'' которого связаны с координатами x_i вектора $\mathbf{R}$ зависимостями (10.13) (x_i и x_i'' — координаты векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$).

В разд. 4 главы 2 рассмотрен тензор B , поворачивающий векторы в псевдоевклидовой плоскости. Он определяется формулой (4.17) из главы 2. Переобозначим его символом $B_{(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)}$:

$$B_{(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)} = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad (10.16)$$

где φ — угол поворота; $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ — ортонормированный базис в плоскости.

Будем считать, что в (10.16) векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ те же, что в (10.14) и (10.15). Введем единичный тензор $I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$ в пространственноподобной плоскости, содержащей векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (10.17)$$

Тензор $I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$ является единичным, так как его действие на произвольный вектор $\mathbf{u} = u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$, принадлежащий плоскости, не меняет вектор:

$$I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} \cdot \mathbf{u} = (-\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot (u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) = u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{u},$$

здесь учтены зависимости $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1$ и $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, вытекающие из ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ (определение единичного тензора приведено в разд. 2 главы 2, с. 24).

Составим сумму тензоров $B_{(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)}$ и $I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$, которую обозначим через B . Из (10.16) и (10.17) имеем:

$$\begin{aligned} B = B_{(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)} + I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} = & \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \\ & + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Подействуем тензором B на вектор $\mathbf{R}$. Используя (10.14), (10.18) и ортонормированность базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, можем записать:

$$\begin{aligned} B \cdot \mathbf{R} &= (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \\ &\quad \cdot (x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) = \\ &= (x_0 \operatorname{ch} \varphi + x_1 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_0 + (x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_0 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10.13) и (10.15) вытекают равенства

$$B \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}'; \quad (10.19)$$

$$\mathbf{R}' = (x_0 \operatorname{ch} \varphi + x_1 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_0 + (x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_0 \operatorname{sh} \varphi) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (10.20)$$

Таким образом, тензор B , задаваемый выражением (10.18), осуществляет активное преобразование Лоренца, в результате которого вектор $\mathbf{R}$ вида (10.14) переходит в вектор $\mathbf{R}'$ вида (10.20). Поскольку $B = B_{(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)} + I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$, то на основании свойств тензора $B_{(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)}$, указанных в разд. 4 главы 2 (он обозначен там через B), и свойств единичного тензора $I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$ заключаем, что тензор B поворачивает на угол φ векторы в псевдоевклидовой плоскости, содержащей орты $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$, и оставляет неподвижными векторы в пространственноподобной плоскости, содержащей орты $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Этот же вывод следует из того, что тензор B преобразует векторы $\mathbf{e}_i$ в векторы $\mathbf{e}'_i$, описываемые формулами (10.9): $B \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Данное активное преобразование Лоренца, а также сам осуществляющий его тензор B именуются *гиперболическим поворотом* или *бустом*. Более детально это преобразование будет рассмотрено в разд. 11.

Многие специфические эффекты специальной теории относительности являются следствиями соотношений (10.5) и преобразований Лоренца (9.8), (9.9) (9.14) и (9.15). Из записи их в форме (10.6), (10.7) и (10.9)–(10.12) видно, что эти эффекты обусловлены тем, что мировые линии материальных точек, движущихся относительно используемой системы отсчета, наклонены по отношению к оси времени. Принимая во внимание, что ось времени системы отсчета является мировой линией тела отсчета, то есть фактически служит мировой линией наблюдателя, можно сказать, что *специфические эффекты специальной теории относительности объясняются взаимным наклоном мировых линий наблюдателя и изучаемых тел*.

В завершение настоящего раздела выпишем формулы, содержащие тригонометрические функции мнимого аргумента и гиперболические функции, и приведем графики гиперболических функций (рис. 10.4):

$$\cos^2(i\varphi) + \sin^2(i\varphi) = 1; \quad \cos(i\varphi) = \operatorname{ch} \varphi; \quad \sin(i\varphi) = i \operatorname{sh} \varphi;$$

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1;$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}; \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2};$$

$$\operatorname{ch}(2\varphi) = \operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi; \quad \operatorname{sh}(2\varphi) = 2 \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi;$$

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \frac{e^{2\varphi} - 1}{e^{2\varphi} + 1};$$

$$\frac{d \operatorname{ch} \varphi}{d\varphi} = \operatorname{sh} \varphi; \quad \frac{d \operatorname{sh} \varphi}{d\varphi} = \operatorname{ch} \varphi;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\varphi) + \frac{1}{2} \varphi + C;$$

$$\int \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\varphi) - \frac{1}{2} \varphi + C;$$

$$\int \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \operatorname{ch}(2\varphi) + C,$$

здесь $\varphi \in (-\infty, +\infty)$; C — произвольная постоянная.

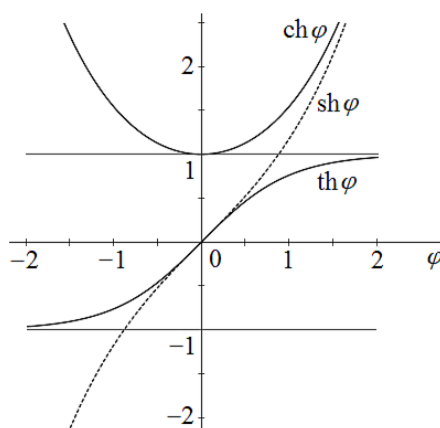


Рис. 10.4. Графики гиперболических функций $\operatorname{ch} \varphi$, $\operatorname{sh} \varphi$ и $\operatorname{th} \varphi$.

11. Группа Лоренца и группа Пуанкаре

Повторим ряд определений, сформулированных в разд. 2 главы 2.

Пусть V — линейное (векторное) пространство; $V \otimes V$ — пространство двухвалентных тензоров (линейных операторов), действующих на векторы пространства V в соответствии с законом

$$\mathbf{u} \longmapsto A \cdot \mathbf{u}, \quad (11.1)$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор из V ; A — произвольный тензор из $V \otimes V$; точка — знак скалярного умножения.

Тензор (оператор) $A \in V \otimes V$ называется *ортогональным*, если он не меняет скалярные произведения векторов:

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{при всех } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (11.2)$$

Множество $\mathcal{O}$ всех ортогональных тензоров образует группу со скалярным умножением тензоров в качестве групповой операции и единичным тензором в качестве единичного элемента группы. Группа $\mathcal{O}$ называется *ортогональной группой* пространства V .

При преобразованиях пространства, осуществляемых ортогональными тензорами, сумма векторов преобразуется в сумму векторов и произведение вектора на число — в произведение вектора на это же число (так как, согласно (11.1), эти преобразования являются линейными). Кроме того, в соответствии с (11.2), сохраняются скалярные произведения векторов. Вместе с ними сохраняются длины векторов и углы между векторами, потому что они определяются через скалярные произведения векторов. В связи с этим можно сказать, что ортогональная группа сохраняет метрику пространства.

Вернемся к обсуждению пространства Минковского M .

Рассмотрим множество всех векторов, имеющих начало в некоторой точке пространства M . Это множество образует линейное (векторное) пространство, ассоциированное с M . Ортогональная группа этого пространства называется *группой Лоренца* (иногда *общей группой Лоренца*) (мы упоминали эту группу в разд. 2 и 5 главы 2, с. 27 и 72). Группа Лоренца состоит из четырех непересекающихся связных компонент. Та из них, которая содержит единичный тензор (тождественный оператор), сама является группой. Мы называем эту группу *ограниченной группой Лоренца*. В ряде случаев именно ее именуют группой Лоренца. Операторы этой группы не меняют временную ориентацию времениподобных векторов и пространственную ориентацию в пространственноподобных гиперплоскостях.

Если к операторам группы Лоренца добавить операторы, осуществляющие всевозможные *трансляции* (то есть переносы общей точки начала векторов вместе с параллельным перенесением векторов), то вся совокупность полученных операторов тоже будет образовывать группу. Эта группа называется *группой Пуанкаре*.

Ограниченная группа Лоренца, трактуемая как набор активных преобразований пространства Минковского, включает в себя:

- *гиперболические повороты (бусты)*; это такие преобразования пространства M , при которых некоторая псевдоевклидова плоскость преобразуется сама в себя, то есть является инвариантной, а ортогональная ей пространственноподобная плоскость остается неподвижной;
- *пространственные повороты*, то есть преобразования пространства, при которых некоторая пространственноподобная плоскость является инвариантной, а ортогональная ей псевдоевклидова плоскость остается неподвижной;
- *изотропные повороты*; это — преобразования, оставляющие неподвижной некоторую изотропную плоскость (определение изотропного подпространства пространства M дано в разд. 5 главы 2, с. 89).

Каждое из преобразований должно быть ортогональным и должно допускать непрерывный переход к тождественному преобразованию (для того, чтобы оно относилось к ограниченной группе Лоренца). Эта группа содержит также суперпозиции указанных преобразований.

Отметим, что перечисленные преобразования не являются независимыми, так как суперпозиция преобразований одного типа может не быть преобразованием того же типа. Например, суперпозиция трех гиперболических поворотов может представлять собой один пространственный поворот (см. далее разд. 21).

Группа Лоренца содержит вместе с преобразованиями ограниченной группы Лоренца также:

- инверсию относительно точки начала векторов (она заключается в замене всех векторов противоположными векторами);
- отражения в пространственноподобных гиперплоскостях (они изменяют временную ориентацию времениподобных векторов);
- отражения в псевдоевклидовых гиперплоскостях (они изменяют ориентацию в пространственноподобных гиперплоскостях).

Наряду с указанными преобразованиями группа Лоренца включает в себя всевозможные их суперпозиции.

В дальнейшем мы будем называть «преобразованием» как действие, производимое оператором, так и сам оператор (тензор). Это же относится к частным видам преобразований («бусту» и другим).

Рассмотрим конкретные примеры тензоров, относящихся к ограниченной группе Лоренца.

Нам потребуется пара взаимных ортонормированных базисов.

Зададим в пространстве M ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Его векторы удовлетворяют соотношениям (5.1) (с. 129):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Базис $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, задается условием

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (11.4)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \quad (11.5)$$

(определение взаимных базисов имеется в разд. 2 главы 2, с. 29).

Из (11.3)–(11.5) находим:

$$\mathbf{e}_0^* = \mathbf{e}_0; \quad \mathbf{e}_1^* = -\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3^* = -\mathbf{e}_3, \quad (11.6)$$

то есть $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\} = \{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$. Очевидно, что базис $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ тоже ортонормированный.

Составим из векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_i^*$ диадный базис $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}_{i,j=0}^3$ и будем раскладывать вводимые далее тензоры по этому базису. Напомним что мы обозначаем тензорное произведение векторов без знака умножения между сомножителями.

Единичный тензор I имеет в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ следующий вид:

$$I = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \quad (11.7)$$

Тот факт, что I — единичный тензор, вытекает из выполнения условия (2.15) главы 2, которое определяет единичный тензор. Действительно, для любого вектора $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ получаем из (11.4), (11.5) и (11.7): $I \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, а это и означает, что I — единичный тензор.

Введем тензоры (в которых ψ , φ и t — вещественные числа):

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* - \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \sin \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + \cos \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\ B &= \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\ C &= (1 + 2t^2) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* - 2t^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + 2t \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* + 2t^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + (1 - 2t^2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \\ &\quad + 2t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + 2t \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0^* - 2t \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Выпишем матрицы компонент этих тензоров. Нумерация компонент определяется общей формулой разложения тензора по базису:

$$A = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^* = a_{00} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + a_{01} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + a_{02} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* + \dots + a_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \quad (11.9)$$

Согласно (11.7)–(11.9), матрицы компонент тензоров A , B , C и I в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}_{i,j=0}^3$ есть соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (11.10)$$

$$\begin{pmatrix} 1+2t^2 & -2t^2 & 2t & 0 \\ 2t^2 & 1-2t^2 & 2t & 0 \\ 2t & -2t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 11.1. Тензоры A , B и C вида (11.8) принадлежат ограниченной группе Лоренца и осуществляют соответственно пространственный, гиперболический и изотропный повороты пространства Минковского.

Доказательство. Образует тензоры A^* , B^* и C^* , транспонированные к тензорам A , B и C . По определению, операция транспонирования заключается в перемене местами векторов в каждой из диад, составляющих тензор. Произведем в (11.8) такую операцию и затем с помощью (11.6) перейдем к базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} A^* &= \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* - \sin \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \cos \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\ B^* &= \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* - \text{sh } \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* - \text{sh } \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \text{ch } \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\ C^* &= (1+2t^2) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + 2t^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* - 2t \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0^* - 2t^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + (1-2t^2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \\ &\quad + 2t \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* - 2t \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* - 2t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Умножим скалярно каждый из тензоров A , B и C на соответствующий транспонированный тензор.

Правило скалярного умножения диад иллюстрируется таким примером:

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \mathbf{d} + \mathbf{e} \mathbf{f}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{d} + \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{f} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \mathbf{d} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{a} \mathbf{f},$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{f}$ — векторы; $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}$ — скалярные произведения векторов.

На основании (11.4), (11.5), (11.7), (11.8) и (11.11) находим:

$$A \cdot A^* = I; \quad B \cdot B^* = I; \quad C \cdot C^* = I, \quad (11.12)$$

откуда

$$A^* = A^{-1}; \quad B^* = B^{-1}; \quad C^* = C^{-1}. \quad (11.13)$$

Выполнение этих равенств служит критерием ортогональности тензоров (см. формулу (2.21) в разд. 2 главы 2). Следовательно, тензоры A , B и C действительно принадлежат группе Лоренца.

Из (11.7) и (11.8) видно, что при устремлении величин ψ , φ и t к нулю тензоры A , B и C непрерывным образом переходят в единичный тензор I . Это означает, что они принадлежат ограниченной группе Лоренца.

Проанализируем действие тензоров A , B и C на векторы пространства M .

Начнем с тензора A . Из (11.8) имеем:

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{e}_i = & \mathbf{e}_0(\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{e}_i) + \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_i) + \cos \psi \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_i) - \sin \psi \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_i) + \\ & + \sin \psi \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_i) + \cos \psi \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_i) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (11.4) и (11.5), получаем:

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_0; \\ A \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1; \\ A \cdot \mathbf{e}_2 &= \cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \mathbf{e}_3; \\ A \cdot \mathbf{e}_3 &= -\sin \psi \mathbf{e}_2 + \cos \psi \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Введем обозначение: $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — плоскость, которая содержит векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (имеющие общее начало).

Из двух первых равенств (11.14) заключаем, что тензор (оператор) A оставляет неподвижными базисные векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$. Вследствие линейности преобразования, это означает, что тензор A оставляет неподвижной всю псевдоевклидову плоскость $P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$. Согласно двум последним равенствам (11.14), тензор A поворачивает векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ на угол ψ в пространственноподобной плоскости $P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. В силу линейности преобразования, вся плоскость $P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ поворачивается на угол ψ (при этом она является инвариантной, так как преобразуется сама в себя). Отсюда и из принадлежности тензора A ограниченной группе Лоренца следует, что этот тензор действительно осуществляет пространственный поворот пространства M .

Аналогичным образом из (11.8) находим результат действия оператора B на базисные векторы:

$$\begin{aligned} B \cdot \mathbf{e}_0 &= \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1; \\ B \cdot \mathbf{e}_1 &= \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1; \\ B \cdot \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_2; \\ B \cdot \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Из (11.15) вытекает, что тензор B оставляет неподвижной пространственноподобную плоскость $P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и поворачивает на угол φ псевдоевклидову плоскость $P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$, сохраняя ее инвариантной (такой поворот плоскости подробно исследован в разд. 4 главы 2; ср. две первые формулы в (11.15) с формулами (4.20) из главы 2, с. 48). Из этого заключаем с учетом принадлежности тензора B ограниченной группе Лоренца, что данный тензор реализует гиперболический поворот (буст) пространства M .

Теперь проанализируем действие тензора C на векторы пространства M . На основании (11.8) получаем:

$$\begin{aligned} C \cdot \mathbf{e}_0 &= (1 + 2t^2)\mathbf{e}_0 + 2t^2\mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2; \\ C \cdot \mathbf{e}_1 &= -2t^2\mathbf{e}_0 + (1 - 2t^2)\mathbf{e}_1 - 2t\mathbf{e}_2; \\ C \cdot \mathbf{e}_2 &= 2t(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2; \\ C \cdot \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Отсюда

$$C \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1. \tag{11.17}$$

Согласно последнему из равенств (11.16) и равенству (11.17), тензор C оставляет неподвижной плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Из (11.3) вытекает, что вектор $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$, лежащий в этой плоскости, изотропный и ортогонален всем векторам этой плоскости, включая самого себя. Наличие в плоскости вектора с такими свойствами означает, что плоскость является изотропной. Поэтому $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ представляет собой изотропную плоскость (можно доказать, что эта плоскость касается светового конуса вдоль изотропной образующей с направляющим вектором $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$, см. рис. 5.9 в главе 2, с. 90). Принадлежность тензора C ограниченной группе Лоренца и существование неподвижной изотропной плоскости свидетельствуют о том, что тензор C действительно производит изотропный поворот пространства M . Теорема доказана. ■

Рассмотрим свойства тензоров A , B и C , о которых идет речь в теореме 11.1.

Отметим прежде всего, что действие тензора B на векторы пространства M было проанализировано в разд. 10 (там этот тензор представлен в виде разложения (10.18) по базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$; с помощью зависимостей (11.6) это разложение легко преобразуется в разложение по базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$, совпадающее со вторым из выражений (11.8)).

Из (11.11) следует, что матрицы компонент тензоров A^* , B^* и C^* в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ имеют вид соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & -\operatorname{sh} \varphi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (11.18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2t^2 & -2t^2 & -2t & 0 \\ 2t^2 & 1 - 2t^2 & -2t & 0 \\ -2t & 2t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что равенства (11.12), с помощью которых была доказана ортогональность тензоров A , B и C , останутся верными и в том случае, если подставить в них вместо тензоров их матрицы (11.10) и (11.18). Нужно помнить, однако, что замена произведения тензоров произведением матриц допустима только в том случае, если матрицы находятся путем разложения тензоров по диадному базису, составленному из векторов взаимных ортонормированных базисов пространства M . При разложении тензоров по любым другим диадным базисам произведение их матриц может не соответствовать произведению тензоров. Отметим, что матрица единичного тензора I является единичной матрицей тоже только в том случае, если он раскладывается по диадному базису, составленному из векторов взаимных ортонормированных базисов пространства M (см. формулу (2.29) в главе 2, с. 31).

Добавим к этому, что матрица транспонированного тензора может не совпадать с транспонированной матрицей исходного тензора (это видно, например, из сравнения второй и третьей матриц (11.18) с транспонированными второй и третьей матрицами (11.10)). Дело в том, что производить операции с тензорами наиболее удобно в том случае, когда все тензоры разложены по одному и тому же базису. Между тем, при транспонировании тензора, разложенного по базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$, мы полу-

чаем тензор, разложенный по базису $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j\}$. Поэтому требуется дополнительно преобразовать полученный базис к исходному. Именно вследствие такого преобразования, сделанного при выводе формул (11.11), матрицы тензоров B^* и C^* оказались отличными от транспонированных матриц тензоров B и C .

Построим тензор D , равный скалярному произведению тензоров A и B . Из (11.8) находим:

$$\begin{aligned} D &= A \cdot B = B \cdot A = \\ &= \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \\ &\quad + \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* - \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \sin \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + \cos \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Отсюда вытекает, что матрица компонент тензора D в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}; \quad (11.20)$$

отметим, что матрица (11.20) равна произведению матриц тензоров A и B , приведенных в (11.10).

Тензор D вида (11.19) (с матрицей (11.20)), а также осуществляемое им преобразование пространства Минковского называются *4-винтом*. В связи с тем, что 4-винт D представляет собой суперпозицию пространственного и гиперболического поворотов, он относится к ограниченной группе Лоренца.

При доказательстве теоремы 11.1 было показано, что тензор C , осуществляющий изотропный поворот пространства M , оставляет неподвижной изотропную плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$; вместе с тем, из равенства (11.17) и третьего из равенств (11.16) вытекает, что изотропная плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ является инвариантной (но не неподвижной при $t \neq 0$). На основании этого заключаем, что при действии тензора C инвариантными являются все изотропные плоскости вида $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e})$, где $\mathbf{e} = \alpha \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3$, α и β — любые вещественные числа, не равные нулю одновременно ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$). Согласно (11.16) и (11.17), векторы, лежащие в плоскости $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e})$, получают приращение, пропорциональное параметру t , поэтому параметр t можно условно назвать углом изотропного поворота.

Поскольку величины ψ , φ и t , входящие в (11.8), играют роль углов поворота при рассматриваемых преобразованиях, то тензоры A^{-1} , B^{-1} и C^{-1} , обратные к тензорам A , B и C , могут быть получены путем

замены в (11.8) величин ψ , φ и t на $-\psi$, $-\varphi$ и $-t$. Такая замена, как легко убедиться, приводит к тензорам, которые совпадают с тензорами A^* , B^* и C^* вида (11.11), что означает выполнение равенств (11.13). Из этого вновь вытекает, что тензоры A , B и C являются ортогональными.

В приводимой далее теореме речь идет о суперпозиции преобразований. Напомним, что при записи суперпозиции операторов тот оператор, который действует первым, ставится на последнее место. Оператор, действующий следующим, помещается на предпоследнее место и так далее. Иначе говоря, преобразования реализуются справа налево. Это же относится к тензорам (при рассмотрении их как операторов). Например, если сначала действует тензор A , а затем тензор B , то их суперпозиция записывается в виде произведения $B \cdot A$, при этом они действуют на вектор $\mathbf{u}$ в соответствии с правилом $(B \cdot A) \cdot \mathbf{u} = B \cdot (A \cdot \mathbf{u})$. В таком же порядке перемножаются матрицы тензоров.

Теорема 11.2. *Изотропный поворот, осуществляемый тензором C вида (11.8) (при $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$), эквивалентен суперпозиции двух гиперболических и одного пространственного поворотов, реализуемых следующим способом. Сначала производится гиперболический поворот в плоскости $P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2)$ на угол φ , определяемый условием $\text{th } \varphi = 2t$. Затем — пространственный поворот в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ на угол ψ , задаваемый условием $\sin \psi = 2t$ (положительное значение ψ отвечает повороту в направлении от $\mathbf{e}_2$ к $\mathbf{e}_1$; $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). И далее производится гиперболический поворот в плоскости $P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ на угол χ , удовлетворяющий условию $\text{ch } \chi - \text{sh } \chi = \sqrt{1 - 4t^2}$ (с поворотом вектора $\mathbf{e}_0$ в направлении вектора $-\mathbf{e}_1$; $\chi \geq 0$).*

Доказательство. Воспользуемся матричным представлением тензоров. Суперпозиция трех поворотов, о которых идет речь в теореме, задается следующим произведением матриц:

$$\begin{pmatrix} \text{ch } \chi & -\text{sh } \chi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \chi & \text{ch } \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & 0 & \text{sh } \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & 0 & \text{ch } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

эти матрицы получены из двух первых матриц (11.10) с учетом указанных в теореме плоскостей поворота и направлений возрастания углов. Данное произведение равно матрице

$$\begin{pmatrix} \text{ch } \chi \text{ ch } \varphi - \text{sh } \chi \sin \psi \text{ sh } \varphi & -\text{sh } \chi \cos \psi & \text{ch } \chi \text{ sh } \varphi - \text{sh } \chi \sin \psi \text{ ch } \varphi & 0 \\ -\text{sh } \chi \text{ ch } \varphi + \text{ch } \chi \sin \psi \text{ sh } \varphi & \text{ch } \chi \cos \psi & -\text{sh } \chi \text{ sh } \varphi + \text{ch } \chi \sin \psi \text{ ch } \varphi & 0 \\ \cos \psi \text{ sh } \varphi & -\sin \psi & \cos \psi \text{ ch } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании заданных в теореме условий:

$$t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \text{th } \varphi = 2t; \quad \sin \psi = 2t; \quad \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{ch } \chi - \text{sh } \chi = \sqrt{1 - 4t^2}; \quad \chi \geq 0,$$

находим:

$$\begin{cases} \text{sh } \varphi = \frac{2t}{\sqrt{1 - 4t^2}}; \\ \text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - 4t^2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \text{sh } \chi = \frac{2t^2}{\sqrt{1 - 4t^2}}; \\ \text{ch } \chi = \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{1 - 4t^2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \psi = 2t; \\ \cos \psi = \sqrt{1 - 4t^2}. \end{cases}$$

Подстановка этих значений функций в выписанную выше матрицу-произведение дает матрицу тензора C (см. (11.10)). Следовательно, изотропный поворот, производимый тензором C , действительно эквивалентен суперпозиции трех указанных в теореме поворотов. ■

Ранее было показано, что при изотропном повороте, осуществляемом тензором C , изотропная плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ остается неподвижной, в то время как изотропная плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ является инвариантной, но не неподвижной. Таким образом, изотропный поворот, производимый тензором C , не симметричен относительно координатных осей с направляющими ортами $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ (это же следует из выражения, определяющего тензор C , а также из вида его матрицы, см. (11.8) и (11.10)).

Введем тензор $\tilde{C}$, зависящий от $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ симметричным образом:

$$\begin{aligned} \tilde{C} = & \left[1 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* - \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + a \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* + b \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3^* + \\ & + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + a \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + b \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^* + \\ & + a \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0^* - a \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + b \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0^* - b \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*, \end{aligned} \quad (11.21)$$

где a и b — вещественные числа; $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^3$ и $\{\mathbf{e}_i^*\}_{i=0}^3$ — взаимные ортонормированные базисы пространства M .

Матрица компонент тензора $\tilde{C}$ имеет в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ вид

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) & -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) & a & b \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2) & 1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2) & a & b \\ a & -a & 1 & 0 \\ b & -b & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.22)$$

Теорема 11.3. Тензор $\tilde{C}$, задаваемый выражением (11.21), принадлежит ограниченной группе Лоренца и осуществляет изотропный поворот пространства M , при котором изотропная плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3)$ остается неподвижной, а изотропные плоскости $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3)$ являются инвариантными (здесь a и b — параметры, входящие в (11.21); α и β — произвольные вещественные числа; величины a и b , а также величины α и β не равны нулю одновременно, то есть $a^2 + b^2 \neq 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$). При $a = 2t$ и $b = 0$ тензор $\tilde{C}$ совпадает с тензором C , определяемым третьим из выражений (11.8).

При умножении параметров a и b на одно и то же ненулевое число прямая с направляющим вектором $b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3$ остается неизменной. Вместе с ней остается неизменной плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3)$. Поэтому в обозначении этой плоскости вектор $b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3$ может быть заменен единичным вектором $(b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3)/\sqrt{a^2 + b^2}$. По аналогичной причине в обозначении плоскости $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3)$ вектор $\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3$ может быть заменен единичным вектором $(\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3)/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Доказательство. Построим тензор $\tilde{C}^*$, транспонированный к $\tilde{C}$, путем перемены местами векторов в каждой из диад в (11.21). При этом мы получим тензор $\tilde{C}^*$ в виде разложения по базису $\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*\}$. Перейдем с помощью зависимостей (11.6) к базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ и составим скалярное произведение тензоров $\tilde{C}$ и $\tilde{C}^*$. Можно показать, что $\tilde{C} \cdot \tilde{C}^* = I$, откуда $\tilde{C}^* = \tilde{C}^{-1}$. Это означает, что тензор $\tilde{C}$ ортогональный, то есть он принадлежит группе Лоренца. Из (11.7) и (11.21) вытекает, что при одновременном устремлении параметров a и b к нулю тензор $\tilde{C}$ непрерывным образом переходит в единичный тензор I . Следовательно, он принадлежит ограниченной группе Лоренца.

Поддействуем тензором $\tilde{C}$ на базисные векторы:

$$\begin{aligned}\tilde{C} \cdot \mathbf{e}_0 &= \left[1 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3; \\ \tilde{C} \cdot \mathbf{e}_1 &= -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \mathbf{e}_0 + \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_3; \\ \tilde{C} \cdot \mathbf{e}_2 &= a(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2; \\ \tilde{C} \cdot \mathbf{e}_3 &= b(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{11.23}$$

Отметим, что векторы $\tilde{C} \cdot \mathbf{e}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) удовлетворяют соотношениям (11.3) (с заменой в них векторов $\mathbf{e}_i$ векторами $\tilde{C} \cdot \mathbf{e}_i$), поэтому $\{\tilde{C} \cdot \mathbf{e}_i\}_{i=0}^3$ — ортонормированный базис в M . Тот факт, что тензор $\tilde{C}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, тоже свидетельствует об ортогональности этого тензора.

Из (11.23) находим:

$$\tilde{C} \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1; \quad \tilde{C} \cdot (b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3) = b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3.$$

Отсюда и из линейности преобразования вытекает, что изотропная плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3)$ остается неподвижной при данном преобразовании (она изотропная, потому что содержит изотропный вектор $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$, который ортогонален всем лежащим в ней векторам, включая самого себя).

Таким образом, тензор $\tilde{C}$ принадлежит ограниченной группе Лоренца и оставляет неподвижной изотропную плоскость $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, b\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3)$. Значит, этот тензор действительно осуществляет изотропный поворот пространства M с указанной в теореме неподвижной плоскостью.

Согласно (11.23), имеем (при $\alpha, \beta \in R$):

$$\tilde{C} \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1; \quad \tilde{C} \cdot (\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3) = (\alpha a + \beta b)(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + (\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3).$$

Из этого следует, что изотропные плоскости $P(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3)$ (при всевозможных α и β ; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) инвариантны при рассматриваемом преобразовании, как и утверждается в теореме. Совпадение тензора $\tilde{C}$ с тензором C при $a = 2t$ и $b = 0$ доказывается подстановкой этих значений параметров a и b в (11.21) или (11.22) и сравнением полученных выражений с соответствующими выражениями, фигурирующими в (11.8) или (11.10). ■

В связи с тем, что операторы групп Лоренца и Пуанкаре не меняют углы между векторами и расстояния между точками, то есть сохраняют метрику пространства, эти группы фактически являются *группами симметрии* пространства Минковского. В частности, ограниченная группа Лоренца характеризует симметрию пространства относительно произвольных поворотов. Наличие такой симметрии означает *изотропность* пространства, то есть одинаковость его свойств по всем направлениям, которые могут быть получены одно из другого путем поворотов. Другие операторы группы Лоренца характеризуют симметрию пространства относительно отражений и инверсии. Группа Пуанкаре в дополнение к этому характеризует симметрию пространства относительно трансляций (параллельных переносов). Эта симметрия означает *однородность* пространства, то есть одинаковость его свойств во всех точках. Примерами пространственного, гиперболического и изотропного поворотов пространства M служат преобразования, осуществляемые тензорами A , B и C вида (11.8) (с матрицами (11.10) в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^*\}$).

Следует отметить, что изотропность и однородность пространства могут быть проверены в опыте путем вращения и перемещения изучаемых материальных тел. Однако симметрия пространства относительно отражений и обращения времени не допускает непосредственной проверки. Например, мы можем вывернуть наизнанку правую перчатку, сделав ее левой, но невозможно вывернуть наизнанку электрон, чтобы убедиться в его зеркальной симметрии. Некоторые экспериментальные результаты физики и биологии свидетельствуют о том, что, *возможно, наш мир зеркально асимметричен*.

12. Гиперболическое движение материальной точки. Закон сложения скоростей

В разд. 9–11 мы рассматривали преобразование всего пространства Минковского M . В физике интерес представляет не преобразование всего окружающего нас пространства (которое невозможно реализовать), а преобразование материальных тел под влиянием их взаимодействий. Это преобразование описывается в физике как преобразование геометрических объектов, моделирующих материальные тела. В специальной теории относительности не исследуется деформирование тел, а сами тела моделируются геометрическими точками, именуемыми материальными точками. Поэтому в специальной теории относительности изучается движение материальных точек в M под действием таких тензоров (операторов), которые не меняют размеры и форму геометрических объектов, то есть под действием тензоров группы Лоренца. Эти тензоры должны допускать непрерывный переход к единичному тензору (тождественному оператору), так как материальные тела могут быть преобразованы только непрерывным образом (за исключением случаев распада и слияния тел). В связи с этим в специальной теории относительности изучается движение материальных точек под действием тензоров ограниченной группы Лоренца.

Рассмотрим некоторые частные случаи движения материальной точки в пространстве Минковского M .

Пусть материальная точка движется вдоль гладкой времениподобной мировой линии L и пусть t_* — ее собственное время (напомним, что ct_* есть натуральный параметр на L , возрастающий в направлении от прошлого к будущему, c — скорость света; см. разд. 1).

Зафиксируем момент t_* собственного времени. Инерциальная система отсчета $\{T', \Gamma'\}$, относительно которой в данный момент t_* материальная точка неподвижна и имеет нулевые координаты в физическом пространстве Γ' , называется *инерциальной системой отсчета, сопутствующей материальной точке в момент t_** . Далее, для краткости, будем называть ее *мгновенно сопутствующей системой отсчета*.

Мы поместили эту систему отсчета штрихами, потому что в дальнейшем введем еще одну систему отсчета, которую будем обозначать без штрихов.

Поскольку в данный момент времени t_* материальная точка неподвижна относительно рассматриваемой системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$, то, согласно формуле (6.13), ось времени T' и касательная к L в точке, отвечающей моменту t_* , имеют одинаковые направляющие орты. А так как в этот момент материальная точка находится на оси T' (ибо ее координаты в Γ' равны нулю), то *ось времени T' является касательной к мировой линии L в точке, отвечающей данному моменту времени t_** . Отсюда, в частности, следует, что на не прямолинейных участках мировой линии мгновенно сопутствующая система отсчета разная в разные моменты времени.

При использовании мгновенно сопутствующей системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ бывает удобно считать, что в этой системе отсчета момент координатного времени t' , соответствующий моменту t_* , равен нулю. Подчеркнем, что в моменты времени, отличные от t_* , материальная точка, вообще говоря, не является неподвижной относительно этой системы отсчета и имеет в Γ' ненулевые координаты.

Введем понятие равноускоренного движения материальной точки. В классической механике ускорение материальной точки, как известно, одинаково в любой инерциальной системе отсчета. В специальной теории относительности это не так. Здесь вектор ускорения (как и вектор скорости) лежит в физическом пространстве системы отсчета. А поскольку физические пространства движущихся относительно друг друга систем отсчета взаимно наклонены, то векторы ускорения, вычисленные в разных системах отсчета, в общем случае не совпадают. В связи с этим при рассмотрении ускорения материальной точки требуется указывать используемую систему отсчета.

Движение материальной точки в пространстве M называется *равноускоренным* на промежутке собственного времени (t_{*1}, t_{*2}) , если при любом $t_* \in (t_{*1}, t_{*2})$ мгновенное ускорение, вычисленное в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета, имеет одно и то же (по модулю) значение.

Примером равноускоренного движения материальной точки, очевидно, служит движение вдоль винтовой мировой линии (имеющей ра-

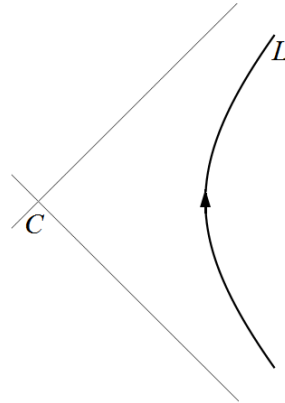
диус и шаг, одинаковые по всей длине). В инерциальной системе отсчета, ось времени которой параллельна оси винтовой линии, траектория такой материальной точки представляет собой окружность (так как в инерциальной системе отсчета траектория совпадает с проекцией мировой линии на физическое пространство, см. теорему 5.1, с. 132).

В приводимой ниже теореме речь идет о равноускоренном движении материальной точки в том случае, когда мировая линия лежит целиком в некоторой плоскости (в этом случае линия называется *плоской*). В системе отсчета с осью времени, лежащей в этой же плоскости, траектория такой материальной точки является прямой линией или прямолинейным отрезком (см. рис. 5.4 и текст перед ним на с. 134).

Теорема 12.1. Гиперболическое движение материальной точки. Пусть мировая линия L материальной точки — плоская гладкая времениподобная линия. Тогда если материальная точка движется равноускоренно (с ускорением $a = \text{const} > 0$), то мировая линия L представляет собой гиперболу с изотропными асимптотами (или дугу гиперболы, если рассматривается ограниченный промежуток времени). Такое движение материальной точки называется *гиперболическим* (рис. 12.1).

Рис. 12.1. Мировая линия L и ее изотропные асимптоты при гиперболическом движении материальной точки.

Линия L является гиперболой; в метрике псевдоевклидовой плоскости она — (псевдо)окружность, ее центр находится в точке C пересечения асимптот, а радиус равен c^2/a , где c — скорость света, a — ускорение; стрелка показывает направление вдоль мировой линии L в сторону будущего.



Доказательство теоремы 12.1. Обозначим: P — плоскость, в которой лежит мировая линия L (она псевдоевклидова, ибо L — времениподобная линия). Зададим в пространстве M инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с началом в точке $O \in P$, осью времени $T \subset P$ и ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, у которого $\mathbf{e}_0 \in T$, $\mathbf{e}_1 \in P$, $\mathbf{e}_2 \perp P$ и $\mathbf{e}_3 \perp P$. Пусть $\{x_0 = ct, x_1, x_2, x_3\}$ — инерциальная система координат, определяемая этой системой отсчета. Ее начало находится

в точке O , а координатная плоскость Ox_0x_1 совпадает с P (определение инерциальной системы координат дано в разд. 5, с. 129).

Зафиксируем произвольный момент координатного времени t_0 . Пусть в этот момент материальная точка находится в точке $O' \in L$. Введем инерциальную систему отсчета $\{T', \Gamma'\}$, сопутствующую материальной точке в момент t_0 . Поместим ее начало в O' и зададим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, в котором $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1 \in P$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ (вектор $\mathbf{e}'_0$ направлен вдоль оси T' , касающейся L в точке O' ; вектору $\mathbf{e}'_1$ придадим то из двух возможных направлений, при котором изотропные векторы $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1$ сонаправлены). Введем также инерциальную систему координат $\{x'_0 = ct', x'_1, x'_2, x'_3\}$, определяемую этой системой отсчета (здесь $x'_2 = x_2$ и $x'_3 = x_3$, потому что $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$) (рис. 12.2).

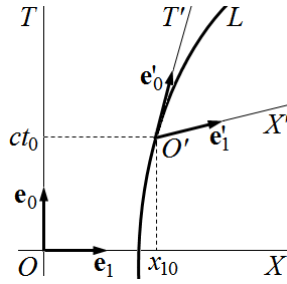


Рис. 12.2. Плоская мировая линия L и инерциальные системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ с началами в точках O и O' .

$\{T', \Gamma'\}$ — система отсчета, сопутствующая материальной точке в момент времени t_0 (по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$); $X = \Gamma \cap P$ (при расположении физического пространства Γ , проходящем через точку O); $X' = \Gamma' \cap P$ (при расположении Γ' , проходящем через точку O').

В теореме говорится о равноускоренном движении материальной точки. Такое движение определяется по отношению к сопутствующей системе отсчета. Последняя различна в разные моменты времени, поэтому система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ не может быть использована для вывода уравнения мировой линии L . Выведем его в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$, одинаковой во все моменты времени. Для этого выразим ускорение материальной точки в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ через заданное ускорение в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Сделаем это следующим образом.

Пусть $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к линии L ; $l = ct_*$ — натуральный параметр на L (t_* — собственное время материальной точки). Найдем производную $d\mathbf{i}/dl$ в точке O' двумя способами. При одном способе выразим ее через ускорение материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, при другом — через ускорение относительно $\{T', \Gamma'\}$. Приравняв полученные выражения, придем к дифференциальному уравнению, связывающему эти ускорения. Решая его, найдем искомое уравнение мировой линии L в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Будем считать, что введенные выше величины x_i и x'_i являются координатами рассматриваемой материальной точки относительно систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ соответственно. Обозначим: $x = x_1$, точка над символом — производная по координатному времени t .

В системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ траектория материальной точки лежит на оси X , имеющей направляющий орт $\mathbf{e}_1$. Поэтому составляющая радиуса-вектора материальной точки, направленная вдоль оси X , равна $x\mathbf{e}_1$. Следовательно, в данной системе отсчета скорость материальной точки есть $\dot{x}\mathbf{e}_1$, а ускорение — $\ddot{x}\mathbf{e}_1$. Подставим эту скорость и квадрат ее модуля $|\dot{x}\mathbf{e}_1|^2 = \dot{x}^2$ в формулы (6.12) и (6.13) (с заменой вектора $\boldsymbol{\tau}$ на $\mathbf{e}_0$):

$$dt_* = dt \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}; \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{e}_0 + \frac{\dot{x}}{c}\mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}}. \quad (12.1)$$

Продифференцируем обе части второго выражения (12.1) по l . Учитывая равенство $l = ct_*$, первое выражение (12.1) и постоянство базисных векторов $\mathbf{e}_i$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dl} &= \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{i}}{dt_*} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{i}}{dt} \frac{dt}{dt_*} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\frac{\ddot{x}}{c}\mathbf{e}_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} - \left(\mathbf{e}_0 + \frac{\dot{x}}{c}\mathbf{e}_1\right) \frac{-2\dot{x}\ddot{x}/c^2}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}}}{\left[1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2\right]} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда находим связь между производной $d\mathbf{i}/dl$ в точке O' и ускорением $\ddot{x}$ материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl}(O') = \frac{\ddot{x}(t_0)}{c^2 \left[1 - \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c}\right)^2\right]^2} \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c} \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1\right), \quad (12.2)$$

где учтено, что точка O' отвечает моменту координатного времени t_0 .

Поскольку $\{T, \Gamma\}$ — произвольная инерциальная система отсчета, ось времени которой лежит в плоскости P , то связь производной $(d\mathbf{i}/dl)(O')$ с ускорением материальной точки относительно $\{T', \Gamma'\}$ может быть найдена путем замены в (12.2) нештрихованных величин штрихованными:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl}(O') = \frac{\frac{d^2 x'_1}{dt'^2}(t'_0)}{c^2 \left[1 - \left(\frac{1}{c} \frac{dx'_1}{dt'}(t'_0)\right)^2\right]^2} \left(\frac{1}{c} \frac{dx'_1}{dt'}(t'_0) \mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1\right), \quad (12.3)$$

где t'_0 — момент времени в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$, соответствующий точке O' ($t'_0 = 0$, так как начало этой системы отсчета находится в O').

По определению мгновенно сопутствующей системы отсчета, материальная точка неподвижна относительно $\{T', \Gamma'\}$ в момент t'_0 . А по определению равноускоренного движения, мгновенное ускорение материальной точки принимает одинаковое (по модулю) значение в любой мгновенно сопутствующей системе отсчета. Это означает, что выполняются равенства

$$\frac{dx'_1}{dt'}(t'_0) = 0; \quad \left| \frac{d^2x'_1}{dt'^2}(t'_0) \right| = a, \quad (12.4)$$

где a — заданное ускорение материальной точки ($a = \text{const} > 0$).

Далее будем считать, что $(d^2x'_1/dt'^2)(t_0) \geq 0$. Тогда в (12.4) знак модуля может быть убран.

Отметим, что условие неотрицательности величины $(d^2x'_1/dt'^2)(t_0)$ не ограничивает общности доказательства. Действительно, если эта величина отрицательна, то поменяем направления ортов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_1$ и знаки функций $x'_1(t')$ и $x(t)$ на противоположные (при этом радиусы-векторы точек линии L относительно начал систем отсчета $\{T', \Gamma'\}$ и $\{T, \Gamma\}$ будут иметь составляющие вдоль осей X' и X равные $x'_1\mathbf{e}'_1$ и $x\mathbf{e}_1$, как и до изменения знаков, кроме того, сохранит силу принятое ранее условие сонаправленности изотропных векторов $\mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$). Вместе с функциями $x'_1(t')$ и $x(t)$ поменяют знаки их производные. В результате величина $(d^2x'_1/dt'^2)(t_0)$ станет положительной.

Обратим внимание на то, что правые части равенств (12.2) и (12.3) не изменяются при указанном изменении знаков (благодаря одновременному изменению знаков величин $\mathbf{e}_1$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и аналогичных штрихованных величин).

Подставим в (12.3) значения производных из (12.4) (без знака модуля):

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl}(O') = \frac{a}{c^2} \mathbf{e}'_1. \quad (12.5)$$

В момент времени t_0 материальная точка неподвижна относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Следовательно, в этот момент ее скорость относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ совпадает со скоростью v системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно $\{T, \Gamma\}$, то есть

$$\dot{x}(t_0) = v. \quad (12.6)$$

Системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ расположены по отношению друг к другу так, как расположены системы отсчета, рассмотренные в конце

разд. 9 (при выводе преобразования Лоренца (9.33)). Это позволяет воспользоваться формулами Лоренца. Подстановка в (12.5) на место вектора $\mathbf{e}'_1$ его значения из формул Лоренца (9.8) дает с учетом (12.6):

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl}(O') = \frac{a}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c}\right)^2}} \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c} \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \right). \quad (12.7)$$

Левые части равенств (12.2) и (12.7) равны, значит, равны и правые части. Приравнявая их, получаем:

$$\frac{\ddot{x}(t_0)}{c^2 \left[1 - \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c} \right)^2 \right]^2} = \frac{a}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c} \right)^2}}, \quad \text{откуда} \quad \ddot{x}(t_0) = a \left[1 - \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{c} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

В проведенных рассуждениях момент времени t_0 произволен. Кроме того, ускорение a не зависит от t_0 . Поэтому в полученном выражении можно заменить величину t_0 на t и переписать его в виде

$$\ddot{x} = a \left[1 - \left(\frac{\dot{x}}{c} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (12.8)$$

где функция $x(t)$ рассматривается на всем исследуемом промежутке времени.

Выражение (12.8) представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$. Решим его при начальных условиях

$$\dot{x}|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad x|_{t=0} = \frac{c^2}{a}. \quad (12.9)$$

Обозначим: $y = ct$. Поскольку $\dot{x} = c(dx/dy)$ и $\ddot{x} = c^2(d^2x/dy^2)$, то уравнение (12.8), выраженное в переменных x и y , принимает форму

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{a}{c^2} \left[1 - \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Понизим порядок дифференциального уравнения, введя новую переменную $z = dx/dy$:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{a}{c^2} (1 - z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Решим это уравнение методом разделения переменных:

$$\int \frac{dz}{(1-z^2)^{3/2}} = \frac{a}{c^2} \int dy, \quad \text{откуда} \quad \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{a}{c^2} y + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Отметим, что $|z| < 1$, так как $z = dx/dy = \dot{x}/c$ и $|\dot{x}| < c$ (ибо $\dot{x}$ — скорость материальной точки). В силу первого из начальных условий (12.9) (с учетом $y = ct$ и $z = \dot{x}/c$), имеем: $z = 0$ при $y = 0$. Отсюда и из полученного решения вытекает, что $C_1 = 0$, поэтому

$$\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{a}{c^2} y. \quad (12.10)$$

Возведем обе части этого выражения в квадрат и найдем z^2 :

$$z^2 = \frac{y^2}{y^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2}.$$

Заменим величину z ее значением dx/dy и извлечем квадратный корень из обеих частей равенства. Принимая во внимание, что из (12.10) следует совпадение знаков величин y и z , приходим к уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2}}.$$

Решим его методом разделения переменных:

$$\int dx = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2}}, \quad \text{откуда} \quad x + C_2 = \sqrt{y^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2},$$

где C_2 — постоянная интегрирования. С помощью второго из начальных условий (12.9) и равенства $y = ct$ находим: $C_2 = 0$, значит,

$$x = \sqrt{y^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2}.$$

Подставляя сюда значения переменных $x = x_1$ и $y = ct = x_0$, получаем уравнение мировой линии L в координатах x_0 и x_1 :

$$x_0^2 - x_1^2 = -\left(\frac{c^2}{a}\right)^2. \quad (12.11)$$

Это есть уравнение гиперболы с асимптотами $x_0 = \pm x_1$, пересекающимися в начале координат. Точнее, в силу второго условия (12.9),

L — та ветвь гиперболы, которая проходит через точку с координатами $(0, c^2/a)$. В псевдоевклидовой плоскости гипербола (12.11) представляет собой (псевдо)окружность радиуса c^2/a с центром в начале координат, а ее асимптоты являются изотропными прямыми (см. рис. 12.1; ср. с формулами (4.15), (4.16) и рис. 4.2 из главы 2, с. 44, 45). Теорема доказана. ■

При выводе уравнения мировой линии L были использованы условия (12.9). Разумеется, линия L не зависит от этих условий. От них зависит только взаимное расположение ее и системы отсчета $\{T, G\}$ и вид уравнения линии L в этой системе отсчета. При условиях (12.9) начало O системы отсчета $\{T, G\}$ находится в точке пересечения асимптот, а ось X является осью симметрии линии L (последнее означает, что при замене координаты x_0 на $-x_0$ линия L совпадает сама с собой). В этой ситуации уравнение линии L принимает наиболее простой вид (12.11), именуемый каноническим уравнением гиперболы. Если бы система отсчета $\{T, G\}$ была расположена по-другому (но по-прежнему с осями T и X , лежащими в одной плоскости с L), то уравнение линии L имело бы вид общего уравнения второй степени относительно координат x_0 и x_1 . А если бы ось T или ось X не лежала в одной плоскости с L , то уравнение линии L включало бы в себя еще и координаты x_2 и x_3 . Сказанное иллюстрирует тот факт, что *в разных инерциальных системах отсчета одно и то же движение материальной точки может описываться уравнениями, имеющими существенно разный вид*.

Физический смысл теоремы 12.1 состоит в следующем. Допустим, что мы производим измерения с помощью инерциальной материальной системы отсчета. Мы обнаруживаем, что в условный момент времени $t = -\infty$ из бесконечности по направлению к нам начинает двигаться со скоростью, близкой к скорости света c , некоторое тело. С течением времени его скорость непрерывно уменьшается и становится равной нулю в момент $t = 0$. В этот момент тело оказывается на расстоянии c^2/a от нас. Затем оно начинает удаляться со все возрастающей скоростью, которая стремится к скорости света c при $t \rightarrow +\infty$. При этом ускорение тела, измеряемое нами, связано с ускорением a зависимостью (12.8).

Следует отметить, что данный результат не допускает предельного перехода к нулевому значению ускорения a (так как величина a стоит в знаменателе дроби c^2/a). Очевидно, что в том случае, когда $a = 0$ при всех t , материальная точка движется относительно инерциальной системы отсчета прямолинейно и равномерно. В пространстве Минковского такая материальная точка имеет прямолинейную мировую линию (см. теорему 6.3, с. 149).

Теорема 12.2. Закон сложения скоростей. Пусть $\{T, \Gamma\}$ — инерциальная система отсчета в пространстве M ; $\{T', \Gamma'\}$ — другая инерциальная система отсчета, движущаяся относительно $\{T, \Gamma\}$ со скоростью $\mathbf{V}$. Тогда если материальная точка движется относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ со скоростью $\mathbf{v}'$, то ее скорость $\mathbf{v}$ относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ задается выражением

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} + \left[\mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}{1 + \left(\frac{\mathbf{v}'}{c} \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}, \quad (12.12)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $V = |\mathbf{V}|$; c — скорость света; точка — знак скалярного умножения; $\mathbf{v}' \in \Gamma'$ и $\mathbf{V}, \mathbf{v} \in \Gamma$ (по определению скорости относительно системы отсчета, см. с. 145); $V < c$, $\mathbf{V} = \text{const}$ (по определению скорости одной инерциальной системы отсчета относительно другой, см. с. 162); $|\mathbf{v}'| \leq c$; скорость $\mathbf{v}'$ может не быть постоянной.

Выражение (12.12) называется законом (или формулой) сложения скоростей. Другие виды записи этого закона будут приведены далее.

Доказательство. Выпишем зависимость (6.13) применительно к трем ситуациям: применительно к движению материальной точки относительно систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ и применительно к движению системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно $\{T, \Gamma\}$:

$$\mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}; \quad \mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau}' + \frac{\mathbf{v}'}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c} \right)^2}}; \quad \boldsymbol{\tau}' = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{V}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}, \quad (12.13)$$

где $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к мировой линии материальной точки; $\boldsymbol{\tau}'$ — направляющий орт оси времени T' (векторы $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau}'$ направлены в сторону будущего); $v = |\mathbf{v}|$; $v' = |\mathbf{v}'|$; остальные обозначения те же, что в (12.12); в третьей зависимости учтено, что скорость $\mathbf{V}$ системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$, по определению, есть скорость тела отсчета, движущегося вдоль оси времени T' с направляющим вектором $\boldsymbol{\tau}'$ (см. формулу (9.1)).

Из первой зависимости (12.13) имеем:

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \mathbf{i} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} - \boldsymbol{\tau}.$$

Подставим сюда значение вектора $\mathbf{i}$ из второй зависимости (12.13), в которую подставим значение вектора $\boldsymbol{\tau}'$ из третьей зависимости:

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} \left[\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{V}}{c} + \frac{\mathbf{v}'}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \right] - \boldsymbol{\tau}. \quad (12.14)$$

Для того, чтобы исключить из правой части этого выражения скорость v , воспользуемся равенствами $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$ (являющимися следствиями того, что $\mathbf{V}, \mathbf{v} \in \Gamma$, $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\Gamma \perp T$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичный времениподобный вектор). Умножая скалярно обе части выражения (12.14) на $\boldsymbol{\tau}$ и учитывая данные равенства, получаем:

$$0 = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} \left[1 + \left(\frac{\mathbf{v}'}{c} \cdot \boldsymbol{\tau}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \right] - 1.$$

Вытекающее отсюда значение дроби, стоящей перед квадратной скобкой, подставим в (12.14). После очевидных преобразований приходим к искомой формуле (12.12). ■

Выведем несколько вспомогательных зависимостей перед тем, как представить другие виды записи закона (12.12).

Умножим скалярно обе части третьей формулы (12.13) на вектор $\mathbf{v}'$. Пользуясь равенством $\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau}' = 0$ (вытекающим из $\mathbf{v}' \in \Gamma'$, $\boldsymbol{\tau}' \in T'$ и $\Gamma' \perp T'$), находим:

$$\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{v}' \cdot \frac{\mathbf{V}}{c}. \quad (12.15)$$

Отсюда заключаем, что $\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\tau}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$. А так как $\boldsymbol{\tau} \in T$ и ортогональным дополнением оси времени T в M является физическое пространство Γ , то условие $\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\tau}$ равносильно условию $\mathbf{v}' \in \Gamma$. Поэтому заключение об эквивалентности условий $\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$ может быть переформулировано следующим образом.

Пусть материальная точка движется со скоростью $\mathbf{v}'$ относительно инерциальной системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$, которая, в свою очередь, движется относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ со скоростью $\mathbf{V}$. Тогда верно такое утверждение. Вектор $\mathbf{v}'$ лежит в физическом пространстве Γ системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ в том и только том случае, если он ортогонален скорости $\mathbf{V}$, иначе говоря, имеет место эквивалентность

$$\mathbf{v}' \in \Gamma \iff \mathbf{v}' \perp \mathbf{V}. \quad (12.16)$$

Отметим, что в (12.16) допустима ситуация, когда $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Действительно, при этом правая часть эквивалентности выполняется, так как нулевой вектор $\mathbf{0}$ ортогонален всем векторам (в силу $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0$ для всех $\mathbf{x} \in M$). А левая часть эквивалентности выполняется при $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ по той причине, что $\mathbf{0} \in \Gamma$, а при $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, благодаря тому, что в этом случае из третьей зависимости (12.13) вытекает $T' \parallel T$, откуда $\Gamma' \parallel \Gamma$ и, значит, из $\mathbf{v}' \in \Gamma'$ следует $\mathbf{v}' \in \Gamma$.

Обратим внимание на то, что *скорость $\mathbf{v}'$ не может быть параллельна вектору $\mathbf{V}$* . (В самом деле, если бы выполнялось $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{V}$, то было бы $\mathbf{v}' \in \Gamma$, потому что $\mathbf{V} \in \Gamma$; тогда из (12.16) следовало бы $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$, что противоречит условию $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{V}$.) Данный результат объясняется взаимным наклоном физических пространств, принадлежащих движущимся относительно друг друга системам отсчета (см. рис. 5.5, с. 136).

Двухвалентный тензор (линейный оператор) A называется *проектором* или *тензором (оператором) проецирования*, если $A \cdot A = A$.

Пусть $\{T, \Gamma\}$ — инерциальная система отсчета в пространстве M , $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , I — единичный тензор (он определяется формулой (2.15) из главы 2, с. 24). Тогда $I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$ — тензор проецирования на гиперплоскость Γ , где $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$ — тензорное произведение векторов (диада), то есть

$$(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{x} \in \Gamma \text{ для любого вектора } \mathbf{x} \in M. \quad (12.17)$$

Действительно, $(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) = I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$, ибо $I \cdot I = I$, $I \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot I = \boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$. Поэтому $I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$ — проектор. А так как для любого вектора $\mathbf{x} \in M$ выполняется $\boldsymbol{\tau} \cdot [(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{x}] = [\boldsymbol{\tau} \cdot (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau})] \cdot \mathbf{x} = (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = 0$, то векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{x}$ взаимно ортогональны. Поскольку $\boldsymbol{\tau} \in T$ и физическое пространство Γ является ортогональным дополнением оси времени T , то из ортогональности вектора $(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{x}$ вектору $\boldsymbol{\tau}$ следует $(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{x} \in \Gamma$. Значит, тензор $I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$ в самом деле проецирует любой вектор пространства M на гиперплоскость Γ .

На основании свойств произведения вектора на число, скалярного произведения векторов и скалярного произведения диады на вектор (см. формулу (2.4) в разд. 2 главы 2, с. 22) можем записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{v}' - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}') = \\ &= I \cdot \mathbf{v}' - (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}' = (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}', \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} = (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}'. \quad (12.18)$$

С помощью зависимостей (12.15) и (12.18) получаем из (12.12) еще два вида записи *закона (или формулы) сложения скоростей*:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} + \left[\mathbf{v}' + \left(\mathbf{v}' \cdot \frac{\mathbf{V}}{c} \right) \boldsymbol{\tau} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}{1 - \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}; \quad (12.19)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} + \left[(I - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}' \right] \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}{1 + \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau}}{c} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}; \quad (12.20)$$

далее будет показано, что знаменатели в правых частях формул (12.12), (12.19) и (12.20) положительны.

Поскольку $\mathbf{V} \in \Gamma$ и, согласно (12.17), $(I - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}' \in \Gamma$, то формула (12.20) влечет $\mathbf{v} \in \Gamma$, как и должно быть.

Из (12.19), по определению длины вектора ($v = \sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|}$), находим:

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\left| \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{v'}{c} \right)^2 \right] \right|}}{1 - \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}, \quad (12.21)$$

где применены зависимость (12.15), равенства $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $V^2 = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$, $(v')^2 = -\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'$ и положительность знаменателя в (12.19).

Если скорость $\mathbf{v}'$ ортогональна скорости $\mathbf{V}$ (то есть $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} = 0$), то формулы (12.19) и (12.21) принимают вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}; \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{v'}{c} \right)^2 \right]}, \quad (12.22)$$

где во втором выражении знак модуля опущен, потому что под радикалом стоит неотрицательная величина.

Из (12.19) вытекают очевидные равенства. Так, материальная точка, покоящаяся в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ ($\mathbf{v}' = \mathbf{0}$), движется по отношению к системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ с той же скоростью, что и система отсчета $\{T', \Gamma'\}$: $\mathbf{v} = \mathbf{V}$. Если же система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ неподвижна относительно $\{T, \Gamma\}$ ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$), то $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

Пусть $\mathbf{V}'$ — скорость системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$. Рассмотрим материальную точку, которая движется относительно $\{T', \Gamma'\}$ со скоростью $\mathbf{v}' = \mathbf{V}'$. Согласно формуле (9.30),

$$\mathbf{V}' = -\frac{V^2}{c\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\mathbf{V}. \quad (12.23)$$

Подстановка в (12.12) на место скорости $\mathbf{v}'$ ее значения, равного правой части выражения (12.23) (с учетом $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$) дает очевидный результат: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то есть такая материальная точка неподвижна относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Запишем закон сложения скоростей в координатной форме.

Для этого введем в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ ортонормированный базис $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — как и ранее, направляющий орт оси времени T ; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{V}/V$ (при $V \neq 0$). А в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ зададим ортонормированный базис $\{\boldsymbol{\tau}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, у которого $\boldsymbol{\tau}'$ — направляющий орт оси времени T' и векторы удовлетворяют равенствам, аналогичным (9.8):

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{V}{c}\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_1 = \frac{\frac{V}{c}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3. \quad (12.24)$$

Отметим, что первое из этих равенств совпадает с третьим равенством в (12.13), так как $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_1$. Несмотря на то, что при задании вектора $\mathbf{e}_1$ использовано условие $V \neq 0$, выводимые далее соотношения верны, как легко убедиться, и при $V = 0$.

Разложим векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ по введенным базисам. Они имеют нулевые составляющие вдоль осей времени (ибо $\mathbf{v} \in \Gamma$ и $\mathbf{v}' \in \Gamma'$), поэтому

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3; \quad \mathbf{v}' = v'_1\mathbf{e}'_1 + v'_2\mathbf{e}'_2 + v'_3\mathbf{e}'_3,$$

где v_i и v'_i — координаты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ в данных базисах ($i = 1, 2, 3$).

Подставим эти значения векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ в (12.12) и в полученном выражении заменим векторы $\mathbf{e}'_i$ их значениями из (12.24). Учитывая равенства $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ и $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_1$, приходим к выражению

$$v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \frac{(v'_1 + V)\mathbf{e}_1 + v'_2\mathbf{e}_2\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} + v'_3\mathbf{e}_3\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_1V}{c^2}}. \quad (12.25)$$

Отсюда, в силу единственности разложения вектора по базису, получаем закон (или формулы) сложения скоростей в координатном виде:

$$v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + \frac{v'_1 V}{c^2}}; \quad v_2 = \frac{v'_2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_1 V}{c^2}}; \quad v_3 = \frac{v'_3 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_1 V}{c^2}}, \quad (12.26)$$

где v_i и v'_i — координаты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ в ортонормированных базисах $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, принадлежащих физическим пространствам Γ и Γ' ($i = 1, 2, 3$); $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — скорости материальной точки относительно инерциальных систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ соответственно ($\mathbf{v} \in \Gamma$; $\mathbf{v}' \in \Gamma'$); векторы базисов удовлетворяют равенствам (12.24); $V = |\mathbf{V}|$; $\mathbf{V}$ — скорость системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, имеющая направление вектора $\mathbf{e}_1$ ($\mathbf{V} = V\mathbf{e}_1$; $\mathbf{V} \in \Gamma$).

Вследствие $0 \leq |v'_1| \leq v' \leq c$ и $0 \leq V < c$, имеем: $1 + (v'_1 V)/c^2 > 0$, поэтому знаменатель в правой части формулы (12.25) положителен. А так как этот знаменатель равен знаменателю в (12.12) (потому что формула (12.25) получена из (12.12)), то знаменатель в (12.12) тоже положителен. Вместе с этими знаменателями положительны равные им знаменатели в правых частях формул (12.19), (12.20) и (12.26). Таким образом, в законе сложения скоростей (во всех формах записи) знаменатели в правых частях формул положительны.

При $\frac{V}{c} \rightarrow 0$ релятивистский закон сложения скоростей переходит, как следует из (12.19), в закон сложения скоростей, выполняющийся в классической механике:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'.$$

В теореме 12.2, в отличие от теоремы 12.1, допускается движение материальной точки со скоростью света c . На основании (12.21) заключаем, что если $v' = c$, то $v = c$. Иными словами, *если материальная точка движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета со скоростью света c , то она движется с такой же скоростью c и относительно любой другой инерциальной системы отсчета*. Этот результат фактически повторяет теорему 8.1 (с. 156).

13. Абберрация. Эффект Доплера

Рассмотрим два эффекта, обусловленные конечностью скорости распространения света. Оба играют важную роль при астрономических наблюдениях звезд.

Первый эффект — абберрация света.

Поясним этот эффект на простом примере. Предположим, что мы сидим в вагоне поезда около окна. За окном безветренная погода и идет дождь. Пока поезд стоит, капли дождя, стекая по стеклу, оставляют на нем вертикальные следы. Но как только поезд начинает движение, следы от капель отклоняются от вертикали, и это отклонение растет с увеличением скорости поезда. Высунем за окно руку с пробиркой с открытым верхом. Мы хотим, чтобы попадающие в пробирку капли дождя падали внутри нее, не задевая стенку. Очевидно, что для этого при неподвижном поезде нужно держать пробирку вертикально, а при движении нужно наклонить пробирку верхней частью в направлении движения так, чтобы ось пробирки была параллельна следам, оставляемым каплями на окне. Отметим, что в данной ситуации наша скорость направлена перпендикулярно вертикальной скорости падения капель. Если бы вагон был гондолой воздушного шара и шар поднимался строго вертикально, то наклонять пробирку не потребовалось бы.

Аналогичная ситуация имеет место при наблюдениях звезд с помощью телескопа. Если бы телескоп был неподвижен относительно звезды, то для наблюдения нужно было бы направить ось телескопа точно на звезду. Однако телескоп находится на Земле, которая движется по орбите вокруг Солнца. Поэтому для того, чтобы световые фотоны, летящие от звезды, двигались внутри трубы телескопа вдоль ее оси, нужно наклонить телескоп в направлении его движения на некоторый угол. Понятно, что этот угол будет тем большим, чем выше скорость движения телескопа, и тем меньшим, чем выше скорость света c , в частности, если бы скорость света была бесконечной большой (то есть если бы свет распространялся мгновенно), то наклонять телескоп было бы не нужно.

Эффект, заключающийся в изменении наблюдаемого направления движения материальных объектов при переходе от одной системы отсчета к другой, называется *абберрацией* (от латинского *aberratio* — отклонение). Применительно к свету он называется *абберацией света*.

На практике направление телескопа, находящегося на Земле, не сравнивается с направлением некоторого мысленного телескопа, неподвижного относительно звезды. Сравниваются между собой направления телескопа в раз-

личных точках орбиты (в них Земля имеет разные направления скорости). Это — так называемая годичная аберрация. Более точно количественная характеристика аберрации будет определена ниже.

Пусть $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ — две инерциальные системы отсчета, движущиеся относительно друг друга. Обозначим: $\mathbf{V}$ — скорость системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $\mathbf{V}'$ — скорость системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ относительно $\{T', \Gamma'\}$ ($\mathbf{V} \in \Gamma$; $\mathbf{V}' \in \Gamma'$).

Введем связанные с этими системами отсчета ортонормированные базисы $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{\tau}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, где, как и в предыдущем разделе, $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}'$ — направляющие орты осей времени T и T' , $\mathbf{e}_1 = \mathbf{V}/V$ (при $V = |\mathbf{V}| \neq 0$) и выполняются равенства (12.24):

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{V}{c} \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_1 = \frac{\frac{V}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3. \quad (13.1)$$

Рассмотрим материальную точку, движущуюся относительно систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ соответственно ($\mathbf{v} \in \Gamma$; $\mathbf{v}' \in \Gamma'$).

Если бы мы описывали движение материальной точки с позиции классической механики, то в роли количественной характеристики аберрации естественно было бы принять угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ (в данном случае это было бы оправданным, так как в классической механике физические пространства разных систем отсчета накладываются друг на друга и, значит, оба вектора фактически принадлежат одному трехмерному пространству). Однако в рамках теории относительности так поступить нельзя, потому что здесь физические пространства движущихся относительно друг друга систем отсчета взаимно наклонены (ср. рис. 5.5 и 5.6, с. 136, 137). Из-за этого в обеих системах отсчета один из пары векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ принадлежит физическому пространству, а другой не принадлежит (за исключением случая $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$, см. (12.16)). А поскольку нам доступно для наблюдения только окружающее нас трехмерное пространство, то мы не можем измерить угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$.

По этой причине в рамках релятивистской механики поступают следующим образом. В системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ вводят угол θ между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{e}_1$, а в системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ — аналогичный угол θ' между векторами $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{e}'_1$. *Углом аберрации* называется величина $\Delta\theta$, равная разности этих углов:

$$\Delta\theta = \theta' - \theta. \quad (13.2)$$

Выведем формулу, выражающую угол аберрации $\Delta\theta$ через скорость V относительного движения систем отсчета.

Вследствие того, что $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \in \Gamma$, $\mathbf{v}', \mathbf{e}'_1 \in \Gamma'$ и физические пространства Γ и Γ' являются пространственноподобными гиперплоскостями, углы θ и θ' определяются формулой (3.3) из главы 2 (с. 38):

$$\cos \theta = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1}{v}; \quad \cos \theta' = -\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}'_1}{v'} \quad (\theta \in [0, \pi]; \quad \theta' \in [0, \pi]),$$

где $v = |\mathbf{v}|$; $v' = |\mathbf{v}'|$ и учтено, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}'_1| = 1$. Отсюда

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = -v \cos \theta; \quad \mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}'_1 = -v' \cos \theta'. \quad (13.3)$$

Разложим вектор $\mathbf{v}'$ по базису $\{\boldsymbol{\tau}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Так как $\mathbf{v}' \in \Gamma'$, то вектор $\mathbf{v}'$ имеет нулевую составляющую вдоль оси времени T' , поэтому

$$\mathbf{v}' = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2 + v'_3 \mathbf{e}'_3. \quad (13.4)$$

Подставим сюда значения векторов $\mathbf{e}'_i$ из (13.1):

$$\mathbf{v}' = v'_1 \frac{\frac{V}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} + v'_2 \mathbf{e}_2 + v'_3 \mathbf{e}_3. \quad (13.5)$$

Из (13.4) и (13.5), в силу ортонормированности базисов (см. соотношения (5.1), с. 129), получаем:

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}'_1 = -v'_1; \quad \mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{v'_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (13.6)$$

С помощью закона сложения скоростей (12.19), второй зависимости (13.6) и равенств $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ находим:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_1 + [\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}' \cdot \frac{\mathbf{V}}{c})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_1)]\sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right)\sqrt{1 - (V/c)^2}} = -\frac{V + v'_1}{1 + \frac{v'_1 V}{c^2}},$$

откуда, с учетом (13.3) и первой зависимости (13.6), имеем:

$$v \cos \theta = \frac{V + v' \cos \theta'}{1 + \frac{v' V}{c^2} \cos \theta'}. \quad (13.7)$$

Предположим, что материальная точка моделирует световой фотон. Тогда ее скорость относительно любой инерциальной системы отсчета равна скорости света: $v = v' = c$ (см. результат, сформулированный в конце разд. 12). В этом случае, согласно (13.7),

$$\cos \theta = \frac{\frac{V}{c} + \cos \theta'}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}. \quad (13.8)$$

Из (13.8) и формулы $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, учитывая $\theta, \theta' \in [0, \pi]$, находим:

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta' \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{V}{c} \cos\theta'}. \quad (13.9)$$

Пусть $\frac{V}{c} \ll 1$. Тогда выражения (13.8) и (13.9) принимают следующий вид в линейном приближении по $\frac{V}{c}$:

$$\begin{aligned} \cos\theta &\approx \left(\frac{V}{c} + \cos\theta'\right)\left(1 - \frac{V}{c} \cos\theta'\right) \approx \cos\theta' + \frac{V}{c} \sin^2\theta'; \\ \sin\theta &\approx \sin\theta' \left(1 - \frac{V}{c} \cos\theta'\right). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Полагая угол аберрации $\Delta\theta$ малым ($\Delta\theta \ll 1$), можем записать на основании (13.2), (13.10) и известных тригонометрических формул:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\approx \sin(\Delta\theta) = \sin(\theta' - \theta) = \sin\theta' \cos\theta - \cos\theta' \sin\theta \approx \\ &\approx \sin\theta' \left(\cos\theta' + \frac{V}{c} \sin^2\theta'\right) - \cos\theta' \sin\theta' \left(1 - \frac{V}{c} \cos\theta'\right) = \frac{V}{c} \sin\theta'. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает искомая формула для *угла аберрации* $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta \approx \frac{V}{c} \sin\theta' \quad \left(\text{при } \frac{V}{c} \ll 1\right). \quad (13.11)$$

Рассматриваемые базисы $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{\tau}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ построены таким образом, что вектор $\mathbf{e}_1$ сонаправлен скорости $\mathbf{V}$, а векторы базиса $\{\boldsymbol{\tau}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ удовлетворяют равенствам (13.1). В разд. 9 показано, что при этих условиях вектор $\mathbf{e}'_1$ противоположен скорости $\mathbf{V}'$ (см. формулу (9.28)). В определении угла аберрации ($\Delta\theta = \theta' - \theta$) угол θ' есть угол между векторами $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{e}'_1$, а угол θ есть угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{e}_1$. Поэтому можно считать, что θ' представляет собой угол между векторами $\mathbf{v}'$ и $-\mathbf{V}'$, а θ является углом между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ (здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — скорости материальной точки относительно инерциальных систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ соответственно; $\mathbf{V}$ — скорость системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $\mathbf{V}'$ — скорость системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ относительно $\{T', \Gamma'\}$; $\mathbf{v}, \mathbf{V} \in \Gamma$; $\mathbf{v}', \mathbf{V}' \in \Gamma'$).

Итак, из-за аберрации света, два наблюдателя, движущиеся по отношению друг к другу, видят источник света в разных направлениях. Количественной характеристикой этого эффекта является угол аберрации $\Delta\theta$, задаваемый формулой (13.11). Эта формула является приближенной, верной при малых значениях $\frac{V}{c}$. Точная связь между углами θ и θ' задается формулой (13.8) (или (13.9)). Если материальная точка моделирует не световой фотон, а тело, движущееся со скоростью $v < c$, то в этом случае аберрация описывается формулой (13.7).

Второй эффект, обусловленный конечностью скорости света c , — *эффект Доплера*. Он состоит в том, что частота излучения, измеряемая наблюдателем, зависит от взаимного движения источника излучения и наблюдателя.

Пусть $\{T, G\}$ и $\{T', G'\}$ — инерциальные системы отсчета в пространстве Минковского. Обозначим, как и ранее: $\mathbf{V}$ — скорость системы отсчета $\{T', G'\}$ относительно системы отсчета $\{T, G\}$ ($\mathbf{V} \in G$); $V = |\mathbf{V}|$; $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}'$ — направляющие орты осей времени T и T' соответственно, они связаны равенством

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{V}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (13.12)$$

которое вытекает из (9.1) и определения скорости движения одной инерциальной системы отсчета относительно другой (разд. 9, с. 162).

Рассмотрим материальную точку, моделирующую фотон. Фотон — безмассовая частица, поэтому его мировая линия является изотропной прямой (см. постулаты 3 и 4 в разд. 1, с. 109). Согласно двум приведенным в разд. 8 постулатам, касающимся материальных точек нулевой массы (с. 157, 158), такая материальная точка обладает в инерциальной системе отсчета энергией E и импульсом $\mathbf{p}$, задаваемыми выражениями

$$E = h\nu; \quad \mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} = \frac{h\nu}{c^2} \mathbf{v}, \quad (13.13)$$

где h — постоянная Планка; ν — частота, отвечающая моделируемому фотону; $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки относительно системы отсчета ($|\mathbf{v}| = c$).

4-импульс $\mathbf{P}$ материальной точки нулевой массы представляет собой изотропный вектор, который направлен вдоль мировой линии и имеет в соответствии с (8.6) и (13.13) вид

$$\mathbf{P} = \frac{E}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right). \quad (13.14)$$

Допустим, что фотон испущен источником, неподвижным относительно системы отсчета $\{T', G'\}$, и его частота, измеренная в этой системе отсчета, равна ν_0 . Найдём частоту ν фотона в системе отсчета $\{T, G\}$.

Будем помечать величины, относящиеся к системе отсчета $\{T', G'\}$, штрихами (кроме частоты ν_0), а величины, относящиеся к системе отсчета $\{T, G\}$, оставим без штрихов.

4-импульс $\mathbf{P}$ не зависит от системы отсчета и в случае материальной точки нулевой массы постоянен вдоль всей ее прямолинейной мировой линии (см. постулат в разд. 8, с. 157). Поэтому в обеих системах отсчета он имеет вид (13.14):

$$\mathbf{P} = \frac{h\nu}{c} \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \frac{h\nu_0}{c} \left(\boldsymbol{\tau}' + \frac{\mathbf{v}'}{c} \right),$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — скорости материальной точки относительно систем отсчета $\{T, \Gamma\}$ и $\{T', \Gamma'\}$ соответственно ($\mathbf{v} \in \Gamma$; $\mathbf{v}' \in \Gamma'$; $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| = c$). Отсюда

$$\nu \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \nu_0 \left(\boldsymbol{\tau}' + \frac{\mathbf{v}'}{c} \right).$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор $\boldsymbol{\tau}'$. Применяя зависимости $\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}' = 1$ и $\boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{v}' = 0$ (вытекающие из единичности вектора $\boldsymbol{\tau}'$ и условий $\boldsymbol{\tau}' \in T'$, $\mathbf{v}' \in \Gamma'$ и $T' \perp \Gamma'$), получаем:

$$\nu \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \boldsymbol{\tau}' \right) = \nu_0.$$

Подставим сюда значение (13.12) вектора $\boldsymbol{\tau}'$:

$$\nu \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \right] = \nu_0, \quad (13.15)$$

здесь использованы равенства $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} = 0$ и $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ (два последние равенства вытекают из $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{V}, \mathbf{v} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$).

Обозначим: θ — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$. Поскольку оба вектора лежат в физическом пространстве Γ , то этот угол определяется формулой (3.3) из главы 2 (с. 38):

$$\cos \theta = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{cV},$$

где $\theta \in [0, \pi]$; учтено, что $|\mathbf{v}| = c$ и $|\mathbf{V}| = V$. Отсюда

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} = -cV \cos \theta. \quad (13.16)$$

Из (13.15) и (13.16) находим:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (13.17)$$

Обычно вместо угла θ используют угол $\tilde{\theta}$ между видимым направлением на источник и скоростью $\mathbf{V}$ источника относительно наблюдателя. Так как видимое направление на источник противоположно скорости $\mathbf{v}$ движения фотона, то $\tilde{\theta}$ есть угол между векторами $\mathbf{V}$ и $-\mathbf{v}$. Очевидно, что $\tilde{\theta} = \pi - \theta$, откуда $\cos \tilde{\theta} = -\cos \theta$. С помощью этого равенства и (13.17) получаем формулу, описывающую *эффект Доплера*:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{V}{c} \cos \tilde{\theta}}, \quad (13.18)$$

здесь, напомним, ν — частота фотона, измеренная в системе отсчета наблюдателя; ν_0 — частота фотона, измеренная в системе отсчета источника; V — скорость источника относительно наблюдателя ($V \geq 0$); c — скорость света; $\tilde{\theta}$ — угол, определенный выше.

Рассмотрим частные случаи движения источника.

Формула (13.18) верна для безмассовых элементарных частиц, обладающих любой частотой. Однако, для наглядности, будем считать, что фотон имеет частоту, относящуюся к видимой части спектра электромагнитных волн, поэтому будем говорить об источнике света.

Пусть в системе отсчета наблюдателя скорость $\mathbf{V}$ источника света направлена вдоль видимого направления на источник. В этом случае либо $\tilde{\theta} = 0$ (при удалении источника от наблюдателя), либо $\tilde{\theta} = \pi$ (при приближении источника к наблюдателю). Следовательно, $\cos \tilde{\theta} = \pm 1$, поэтому изменение частоты максимально. Это — так называемый *продольный эффект Доплера*. Если при этом источник удаляется от наблюдателя ($\tilde{\theta} = 0$), то

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{V}{c}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{V}{c}}},$$

откуда $\nu < \nu_0$, то есть наблюдаемая частота света меньше частоты, измеряемой в системе отсчета, связанной с источником. Соответственно, наблюдаемая длина световой волны λ больше испускаемой (так как $\lambda = c/\nu$). Поскольку изменение длины волны происходит в сторону длинноволновой (красной) части спектра, то этот эффект называется *красным смещением*. Именно благодаря этому эффекту было обнаружено «разбегание» галактик, трактуемое как расширение Вселенной.

Если источник, наоборот, приближается к наблюдателю ($\tilde{\theta} = \pi$), то

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{V}{c}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{V}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{V}{c}}};$$

отсюда $\nu > \nu_0$ и, значит, длина волны света уменьшается. В данном случае изменение длины волны происходит в сторону коротковолновой (синей) части спектра.

При скорости источника $\mathbf{V}$, перпендикулярной видимому направлению на источник ($\tilde{\theta} = \pi/2$), будет

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2};$$

это — поперечный эффект Доплера.

При $\frac{V}{c} \ll 1$ формула (13.18) может быть записана, с точностью до членов, квадратичных по $\frac{V}{c}$, в виде

$$\begin{aligned} \nu &\approx \nu_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{V}{c} \cos \tilde{\theta} + \left(\frac{V}{c} \right)^2 \cos^2 \tilde{\theta} \right] \approx \\ &\approx \nu_0 \left[1 - \frac{V}{c} \cos \tilde{\theta} + \left(\frac{V}{c} \right)^2 \left(\cos^2 \tilde{\theta} - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что при $\frac{V}{c} \ll 1$ разность $\nu - \nu_0$ в случае продольного эффекта Доплера (при $\cos \tilde{\theta} = \pm 1$) примерно пропорциональна первой степени параметра $\frac{V}{c}$, а в случае поперечного эффекта Доплера (при $\cos \tilde{\theta} = 0$) пропорциональна второй степени параметра $\frac{V}{c}$.

Оба рассмотренных в настоящем разделе эффекта — аберрация света и эффект Доплера — объясняются конечностью скорости распространения света. Если бы свет распространялся мгновенно, то есть если бы было $c = +\infty$, то, согласно (13.11) и (13.18), угол аберрации $\Delta\theta$ равнялся бы нулю, а частота ν совпала бы с ν_0 , и, значит, оба эффекта отсутствовали бы.

14. Эффект Комптона. Позитрон

Свободный электрон не может поглотить или испустить фотон, но может отразить его (принято говорить «рассеять»). При рассеянии длина волны, соответствующая фотону, изменяется, а электрон получает импульс отдачи. Это явление называется *эффектом Комптона*, *комpton-эффектом* или *комптоновским рассеянием*.

Взаимодействие элементарных частиц a и b называется *рассеянием*, если образующиеся частицы c и d те же, что a и b , и называется *реакцией*, если c и d отличаются от a и b .

Рассмотрим эффект Комптона подробно.

Электрон имеет фиксированную массу m_e , не меняющуюся при любом движении, поэтому его 4-импульс $\mathbf{P}$ представляет собой времениподобный вектор постоянной длины $|\mathbf{P}| = m_e c$. Фотон имеет нулевую массу, поэтому его 4-импульс $\mathbf{K}$ является изотропным вектором ($|\mathbf{K}| = 0$). Если бы электрон поглотил или испустил фотон, то, по закону сохранения 4-импульса, выполнялось бы равенство

$$\mathbf{P} \pm \mathbf{K} = \mathbf{P}', \quad (14.1)$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — 4-импульс электрона до и после события; знаки плюс и минус относятся к случаям поглощения и испускания фотона соответственно. На основании (14.1) имеем: $(\mathbf{P} \pm \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{P} \pm \mathbf{K}) = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}'$. Из этого равенства с учетом зависимостей

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' = (m_e c)^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = 0 \quad (14.2)$$

получаем:

$$(\mathbf{P} \pm \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{P} \pm \mathbf{K}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \pm 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = (m_e c)^2 \pm 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} = (m_e c)^2.$$

Отсюда $\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} = 0$. Данное равенство означает, что изотропный вектор $\mathbf{K}$ ортогонален времениподобному вектору $\mathbf{P}$. Однако такого быть не может, потому что подпространство, ортогональное к времениподобному вектору, является трехмерной пространственноподобной гиперплоскостью, которая не содержит изотропных векторов. Значит, электрон, как сказано выше, не может поглотить или испустить фотон.

Обратим внимание на то, что сказанное относится к свободному электрону, то есть к электрону, не являющемуся частью какой-либо физической системы. Если же электрон входит в состав некоторой физической системы, например, атома, то суммарный 4-импульс такой системы может иметь переменную длину, поэтому такая система может испускать или поглощать фотоны.

Итак, свободный электрон может только рассеять (отразить) фотон. Опишем эффект рассеяния фотона электроном. Согласно закону сохранения 4-импульса,

$$\mathbf{P} + \mathbf{K} = \mathbf{P}' + \mathbf{K}', \quad (14.3)$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ — 4-импульсы электрона и фотона до рассеяния; $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{K}'$ — они же после рассеяния.

Из (14.3) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' &= (\mathbf{P} + \mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{K} - \mathbf{K}') = \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} - 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K}' + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' + \mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}'. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения скалярных произведений из (14.2) и учитывая, что $\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}' = 0$, находим:

$$(m_e c)^2 = (m_e c)^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} - 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K}' - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}'.$$

Отсюда

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}' = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}'. \quad (14.4)$$

Равенство (14.4) позволяет определить характеристики электрона и фотона после рассеяния, если известен угол, на который отклоняется фотон при рассеянии.

Эффект Комптона традиционно рассматривается для случая, когда до момента рассеяния электрон покоится относительно лабораторной инерциальной системы отсчета. Пусть $\{T, \Gamma\}$ — такая система отсчета; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; Γ — физическое пространство, ортогональное оси T . Тогда, согласно формуле (7.2), 4-импульс электрона до рассеяния равен

$$\mathbf{P} = m_e c \boldsymbol{\tau} \quad (14.5)$$

(так как электрон покоится), а согласно (8.6) и (8.7), 4-импульс фотона до и после рассеяния имеет вид соответственно

$$\mathbf{K} = \frac{E}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} = \frac{E}{c} \boldsymbol{\tau} + \frac{E}{c} \mathbf{e} \quad \text{и} \quad \mathbf{K}' = \frac{E'}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p}' = \frac{E'}{c} \boldsymbol{\tau} + \frac{E'}{c} \mathbf{e}', \quad (14.6)$$

где E , $\mathbf{p}$, E' и $\mathbf{p}'$ — энергия и импульс фотона до и после рассеяния; $\mathbf{p} = (E/c)\mathbf{e}$; $\mathbf{p}' = (E'/c)\mathbf{e}'$; $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — единичные векторы, задающие направление движения фотона до и после рассеяния ($\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{e}, \mathbf{e}' \in \Gamma$).

Угол θ , на который фотон отклоняется при рассеянии, есть угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$; он определяется формулой (3.3) главы 2 (с. 38):

$$\cos \theta = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}', \quad (14.7)$$

где наличие знака минус объясняется отрицательной определенностью метрической формы в Γ .

Из квантовой механики известно, что энергия фотона задается формулой

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (14.8)$$

где h — постоянная Планка; ν и λ — частота и длина волны фотона, связанные равенством $\nu = c/\lambda$.

Значения (14.6) 4-импульса фотона могут быть преобразованы с помощью формулы (14.8) к виду

$$\mathbf{K} = \frac{h}{\lambda}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}); \quad \mathbf{K}' = \frac{h}{\lambda'}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}'), \quad (14.9)$$

где λ и λ' — длина волны фотона до и после рассеяния.

Так как $|\boldsymbol{\tau}| = 1$, $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$, то

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}' = 0. \quad (14.10)$$

Из (14.5), (14.7), (14.9) и (14.10) находим:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} = \frac{m_e ch}{\lambda}; \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}' = \frac{m_e ch}{\lambda'}; \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' = \frac{h^2}{\lambda \lambda'}(1 - \cos \theta).$$

Подставляя эти значения произведений в равенство (14.4), получаем:

$$\frac{m_e ch}{\lambda} - \frac{m_e ch}{\lambda'} = \frac{m_e ch(\lambda' - \lambda)}{\lambda \lambda'} = \frac{h^2}{\lambda \lambda'}(1 - \cos \theta).$$

Отсюда следует *формула Комптона*:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_e(1 - \cos \theta), \quad (14.11)$$

где $\Delta \lambda$ — изменение длины волны фотона; $\lambda_e = \frac{h}{m_e c} \approx 2.4 \cdot 10^{-12}$ м — так называемая комптоновская длина волны электрона.

Из формулы Комптона (14.11) вытекает, что при рассеянии фотона на покоящемся электроне длина волны фотона увеличивается, то есть его частота уменьшается. В силу (14.8), это означает, что энергия фотона уменьшается. Потерянная энергия фотона передается электрону,

который получает импульс отдачи. Обратим внимание на то, что изменение длины волны фотона $\Delta\lambda$ не зависит от самой длины волны λ .

Выше было показано, что свободный электрон не может поглотить или испустить один фотон. Верно более общее утверждение.

Теорема 14.1. *Свободный электрон не может поглотить или испустить как один, так и сразу несколько фотонов.*

Доказательство. Если 4-импульсы всех фотонов, одновременно взаимодействующих с электроном, коллинеарны, то их суммарный 4-импульс, очевидно, тоже коллинеарен им, значит, он является изотропным вектором. Поэтому, повторяя приведенные в начале раздела рассуждения (в которых в данном случае $\mathbf{K}$ — изотропный суммарный 4-импульс фотонов), убеждаемся в справедливости теоремы.

Теперь докажем теорему для случая, когда 4-импульсы фотонов не коллинеарны.

Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — изотропные векторы с общим началом, направленные в сторону будущего и не коллинеарные между собой ($\mathbf{K}_1 \nparallel \mathbf{K}_2$). Покажем, что их сумма $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ — времениподобный вектор, направленный в сторону будущего.

В силу изотропности векторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} &= (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) = \\ &= \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_2 = 2\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Рассмотрим плоскость P , содержащую векторы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ (благодаря $\mathbf{K}_1 \nparallel \mathbf{K}_2$, такая плоскость существует и единственна). Поскольку плоскость P содержит два не коллинеарных изотропных вектора, то она является псевдоевклидовой, то есть имеет сигнатуру $(+ -)$. Известно, что через каждую точку такой плоскости проходят две и только две изотропные прямые. В нашем случае это прямые, коллинеарные векторам $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$. Введем в P ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ с времениподобным вектором $\mathbf{e}_0$, направленным в сторону будущего; векторы этого базиса удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1; \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (14.13)$$

Совместим начало базиса с общим началом векторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$. Тогда векторы $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1$ будут служить направляющими векторами изотропных прямых, которые проходят через общее начало векторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ и содержат эти векторы. Из направленности вектора $\mathbf{e}_0$ в сторону будущего вытекает направленность в сторону будущего векторов $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1$. Так как векторы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ тоже направлены в сторону

будущего, то $\mathbf{K}_1 = k_1(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)$ и $\mathbf{K}_2 = k_2(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1)$ при $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ (или $\mathbf{K}_1 = k_1(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1)$ и $\mathbf{K}_2 = k_2(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)$). Отсюда и из (14.12) и (14.13) находим:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = 2\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 = 2k_1(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \cdot k_2(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = 4k_1k_2 > 0,$$

следовательно, вектор $\mathbf{K}$ действительно времениподобный, при этом он направлен в сторону будущего, потому что вектор $\mathbf{e}_0$ направлен в сторону будущего и

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_0 = (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \cdot \mathbf{e}_0 = k_1(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_0 + k_2(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_0 = k_1 + k_2 > 0$$

(см. лемму 1 в разд. 8 главы 2, с. 102).

Теперь пусть $\mathbf{K}_3$ — времениподобный вектор ($\mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{K}_3 > 0$), $\mathbf{K}_4$ — изотропный вектор ($\mathbf{K}_4 \cdot \mathbf{K}_4 = 0$), оба направлены в сторону будущего. Тогда их сумма $\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4$ — времениподобный вектор, направленный в сторону будущего. Действительно,

$$(\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \cdot (\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{K}_3 + 2\mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{K}_4 > 0,$$

где первое слагаемое в средней части выражения положительно, вследствие времениподобности вектора $\mathbf{K}_3$, а второе слагаемое положительно, по упомянутой выше лемме 1 (с. 102). Отсюда вытекает времениподобность вектора $\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4$. Направленность его в сторону будущего следует из: направленности в сторону будущего векторов $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_4$, выражения $(\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \cdot \mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \cdot \mathbf{K}_3 > 0$ и той же леммы 1.

Итак, мы доказали, что сумма двух не коллинеарных изотропных векторов, направленных в сторону будущего, является времениподобным вектором, направленным в сторону будущего, и что сумма времениподобного и изотропного векторов, направленных в сторону будущего, также есть времениподобный вектор, направленный в сторону будущего.

На основании этого результата заключаем, что если фотоны, находящиеся в одной и той же точке пространства Минковского, имеют не коллинеарные 4-импульсы, то их суммарный 4-импульс времениподобен и направлен в сторону будущего. В самом деле, складывая не коллинеарные изотропные 4-импульсы двух фотонов, мы получаем времениподобный вектор, направленный в сторону будущего, а прибавляя к последнему изотропный 4-импульс любого другого фотона мы вновь получаем времениподобный вектор, направленный в сторону будущего.

Допустим, что электрон испускает или поглощает сразу несколько фотонов, среди 4-импульсов которых имеется хотя бы один не коллинеарный остальным. Обозначим: $\mathbf{K}$ — суммарный 4-импульс этих

фотонов. По доказанному, $\mathbf{K}$ является времениподобным вектором, направленным в сторону будущего. Закон сохранения 4-импульса имеет в этом случае вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{K} \quad \text{или} \quad \mathbf{P} + \mathbf{K} = \mathbf{P}', \quad (14.14)$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — 4-импульс электрона до и после события; первое и второе выражения относятся к ситуациям испускания и поглощения фотонов соответственно; все векторы в (14.14) направлены в сторону будущего.

Рассмотрим случай испускания фотонов. С помощью первой формулы (14.14) можем записать:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{P}' + \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{P}' + \mathbf{K}) = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' + 2\mathbf{P}' \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}.$$

Отсюда, в силу $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' = (m_e c)^2$, имеем: $2\mathbf{P}' \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = 0$. Это равенство и времениподобность вектора $\mathbf{K}$ влекут

$$\mathbf{P}' \cdot \mathbf{K} = -\frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} < 0. \quad (14.15)$$

Из (14.15) и леммы 1 (с. 102) вытекает, что векторы $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{K}$ имеют противоположные временные ориентации, что не верно. Следовательно, электрон действительно не может испустить фотоны.

Из второй формулы (14.14), рассматривая произведение $\mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}'$, получаем аналогичным образом

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} = -\frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} < 0, \quad (14.16)$$

что противоречит одинаковой временной ориентации векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$, значит, электрон не может поглотить фотоны. Теорема доказана. ■

В приведенном доказательстве мы воспользовались тем, что 4-импульс материальной точки всегда направлен в сторону будущего (это вытекает из определения 4-импульса, см. разд. 3). Если отказаться от данного условия, то оказываются возможными следующие ситуации.

Электрон, двигаясь вдоль мировой линии с направленным в сторону будущего 4-импульсом $\mathbf{P}$, испускает в некоторый момент времени два или более фотонов с неколлинеарными 4-импульсами, после чего продолжает движение в пространстве Минковского вспять во времени, то есть с 4-импульсом $\mathbf{P}'$, направленным в сторону прошлого (рис. 14.1,а). Или, наоборот, электрон, двигаясь первоначально вспять во времени (с направленным в прошлое 4-импульсом $\mathbf{P}$), поглощает в некоторый момент фотоны и после этого движется в обычном направлении во времени с 4-импульсом $\mathbf{P}'$, направленным в будущее (рис. 14.1,б). В первом

случае 4-импульс электрона до и после события ($\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$) и суммарный 4-импульс фотонов $\mathbf{K}$ удовлетворяют первой формуле (14.14) и зависимости (14.15), а во втором случае векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{K}$ удовлетворяют второй формуле (14.14) и зависимости (14.16).

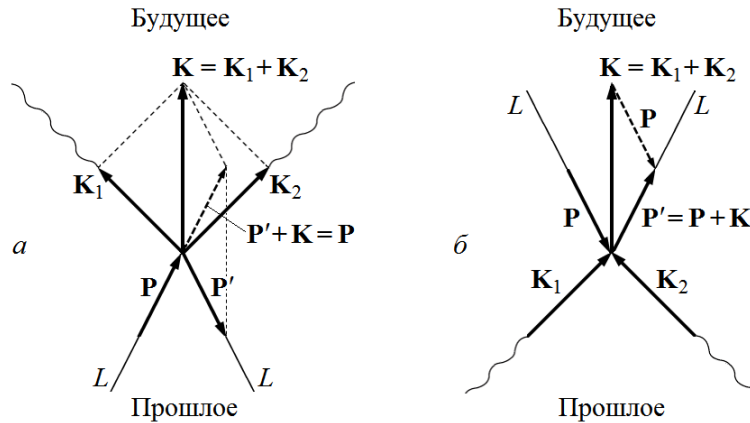


Рис. 14.1. Электрон, испускающий (а) и поглощающий (б) фотоны.

L — мировая линия электрона (в момент события она испытывает излом); волнистые линии — фотоны, несущие энергию.

В физике высказывается гипотеза, что *античастицы* — это *обычные частицы, но движущиеся вспять во времени*. Античастица, соответствующая электрону, называется *позитроном*. Электрон и позитрон имеют одинаковые массы, а их электрические заряды одинаковы по модулю, но противоположны по знаку. В рамках этой гипотезы рис. 14.1,а изображает процесс *аннигиляции* электрона и позитрона, то есть превращение их в фотоны (в электромагнитное излучение). Рис. 14.1,б иллюстрирует обратный процесс — *рождение пары* электрон-позитрон в результате взаимодействия фотонов. При такой трактовке 4-импульс позитрона на рис. а и б есть $-\mathbf{P}'$ и $-\mathbf{P}$ соответственно, а закон сохранения 4-импульса имеет вид $\mathbf{P} + (-\mathbf{P}') = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ и $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{P}' + (-\mathbf{P})$.

Отметим, что согласно модели электрона, изложенной в следующей главе, изменение направления движения электрона в пространстве Минковского на противоположное влечет изменение знака электромагнитного поля, порождаемого электроном. Поскольку этот результат может быть интерпретирован как изменение знака заряда электрона, то есть как превращение его в позитрон, то данная модель служит косвенным подтверждением указанной гипотезы.

15. Силы в теории относительности

В предыдущих разделах мы рассматривали в основном кинематику материальной точки (то есть описывали движение тел без исследования причин, вызывающих движение). Теперь обратимся к динамике.

Динамика — раздел механики, в котором изучается движение тел в зависимости от причин, обуславливающих движение.

В классической механике воздействие на тело, являющееся причиной его движения, моделируется вектором и называется *силой*. В теории относительности воздействие на тело описывается тензором (см. далее разд. 18). Тем не менее, в теории относительности для установления связи между законами этой теории и законами классической механики используется понятие силы.

Отметим, что в теории относительности, как и в классической механике, считается, что источником силы, действующей на тело, всегда является некоторое другое тело. Если тело рассматривается как совокупность материальных точек, то считается, что источником силы, действующей на любую его точку, является либо другое тело, либо другая точка этого же тела. В первом случае сила называется внешней (по отношению к телу), во втором — внутренней. Важно, что исключается возможность действия точки тела посредством силы на саму себя.

Пусть $\{T, \Gamma\}$ — какая-либо инерциальная система отсчета в пространстве Минковского (T — ось времени, Γ — физическое пространство, $\Gamma \perp T$). В специальной теории относительности постулируется следующий *закон движения* материальной точки ненулевой массы:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (15.1)$$

где $\mathbf{f}$ — сила, действующая на материальную точку; $\mathbf{p}$ — импульс материальной точки ($\mathbf{f}, \mathbf{p} \in \Gamma$); t — координатное время в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$. Под силой $\mathbf{f}$ понимается та же механическая характеристика, что и в классической механике. Импульс $\mathbf{p}$ задается второй формулой (7.4):

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (15.2)$$

где m — масса материальной точки (та же, что в классической механике, $m = \text{const} > 0$); $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $v = |\mathbf{v}|$ ($0 \leq v < c$); c — скорость света.

Закон (15.1) совпадает со вторым законом Ньютона в классической механике (в одной из форм его записи). Однако здесь, подчеркнем, импульс $\mathbf{p}$ определяется формулой (15.2), а не выражением $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, как это имеет место в классической механике.

Для материальных точек нулевой массы закон движения, аналогичный (15.1), не задается и силы, действующие на них, не вводятся.

Рассмотрим некоторые следствия закона (15.1).

На основании (15.1) и (15.2) имеем:

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{a} - \frac{m}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^3} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (15.3)$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ — ускорение материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; использованы зависимости $m = \text{const}$, $v^2 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ (знак минус связан с тем, что $\mathbf{v}$ — пространственноподобный вектор), $d(v^2)/dt = d(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/dt = -2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$.

Из (15.3) находим:

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{m}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^3} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{a} \right). \quad (15.4)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, входит в правую часть формулы (15.3). Заменяя в (15.3) это выражение величиной $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}/c$, получаем:

$$\mathbf{f} + \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{a}. \quad (15.5)$$

Из (15.5) видно, что ускорение $\mathbf{a}$ не сонаправлено вектору силы, как это имеет место в механике Ньютона, а состоит из двух составляющих, одна из которых сонаправлена вектору силы, а другая коллинеарна вектору скорости.

Физическое пространство Γ имеет сигнатуру $(- - -)$. Это означает, что метрическая форма в нем отрицательно определенная. В физике обычно считается, что физическое пространство имеет положительно определенную метрическую форму. Поскольку все векторы в (15.5) принадлежат Γ , то можно перейти в Γ к положительно определенной

метрической форме. Для этого достаточно поменять знаки всех скалярных произведений векторов, принадлежащих Γ . В таком случае формула (15.5) примет вид

$$\mathbf{f} - \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_+ \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \mathbf{a}, \quad (15.6)$$

где индекс $+$ при скалярном произведении векторов означает переход к положительно определенной метрической форме в Γ .

Применим формулу (15.6) к описанию ситуаций, когда сила $\mathbf{f}$ ортогональна скорости $\mathbf{v}$ и когда она параллельна скорости $\mathbf{v}$.

Пусть $\mathbf{f} \perp \mathbf{v}$, то есть $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$. Тогда из (15.6) имеем:

$$\mathbf{f} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \mathbf{a} \quad (\text{при } \mathbf{f} \perp \mathbf{v}). \quad (15.7)$$

Теперь пусть $\mathbf{f} \parallel \mathbf{v}$. Тогда вектор $\mathbf{f}$ может быть представлен в виде $\mathbf{f} = \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} \right)_+ \frac{\mathbf{v}}{v}$ (где $\mathbf{v}/v$ — единичный вектор, сонаправленный скорости $\mathbf{v}$). Отсюда находим: $\mathbf{f} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} \right)_+ \frac{\mathbf{v}}{v} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_+ \frac{\mathbf{v}}{c}$. Вместе с (15.6) это дает:

$$\mathbf{f} - \mathbf{f} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \mathbf{a}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{f} = \frac{m}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} \right)^3} \mathbf{a} \quad (\text{при } \mathbf{f} \parallel \mathbf{v}). \quad (15.8)$$

Из сравнения выражений (15.7) и (15.8) видно, что связь между ускорением материальной точки и силой, действующей на нее, различна в случаях, когда сила направлена перпендикулярно и параллельно вектору скорости. Этот результат еще раз демонстрирует отличие теории относительности от классической механики, в которой, согласно второму закону Ньютона ($\mathbf{f} = m\mathbf{a}$), коэффициент пропорциональности между силой и ускорением всегда одинаков. Напомним, что в общем случае связь между ускорением и силой задается формулой (15.5) (или (15.6)).

Еще одним следствием закона движения (15.1) является уравнение энергии. Выведем его.

Энергия E материальной точки ненулевой массы m определяется первой формулой (7.4):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (15.9)$$

Из (15.9) с учетом постоянства величин m и c находим:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = - \frac{m}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}), \quad (15.10)$$

где вновь применена зависимость $d(v^2)/dt = d(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/dt = -2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$.

С помощью формулы (15.4), являющейся следствием закона движения (15.1), получаем из (15.10) искомое *уравнение энергии*:

$$\frac{dE}{dt} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (15.11)$$

При переходе в физическом пространстве Γ к положительно определенной метрической форме уравнение энергии (15.11) принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})_+. \quad (15.12)$$

16. Тензор электромагнитного поля

Электромагнитное поле задается двухвалентным антисимметричным *тензором электромагнитного поля* F . Подчеркнем, что тензор F , как и всякий тензор, не зависит от системы отсчета.

Пусть $\{T, \Gamma\}$ — какая-либо инерциальная система отсчета. Тогда тензор F может быть представлен в форме

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}, \quad (16.1)$$

где $\mathbf{E}$ — *напряженность электрического поля*; $\overline{H}$ — *напряженность магнитного поля* ($\mathbf{E}$ — вектор, $\overline{H}$ — псевдовектор; $\mathbf{E}, \overline{H} \in \Gamma$); $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $\boldsymbol{\varkappa}$ — трехвалентный псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством Γ ; тензорное произведение векторов обозначено без знака

умножения между ними; черта над символом обозначает псевдовектор. Напряженности $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$, в отличие от тензора F , зависят от системы отсчета.

Отметим, что, согласно (16.1), величины F , $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ имеют одинаковую физическую размерность (так как $\boldsymbol{\tau}$ и $\varkappa$ безразмерны). Поэтому при решении задач электродинамики удобнее использовать систему физических единиц СГС, в которой размерности $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ одинаковы, а не СИ, в которой они различны.

Псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ есть трехвалентный совершенно антисимметричный единичный псевдотензор, определяемый равенством

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad (16.2)$$

где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортономированный базис в физическом пространстве Γ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = -1$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$); Δ — единичный псевдоскаляр в Γ : $\Delta = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный. Псевдотензор $\varkappa$ имеет вид (16.2) в любом ортонормированном базисе пространства Γ .

Формула (16.1) выражает тензор электромагнитного поля F через напряженности $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$. Последние, в свою очередь, выражаются через тензор F посредством формул

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}; \quad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa, \quad (16.3)$$

где двоеточие — знак бискалярного умножения, которое выполняется по правилу, иллюстрируемому примером (2.6) из разд. 2 главы 2. (Доказательство формул (16.1) и (16.3) приведено в разд. 4 главы 4.)

17. Сила Лоренца

Известно, что *уравнение движения* электрически заряженного тела в электромагнитном поле имеет вид

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}, \quad (17.1)$$

где $\mathbf{i}$ — 4-скорость тела — единичный касательный вектор к мировой линии тела L , направленный в сторону будущего; l — собственное время тела (натуральный параметр на L , возрастающий в направлении будущего и измеряемый в единицах длины); $a_1 = e/(mc^2)$; e и m — заряд и масса тела (e , m — константы); c — скорость света; F — тензор электромагнитного поля; тело считается точечным.

Найдем силу, с которой электромагнитное поле действует на тело.

Пусть $\{T, \Gamma\}$ — инерциальная система отсчета в пространстве Минковского M . Воспользуемся выражением (7.8) для 4-импульса $\mathbf{P}$ материальной точки: $\mathbf{P} = mc\mathbf{i} = (E/c)\boldsymbol{\tau} + \mathbf{p}$, откуда

$$\mathbf{p} = mc\mathbf{i} - (E/c)\boldsymbol{\tau}, \quad (17.2)$$

где E и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс материальной точки в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T ; импульс $\mathbf{p}$ принадлежит физическому пространству Γ .

На основании закона движения (15.1) и выражений (17.2) и (15.11) можем записать:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = mc \frac{d\mathbf{i}}{dt} - \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \boldsymbol{\tau} = mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{d\mathbf{i}}{dl} + \frac{1}{c} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau},$$

где t — время в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$; $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки относительно $\{T, \Gamma\}$; учтены равенство $dl = c\sqrt{1 - (v/c)^2} dt$ и постоянство величин m , c и $\boldsymbol{\tau}$. Отсюда и из (17.1), (16.1) и (6.13) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} a_1 F \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{c} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau} = \\ &= e(\mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) \cdot \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{1}{c} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau} = \\ &= e\mathbf{E} - \frac{e}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \overline{H} + \frac{1}{c} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau}, \end{aligned} \quad (17.3)$$

где $a_1 = e/(mc^2)$; применены зависимости $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$; $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$; $\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{\tau} = \hat{0}$ (вытекающие из того, что $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси времени T , векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}$ принадлежат Γ , тензор $\boldsymbol{\varkappa}$ определен над Γ и $T \perp \Gamma$; $\hat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор); $\times$ — знак векторного умножения в Γ ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ для любых векторов и псевдовекторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma$).

Умножим крайние части выражения (17.3) скалярно на вектор $\mathbf{v}$. Учитывая, что $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{v} \perp (\mathbf{v} \times \overline{H})$, находим: $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. Подставляя это значение произведения $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ в последнее слагаемое в (17.3), получаем искомую силу, с которой электромагнитное поле действует на заряженное точечное тело:

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \overline{H}; \quad (17.4)$$

эта сила называется *силой Лоренца*; здесь e — электрический заряд тела; $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$; $\mathbf{v}$ — скорость тела относительно $\{T, \Gamma\}$. Отме-

тим, что магнитная составляющая силы Лоренца ортогональна скорости $\mathbf{v}$ (так как она пропорциональна $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$), поэтому она не совершает работы над телом, а только искривляет его траекторию.

18. Динамика материальной точки в теории относительности

Модели материальных тел и законы динамики в классической механике и в специальной теории относительности принципиально различны. В классической механике простейшей моделью тела является геометрическая точка, воздействие на которую описывается вектором (вектором силы). В специальной теории относительности воздействие, по крайней мере электромагнитное, описывается двухвалентным тензором (см. уравнение (17.1)). Тензор, рассматриваемый как оператор, не может действовать на точку, а только на вектор. Поэтому *простейшей моделью тела (в частности, элементарной частицы) является в специальной теории относительности не точка, а точка вместе со скрепленными с ней векторами*. Подчеркнем, что это факт, вытекающий непосредственно из свойств тензоров.

Учитывая сказанное, будем считать, что *с материальной точкой скреплено пространство векторов, имеющих начала в этой точке*. Движение и вращение такой конструкции и будем исследовать. Далее в настоящей главе под *материальной точкой* понимается как сама точка (когда речь идет о ее местоположении или мировой линии), так и вся указанная геометрическая конструкция (когда рассматривается ее вращение).

Итак, в классической механике воздействие на тело, моделируемое материальной точкой, задается вектором силы, приложенным к точке и вызывающим ее ускорение. В специальной теории относительности воздействие задается тензором, поворачивающим векторы, скрепленные с материальной точкой. Воздействие на 4-скорость материальной точки $\mathbf{i}$ (единичный касательный вектор к мировой линии) приводит к его повороту, что влечет искривление мировой линии. В опыте это проявляется как *ускорение* тела. Воздействие на другие векторы, скрепленные с материальной точкой, приводит к тому, что их составляющие, ортогональные вектору $\mathbf{i}$, поворачиваются вокруг $\mathbf{i}$ (то есть вокруг мировой линии). Это означает *вращение* тела. Отметим, что при описании вращения тела в принципе невозможно моделировать его геометрической точкой, так как вращающаяся точка неотличима от невращающейся.

Общим в классической механике и в специальной теории относительности является тот факт, что при отсутствии воздействия на тело его движение является прямолинейным (в классической механике прямолинейным относительно любой инерциальной системы отсчета, в специальной теории относительности прямолинейным в пространстве Минковского).

Пусть имеется материальная точка (вместе со скрепленными с ней векторами). Обозначим, как и ранее: L — мировая линия материальной точки (гладкая времениподобная линия); $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к L , направленный в сторону будущего (4-скорость материальной точки); l — собственное время материальной точки (натуральный параметр на L , возрастающий в направлении будущего и измеряемый в единицах длины). Под гладкостью линии L понимается существование непрерывной производной $d\mathbf{i}/dl$.

Рассмотрим двухвалентный тензор (линейный оператор) B , который преобразует произвольный вектор $\mathbf{u}$, скрепленный с материальной точкой, из состояния $\mathbf{u}(l)$ в состояние $\mathbf{u}(l+\Delta l)$, где l и $l+\Delta l$ — два близких момента времени. В связи с тем, что в дальнейшем мы устремим параметр Δl к нулю, будем записывать тензор B и производимое им преобразование с точностью до первой степени Δl . Так как при $\Delta l = 0$ вектор $\mathbf{u}$ должен оставаться неподвижным, то можно представить этот тензор в форме

$$B = I + K\Delta l, \quad (18.1)$$

где I — единичный тензор (тождественный оператор); K — некоторый тензор размерности (длина) $^{-1}$; тензоры B и K могут зависеть от l ; тензор K не зависит от Δl . Тензор B вида (18.1) называется *инфинитезимальным* (в предположении малости Δl). Тензор K будет конкретизирован далее.

Так как тензор B преобразует вектор $\mathbf{u}(l)$ в вектор $\mathbf{u}(l+\Delta l)$, то в силу (18.1) имеем:

$$\mathbf{u}(l+\Delta l) = B \cdot \mathbf{u}(l) = \mathbf{u}(l) + K \cdot \mathbf{u}(l)\Delta l. \quad (18.2)$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl}(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(l+\Delta l) - \mathbf{u}(l)}{\Delta l} = K \cdot \mathbf{u}(l),$$

таким образом, зависимость (18.2) влечет следующий закон изменения вектора $\mathbf{u}$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = K \cdot \mathbf{u}. \quad (18.3)$$

Мы произвели переход от формулы (18.2) к (18.3). Поскольку возможен обратный переход от (18.3) к (18.2), то эти формулы эквивалентны

(с точностью до первой степени Δl), поэтому можно говорить либо, что векторы преобразуются тензором B по закону (18.2), либо, что они преобразуются тензором K по закону (18.3). Отметим, что в результате предельного перехода $\Delta l \rightarrow 0$, произведенного при вычислении производной du/dl , мы перешли от формул (18.1) и (18.2), верных лишь в линейном приближении по Δl , к формуле (18.3), не зависящей от Δl .

Нас будет интересовать ситуация, когда при движении материальной точки сохраняются длины векторов, скрепленных с ней, и углы между векторами. Эта ситуация реализуется, если B — ортогональный тензор. Сформулируем критерий ортогональности этого тензора.

Теорема 18.1. *Инфинитезимальный тензор B вида (18.1) является ортогональным тогда и только тогда, когда K — антисимметричный тензор, то есть когда*

$$K^* = -K, \quad (18.4)$$

где звездочка означает операцию транспонирования тензора. Ортогональность тензора B имеет место в линейном приближении по Δl .

Теорема 18.1 справедлива для тензоров, определенных над любым линейным пространством, а не только над линейным пространством, ассоциированным с пространством M (в общем случае Δl — некоторый параметр).

Доказательство. Для произвольных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можем записать с учетом равенства (18.1) и свойств скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (B \cdot \mathbf{u}) \cdot (B \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} + K \cdot \mathbf{u} \Delta l) \cdot (\mathbf{v} + K \cdot \mathbf{v} \Delta l) \approx \\ &\approx \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (K \cdot \mathbf{v}) \Delta l + (K \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \Delta l = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (K + K^*) \cdot \mathbf{v} \Delta l, \end{aligned}$$

где применена формула $K \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot K^*$ и отброшено слагаемое, квадратичное по Δl . Напомним, что тензор B называется ортогональным, если он не меняет скалярные произведения векторов, то есть удовлетворяет условию $(B \cdot \mathbf{u}) \cdot (B \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ при всех $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Из приведенной цепочки равенств следует, что данное условие реализуется тогда и только тогда, когда $K + K^* = \hat{0}$ ($\hat{0}$ — нулевой тензор). А это и означает выполнение зависимости (18.4). ■

Следствие. *Тензор B вида (18.1) при антисимметричном тензоре K принадлежит ограниченной группе Лоренца.*

Доказательство. Из теоремы 18.1 вытекает, что при антисимметричном тензоре K тензор B является ортогональным, поэтому он принадлежит группе Лоренца, а так как он допускает непрерывный переход к единичному тензору I (при $\Delta l \rightarrow 0$; см. (18.1)), то он принадлежит ограниченной группе Лоренца. ■

В дальнейшем будем считать, что K — *антисимметричный* тензор. В этом случае, согласно следствию, тензор B принадлежит ограниченной группе Лоренца, поэтому он не изменяет длины векторов и углы между ними. Следовательно, рассматриваемая конструкция (состоящая из точки и скрепленных с ней векторов) движется в пространстве Минковского под действием тензора K как целая, без деформирования.

Назовем формулу (18.3) при антисимметричном тензоре K *основным законом динамики* материальной точки в теории относительности:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = K \cdot \mathbf{u}, \quad (18.5)$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, скрепленный с материальной точкой; l — собственное время материальной точки, измеряемое в единицах длины; все величины вычисляются в месте нахождения материальной точки; под материальной точкой, напомним, понимается геометрическая конструкция, состоящая из точки и скрепленных с ней векторов.

Закон (18.5) относится только к телам, имеющим ненулевую массу. Для тел нулевой массы подобный закон не вводится.

Из теоремы 18.1 вытекает, что при антисимметричном тензоре K вектор $\mathbf{u}$ имеет постоянную длину. Это же следует непосредственно из закона (18.5). Действительно, на основании симметричности скалярного произведения векторов, равенства $K \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot K^*$ и формулы (18.4) можем записать:

$$\mathbf{u} \cdot K \cdot \mathbf{u} = (K \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot K^*) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (-K) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot K \cdot \mathbf{u},$$

откуда $\mathbf{u} \cdot K \cdot \mathbf{u} = 0$. Отсюда и из (18.5) вытекает: $0 = \mathbf{u} \cdot K \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dl} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{dl}$, значит, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \text{const}$, поэтому в самом деле $|\mathbf{u}| = \text{const}$.

При $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ закон (18.5) определяет форму мировой линии L и называется *уравнением движения* материальной точки:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = K \cdot \mathbf{i}, \quad (18.6)$$

где $\mathbf{i}$ — 4-скорость материальной точки.

Уравнение (18.6) исследуется во многих учебниках по электродинамике для случая движения заряда в электромагнитном поле (при $K = a_1 F$, см. (17.1)), поэтому не будем обсуждать уравнение (18.6), а сосредоточим внимание на законе (18.5).

Итак, предположим, что в пространстве Минковского M задано поле антисимметричного тензора K и что посредством решения уравнения движения (18.6) мировая линия L найдена. В таком случае для каждого момента времени l известны векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$. Пусть на всем рассматриваемом участке мировой линии L выполняется $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$.

Так как $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, то $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = 0$, откуда $\mathbf{i} \cdot d\mathbf{i}/dl = 0$. Значит, векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$ ортогональны. Вектор $\mathbf{i}$ имеет начало в материальной точке. Совместим с ней и начало вектора $d\mathbf{i}/dl$. Обозначим: $P(\mathbf{i}, d\mathbf{i}/dl)$ — плоскость, проходящая через векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$. Она псевдоевклидова, потому что содержит времениподобный вектор $\mathbf{i}$.

Введем сопровождающий материальную точку ортонормированный базис $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, где $\xi_0 = \mathbf{i}$; $\xi_1 = -\frac{d\mathbf{i}/dl}{|d\mathbf{i}/dl|}$; ξ_2 и ξ_3 — два любых взаимно ортогональных единичных вектора в пространственноподобной плоскости, ортогональной плоскости $P(\mathbf{i}, d\mathbf{i}/dl)$. Векторы ξ_i движутся вдоль мировой линии вместе с материальной точкой, поэтому они зависят от времени l . Считаем, что начала векторов ξ_i совпадают с материальной точкой и что функции $\xi_i(l)$ непрерывно дифференцируемые.

Разложим тензор K по диадному базису, составленному из векторов базиса $\{\xi_i\}_{i=0}^3$. Известно, что пространство антисимметричных тензоров в M шестимерно, поэтому антисимметричный тензор K может быть представлен в виде линейной комбинации шести линейно независимых антисимметричных тензоров:

$$K = k_0 \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + k_1 (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) + k_2 (\xi_3 \xi_1 - \xi_1 \xi_3) + k_3 (\xi_2 \xi_3 - \xi_3 \xi_2) + k_4 (\xi_2 \mathbf{i} - \mathbf{i} \xi_2) + k_5 (\xi_3 \mathbf{i} - \mathbf{i} \xi_3), \quad (18.7)$$

где каждый антисимметричный тензор в правой части равенства связан с одной из координатных плоскостей базиса $\{\xi_i\}$; мы поставили вместо вектора ξ_0 вектор $\mathbf{i}$ и заменили в первом слагаемом вектор ξ_1 пропорциональным ему вектором $d\mathbf{i}/dl$; k_i — числовые коэффициенты.

Из (18.6) и (18.7) с учетом ортонормированности базиса $\{\xi_i\}$ получаем:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = K \cdot \mathbf{i} = k_0 \frac{d\mathbf{i}}{dl} + k_4 \xi_2 + k_5 \xi_3.$$

Умножая скалярно крайние части этого выражения поочередно на векторы $d\mathbf{i}/dl$, ξ_2 и ξ_3 , находим:

$$k_0 = 1; \quad k_4 = k_5 = 0.$$

Отсюда и из (18.7) следует, что тензор K в (18.5) и (18.6) имеет вид

$$K = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + k_1 (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) + k_2 (\xi_3 \xi_1 - \xi_1 \xi_3) + k_3 (\xi_2 \xi_3 - \xi_3 \xi_2), \quad (18.8)$$

где k_i — коэффициенты размерности (длина)⁻¹, они могут зависеть от l ; $\{\xi_i\}_{i=0}^3$ — сопровождающий базис, введенный выше (при $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$; если $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$, то $\{\xi_i\}$ — любой ортонормированный базис, в котором $\xi_0 = \mathbf{i}$).

Подстановка значения (18.8) тензора K в уравнение (18.6) дает тождество $d\mathbf{i}/dl = d\mathbf{i}/dl$. Значит, тензор K действительно обеспечивает движение материальной точки вдоль заданной мировой линии L при любых значениях коэффициентов k_1 , k_2 и k_3 .

Проведенный анализ приводит к следующему выводу. Пусть материальная точка (вместе со скрепленными с ней векторами) движется под действием некоторого антисимметричного тензора K в соответствии с законом (18.5). И пусть L — ее мировая линия, удовлетворяющая уравнению (18.6). Тогда при разложении тензора K по диадному базису $\{\xi_i \xi_j\}$, составленному из векторов указанного выше сопровождающего базиса, этот тензор обязательно имеет вид (18.8).

Правая часть формулы (18.8) содержит четыре антисимметричных тензора (бивектора), производящих некоторые вращения векторов. В пункте В раздела 4 главы 2 были рассмотрены вращения векторов в плоскостях с сигнатурами $(++)$, $(+-)$ и $(--)$. На основании полученных там формул можно заключить, что бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ осуществляет гиперболическое вращение векторов в псевдоевклидовой плоскости $P(\mathbf{i}, d\mathbf{i}/dl)$, а три других бивектора производят пространственные вращения векторов в трех координатных плоскостях в собственном физическом пространстве материальной точки (последнее представляет собой трехмерную гиперплоскость, ортогональную вектору $\mathbf{i}$). Наличие у этих бивекторов произвольных коэффициентов k_i означает, что движение материальной точки вдоль мировой линии L может сопровождаться произвольным вращением ее вокруг L (точнее, вокруг касательной к L). Впрочем, и без формулы (18.8) очевидно, что фиксированность мировой линии не препятствует произвольному вращению вокруг нее материальной точки со скрепленными с ней векторами.

Обратим внимание на то, что бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}$, входящий в (18.8), не только осуществляет гиперболическое вращение материальной точки, но и вносит определенный вклад в ее пространственное вращение (в том случае, когда мировая линия L не является плоской кривой, то есть когда плоскость $P(\mathbf{i}, d\mathbf{i}/dl)$ не постоянна; см. далее разд. 20).

Применим полученные формулы к описанию движения электрона под действием электромагнитного поля.

Согласно (17.1), уравнение движения электрона имеет вид (18.6) при $K = a_1 F$:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}, \quad (18.9)$$

где $a_1 = e/(mc^2)$; e и m — заряд и масса электрона (e, m — константы; $e < 0$, $m > 0$); F — тензор электромагнитного поля.

Подставляя указанное значение тензора K в (18.5), получаем *основной закон динамики* электрона:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{u}, \quad (18.10)$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, скрепленный с электроном (точнее, с материальной точкой, моделирующей электрон). Уравнение (18.9) является частным случаем закона (18.10) при $\mathbf{u} = \mathbf{i}$.

Отметим, что если интерес представляют не общие законы динамики в специальной теории относительности, а только движение электрона в электромагнитном поле, то всё предыдущее содержание настоящего раздела можно заменить следующим не строгим, но коротким рассуждением: «Известно, что движение электрона в электромагнитном поле описывается уравнением (18.9). Распространим это уравнение на любые векторы, связанные с электроном. В результате получаем закон (18.10)».

19. Вращение электрона магнитным полем

Пусть в инерциальной системе отсчета $\{T, G\}$ действует постоянное и однородное магнитное поле, а электрическое поле отсутствует:

$$\overline{H} = \text{const} \neq \mathbf{0} \quad (\overline{H} \in G); \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (19.1)$$

Тогда, по (16.1), тензор электромагнитного поля F имеет вид

$$F = \overline{H} \cdot \varkappa, \quad (19.2)$$

а уравнение движения электрона (18.9) принимает форму

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{i}. \quad (19.3)$$

Проанализируем простейший случай, когда *центр масс электрона неподвижен относительно системы отсчета $\{T, G\}$* . В этом случае мировая линия электрона L прямолинейна и параллельна оси времени T , а единичный вектор $\mathbf{i}$, касательный к L , постоянен и совпадает с направляющим ортом $\boldsymbol{\tau}$ оси T ; кроме того, в этом случае $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$ (ибо псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ определен над физическим пространством G и $\mathbf{i} \perp G$). Из $\mathbf{i} = \text{const}$ и $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$ следует, что уравнение движения (19.3) выполняется. Далее будем вести речь о материальной точке (со скрепленными с ней векторами), служащей моделью электрона.

Движение произвольного вектора $\mathbf{u}$, скрепленного с материальной точкой, описывается законом (18.10). Запишем этот закон при тензоре F вида (19.2):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{u}. \quad (19.4)$$

Решим уравнение (19.4). Начнем с того, что разложим вектор $\mathbf{u}$ на взаимно ортогональные составляющие, принадлежащие оси времени T и физическому пространству Γ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_\Gamma \quad (\mathbf{u}_T \in T; \mathbf{u}_\Gamma \in \Gamma). \quad (19.5)$$

Векторы $\mathbf{u}_T$ и $\mathbf{u}_\Gamma$ могут быть найдены путем проецирования вектора $\mathbf{u}$ на ось T и на гиперплоскость Γ с помощью операторов (тензоров) проецирования $\tau\tau$ и $I - \tau\tau$:

$$\mathbf{u}_T = (\tau\tau) \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{u}_\Gamma = (I - \tau\tau) \cdot \mathbf{u}, \quad (19.6)$$

где τ — направляющий орт оси времени T ; $\tau\tau$ — тензорное произведение вектора τ на себя; I — единичный тензор (тождественный оператор). Очевидно, что из (19.6) вытекает равенство $\mathbf{u}_T + \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}$.

Линейный оператор P называется *оператором проецирования* или *проектором*, если $P^2 = P$. Операторы $\tau\tau$ и $I - \tau\tau$ являются проекторами, так как $(\tau\tau) \cdot (\tau\tau) = \tau(\tau \cdot \tau)\tau = \tau\tau$ и $(I - \tau\tau) \cdot (I - \tau\tau) = I - \tau\tau$, где учтено, что $\tau \cdot \tau = 1$, $I \cdot I = I$ и $I \cdot \tau = \tau \cdot I = \tau$.

Векторы $\mathbf{u}_T$ и $\mathbf{u}_\Gamma$, определяемые формулами (19.6), принадлежат подпространствам T и Γ соответственно. В самом деле, из цепочки равенств $\mathbf{u}_T = (\tau\tau) \cdot \mathbf{u} = \tau(\tau \cdot \mathbf{u}) = (\tau \cdot \mathbf{u})\tau$, в силу $\tau \in T$, имеем: $\mathbf{u}_T \in T$; из $\tau \cdot \mathbf{u}_\Gamma = \tau \cdot [(I - \tau\tau) \cdot \mathbf{u}] = [\tau \cdot (I - \tau\tau)] \cdot \mathbf{u} = (\tau - \tau) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$ следует $\mathbf{u}_\Gamma \perp T$, значит, $\mathbf{u}_\Gamma \in \Gamma$.

Подставим разложение (19.5) вектора $\mathbf{u}$ в уравнение (19.4). С учетом равенства $\varkappa \cdot \mathbf{u}_T = \hat{0}$ (вытекающего из того, что псевдотензор $\varkappa$ определен над Γ , $\mathbf{u}_T \in T$ и $\Gamma \perp T$) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dl} &= \frac{d\mathbf{u}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{u}_\Gamma}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{u}_T + a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{u}_\Gamma = \\ &= a_1 \bar{H} \cdot \hat{0} + a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{u}_\Gamma = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{u}_\Gamma = -a_1 \bar{H} \times \mathbf{u}_\Gamma, \end{aligned} \quad (19.7)$$

где $\times$ — знак векторного умножения в Γ ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{b}$ для любых векторов и псевдовекторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma$).

Умножим скалярно крайние части цепочки равенств (19.7) на тензор $\tau\tau$. Пользуясь постоянством τ , определением (19.6) вектора $\mathbf{u}_T$ и

ортогональностью векторов $\boldsymbol{\tau} \in T$ и $\bar{H} \times \mathbf{u}_\Gamma \in \Gamma$, можем записать:

$$(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dl} = \frac{d[(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u}]}{dl} = \frac{d\mathbf{u}_T}{dl} = -a_1(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot (\bar{H} \times \mathbf{u}_\Gamma) = \mathbf{0},$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dl} = \mathbf{0}. \quad (19.8)$$

Из (19.7) и (19.8) находим:

$$\frac{d\mathbf{u}_\Gamma}{dl} = -a_1 \bar{H} \times \mathbf{u}_\Gamma. \quad (19.9)$$

Так как в рассматриваемом случае мировая линия L параллельна оси времени T , то собственное время материальной точки $t_* = l/c$ равняется (с точностью до постоянного слагаемого) координатному времени t , отсчитываемому вдоль оси T , следовательно, $dl = c dt$. Подстановка этого значения dl в (19.8) и (19.9) дает:

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \mathbf{0}; \quad (19.10)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\Gamma}{dt} = \bar{\Omega}_H \times \mathbf{u}_\Gamma, \quad (19.11)$$

где обозначено

$$\bar{\Omega}_H = -a_1 c \bar{H} = -\frac{e}{mc} \bar{H} \quad (\bar{\Omega}_H \in \Gamma), \quad (19.12)$$

здесь $a_1 = e/(mc^2)$; e и m — заряд и масса электрона ($e < 0$).

Уравнения (19.10) и (19.11) приводят к следующему выводу относительно действия магнитного поля на материальную точку, моделирующую электрон. Временная составляющая $\mathbf{u}_T$ любого вектора $\mathbf{u}$, скрепленного с материальной точкой, не изменяется. А пространственная составляющая $\mathbf{u}_\Gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}_H$, одинаковой для всех векторов.

Изнутри трехмерного физического пространства Γ инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ полученный результат «выглядит» так: *пусть в физическом пространстве Γ находится электрон, центр масс которого неподвижен относительно Γ , тогда при действии на него магнитного поля с напряженностью $\bar{H}$ электрон вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}_H$ вида (19.12) вокруг оси, параллельной $\bar{H}$ и проходящей через его центр масс.* В главе 5 будет доказано, что самодействие электрона увеличивает угловую скорость $\bar{\Omega}_H$ примерно в 1.00116 раз. С учетом этого коэффициента формула (19.12) согласуется с опытными данными с относительной погрешностью $5 \cdot 10^{-6}$.

Аналогичным образом с помощью закона (18.5) может быть найдено вращение в магнитном поле других элементарных частиц и макроскопических тел.

Отметим следующее. В настоящее время принято объяснять результаты опытов по воздействию магнитного поля на электроны ларморовской прецессией электронных спинов. Обоснуем отсутствие этой прецессии.

Известно, что под действием магнитного поля магнитный момент физической системы стремится повернуться в направлении поля. Электрон в атоме обладает двумя магнитными моментами — орбитальным и собственным, связанным со спином. Во внешнем магнитном поле $\vec{H}$ действующая на электрон магнитная составляющая силы Лоренца $(e/c)\mathbf{v} \times \vec{H}$ стремится изменить движение электрона таким образом, чтобы плоскость орбиты стала перпендикулярной полю и орбитальный магнитный момент оказался ориентированным в направлении поля. Но этому препятствует инерция движения электрона. В результате «противоборства» инерции и силы Лоренца плоскость орбиты и орбитальный магнитный момент начинают прецессировать вокруг вектора $\vec{H}$ с угловой скоростью $\vec{\Omega}_L = -\frac{e}{2mc}\vec{H}$. Это — ларморовская прецессия орбитального магнитного момента электрона.

Иначе обстоит дело с собственным магнитным моментом электрона. Для изменения его направления в пространстве не требуется изменять траекторию движения электрона. Поэтому препятствовать его повороту может только инерция вращения электрона вокруг собственного центра, которая пренебрежимо мала по сравнению с инерцией орбитального движения.

Действительно, полагая электрон шаром с радиусом, равным так называемому классическому радиусу электрона r_e , получаем, что отношение момента инерции электрона относительно его центра $\frac{2}{5}mr_e^2$ к моменту инерции электрона относительно центра орбиты mr_B^2 (где r_B — боровский радиус) составляет всего 10^{-9} .

Благодаря малости инерции вращения электрона, собственный магнитный момент электрона $\vec{\mu}$ ориентируется в магнитном поле $\vec{H}$ в направлении поля. В силу $\vec{\mu} \parallel \vec{H}$, из уравнения моментов

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{H},$$

где $\vec{s}$ — спин электрона, вытекает $d\vec{s}/dt = \mathbf{0}$, откуда $\vec{s} = \text{const}$, а это означает отсутствие прецессии спина. В механике подобная ситуация, при которой кинетический момент волчка (гироскопа) направлен точно по вертикали и прецессия отсутствует, называется спящим волчком. Более

того, в отличие от случая с волчком, где вертикальное его положение является неустойчивым, ориентация магнитного момента $\vec{\mu}$ в направлении магнитного поля $\vec{H}$ является устойчивой, и при любом отклонении псевдовектора $\vec{\mu}$ от этого положения момент силы $\vec{\mu} \times \vec{H}$ возвращает его обратно. К тому же ларморовская угловая скорость прецессии в два раза меньше угловой скорости $\bar{\Omega}_H$, согласующейся с опытом. В связи с этим нет оснований полагать, что в рассматриваемой ситуации спины электронов прецессируют. К сожалению, экспериментальная техника пока что не позволяет непосредственно увидеть электрон и проверить, вращается сам электрон или имеет место прецессия его спина.

20. Вращение электрона электрическим полем

В предыдущем разделе мы рассмотрели ситуацию, когда напряженность магнитного поля отлична от нуля, а напряженность электрического поля равна нулю. Теперь исследуем противоположную ситуацию.

Рассмотрим электрон в атоме. Будем считать, что ядро атома покоится относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, причем ось времени T проходит через центр масс ядра (при этом она совпадает с мировой линией ядра). Обозначим положительный заряд ядра через $Z|e|$ (Z — количество протонов в ядре; e — заряд электрона; $e < 0$).

Согласно закону Кулона, ядро создает в физическом пространстве Γ напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей вида

$$\vec{E} = \frac{Z|e|}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \vec{H} = \mathbf{0}, \quad (20.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек физического пространства Γ относительно центра масс ядра ($\mathbf{r} \in \Gamma$; $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$); $r = |\mathbf{r}|$ ($r > 0$); $\mathbf{0}$ — нулевой вектор (он совпадает с нулевым псевдовектором).

Из (16.1) и (20.1) находим тензор электромагнитного поля F , порождаемый ядром атома:

$$F = \frac{Z|e|}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (20.2)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — орт оси времени T , направленный в сторону будущего.

При таком тензоре F одним из решений уравнения (18.9) является, как известно, движение электрона вокруг ядра по круговой орбите с постоянной по модулю скоростью. В этом случае мировая линия

электрона L представляет собой винтовую линию, радиус и шаг которой одинаковы по всей длине, а ось совпадает с мировой линией ядра, то есть с осью времени T . В дальнейшем будем рассматривать именно это движение электрона. В качестве модели электрона будем использовать *материальную точку*, под которой понимается, согласно сказанному в разд. 18, *как сама точка (когда речь идет о ее местоположении или мировой линии), так и вся конструкция, состоящая из точки и скрепленных с ней векторов (когда рассматривается ее вращение)*. Поскольку нас будет интересовать значение тензора F в месте нахождения материальной точки, то будем считать, что величины $\mathbf{r}$ и r в формуле (20.2) — это радиус-вектор точек орбиты относительно ее центра и радиус орбиты. Наравне с термином «орбита» будем употреблять термин «траектория» (рис. 20.1).

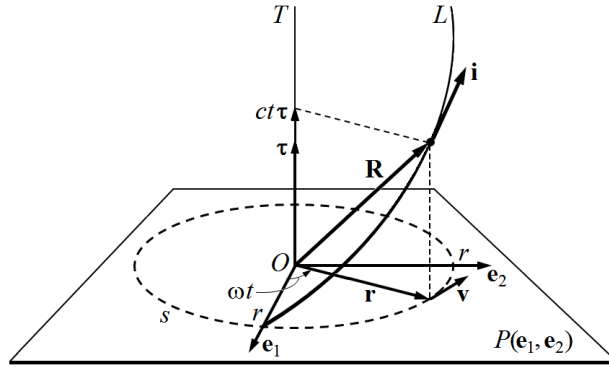


Рис. 20.1. Материальная точка, движущаяся вдоль винтовой мировой линии L .

$\mathbf{R}$ — радиус-вектор материальной точки относительно точки $O \in T$ (он же — радиус-вектор точек линии L); $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к линии L (4-скорость материальной точки); s — траектория материальной точки в физическом пространстве Γ (окружность радиуса r); ω — орбитальная угловая скорость материальной точки.

Предваряя анализ вращения электрона, вызываемого тензором F , выведем несколько вспомогательных формул.

Пусть в используемой системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ время t отсчитывается от точки $O \in T$. Тогда радиус-вектор $\mathbf{R}$ точек мировой линии L относительно точки O может быть представлен в виде

$$\mathbf{R} = ct\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}, \quad (20.3)$$

где c — скорость света; $\mathbf{r} \in \Gamma$ — радиус-вектор той точки траектории s , которая отвечает моменту времени t (см. рис. 20.1).

Производная вектора $\mathbf{R}$ по собственному времени материальной точки l (натуральному параметру на L) есть единичный касательный вектор $\mathbf{i}$ к линии L (4-скорость материальной точки), поэтому можем записать с учетом (20.3):

$$\mathbf{i} = \frac{d\mathbf{R}}{dl} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \frac{dt}{dl} = (c\boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}) \frac{dt}{dl}, \quad (20.4)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — скорость материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ ($\mathbf{v} \in \Gamma$). Пусть $v = |\mathbf{v}|$ ($v \geq 0$). Из (20.4) с помощью очевидных равенств

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -v^2 \quad (20.5)$$

находим: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (dt/dl)^2 (c^2 - v^2) = 1$, что вместе с (20.4) и $dt/dl > 0$ дает:

$$v < c; \quad dl = c dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}; \quad \mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad (20.6)$$

это — известные формулы Лоренца. Выражения (20.3)–(20.6) верны для любой гладкой времениподобной мировой линии L , а не только для винтовой. Формулы (20.6) совпадают с (6.11)–(6.13) (при учете (1.1)).

Обозначим через $\bar{\omega}$ орбитальную угловую скорость материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ ($\bar{\omega}$ — псевдовектор, $\bar{\omega} \in \Gamma$); ее модуль $\omega = |\bar{\omega}|$ также будем называть орбитальной угловой скоростью ($\omega \geq 0$). Поскольку траектория является круговой и материальная точка движется по ней с постоянной скоростью v , то псевдовектор $\bar{\omega}$ постоянен, ортогонален плоскости залегания траектории и удовлетворяет равенствам

$$\mathbf{v} = \bar{\omega} \times \mathbf{r}; \quad \bar{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0; \quad v = \omega r, \quad (20.7)$$

где $\times$ — операция векторного умножения в физическом пространстве Γ .

С помощью равенств (20.7), используя постоянство $\bar{\omega}$ и определение скорости $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$), находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= -\bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) = -\omega^2 \mathbf{r} = -\frac{v^2}{r} \frac{\mathbf{r}}{r}, \end{aligned}$$

здесь учтено, что метрическая форма в Γ является отрицательно определенной (вследствие этого, знаки в равенстве $\overline{\omega} \cdot \overline{\omega} = -\omega^2$ и в формуле для двойного векторного произведения противоположны тем, которые имеют место в случае собственно евклидова пространства). Из этой цепочки равенств вытекает известное выражение для центростремительного ускорения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{v^2}{r} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (20.8)$$

На основании (20.6), (20.8) с учетом постоянства τ , v и c , а также из (18.9), (20.2), (20.5) с учетом $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ и $e < 0$ получаем следующие выражения для $d\mathbf{i}/dl$:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \frac{1}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{r \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{Ze^2}{mc^2 r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (20.9)$$

отсюда и из $v = \omega r$ имеем:

$$\left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| = \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{r \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{\left(\frac{v}{c}\right) \omega}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{Ze^2}{mc^2 r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \frac{d\mathbf{i}/dl}{|d\mathbf{i}/dl|} = -\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (20.10)$$

Последнее равенство в цепочке равенств (20.9) влечет зависимость

$$-\frac{mv^2}{r \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{Ze^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (20.11)$$

откуда

$$\frac{mv^2 r}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = Ze^2. \quad (20.12)$$

Формула (20.12) устанавливает взаимно однозначное соответствие между скоростью материальной точки v и радиусом ее траектории r (при известных зарядах электрона и ядра). В частности, по заданной скорости v ($0 < v < c$) может быть найден радиус траектории r . Таким образом, движение материальной точки по круговой траектории с постоянной скоростью v , как и утверждалось, является одним из решений уравнения (18.9).

Отметим, что в нерелятивистском приближении (то есть при $(v/c)^2 \ll 1$) зависимость (20.11) приобретает вид

$$-\frac{mv^2}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{Ze^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

и выражает собой тот факт, что центростремительная сила, действующая на электрон, обусловлена притяжением электрона электрическим зарядом ядра. В нерелятивистской электродинамике связь между величинами v и r при круговом движении электрона устанавливается с помощью именно этой зависимости.

Итак, мы определили характеристики траектории и мировой линии электрона (моделируемого материальной точкой). При этом были использованы уравнение движения электрона (18.9), значение (20.2) тензора F и допущение о том, что траектория электрона представляет собой окружность.

Теперь исследуем вращение материальной точки, производимое тензором F (точнее, вращение скрепленных с ней векторов). Для нахождения угловой скорости этого вращения нужно решить уравнение (18.10). Наиболее просто это сделать, если ввести базис, сопровождающий материальную точку, и разложить тензор $a_1 F$, входящий в (18.10), по диадному базису, составленному из векторов этого базиса.

Построим неподвижный и сопровождающий базисы.

Поскольку мировая линия L имеет форму винтовой линии, то она является трехмерным объектом. Поэтому она содержится в трехмерном подпространстве пространства Минковского M , которое обозначим символом M_3 .

Введем в подпространстве M_3 ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в точке $O \in T$ (от которой отсчитывается время t) и базисными векторами, определяемыми следующим образом: $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$ — орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; орт $\mathbf{e}_1$ ортогонален орту $\mathbf{e}_0$ и направлен от точки O в сторону той точки мировой линии L , которая соответствует нулевому моменту времени t ; орт $\mathbf{e}_2$ ортогонален векторам $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ и направлен в том из двух возможных направлений, при котором движение материальной точки по траектории происходит в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ (см. рис. 20.1). Введем орт $\mathbf{e}_3$, ортогональный подпространству M_3 и образующий вместе с $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ правоориентированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в физическом пространстве Γ . Понятно, что $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис в пространстве M . Будем называть базис $\{\mathbf{e}_i\}$ *неподвижным* (так как он неподвижен относительно пространства M).

Напомним, что ось времени T покоится относительно пространства M , а физическое пространство Γ движется поступательно вдоль

оси T с течением времени. Благодаря этому, траектория материальной точки совпадает с ортогональной проекцией мировой линии на физическое пространство при любом его расположении в M (см. теорему 5.1, с. 132). Кроме того, при поступательном движении физического пространства Γ все его расположения параллельны между собой, поэтому оно имеет одно и то же ассоциированное векторное пространство при всех расположениях. Это позволяет считать при рассмотрении траектории $s \subset \Gamma$, что вместе с физическим пространством Γ движется и базис $\{\mathbf{e}_i\}$. При этом он имеет начало в центре траектории $\Gamma \cap T$ и является неподвижным относительно физического пространства Γ . Очевидно, что траектория s лежит в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Обозначим эту плоскость через $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

В базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ винтовая мировая линия L , круговая траектория s , скорость $\mathbf{v}$ и орбитальная угловая скорость $\bar{\omega}$ материальной точки описываются уравнениями соответственно

$$\mathbf{R} = ct\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r} = ct\mathbf{e}_0 + r \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + r \sin(\omega t)\mathbf{e}_2; \quad (20.13)$$

$$\mathbf{r} = r \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + r \sin(\omega t)\mathbf{e}_2; \quad (20.14)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -v \sin(\omega t)\mathbf{e}_1 + v \cos(\omega t)\mathbf{e}_2; \quad (20.15)$$

$$\bar{\omega} = \Delta\omega\mathbf{e}_3, \quad (20.16)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек мировой линии L относительно точки O (см. рис. 20.1); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек траектории s относительно ее центра $\Gamma \cap T$ ($\mathbf{r} \in P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \Gamma$); Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве Γ ($\Delta = 1$ в правоориентированном базисе и $\Delta = -1$ в левоориентированном базисе; в нашем случае $\Delta = 1$, так как базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный); использованы равенство $v = \omega r$ и постоянство величин r , ω и $\mathbf{e}_i$.

Зададим векторы

$$\begin{aligned} \xi_0 = \mathbf{i} &= \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; & \xi_1 &= -\frac{d\mathbf{i}/dl}{|d\mathbf{i}/dl|} = \frac{\mathbf{r}}{r}; \\ \xi_2 &= \frac{\frac{v}{c}\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; & \xi_3 &= \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (20.17)$$

где применены последние формулы в (20.6) и (20.10). Будем считать, что начала всех векторов ξ_i совпадают с материальной точкой. Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, входящие в (20.17), относятся к текущему расположению материальной точки на мировой линии L , поэтому они являются функциями собственного времени l материальной точки. Вместе с ними являются функциями l векторы ξ_i . С помощью формул (20.17), (20.5) и равенств

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = -r^2, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r} = 0$$

можно убедиться в том, что векторы ξ_i удовлетворяют соотношениям типа (11.3). Значит, $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ — ортонормированный базис в M , движущийся вместе с материальной точкой. Назовем его *сопровождающим* базисом.

Пусть Γ_* — собственное физическое пространство материальной точки (трехмерная гиперплоскость, проходящая через материальную точку и ортогональная вектору $\mathbf{i}$). Так как векторы ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 ортогональны вектору $\mathbf{i}$, то они образуют базис в Γ_* . Отметим, что базис $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ является правоориентированным в Γ_* . Это вытекает из того, что согласно (20.14), (20.15) и (20.17) он переходит в правоориентированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ при $t \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$, а непрерывность функций $\xi_i(t)$ и постоянство длин ортов ξ_i и углов между ними обеспечивают неизменность ориентации базиса при всех t и v .

Подобно тому, как формула (20.13) определяет всю мировую линию L , то есть задает всё множество расположений материальной точки в пространстве M , так и формулы (20.17) задают множество базисов $\{\xi_i\}$ с началами во всех точках мировой линии L . Из (20.13) – (20.17) и рис. 20.1 можно заключить, что конструкция, состоящая из винтовой мировой линии L и всего множества базисов $\{\xi_i\}$, обладает винтовой симметрией, поэтому применение базиса $\{\xi_i\}$ позволяет упростить решение уравнения (18.10).

Итак, мы построили неподвижный базис $\{\mathbf{e}_i\}$ и сопровождающий базис $\{\xi_i\}$. Первый покоится относительно физического пространства Γ , второй движется вместе с материальной точкой.

Из (20.17) находим производные базисных векторов ξ_i по l :

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = -\left|\frac{d\mathbf{i}}{dl}\right|\xi_1; \quad \frac{d\xi_1}{dl} = -\left|\frac{d\mathbf{i}}{dl}\right|\left(\mathbf{i} - \frac{c}{v}\xi_2\right); \quad \frac{d\xi_2}{dl} = -\frac{c}{v}\left|\frac{d\mathbf{i}}{dl}\right|\xi_1; \quad \frac{d\xi_3}{dl} = \mathbf{0}, \quad (20.18)$$

здесь использованы равенства $dl = c\sqrt{1 - (v/c)^2} dt$, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, формулы (20.9), (20.10) и постоянство величин $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}_3$, v и r .

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{u}$, скрепленный с материальной точкой, и разложим его по сопровождающему базису $\{\xi_i\}$:

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{i} + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3, \quad (20.19)$$

где u_i — координаты вектора $\mathbf{u}$ в этом базисе; $\mathbf{i} = \xi_0$ (см. (20.17)).

Дифференцирование вектора $\mathbf{u}$ по l дает с учетом (20.18):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dl} = & \left(\frac{du_0}{dl} - u_1 \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \right) \mathbf{i} + \left(\frac{du_1}{dl} - u_0 \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| - u_2 \frac{c}{v} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \right) \xi_1 + \\ & + \left(\frac{du_2}{dl} + u_1 \frac{c}{v} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \right) \xi_2 + \frac{du_3}{dl} \xi_3. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Пусть F — тензор электромагнитного поля, задаваемый выражением (20.2); a_1 — параметр, входящий в уравнение (18.10). Разложим тензор $a_1 F$ по диадному базису $\{\xi_i \xi_j\}$:

$$\begin{aligned} a_1 F = & \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_0 \xi_1 - \xi_1 \xi_0) + \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) = \\ = & \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1); \end{aligned} \quad (20.21)$$

эта формула может быть проверена с помощью равенства $a_1 = e/(mc^2)$ и зависимостей (20.2), (20.10) и (20.17). Отсюда следует, что тензор $a_1 F$ имеет вид (18.8) (при $k_1 = (v/c)|d\mathbf{i}/dl|$ и $k_2 = k_3 = 0$).

Для того, чтобы исследовать воздействие на векторы не только тензора F вида (20.2), но и других тензоров, введем в формулу (20.21) дополнительный коэффициент k :

$$a_1 F = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + k \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1); \quad (20.22)$$

при $k = 1$ эта формула совпадает с (20.21), при $k = 0$ в ее правой части остается только бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl}$. Отметим, что мы домножили на k только второе слагаемое в правой части формулы (20.21). Первое слагаемое нельзя домножать на коэффициент, отличный от единицы, так как в этом случае не будет выполняться уравнение движения (18.9).

Пользуясь равенством $\frac{d\mathbf{i}}{dl} = -\left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \xi_1$ (см. (20.18)), запишем формулу (20.22) в эквивалентном виде:

$$a_1 F = \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \left[(\mathbf{i} \xi_1 - \xi_1 \mathbf{i}) + k \frac{v}{c} (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) \right]. \quad (20.23)$$

Теперь найдем вращение вектора $\mathbf{u}$, вызываемое тензором F . Оно описывается законом (18.10):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{u}.$$

Подставим в правую часть этого уравнения величины $\mathbf{u}$ и $a_1 F$ из (20.19), (20.23) и произведем скалярное умножение. Благодаря ортонормированности базиса $\{\xi_i\}$, имеем:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = - \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \left[u_1 \mathbf{i} + \left(u_0 + k \frac{v}{c} u_2 \right) \xi_1 - k \frac{v}{c} u_1 \xi_2 \right]. \quad (20.24)$$

Из (20.20) и (20.24), вследствие единственности разложения вектора по базису, вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = 0, \\ \frac{du_1}{dt} = -ou_2, \\ \frac{du_2}{dt} = ou_1, \\ \frac{du_3}{dt} = 0; \end{cases} \quad (20.25)$$

мы перешли здесь к дифференцированию по t (с помощью равенства $dl = c\sqrt{1 - (v/c)^2} dt$), воспользовались первой формулой в (20.10) и обозначили:

$$o = - \frac{1 - k \left(\frac{v}{c} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \omega. \quad (20.26)$$

Решением системы (20.25) являются функции

$$u_0 = \text{const}; \quad u_1 = u_P \cos(ot + \chi); \quad u_2 = u_P \sin(ot + \chi); \quad u_3 = \text{const}$$

при произвольных постоянных u_P и χ . Отсюда и из (20.19) получаем:

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{i} + u_P \cos(ot + \chi) \xi_1 + u_P \sin(ot + \chi) \xi_2 + u_3 \xi_3, \quad (20.27)$$

где величины u_0 , u_P , o , χ и u_3 не зависят от времени t .

Пусть $P(\mathbf{i}, \xi_3)$ и $P(\xi_1, \xi_2)$ — плоскости, которые содержат указанные в скобках векторы. На основании (20.27) заключаем, что у всякого вектора, скрепленного с материальной точкой, составляющая вдоль плоскости $P(\mathbf{i}, \xi_3)$ сохраняется, а составляющая вдоль плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$

вращается в этой плоскости относительно базиса $\{\xi_i\}$ с угловой скоростью ω вида (20.26) одинаковой для всех векторов (положительное значение ω соответствует вращению в направлении кратчайшего поворота от ξ_1 к ξ_2). Будем трактовать это вращение векторов как вращение материальной точки относительно сопровождающего базиса $\{\xi_i\}$.

Теперь проанализируем вращение материальной точки относительно неподвижного базиса $\{e_i\}$, связанного с системой отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Сразу же отметим следующее обстоятельство. Окружающий мир воспринимается нами как трехмерный, поэтому при описании вращения тела подразумевается, что плоскость вращения лежит в трехмерном физическом пространстве Γ . Однако упомянутая выше плоскость вращения $P(\xi_1, \xi_2)$ не содержится в Γ (это вытекает из наличия у вектора $\xi_2 \in P(\xi_1, \xi_2)$ ненулевой составляющей вдоль оси T , ортогональной Γ , см. (20.17)). А так как вращение тела, которое происходит в одной плоскости, не может быть описано как вращение в другой плоскости, то излагаемое далее представление о вращении материальной точки в плоскости, содержащейся в Γ , заведомо не является строгим.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{u}_P$, скрепленный с материальной точкой и лежащий в плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$. Вращаясь в этой плоскости относительно базиса $\{\xi_i\}$, он оказывается в некоторые моменты времени направленным вдоль вектора ξ_1 . Вектор ξ_1 лежит в плоскости $P(e_1, e_2)$ (так как $\xi_1 = \mathbf{r}/r \in P(e_1, e_2)$, см. (20.17)). Значит, в эти моменты вектор $\mathbf{u}_P$ принадлежит плоскости $P(e_1, e_2) \subset \Gamma$. Если ограничиться рассмотрением только таких моментов времени, то нам будет казаться, что вектор $\mathbf{u}_P$ все время находится в плоскости $P(e_1, e_2)$, то есть что он вращается в этой плоскости.

Найдем моменты времени, когда $\mathbf{u}_P \in P(e_1, e_2)$.

Для этого выразим орты базиса $\{\xi_i\}$ через орты базиса $\{e_i\}$. Заменяя в (20.17) векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ их значениями (20.14), (20.15) и учитывая равенство $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$, получаем:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left[\mathbf{e}_0 - \frac{v}{c} \sin(\omega t) \mathbf{e}_1 + \frac{v}{c} \cos(\omega t) \mathbf{e}_2 \right]; \\ \xi_1 &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_2; \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left[\frac{v}{c} \mathbf{e}_0 - \sin(\omega t) \mathbf{e}_1 + \cos(\omega t) \mathbf{e}_2 \right]; \\ \xi_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{20.28}$$

Согласно (20.27), вектор $\mathbf{u}_P$ имеет вид

$$\mathbf{u}_P = u_P \cos(ot + \chi) \boldsymbol{\xi}_1 + u_P \sin(ot + \chi) \boldsymbol{\xi}_2, \quad (20.29)$$

здесь $u_P = |\mathbf{u}_P|$, χ — угол между векторами $\mathbf{u}_P$ и $\boldsymbol{\xi}_1$ в момент $t = 0$.

Поскольку все векторы, скрепленные с материальной точкой, вращаются с одинаковой и постоянной угловой скоростью o , то не имеет значения, какому начальному условию удовлетворяет вектор $\mathbf{u}_P$. Примем, для простоты, следующее начальное условие: $\mathbf{u}_P|_{t=0} = u_P \boldsymbol{\xi}_1$. С учетом (20.29) это условие принимает форму

$$\mathbf{u}_P|_{t=0} = u_P \cos \chi \boldsymbol{\xi}_1 + u_P \sin \chi \boldsymbol{\xi}_2 = u_P \boldsymbol{\xi}_1,$$

откуда

$$\cos \chi = 1; \quad \sin \chi = 0. \quad (20.30)$$

Из (20.28) – (20.30) находим разложение вектора $\mathbf{u}_P$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_P(t) = & u_P \frac{v}{c} \gamma \sin(ot) \mathbf{e}_0 + \\ & + u_P [\cos(\omega t) \cos(ot) - \gamma \sin(\omega t) \sin(ot)] \mathbf{e}_1 + \\ & + u_P [\sin(\omega t) \cos(ot) + \gamma \cos(\omega t) \sin(ot)] \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (20.31)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Прибавим и вычтем в первых квадратных скобках в (20.31) произведение $\sin(\omega t) \sin(ot)$, а во вторых квадратных скобках произведение $\cos(\omega t) \sin(ot)$. После очевидных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_P(t) = & u_P \frac{v}{c} \gamma \sin(ot) \mathbf{e}_0 + \\ & + u_P [\cos((\omega + o)t) \mathbf{e}_1 + \sin((\omega + o)t) \mathbf{e}_2] - \\ & - u_P (\gamma - 1) \sin(ot) [\sin(\omega t) \mathbf{e}_1 - \cos(\omega t) \mathbf{e}_2]. \end{aligned} \quad (20.32)$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{u}_P$ находится в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в те и только те моменты времени, когда его составляющая вдоль вектора $\mathbf{e}_0$ равна нулю, то есть в моменты t_i , удовлетворяющие условию $\sin(ot_i) = 0$. В эти моменты времени, в силу (20.32),

$$\mathbf{u}_P(t_i) = u_P \cos((\omega + o)t_i) \mathbf{e}_1 + u_P \sin((\omega + o)t_i) \mathbf{e}_2. \quad (20.33)$$

Если бы равенство (20.33) выполнялось при всех t , то из него вытекало бы, что вектор $\mathbf{u}_P$ вращается в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ с угловой скоростью $\omega + o$. Однако в моменты времени, отличные от t_i , этот вектор не только не принадлежит плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, но и не принадлежит физическому пространству Γ (потому что в эти моменты, по (20.32), он имеет ненулевую составляющую вдоль оси T , ортогональной Γ).

Тем не менее, рассуждая с позиции исследователя, находящегося внутри физического пространства Γ , условимся трактовать дискретный набор последовательных расположений вектора $\mathbf{u}_P$ в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ как вращение вектора $\mathbf{u}_P$ в этой плоскости с указанной угловой скоростью, которую обозначим через Ω : $\Omega = \omega + o$. Подставим в это равенство значение величины o из (20.26) и заменим скалярные величины Ω и ω соответствующими псевдовекторами (это можно сделать, так как они описывают вращения в одной и той же плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ с одинаковым положительным направлением от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$):

$$\bar{\Omega} = \left(1 - \frac{1 - k\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \bar{\omega}, \quad (20.34)$$

где $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{e}_3$; $\bar{\omega} = \Delta\omega\mathbf{e}_3$ (Δ — единичный псевдоскаляр в Γ , см. формулу (20.16) и пояснение к ней); $\bar{\Omega}$ и $\bar{\omega}$ — угловые скорости относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, связанного с системой отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Поскольку $\mathbf{u}_P$ — произвольный вектор, принадлежащий плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$, то он может играть роль составляющей вдоль $P(\xi_1, \xi_2)$ любого вектора, скрепленного с материальной точкой. Отсюда и из независимости угловой скорости $\bar{\Omega}$ от выбора вектора $\mathbf{u}_P \in P(\xi_1, \xi_2)$ следует, что все векторы, скрепленные с материальной точкой, вращаются с одинаковой угловой скоростью $\bar{\Omega}$. Поэтому псевдовектор $\bar{\Omega}$ может быть интерпретирован как угловая скорость собственного вращения электрона относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Таким образом, если под действием тензора $a_1 F$ вида (20.22) электрон обращается вокруг неподвижного ядра по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$, то он одновременно вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$, задаваемой формулой (20.34).

Найдем угловую скорость $\bar{\Omega}$ при нескольких значениях параметра k (введенного при преобразовании формулы (20.21) в (20.22) специально, чтобы исследовать разные варианты воздействия на материальную точку). На основании (20.34) приходим к таким результатам.

1. Если

$$k = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\left(\frac{v}{c}\right)^2} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{1}{2},$$

то $\bar{\Omega} = \mathbf{0}$. Это означает, что материальная точка не вращается относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$.

2. При $k = 0$ будет

$$\bar{\Omega} = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\bar{\omega}; \quad \Omega \xrightarrow{v \rightarrow c} -\infty, \quad (20.35)$$

где учтено, что $v < c$ и $\omega > 0$. В данном случае из (20.22) вытекает:

$$a_1 F = \frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl}. \quad (20.36)$$

Движение вектора под действием тензора $a_1 F$ вида (20.36) называется *переносом вектора по Ферми-Уолкеру* (E. Fermi и A. G. Walker).

3. Если $k = 1$, то

$$\bar{\Omega} = \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \xrightarrow{v \rightarrow c} \bar{\omega}. \quad (20.37)$$

Обратим внимание на то, что в случаях 1 и 2 тензор $a_1 F$ выражается формулой (20.22), в которой $k \neq 1$. Такой тензор не реализуется в атомах, поэтому данные случаи представляют лишь теоретический интерес. Практически значимым является только случай 3, когда $k = 1$ и формула (20.22) переходит в (20.21). В этом случае тензор F задается выражением (20.2), то есть он представляет собой тензор электромагнитного поля, порождаемый атомным ядром. Этот тензор обеспечивает как движение материальной точки вокруг ядра по некоторой траектории, так и ее вращение с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (20.37) (при круговой траектории). Заметим, что формула (20.21) является частным случаем формулы (18.8), устанавливающей общий вид тензора, который может воздействовать на материальную точку.

Выразим орбитальную угловую скорость $\bar{\omega}$ через скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$ материальной точки. С помощью формул

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = -r^2, \quad \mathbf{v} = \bar{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \bar{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{v^2}{r} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(см. (20.7) и (20.8)) запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) \times \left(-\frac{v^2}{r} \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{v^2}{r^2} [\mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r})] = \\ &= \frac{v^2}{r^2} [-\bar{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\bar{\omega} \cdot \mathbf{r})] = \frac{v^2}{r^2} [\bar{\omega}r^2 + \mathbf{0}] = v^2 \bar{\omega}, \end{aligned}$$

где в формуле для двойного векторного произведения учтена отрицательная определенность метрической формы в физическом пространстве Γ . Отсюда

$$\bar{\omega} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{v^2}. \quad (20.38)$$

Формулы (20.37) могут быть переписаны с использованием (20.38) в виде

$$\bar{\Omega} = \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) \bar{\omega} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{v^2} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \xrightarrow{v \rightarrow c} \bar{\omega}, \quad (20.39)$$

где обозначено:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (20.40)$$

это обозначение традиционно применяется в теории относительности (мы использовали его ранее в формулах (20.31) и (20.32)).

Отметим, что формулы (10.4) и (20.40) приводят к равенству

$$\gamma = \operatorname{ch} \varphi, \quad (20.41)$$

где φ — угол между касательной к мировой линии и осью времени T . В исследуемом случае винтовой мировой линии выполняется условие $v = \operatorname{const} > 0$, поэтому, по (20.40) и (20.41), $\gamma = \operatorname{const} > 1$ и $\varphi = \operatorname{const} > 0$.

Из (20.39) при учете равенств $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{e}_3$, $\bar{\omega} = \Delta \omega \mathbf{e}_3$ и $v = \omega r$ вытекает, что при малых скоростях v и ω зависимость угловой скорости Ω от v и ω имеет вид соответственно

$$\Omega(v) \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{v^3}{2c^2 r} \quad \text{и} \quad \Omega(\omega) \underset{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{\omega^3 r^2}{2c^2}, \quad (20.42)$$

где, согласно (20.12), $r \approx \frac{Ze^2}{mv^2}$ (при $(v/c)^2 \ll 1$); $Z|e|$ — заряд ядра; e и m — заряд и масса электрона ($e < 0$). Заметим, что базис $\{\mathbf{e}_i\}$ построен так, что орбитальная угловая скорость $\bar{\omega}$ сонаправлена вектору $\mathbf{e}_3$, поэтому в равенстве $\bar{\omega} = \Delta \omega \mathbf{e}_3$ величина ω неотрицательна ($\omega = |\bar{\omega}| \geq 0$). Но в аналогичном равенстве $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{e}_3$ величина Ω в общем случае может иметь любой знак (ср. (20.35) и (20.42)).

Резюмируем полученный результат. Если под действием электрического поля (20.1), создаваемого ядром атома, электрон обращается вокруг ядра по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$, то

под действием этого же поля он вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (20.39) (угловые скорости $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$ определяются по отношению к инерциальной системе отсчета $\{T, G\}$, в которой ядро атома неподвижно).

Поскольку указанное вращение электрона происходит в плоскости $P(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, содержащейся в физическом пространстве G , то любой скрепленный с электроном вектор $\mathbf{u} \in G$ вращается в соответствии с законом

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{u}.$$

Внимание! Представление о том, что вращение электрона происходит в плоскости $P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \subset G$, является условным. Из (20.27) следует, что в действительности вращение происходит не в этой плоскости, а в плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$, которая не содержится в физическом пространстве G , а лишь пересекает его вдоль прямой с направляющим вектором $\xi_1 = \mathbf{r}/r$ (где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона относительно центра орбиты).

Прокомментируем результат.

1. Угловая скорость вращения электрона $\bar{\Omega}$ найдена путем моделирования электрона точкой со скрепленными с ней векторами. Однако эта модель не позволяет рассчитать энергию и момент количества движения электрона, связанные с его вращением. Для определения этих величин нужно построить модель, в которой электрон изображался бы некоторым геометрическим телом в пространстве Минковского с заданным распределением массы внутри него. Построению такой модели посвящены главы 4 и 5.

2. Формула (20.39), связывающая угловые скорости собственного $\bar{\Omega}$ и орбитального $\bar{\omega}$ вращений электрона, относится к случаю круговой орбиты электрона. Одно из входящих в эту формулу выражений имеет вид $\bar{\Omega} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{v^2}$. Обычно считается, что это выражение выполняется и в случае не круговой орбиты электрона (при этом величины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ трактуются как мгновенные скорость и ускорение электрона). Однако при не круговой орбите скорость v не постоянна, поэтому не постоянна и угловая скорость Ω . Вместе с последней оказываются не постоянными момент количества движения и энергия электрона, связанные с вращением. В связи с этим встает вопрос: «Каким образом обеспечивается выполнение законов сохранения энергии и момента количества движения при переменной скорости вращения электрона?» Ответа на этот вопрос пока что нет.

3. Еще один вопрос, остающийся без ответа: «Может ли электрон вращаться по инерции?» Дело в том, что наличие такого вращения приводит к зависимости угловой скорости электрона от начальных условий. А это делает невозможной однозначную связь между угловыми скоростями собственного $\bar{\Omega}$ и орбитального $\bar{\omega}$ вращений электрона, задаваемую формулой (20.39), а также однозначную связь между угловой скоростью собственного вращения электрона $\bar{\Omega}_H$ и напряженностью магнитного поля $\bar{H}$, полученную в разд 19. Например, согласно формулам (19.12) и (20.39), при $H = 0$ и $v \rightarrow 0$ должно быть $\Omega_H = 0$ и $\Omega \rightarrow 0$ соответственно, но в случае вращения электрона по инерции (продолжающегося с более раннего времени) будет $\Omega_H \neq 0$ и $\Omega \neq 0$.

4. Зависимость (20.39) между угловыми скоростями $\bar{\Omega}$ и $\bar{\omega}$ традиционно объясняется тем, что спин электрона участвует в двух прецессиях — ларморовской и томасовской, при этом первая приводит к значению угловой скорости Ω в два раза превышающему требуемое, а вторая снижает это значение наполовину. Однако имеются основания считать, что ни та, ни другая прецессия не реализуются в атоме — отсутствие ларморовской прецессии объяснено в конце предыдущего раздела, а отсутствие томасовской прецессии доказывается в следующем разделе.

5. К сказанному в предыдущем разделе относительно ларморовской прецессии можно добавить следующее. Прецессия Лармора возникает при действии магнитного поля на систему, обладающую магнитным моментом. Покоящееся ядро атома не создает вокруг себя магнитного поля (см. (20.1)), поэтому оно не может вызвать прецессию спина электрона. Тем не менее, чтобы ввести представление о такой прецессии, принято рассматривать движение электрона в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета. В ней появляется магнитная составляющая поля, и именно она, как считается, вызывает ларморовскую прецессию спина электрона. Таким образом, в одной инерциальной системе отсчета прецессия отсутствует, а в другой она имеется. Этот результат противоречит законам механики, потому что вращательное движение, в отличие от прямолинейного, не является относительным, и оно должно либо присутствовать во всех инерциальных системах отсчета, либо отсутствовать во всех них. Данное противоречие свидетельствует о существенном несовершенстве имеющейся теории электрона. В настоящем разделе вопрос о вращении электрона решен способом, который базируется на законе (18.10), не зависящем от систем отсчета.

6. Основной закон динамики (18.5) (частным случаем которого является примененный закон (18.10)), позволяет найти вращение не только электрона, но и других элементарных частиц и макроскопических тел.

Вращение электрона влияет на его энергию. Это влияние может приводить как к увеличению, так и к уменьшению энергии электрона в зависимости от взаимной ориентации угловой скорости вращения электрона и спина электрона. С этим эффектом связана так называемая *тонкая структура* уровней энергии атомов — расщепление уровней энергии на подуровни. Покажем в качестве примера, что *вращение орбитального электрона с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (20.39) служит причиной разности уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода.*

В состояниях $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ орбитальный электрон характеризуется одним и тем же главным квантовым числом $n = 2$ и одним и тем же орбитальным квантовым числом $l = 1$, но противоположными направлениями спина $\bar{s}$. В состоянии $2p_{3/2}$ спин электрона $\bar{s}$ сонаправлен орбитальному моменту количества движения $\bar{l}$, а в состоянии $2p_{1/2}$ спин $\bar{s}$ противоположен $\bar{l}$ (псевдовекторы помечены чертой над символом).

Подчеркнем, что последовательное введение понятия спина электрона возможно только в рамках не точечной модели электрона (см. главу 5).

Представим часть энергии электрона, связанную со спином, в виде $\hbar\omega_s$, где $\hbar$ — постоянная Планка, ω_s — некоторая угловая скорость (ее значение не конкретизируем, так как она не входит в окончательный результат). Угловая скорость вращения электрона $\bar{\Omega}$ сонаправлена орбитальной угловой скорости электрона $\bar{\omega}$ (см. (20.39)), а последняя сонаправлена орбитальному моменту количества движения $\bar{l}$, поэтому угловая скорость $\bar{\Omega}$ тоже сонаправлена $\bar{l}$. Вместе с тем, спин $\bar{s}$ в одном из рассматриваемых состояний сонаправлен, а в другом противоположен $\bar{l}$. Значит, псевдовекторы $\bar{\Omega}$ и $\bar{s}$ параллельны. Это обстоятельство дает возможность сложить угловые скорости Ω и ω_s (с соответствующим знаком). Следовательно, в состоянии $2p_{3/2}$ та часть энергии электрона, которая связана с вращением, равна $\hbar(\omega_s + \Omega)$, а в состоянии $2p_{1/2}$ она равна $\hbar(\omega_s - \Omega)$ (малость Ω позволяет считать, что $\omega_s > \Omega$, поэтому в последнем выражении для соблюдения положительности энергии взята разность $\omega_s - \Omega$, а не $\Omega - \omega_s$).

Квантовые числа n и l одинаковы в обоих рассматриваемых состояниях, значит, электрон имеет в этих состояниях одну и ту же энергию орбитального движения. Отсюда заключаем, что разность ΔE полной энергии E электрона в этих состояниях обусловлена только различием вращательной части энергии. С учетом сказанного выше и формулы (20.39) это означает, что

$$\Delta E = \hbar(\omega_s + \Omega) - \hbar(\omega_s - \Omega) = 2\hbar\Omega \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \hbar\omega. \quad (20.43)$$

Согласно модели атома Н. Бора, момент количества движения электрона, обращающегося вокруг ядра, может принимать значения, только кратные постоянной Планка $\hbar$. Запишем этот постулат Бора для случая круговой орбиты в нерелятивистском приближении (то есть при $(v/c)^2 \ll 1$):

$$rmv = n\hbar, \quad (20.44)$$

где r — радиус орбиты; m и v — масса и орбитальная скорость электрона; n — главное квантовое число.

Из (20.12) при $(v/c)^2 \ll 1$ и числе протонов в ядре $Z = 1$ имеем:

$$rmv^2 = e^2. \quad (20.45)$$

Заменяя в (20.45) произведение rmv его значением (20.44), находим скорость электрона v :

$$v = \frac{e^2}{n\hbar}. \quad (20.46)$$

Из (20.44) и (20.46) определяем радиус орбиты r :

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}. \quad (20.47)$$

На основании первой формулы (20.42) и формул (20.43), (20.46) и (20.47) получаем:

$$\Delta E = 2\hbar\Omega \underset{(v/c)^2 \ll 1}{\approx} \frac{\hbar v^3}{c^2 r} = \frac{mc^2\alpha^4}{n^5}, \quad (20.48)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Отсюда, пользуясь равенством $n = 2$ и известными значениями констант, находим:

$$\Delta E \approx 7.256 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} \approx 4.535 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}; \quad (20.49)$$

переходя с помощью зависимости $\Delta E = h\nu$ к частоте ν , имеем:

$$\nu \approx 10\,950 \text{ МГц}. \quad (20.50)$$

Это значение частоты ν отличается от экспериментального значения $10\,968 \text{ МГц}$ [10] на относительную величину $2 \cdot 10^{-3}$. В главе 5 будет показано, что при вращении электрона внешним магнитным полем самодействие электрона приводит к увеличению угловой скорости его вращения примерно в 1.00116 раза. В связи с тем, что приращение энергии ΔE пропорционально угловой скорости вращения электрона Ω

(см. (20.48)), оно должно быть умножено на этот же коэффициент. Вставляя в формулы (20.49) и (20.50) этот коэффициент, получаем: $\nu \approx 10\,963$ МГц, что снижает относительную погрешность до $5 \cdot 10^{-4}$.

Данный результат означает, что разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода действительно объясняется вращением орбитального электрона с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (20.39), при этом причиной вращения электрона служит электрическое поле ядра атома.

21. Прецессия Томаса и вращение Вигнера

В физике дается следующее определение: «Прецессия Томаса есть релятивистский кинематический эффект, заключающийся в том, что спин элементарной частицы . . . , а также ось координат системы отсчета, движущихся по криволинейной траектории, поворачиваются (прецессируют) относительно осей лабораторной инерциальной системы отсчета . . . Прецессия Томаса не связана с воздействием каких-либо сил, приводящих к изменению углового положения тела, т. е. имеет чисто кинематическое происхождение» [11].

Последнее утверждение этого определения ошибочно. В самом деле, пространство Минковского имеет нулевые кривизну и кручение, и поэтому является пространством с абсолютным параллелизмом векторов. Это означает, по определению, что результат параллельного перенесения любого вектора из точки A в точку B при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения AB . В таком пространстве при параллельном обнесении вектора по замкнутому пути с возвращением в исходную точку вектор не изменяется (так как результат обнесения будет таким же, как и в случае, когда весь путь стянут в одну точку, то есть когда переносимый вектор просто остается на месте) [12] (с. 439, 519). Отсюда вытекает, что в пространстве Минковского нет никакого «чисто кинематического» вращения векторов.

Вращение электрона, движущегося по криволинейной траектории, является не следствием законов кинематики и геометрии, а результатом внешнего воздействия на электрон (в том числе того воздействия, которое приводит к искривлению траектории электрона). Это утверждение подтверждается сделанным в предыдущем разделе выводом о том, что в атоме водорода именно электрическое поле ядра вызывает вращение орбитального электрона, согласующееся с результатами опытов.

Задача, решенная Л. Х. Томасом (L. H. Thomas) [13, 14], может быть сформулирована следующим образом.

Задача. *Рассматривается электрон в атоме, движущийся по круговой траектории. Считается, что его движение осуществляется в каждый момент времени под действием лоренцева буста, который переводит 4-скорость электрона $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ и имеет инвариантную псевдоевклидову плоскость, содержащую эти векторы (l и $l + \Delta l$ — два близких момента собственного времени электрона; $\Delta l \rightarrow 0$). Ищется пространственное вращение спина электрона. (Определение буста дано в разд. 11, с. 188.)*

В физической литературе условие, касающееся инвариантной плоскости, обычно не выписывается, но подразумевается. Это условие важно по той причине, что любой единичный времениподобный вектор может быть преобразован в любой другой такой же вектор посредством бесконечного множества бустов (см. далее теорему 21.4). Все эти бусты приводят к разным вращениям электрона, различающимся даже знаком. При постановке данной задачи имеется в виду именно буст, имеющий указанную инвариантную плоскость.

Томас и другие ученые, решавшие эту задачу, упустили из виду, что для реализации исследуемого движения электрона необходимо приложить к нему вполне определенное воздействие. Между тем, такое воздействие, как будет доказано ниже, не реализуется в атоме, поэтому результаты, полученные при решении данной задачи, имеют теоретический, но не практический интерес.

Л. Х. Томас рассчитал угловую скорость вращения (прецессии) спина электрона в первом приближении по $(v/c)^2$. В дальнейшем Е. П. Вигнер (E. P. Wigner) вывел формулу, которая описывает пространственный поворот векторов под действием двух последовательных лоренцевых бустов, ориентированных во взаимно перпендикулярных направлениях [15–18]. Эти работы Томаса и Вигнера привлекли большое внимание физиков, в связи с чем в физической литературе вращение спина электрона под действием лоренцевых бустов принято называть *прецессией Томаса*, а общий случай вращения векторов под действием бустов — *вращением Вигнера* (иногда это вращение тоже называют прецессией Томаса, см. определение в начале раздела).

Л. Х. Томас и Е. П. Вигнер опубликовали свои результаты в 1926 и 1939 годах соответственно. Однако еще в 1913 г. Л. Фёппл (L. Föppel) и П. Даниэл (P. Daniell) первыми получили релятивистское выражение для угла поворота системы координат при движении ее начала по круговой траектории под действием бустов [19]. Кроме того, в 1922 г. Э. Ферми (E. Fermi) рассмотрел параллельный перенос векторов системы отсчета в общей теории относительности, который в пространстве Минковского приводит к прецессии Томаса [20]. С учетом работы

А. Г. Уолкера (A. G. Walker) 1932 г. [21] этот перенос векторов называют переносом векторов по Ферми–Уолкеру. Поэтому использование названий «прецессия Томаса» и «вращение Вигнера» применительно к рассматриваемому эффекту не является исторически справедливым. Тем не менее, следуя традиции, мы будем продолжать пользоваться этими терминами. Отметим, что наряду с упомянутыми авторами многие другие исследователи также анализировали прецессию спина электрона и вращение векторов под действием бустов (обзор публикаций приведен в [11, 22]).

Цель настоящего раздела — решить сформулированную выше задачу методом, разработанным Е. П. Вигнером [15–18], при этом должно быть найдено вращение не только спина, но любых векторов, скрепленных с материальной точкой, моделирующей электрон. Метод, разработанный Вигнером, интересен тем, что позволяет установить соотношения между углами поворота векторов при бустах.

К сожалению, в указанных работах Вигнера допущена неточность, приводящая к неверным значениям угла поворота векторов и их угловой скорости. Поясним, в чем состоит эта неточность.

Начнем с того, что выпишем в явном виде буст, который обеспечивает указанное в задаче движение электрона.

Пусть $\mathbf{i}(l)$ и $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ — 4-скорость электрона в два близких момента собственного времени электрона l и $l + \Delta l$. Отложим эти векторы от одной точки и рассмотрим содержащую их плоскость, которую обозначим буквой Π . Вместе с векторами $\mathbf{i}(l)$ и $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ плоскость Π содержит их разность $\Delta \mathbf{i} = \mathbf{i}(l + \Delta l) - \mathbf{i}(l)$, значит, она содержит и вектор $\Delta \mathbf{i} / \Delta l$. Устремляя Δl к нулю, как того требует условие задачи, получаем, что плоскость Π содержит векторы $\mathbf{i}(l)$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{i}}{\Delta l}$. По условию задачи, электрон движется по непрямолинейной траектории, поэтому $\frac{d\mathbf{i}}{dl} \neq \mathbf{0}$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dl} \nparallel \mathbf{i}$, следовательно, векторы $\mathbf{i}$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ линейно независимые и образуют базис в плоскости Π . Это означает, что плоскость Π может быть определена как плоскость, содержащая векторы $\mathbf{i}$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ (она зависит от l). Плоскость Π является псевдоевклидовой, потому что содержит времениподобный вектор $\mathbf{i}$. А так как она содержит вместе с вектором $\mathbf{i}$, касательным к мировой линии электрона L , его производную $\frac{d\mathbf{i}}{dl}$, то согласно определению, даваемому в геометрии, плоскость Π является соприкасающейся плоскостью мировой линии L (в точке l).

По условию задачи, траектория электрона известна. Следовательно, известна его мировая линия L . Вместе с ней известны векторы $\mathbf{i}$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dl}$

в каждый момент времени l . Образует тензор

$$\Phi = \frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl} \quad (\Phi = \Phi(l)).$$

Подставляя тензор Φ в уравнение движения электрона (18.9) на место тензора $a_1 F$, убеждаемся, что он удовлетворяет этому уравнению (с учетом равенств $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dl} \cdot \mathbf{i} = 0$; второе равенство получается путем дифференцирования обеих частей первого равенства по l). Значит, тензор Φ обеспечивает движение электрона вдоль заданной мировой линии L .

Введем тензор

$$B = I + \Phi \Delta l,$$

где I — единичный тензор. Так как тензор Φ антисимметричный, то по следствию к теореме 18.1 (с. 237) тензор B принадлежит ограниченной группе Лоренца. Пусть $\Pi_\perp$ — плоскость, ортогональная введенной выше плоскости Π , и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — какой-либо базис в $\Pi_\perp$. Напомним, что $\{\mathbf{i}, d\mathbf{i}/dl\}$ — базис в Π . Анализируя действие тензора B на произвольные векторы $\mathbf{a} \in \Pi$ и $\mathbf{b} \in \Pi_\perp$ (разложенные по базисам $\{\mathbf{i}, d\mathbf{i}/dl\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ соответственно), легко убедиться в том, что $B \cdot \mathbf{a} \in \Pi$ и $B \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Это означает, что псевдоевклидова плоскость Π является инвариантной плоскостью тензора B , а пространственноподобная плоскость $\Pi_\perp$, ортогональная Π , является его неподвижной плоскостью. Поэтому B — буст. Нетрудно проверить также, что тензор B переводит 4-скорость электрона $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ (в линейном приближении по Δl). Следовательно, тензор B есть тот самый буст, о котором говорится в условии задачи.

Согласно выводу, сделанному при обсуждении формул (18.1)–(18.3), законы $\frac{d\mathbf{u}}{dl} = \Phi \cdot \mathbf{u}$ и $\mathbf{u}(l + \Delta l) = B \cdot \mathbf{u}(l)$ эквивалентны, поэтому можно говорить либо, что векторы преобразуются тензором Φ по первому из этих законов, либо, что векторы преобразуются тензором B по второму закону.

Движение вектора под действием тензора $\Phi = \frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ называется *переносом вектора по Ферми–Уолкеру*. В разд. 20 было показано, что этот тензор вызывает вращение материальной точки (со скрепленными с ней векторами) с угловой скоростью (20.35):

$$\bar{\Omega}_F = - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \bar{\omega} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \bar{\omega}; \quad (21.1)$$

мы пометили угловую скорость $\bar{\Omega}$ индексом F , чтобы подчеркнуть ее связь с переносом векторов по Ферми–Уолкеру (Fermi–Walker).

Введем тензор F_b с помощью равенства $\Phi = a_1 F_b$ (индекс b символизирует связь тензора F_b с рассматриваемым бустом) и сравним его с тензором электромагнитного поля F , порождаемым ядром атома. Для этого подставим в выражение для Φ значения векторов $\mathbf{i}$ и $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ из (20.6) и (20.9), воспользуемся формулой (20.2) и равенствами $a_1 = e/(mc^2)$ и $e^2 = -e|e|$ (так как $e < 0$). Тогда получим:

$$F_b = F \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} + \frac{Z|e|\left(\frac{v}{c}\right)}{r^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} \left(\frac{\mathbf{r} \mathbf{v}}{r v} - \frac{\mathbf{v} \mathbf{r}}{v r}\right),$$

где F — тензор электромагнитного поля, порождаемый ядром атома (см. (20.2)); Z — число протонов в ядре; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона относительно центра траектории; $\mathbf{v}$ — скорость электрона относительно неподвижной инерциальной системы отсчета. Отсюда видно, что тензор F_b существенно отличается от тензора F , определяемого законом Кулона.

Пользуясь неподвижным базисом $\{\mathbf{e}_i\}$, введенным в разд. 20, и формулами (20.14) и (20.15), находим:

$$\frac{\mathbf{r} \mathbf{v}}{r v} - \frac{\mathbf{v} \mathbf{r}}{v r} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1.$$

С помощью этого равенства, зависимостей (16.2), (16.3), (20.2) и полученного выражения для F_b определяем напряженности электрического $\mathbf{E}_b$ и магнитного $\overline{H}_b$ полей, требуемые для поддержания исследуемого движения электрона:

$$\mathbf{E}_b = \mathbf{E} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}; \quad \overline{H}_b = -\Delta \frac{Z|e|\left(\frac{v}{c}\right)}{r^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} \mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, создаваемая неподвижным ядром атома (см. (20.1)); Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве неподвижной системы отсчета; $\mathbf{e}_3$ — нормаль к плоскости орбиты электрона.

Таким образом, для того, чтобы движение электрона осуществлялось в каждый момент времени посредством лоренцева буста, фигурирующего в условии задачи, необходимо, чтобы на электрон действовали электрическое и магнитное поля с напряженностями $\mathbf{E}_b$ и $\overline{H}_b$ указанного вида. Сравнение полученных формул с (20.1) показывает, что такие поля не реализуются в атоме.

Из работ Е. П. Вигнера [15–18] вытекает, что электрон вращается с угловой скоростью, которая не совпадает с угловой скоростью Ω_F , задаваемой формулой (21.1), причем даже направление вращения электрона оказывается противоположным тому, которое следует из (21.1).

Отметим, что в работах Вигнера формула для угловой скорости вращения векторов не выписана в явном виде, однако она легко выводится из полученных в этих работах выражений для угла поворота векторов.

Между тем, с математической точки зрения оба способа описания вращения электрона — по Ферми–Уолкеру и по Вигнеру — эквивалентны. В первом случае считается, что электрон все время движется под действием буста $B = I + (\frac{d\mathbf{i}}{dt}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dt})\Delta l$. Во втором случае считается, что он движется сначала под действием некоторого буста в направлении, касательном к траектории, и затем под действием другого буста в ортогональном направлении, возвращающем его на исходную траекторию. Фактически гладкий участок траектории заменяется двузвенной ломаной линией. При устремлении длины звеньев к нулю ломаная траектория совмещается с гладкой (наподобие того, как при определении определенного интеграла гладкий график функции заменяется ступенчатым с последующим устремлением размера ступенек к нулю). Странно было бы думать, что движение электрона при одном и том же воздействии на него зависит от того, каким способом исследователь решает задачу. Отличие вращения электрона по Вигнеру от вращения по Ферми–Уолкеру объясняется допущенной в работах [15–18] неточностью. Она заключается в следующем.

В этих работах рассмотрено преобразование векторов под действием двух лоренцевых бустов, осуществляемых последовательно в один и тот же момент времени. Пусть τ , τ' и τ'' — направляющие орты осей времени трех инерциальных систем отсчета — исходной K и систем отсчета K' и K'' , получаемых из K в результате первого преобразования и в результате двух преобразований. Будем обозначать символом $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ плоскость, содержащую векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Тогда $P(\tau, \tau')$ и $P(\tau', \tau'')$ — инвариантные плоскости первого и второго бустов соответственно. Скорость $\mathbf{v}$, с которой система отсчета K' движется относительно системы отсчета K , принадлежит плоскости $P(\tau, \tau')$, а скорость $\mathbf{v}'$, с которой система отсчета K'' движется относительно системы отсчета K' , принадлежит плоскости $P(\tau', \tau'')$, поэтому можно переобозначить плоскости: $P(\tau, \tau') = P(\tau, \mathbf{v})$ и $P(\tau', \tau'') = P(\tau', \mathbf{v}')$. Вигнер исследовал случай $\mathbf{v}' \perp \mathbf{v}$. В этом случае, согласно эквивалентности (12.16), скорость $\mathbf{v}'$ лежит в физическом пространстве системы отсчета K . Это позволяет считать направление, задаваемое вектором $\mathbf{v}'$, одним из координатных направлений системы отсчета K . В работах [15–18] при расчете

вращения электрона вместо второго буста, имеющего инвариантную плоскость $P(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\tau}'') = P(\boldsymbol{\tau}', \mathbf{v}')$, использован буст с инвариантной плоскостью $P(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}')$, из-за чего было получено неверное значение угловой скорости вращения электрона. При устранении этой неточности, как доказано далее, угловая скорость оказывается такой же, как при переносе векторов по Ферми–Уолкеру (см. формулу (21.1)).

На основании сказанного ранее подчеркнем, что *перенос векторов по Ферми–Уолкеру, вращение Вигнера и прецессия Томаса (как частный случай вращения Вигнера) требуют такого воздействия на электрон, которое не реализуется в атоме*. Тем не менее, исследование Вигнера представляет самостоятельный интерес, так как позволяет вывести важные соотношения между углами поворота векторов при бустах. Проведем это исследование вновь более строго.

Начнем с вывода соотношений между угловыми характеристиками в пространстве Минковского. Это — чисто геометрическая задача, поэтому забудем об электроне и займемся геометрией.

Зададим в пространстве Минковского M три времениподобные прямые T, T' и T'' , которые проходят через точку O и не лежат в одной плоскости (рис. 21.1, а). Линейная оболочка направляющих векторов этих прямых является трехмерным подпространством пространства Минковского M , содержащим прямые. Поскольку прямые времениподобные и сигнатура пространства M есть $(+ - -)$, то данное подпространство имеет сигнатуру $(+ - -)$, то есть оно псевдоевклидово. Обозначим это подпространство символом M_3 и далее в основном его и будем рассматривать.

Пусть P — плоскость в M_3 , проходящая через точку O и ортогональная прямой T (в силу трехмерности M_3 , эта плоскость единственная; см. рис. 21.1, а, сам этот рисунок фактически изображает подпространство M_3).

Зафиксируем на прямой T произвольную точку A , отличную от O , и проведем через нее плоскость $P_A \subset M_3$, параллельную плоскости P . Так как $P_A \parallel P$ и $P \perp T$, то $P_A \perp T$. Из $P \perp T$, $P_A \perp T$ и времениподобности прямой T следует, что плоскости P и P_A имеют сигнатуру $(- -)$. Значит, их геометрические свойства совпадают со свойствами собственно евклидовой плоскости. В трехмерном пространстве, как известно, если плоскость пересекает прямую и не содержит ее, то любая параллельная ей плоскость тоже пересекает эту прямую (заметим, что в четырехмерном пространстве это не так). В нашем случае рассматриваемые прямые и плоскости содержатся в трехмерном M_3 , поэтому из того факта, что плоскость P пересекает прямые T, T' и T'' , вытекает, что параллель-

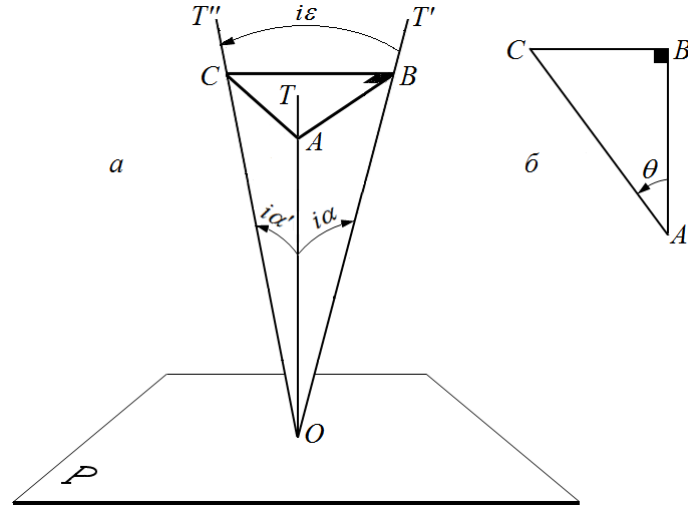


Рис. 21.1. Иллюстрация к расчету угловых характеристик в пространстве Минковского (для случая $BC \perp AB$).

Символ мнимой единицы i в обозначении углов указывает на необходимость использования гиперболических функций при работе с этими углами.

ная ей плоскость P_A тоже пересекает их. Пусть B и C — точки пересечения плоскости P_A с прямыми T' и T'' . Построим треугольник в этой плоскости с вершинами A , B и C . Обозначим его символом $\triangle ABC$ (он изображен отдельно на рис. 21.1, б). Так как геометрические свойства плоскости P_A тождественны геометрическим свойствам собственно евклидовой плоскости, то $\triangle ABC$ обладает свойствами треугольника, известными из планиметрии.

В дальнейшем будем обозначать символом $P(T_1, T_2)$ плоскость, содержащую прямые T_1 и T_2 (при непараллельных прямых, проходящих через одну точку, такая плоскость существует и единственна).

Примем дополнительное условие: пусть прямая T'' расположена по отношению к прямым T и T' таким образом, что в $\triangle ABC$ сторона BC ортогональна стороне AB , то есть угол при вершине B прямой (на рис. 21.1 это отмечено черным квадратом).

Данное условие соответствует исследованному Вигнером случаю, когда скорость $\mathbf{v}'$ системы отсчета K'' относительно системы отсчета K' ортогональна скорости $\mathbf{v}$ системы отсчета K' относительно системы отсчета K .

Докажем, что принятое условие не зависит от выбора точки A , иначе говоря, если оно выполняется для плоскости P_A , то оно выполняется также для любой плоскости в M_3 , параллельной плоскости P_A . В самом деле, пусть P' — еще одна плоскость в M_3 , параллельная P_A и пересекающая прямые T , T' и T'' в точках A' , B' и C' . Известно, что если две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, то линии их пересечения с этой плоскостью параллельны. Плоскость P_A пересекает плоскости $P(T, T')$ и $P(T', T'')$ вдоль прямых, содержащих отрезки AB и BC соответственно. Поэтому линии, вдоль которых плоскость P' пересекает эти же две плоскости, параллельны одна отрезку AB , а другая отрезку BC . Поскольку эти линии содержат отрезки $A'B'$ и $B'C'$, то в $\triangle A'B'C'$ стороны $A'B'$ и $B'C'$ взаимно ортогональны так же, как ортогональны между собой стороны AB и BC в $\triangle ABC$. Следовательно, принятое дополнительное условие действительно выполняется для произвольной плоскости в M_3 , параллельной P_A .

Обозначим: α — угол между прямыми T и T' , ε — угол между прямыми T' и T'' , α' — угол между T и T'' , θ — угол между отрезками AB и AC (см. рис. 21.1; такие обозначения углов использованы Е. П. Вигнером в статье [16]). Определение угла в плоскостях с сигнатурами $(++)$, $(--)$ и $(+-)$ имеется в разд. 3 главы 2 (см. там формулы (3.2)–(3.4) и пояснения к ним, с. 38, 39).

Теорема 21.1. *Углы α , ε , α' и θ не являются независимыми. В рассматриваемой ситуации, включающей условие $BC \perp AB$, только два из них могут принимать произвольные значения. Если это углы α и ε , то другие два угла выражаются через них следующим образом:*

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha' &= \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon; \\ \operatorname{sh} \alpha' &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \varepsilon - 1}; \\ \sin \theta \operatorname{sh} \alpha' &= \operatorname{sh} \varepsilon; \\ \cos \theta \operatorname{sh} \alpha' &= \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon; \end{aligned} \quad (21.2)$$

две последние формулы могут быть записаны при $\operatorname{sh} \alpha' \neq 0$ в виде

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \varepsilon - 1}} = \frac{\operatorname{th} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{th} \alpha'}; \\ \cos \theta &= \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \varepsilon - 1}} = \frac{\operatorname{th} \alpha}{\operatorname{th} \alpha'}. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Здесь, по смыслу описываемой ситуации, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha' > 0$ и $\theta > 0$; причем $0 < \theta < \pi/2$, потому что θ — острый угол в прямо-

угольном треугольнике (см. рис. 21.1). Отметим, что формулы (21.2) и ряд приводимых далее формул остаются верными, как легко убедиться, и при нулевых значениях угла α или ε .

Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $OABC$, показанный на рис. 21.1, *a*. Для удобства, изобразим его грани на одной плоскости, как бы разрезав тетраэдр вдоль времениподобных ребер и развернув грани (рис. 21.2). В треугольнике, помеченном на рисунке цифрой 1, стороны OA и AB ортогональны, потому что сторона OA направлена вдоль прямой T , а сторона AB лежит в плоскости P_A , ортогональной этой прямой (см. рис. 21.1, *a*). По аналогичной причине в треугольнике 3 ортогональны стороны OA и AC . Из $BC \subset P_A$ и $P_A \perp T$ вытекает $BC \perp T$. Отсюда и из условия $BC \perp AB$ заключаем, что отрезок BC ортогонален всей плоскости, содержащей прямую T и отрезок AB , в частности, он ортогонален отрезку OB , лежащему в этой плоскости (см. рис. 21.1, *a*). Следовательно, в треугольнике 2 стороны BC и OB ортогональны. В треугольнике 4 стороны BC и AB ортогональны по условию теоремы.

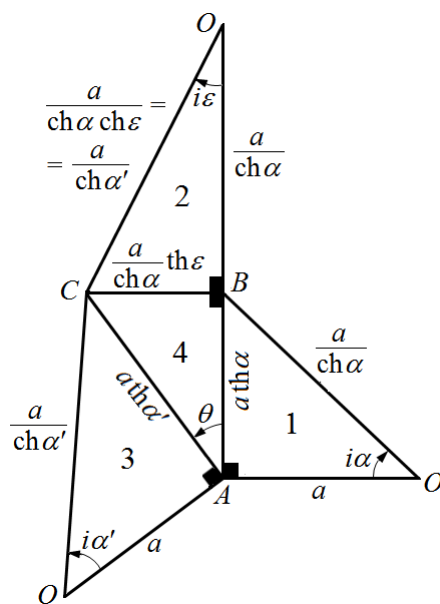


Рис. 21.2. Грани тетраэдра $OABC$, показанного на рис. 21.1, *a*.

Углы, при оперировании с которыми нужно применять гиперболические функции, помечены символом мнимой единицы i .

Таким образом, в каждом из четырех треугольников, изображенных на рис. 21.2, имеется вершина, в которой сходятся взаимно ортогональные стороны (эти вершины отмечены черными квадратами).

Обозначим: $|OA| = a$ (модуль означает длину отрезка). Так как в треугольнике 1 стороны OA и AB ортогональны и угол при вершине O равен α , то $|OB| = a/\operatorname{ch} \alpha$. В треугольнике 2 ортогональны стороны BC и OB , а угол при вершине O равен ε , поэтому $|OC| = |OB|/\operatorname{ch} \varepsilon$. Отсюда и из предыдущего равенства находим:

$$|OC| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}. \quad (21.4)$$

В треугольнике 3 стороны OA и AC ортогональны, причем $|OA| = a$, а угол при вершине O равен α' , значит,

$$|OC| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha'}. \quad (21.5)$$

Из (21.4) и (21.5) получаем:

$$\operatorname{ch} \alpha' = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon; \quad (21.6)$$

отсюда с учетом известной формулы $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$ имеем (при $\alpha' \geq 0$):

$$\operatorname{sh} \alpha' = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha' - 1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \varepsilon - 1}. \quad (21.7)$$

Полученные зависимости (21.6) и (21.7) доказывают справедливость двух первых формул в (21.2).

На основании свойств треугольников 1, 2 и 3 находим длины сторон $\triangle ABC$:

$$|AB| = a \operatorname{th} \alpha; \quad |BC| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{th} \varepsilon; \quad |AC| = a \operatorname{th} \alpha'. \quad (21.8)$$

Ранее отмечалось, что $\triangle ABC$ обладает свойствами, известными из планиметрии. Поэтому угол θ при его вершине A удовлетворяет равенствам $\sin \theta = |BC|/|AC|$ и $\cos \theta = |AB|/|AC|$, что вместе с (21.6) и (21.8) дает (при $\alpha' \neq 0$):

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{a \operatorname{th} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha a \operatorname{th} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon \operatorname{ch} \alpha'}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha'}; \\ \cos \theta &= \frac{a \operatorname{th} \alpha}{a \operatorname{th} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha'}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha'}. \end{aligned}$$

Из этих выражений с помощью (21.7) получаем две последние формулы в (21.2) и формулы (21.3). ■

Е. П. Вигнер приводит в статье [16] (выражение (8a)) такие формулы:

$$\operatorname{ch} \alpha' = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon; \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha'};$$

первая из этих формул совпадает с первой из формул (21.2), а вторая отличается от первой из формул (21.3) дополнительным множителем $\operatorname{ch} \alpha$. Причину этой неточности мы укажем в конце раздела.

Теорема 21.1 относится к ситуации, когда выполняется условие $BC \perp AB$. Теперь рассмотрим общий случай, не ограниченный этим условием.

Пусть по-прежнему T , T' и T'' — три времениподобные прямые, проходящие через точку O и не лежащие в одной плоскости; P и P_A — пространственноподобные плоскости, ортогональные прямой T и пересекающие ее в точках O и A ($A \neq O$); $\triangle ABC$ — треугольник в плоскости P_A , образованный точками пересечения P_A с прямыми T , T' и T'' ; α , ε , α' — углы между парами прямых T и T' , T' и T'' , T и T'' соответственно; θ — угол между отрезками AB и AC ; вся конструкция содержится в трехмерном подпространстве M_3 пространства M (рис. 21.3, а, б).

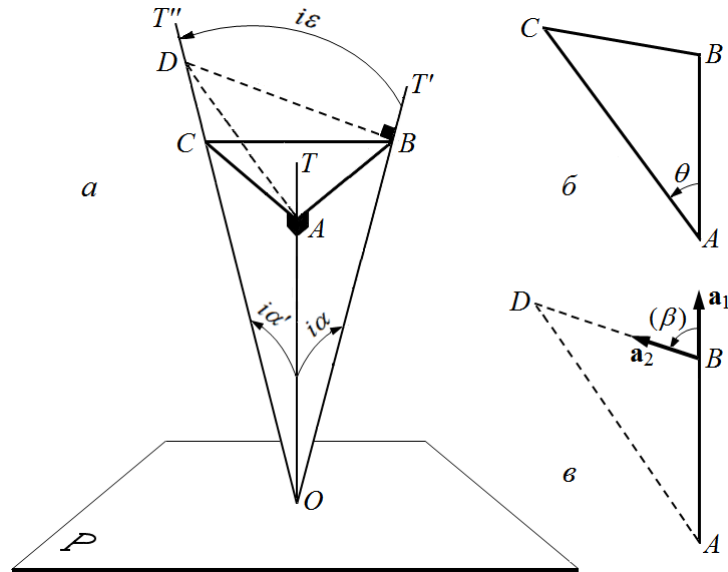


Рис. 21.3. Иллюстрация к расчету угловых характеристик в пространстве Минковского (для общего случая).

Построим в плоскости $P(T', T'')$ отрезок BD , ортогональный прямой T' , и соединим отрезком точки A и D ($D \in T''$; отрезки BD и AD изображены штриховыми линиями). Введем единичный вектор $\mathbf{a}_1$ с началом в точке B , направленный вдоль отрезка AB в сторону, противоположную точке A , и единичный вектор $\mathbf{a}_2$ с началом в B , направленный вдоль отрезка BD (рис. 21.3, в).

В $\triangle ABD$ стороны AB и BD являются пространственноподобными, ибо каждая из них ортогональна времениподобной прямой ($AB \perp T$ и $BD \perp T'$). Однако сторона AD этого треугольника может быть как пространственноподобной, так и времениподобной. В самом деле, допустим, что прямая T'' расположена по отношению к прямым T и T' таким образом, что отрезок BD ортогонален отрезку AB . Вследствие $BD \perp T'$ и $BD \perp AB$, отрезок BD ортогонален всей плоскости, содержащей T' и AB , в том числе он ортогонален прямой T , лежащей в этой плоскости (см. рис. 21.3, а). Из $BD \perp T$, $B \in P_A$ и $P_A \perp T$ вытекает, что отрезок BD лежит в плоскости P_A (при этом $D = C$ и $BD = BC$). А так как отрезок AB тоже лежит в этой плоскости, то весь $\triangle ABD$ лежит в пространственноподобной плоскости P_A . Значит, в данном случае отрезок AD пространственноподобен. Если же прямая T'' совпадает с прямой T , то точка D оказывается на прямой T (причем $D \neq A$, потому что из $AB \perp T$, $BD \perp T'$ и $T \nparallel T'$ следует $AB \nparallel BD$). В этом случае $AD \subset T$, поэтому отрезок AD времениподобный.

Понятно, что плоскость, в которой лежат $\triangle ABD$ и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, является пространственноподобной, если отрезок AD пространственноподобен, и является псевдоевклидовой, если отрезок AD времениподобный. Ясно также, что если осуществлять непрерывный переход от первого случая ко второму, то плоскость в какой-то момент будет изотропной. По этой причине не во всех ситуациях можно ввести угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Например, его нельзя ввести в отмеченном выше случае совпадения прямой T'' с T , то есть при $D \in T$ (потому что в этом случае векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не удовлетворяют условию, необходимому для введения угла между векторами в псевдоевклидовой плоскости — см. пояснение к формуле (3.4) главы 2, с. 39).

Обозначим: β — угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в случае, когда плоскость, содержащая эти векторы, является пространственноподобной (см. рис. 21.3, в, где символ β заключен в скобки для напоминания о том, что этот угол может быть не определен). В последующем было бы удобно использовать функцию $\cos \beta$, но так как угол β определен не всегда, то будем применять вместо функции $\cos \beta$ в основном скалярное произведение $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$, которое определено во всех ситуациях.

Теорема 21.2. Пусть T, T' и T'' — времениподобные прямые, которые пересекаются в одной точке и не лежат в одной плоскости (см. рис. 21.3). Углы α' и θ связаны с углами α, ε и скалярным произведением $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha' &= \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2); \\ \cos \theta &= \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}{\operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha' - 1}}; \end{aligned} \quad (21.9)$$

во вторую формулу нужно подставить значение функции $\operatorname{ch} \alpha'$ из первой формулы; здесь $\alpha > 0, \varepsilon > 0, \alpha' > 0$ и $\theta > 0$.

Если плоскость, в которой лежат треугольник $\triangle ABD$ и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, является пространственноподобной, то

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha' &= \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon + \operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon \cos \beta; \\ \cos \theta &= \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon + \operatorname{sh} \varepsilon \cos \beta}{\operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon + \operatorname{sh} \varepsilon \cos \beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha' - 1}}. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Формулы (21.10) вытекают из (21.9) в силу равенства $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -\cos \beta$ (знак минус объясняется тем, что пространственноподобная плоскость имеет сигнатуру $(- -)$, см. формулу (3.3) в разд. 3 главы 2, с. 38).

Доказательство. Рассмотрим по отдельности грани тетраэдра $OABD$ (рис. 21.4; далее при ссылках на этот рисунок будем указывать только букву, помечающую нужную часть рисунка).

Пусть, как и ранее: $\triangle$ — символ треугольника, $|OA| = a$.

В $\triangle OAB$ (рис. а) стороны AB и OA ортогональны, так как $AB \subset P_A$, $OA \subset T$ и $P_A \perp T$, кроме того, $|OA| = a$ и угол при вершине O есть α , поэтому

$$|OB| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha}; \quad |AB| = a \operatorname{th} \alpha. \quad (21.11)$$

В $\triangle OBD$ (рис. б) стороны OB и BD ортогональны (потому что $OB \subset T'$ и $BD \perp T'$), а угол при вершине O равен ε . Следовательно, $|OD| = |OB|/\operatorname{ch} \varepsilon$ и $|BD| = |OB| \operatorname{th} \varepsilon$, откуда с учетом (21.11) имеем:

$$|OD| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon}; \quad |BD| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{th} \varepsilon. \quad (21.12)$$

В $\triangle OAC$ (рис. в), по аналогии с $\triangle OAB$,

$$|OC| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha'}; \quad |AC| = a \operatorname{th} \alpha'. \quad (21.13)$$

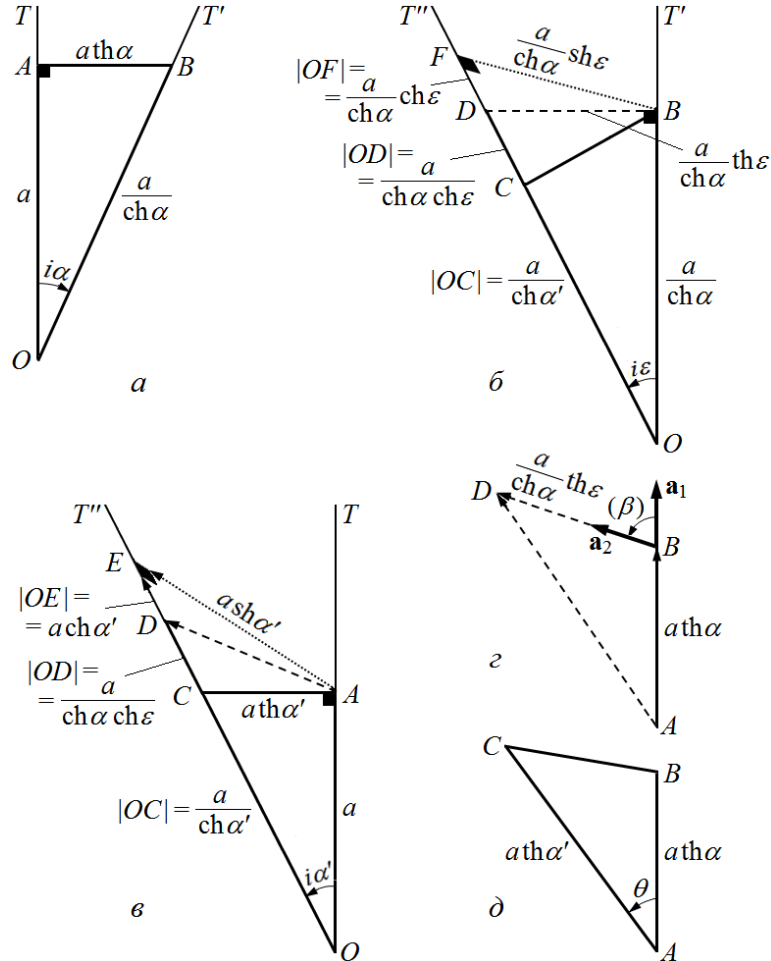


Рис. 21.4. Грани тетраэдра $OABD$, показанного на рис. 21.3, a , и $\triangle ABC$ с указанием длин их сторон.

Рисунок изображен на листе бумаги, который имеет собственно евклидову метрику, поэтому относительные размеры отрезков и углов на рисунке отличаются от таковых в псевдоевклидовом пространстве.

На рис. b и $в$ построены отрезки BF и AE , ортогональные прямой T'' (они показаны пунктирными линиями; вершины F и E , в которых сходятся ортогональные отрезки, помечены черными ромбами).

В $\triangle OBF$ (рис. 6) стороны OF и BF ортогональны и угол при вершине O равен ε , значит, $|OF| = |OB| \operatorname{ch} \varepsilon$ и $|BF| = |OB| \operatorname{sh} \varepsilon$. Из этих равенств и из (21.11) находим:

$$|OF| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{ch} \varepsilon; \quad |BF| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{sh} \varepsilon. \quad (21.14)$$

В $\triangle OAE$ (рис. 6) стороны OE и AE ортогональны, поэтому

$$|OE| = a \operatorname{ch} \alpha'; \quad |AE| = a \operatorname{sh} \alpha'. \quad (21.15)$$

Рассмотрим $\triangle ADE$ (рис. 6). Введем векторы $\vec{AD}$, $\vec{DE}$ и $\vec{AE}$, как показано на рисунке. Очевидно, что $\vec{AD} = \vec{AE} - \vec{DE}$. Найдем скалярное произведение $\vec{AD} \cdot \vec{AD}$:

$$\vec{AD} \cdot \vec{AD} = (\vec{AE} - \vec{DE}) \cdot (\vec{AE} - \vec{DE}) = \vec{AE} \cdot \vec{AE} - 2\vec{AE} \cdot \vec{DE} + \vec{DE} \cdot \vec{DE}.$$

Отсюда, учитывая, что вектор $\vec{AE}$ пространственноподобный, вектор $\vec{DE}$ времениподобный и $\vec{AE} \cdot \vec{DE} = 0$ (так как $\vec{AE} \perp T''$ и $\vec{DE} \in T''$), и применяя формулы (21.12) и (21.15), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{AD} &= -|AE|^2 + |DE|^2 = -|AE|^2 + (|OE| - |OD|)^2 = \\ &= -a^2 \operatorname{sh}^2 \alpha' + \left(a \operatorname{ch} \alpha' - \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon} \right)^2, \end{aligned} \quad (21.16)$$

где использовано равенство $|DE| = |OE| - |OD|$, верное при нахождении точки E вне отрезка OD ; если точка E находится внутри отрезка OD , то будет $|DE| = |OD| - |OE|$, что не меняет результат, благодаря тому, что разность $|OE| - |OD|$ возводится в квадрат.

Теперь вычислим это же скалярное произведение $\vec{AD} \cdot \vec{AD}$ другим способом. В $\triangle ABD$ (рис. 2) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$, откуда

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{AD} &= (\vec{AB} + \vec{BD}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BD}) = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{BD} \cdot \vec{BD} = \\ &= -|AB|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BD} - |BD|^2 = \\ &= -a^2 \operatorname{th}^2 \alpha + 2a \operatorname{th} \alpha \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{th} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) - \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \operatorname{th}^2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (21.17)$$

где учтены пространственноподобность векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BD}$ (вытекающая из $AB \perp T$ и $BD \perp T'$), формулы (21.11), (21.12) и равенства $\vec{AB} = |AB| \mathbf{a}_1 = a \operatorname{th} \alpha \mathbf{a}_1$ и $\vec{BD} = |BD| \mathbf{a}_2 = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{th} \varepsilon \mathbf{a}_2$ (см. рис. 2).

Приравнивая правые части выражений (21.16) и (21.17), после несложных преобразований находим:

$$\operatorname{ch} \alpha' = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2), \quad (21.18)$$

что доказывает первую формулу (21.9). Если плоскость, в которой лежит $\triangle ABD$, пространственноподобная, то согласно выражению (3.3) из разд. 3 главы 2 (с. 38) угол β между единичными векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ удовлетворяет равенству $\cos \beta = -\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$. С помощью этого равенства и (21.18) получаем первую формулу (21.10).

В $\triangle BCF$ (рис. 6) стороны BF и CF ортогональны, а сторона BC пространственноподобная (потому что $BC \subset P_A$). На основании теоремы Пифагора (с. 80) и следствия к ней, применяя равенства (21.13) и (21.14), можем записать:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |BF|^2 - |CF|^2 = |BF|^2 - (|OF| - |OC|)^2 = \\ &= \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \operatorname{sh}^2 \varepsilon - \left(\frac{a}{\operatorname{ch} \alpha} \operatorname{ch} \varepsilon - \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha'} \right)^2 = \\ &= a^2 \left(\frac{2 \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha'} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha'} \right); \end{aligned} \quad (21.19)$$

этот результат верен при нахождении точки F как вне, так и внутри отрезка OC (вследствие возведения разности $|OF| - |OC|$ в квадрат).

$\triangle ABC$ (рис. 6) лежит в пространственноподобной плоскости P_A , поэтому он обладает свойствами, известными из планиметрии. По теореме косинусов имеем:

$$\cos \theta = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|}.$$

Отсюда и из (21.11), (21.13) и (21.19) получаем:

$$\cos \theta = \frac{a^2 \operatorname{th}^2 \alpha + a^2 \operatorname{th}^2 \alpha' - a^2 \left(\frac{2 \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha'} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha'} \right)}{2 a \operatorname{th} \alpha a \operatorname{th} \alpha'}.$$

После преобразований приходим к выражению

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha' - \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha'}. \quad (21.20)$$

Подставляя в (21.20) значение функции $\operatorname{ch} \alpha'$ из (21.18), находим:

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}{\operatorname{sh} \alpha'}. \quad (21.21)$$

Зависимость $\text{ch}^2\alpha' - \text{sh}^2\alpha' = 1$ влечет равенство $\text{sh}\alpha' = \sqrt{\text{ch}^2\alpha' - 1}$ (так как $\alpha' \geq 0$). Вместе с этим равенством выражение (21.21) дает вторую формулу (21.9). В случае пространственноподобной плоскости, содержащей $\triangle ABD$, выполняется равенство $\cos\beta = -\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$. С его учетом из второй формулы (21.9) вытекает вторая формула (21.10). ■

Теорема 21.3. При $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$ (то есть при $BD \not\perp AB$; см. рис. 21.3) плоскость, в которой лежат $\triangle ABD$ и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, не ортогональна ни прямой T , ни прямой T' .

В случае $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ указанная плоскость ортогональна прямой T и совпадает с плоскостью P_A (при этом $D = C$, $\triangle ABD$ совпадает с $\triangle ABC$ и реализуется ситуация, показанная на рис. 21.1). В этом случае теорема 21.2 эквивалентна теореме 21.1 и формулы (21.9) и (21.10) эквивалентны формулам (21.2) и (21.3).

Доказательство. Начнем с доказательства эквивалентности

$$BD \perp T \iff BD \perp AB. \quad (21.22)$$

Напомним, что отрезок BD , по его построению, ортогонален прямой T' . Пусть $BD \perp T$. Тогда, с учетом $BD \perp T'$, будет $BD \perp P(T, T')$, что, благодаря $AB \subset P(T, T')$, влечет $BD \perp AB$. Значит, из $BD \perp T$ следует $BD \perp AB$. Теперь пусть $BD \perp AB$. Отсюда и из $AB \subset P(T, T')$ и $BD \perp T'$ вытекает, что отрезок BD ортогонален двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости $P(T, T')$, поэтому он ортогонален всем прямым, лежащим в $P(T, T')$, в том числе прямой T . Таким образом, из $BD \perp AB$ следует $BD \perp T$. Вместе с предыдущим это означает выполнение эквивалентности (21.22).

Вектор $\mathbf{a}_1$ направлен вдоль отрезка AB , а вектор $\mathbf{a}_2$ направлен вдоль отрезка BD (см. рис. 21.3, в), поэтому

$$BD \perp AB \iff \mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2 \iff \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0, \quad (21.23)$$

где учтено, что ортогональность векторов определяется как равенство нулю их скалярного произведения.

На основании эквивалентностей (21.22) и (21.23) получаем:

$$BD \perp T \iff \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \quad (21.24)$$

Из $AB \subset P_A$ и $P_A \perp T$ следует $AB \perp T$. Вместе с тем, $AB \not\perp T'$ (это вытекает из $AB \subset P(T, T')$, $AB \perp T$ и $T \not\parallel T'$). По построению отрезка BD , $BD \perp T'$. При этом, если $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$, то из (21.24) имеем: $BD \not\perp T$. Таким образом, в $\triangle ABD$ сторона AB ортогональна прямой T , но не ортогональна прямой T' , а сторона BD ортогональна прямой T' ,

но в случае $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$ не ортогональна прямой T . Значит, в этом случае, как и утверждается в теореме, плоскость, в которой лежат $\triangle ABD$ и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, не ортогональна прямым T и T' .

При $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, согласно эквивалентности (21.24), $BD \perp T$. Отсюда и из $B \in P_A$ и $P_A \perp T$ вытекает $BD \subset P_A$. Вместе с $AB \subset P_A$, это означает, что плоскость залегания $\triangle ABD$ совпадает с плоскостью P_A , следовательно, она ортогональна прямой T . Понятно, что в данном случае $D = C$, $\triangle ABD$ совпадает с $\triangle ABC$ и реализуется ситуация, показанная на рис. 21.1. Кроме того, при $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, как легко проверить, формулы (21.9) и (21.10) эквивалентны формулам (21.2) и (21.3), а теорема 21.2 эквивалентна теореме 21.1. ■

Следует подчеркнуть, что теоремы 21.1–21.3 не зависят от свойств материальных точек. Они вообще не связаны с теорией относительности или какой-либо физической теорией. *Теоремы 21.1–21.3 устанавливают чисто геометрические соотношения в геометрическом псевдоевклидовом пространстве.*

Если трактовать пространство Минковского M как базисное пространство специальной теории относительности, то первая формула (21.9) оказывается согласованной с законом сложения скоростей. Докажем это.

Пусть, как и ранее, T , T' и T'' — времениподобные прямые, проходящие через точку O . Воспользуемся обозначениями, примененными в законе сложения скоростей (с. 208): $\{T, \Gamma\}$ — инерциальная система отсчета в пространстве M ; $\{T', \Gamma'\}$ — другая инерциальная система отсчета, движущаяся относительно $\{T, \Gamma\}$ со скоростью $\mathbf{V}$; $\mathbf{v}'$ — скорость материальной точки относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$; $\mathbf{v}$ — скорость этой же материальной точки относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $V = |\mathbf{V}|$; $v' = |\mathbf{v}'|$; $v = |\mathbf{v}|$. Будем считать, что мировая линия материальной точки есть прямая T'' .

Из закона сложения скоростей вытекает зависимость (12.21):

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\left[\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{v'}{c} \right)^2 \right]}}{1 - \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}. \quad (21.25)$$

С помощью третьей формулы (10.4) и рисунков 21.3 и 10.2 (с. 180) можем записать:

$$\frac{V}{c} = \operatorname{th} \alpha; \quad \frac{v'}{c} = \operatorname{th} \varepsilon; \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} \alpha'. \quad (21.26)$$

Скорость $\mathbf{V}$, с которой система отсчета $\{T', \Gamma'\}$ движется относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, измеряется в системе $\{T, \Gamma\}$, поэтому вектор $\mathbf{V}$ лежит в физическом пространстве Γ . Значит, вектор $\mathbf{V}$ ортогонален прямой T . Вместе с тем, он лежит в плоскости $P(T, T')$ и направлен от T к T' . Поскольку единичный вектор $\mathbf{a}_1$ тоже ортогонален прямой T , лежит в плоскости $P(T, T')$ и направлен от T к T' (см. рис. 21.3), то

$$\mathbf{V} = V\mathbf{a}_1. \quad (21.27)$$

Скорость $\mathbf{v}'$ движения материальной точки относительно системы отсчета $\{T', \Gamma'\}$ лежит в физическом пространстве Γ' . Это означает, что вектор $\mathbf{v}'$ ортогонален прямой T' , кроме того, он лежит в плоскости $P(T', T'')$ и направлен от T' к T'' . Единичным вектором, обладающим такими свойствами, является вектор $\mathbf{a}_2$ (см. рис. 21.3), поэтому

$$\mathbf{v}' = v'\mathbf{a}_2. \quad (21.28)$$

Подставляя в (21.25) значения величин из (21.26) – (21.28), после преобразований получаем:

$$\operatorname{th} \alpha' = \frac{\sqrt{[\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)]^2 - 1}}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}. \quad (21.29)$$

Согласно первой формуле (21.9), знаменатель в выражении (21.29) равен $\operatorname{ch} \alpha'$, а числитель представляет собой величину $\sqrt{|\operatorname{ch}^2 \alpha' - 1|}$, равную $\operatorname{sh} \alpha'$ (так как $\alpha' \geq 0$). Поэтому $\operatorname{th} \alpha' = \operatorname{sh} \alpha' / \operatorname{ch} \alpha'$, как и должно быть. Значит, первая формула (21.9) действительно согласована с законом сложения скоростей.

Поскольку в выражении (21.29) под знаком модуля стоит положительная величина $\operatorname{sh}^2 \alpha'$, то можно убрать знак модуля в (21.29), (21.25) и (12.21).

В теореме 21.3 речь идет о плоскости, которая содержит $\triangle ABD$ и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Отметим, что в силу (21.27) и (21.28) эта плоскость может быть определена как плоскость, содержащая векторы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}'$. Согласно теореме 21.3, эта плоскость не принадлежит ни физическому пространству Γ , ни физическому пространству Γ' , за исключением случая, когда $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ (то есть когда $\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}' = 0$). В этом случае она принадлежит физическому пространству Γ (при его расположении в M , проходящем через точку A).

Приведем теоремы, касающиеся свойств лоренцевых операторов. Эти теоремы, как и предыдущие, не зависят ни от свойств материальных точек, ни от постулатов теории относительности. Они относятся только к теории операторов в пространстве Минковского M .

Начнем с повторения формул (10.1) и (11.3) – (11.7), которые потребуются нам в дальнейшем.

Угол φ между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в псевдоевклидовой плоскости задается формулой (10.1):

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (\operatorname{ch} \varphi \in [1, +\infty), \varphi \in (-\infty, +\infty)); \quad (21.30)$$

эта формула определяет два значения угла φ , различающиеся знаком; далее считается, что $\varphi \geq 0$; векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ должны удовлетворять условию, сформулированному перед формулой (10.1).

Ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в пространстве M определяется соотношениями (11.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (21.31)$$

Базис $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, задается условием

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (21.32)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3). \quad (21.33)$$

Из (21.31) – (21.33) следует, что

$$\mathbf{e}_0^* = \mathbf{e}_0; \quad \mathbf{e}_1^* = -\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3^* = -\mathbf{e}_3, \quad (21.34)$$

то есть $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\} = \{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$. Очевидно, что базис $\{\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ тоже ортонормированный. Формулы (21.32) – (21.34) являются повторением формул (11.4) – (11.6).

В последующем мы будем пользоваться для разложения тензоров диадными базисами $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}_{i,j=0}^3$ и $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}_{i,j=0}^3$ (последний составлен из векторов взаимных базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}_i^*\}$). Напомним, что тензорное произведение векторов обозначается без знака умножения между ними.

Единичный тензор I имеет в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ вид (11.7):

$$I = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \quad (21.35)$$

Из (21.34) и (21.35) получаем разложение единичного тензора I по базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$:

$$I = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (21.36)$$

Лемма. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ — два неколлинеарных вектора с общим началом O , из которых по крайней мере один времениподобный. Тогда существуют единственная псевдоевклидова плоскость P , содержащая эти векторы, и единственная пространственноподобная плоскость $P_\perp$, ортогональная плоскости P и проходящая через точку O .

Вследствие очевидности этого утверждения, не будем его доказывать, а ограничимся пояснением. Псевдоевклидовость плоскости P , то есть наличие у нее сигнатуры $(+ -)$, объясняется тем, что пространство M имеет сигнатуру $(+ - - -)$, а плоскость содержит времениподобный вектор. Пространственноподобность плоскости $P_\perp$, иными словами, наличие у нее сигнатуры $(- -)$, есть следствие того, что она является ортогональным дополнением плоскости P сигнатуры $(+ -)$ в пространстве M сигнатуры $(+ - - -)$. Ортогональность плоскостей P и $P_\perp$ означает, что каждый вектор одной из них ортогонален всем векторам другой. Эти плоскости имеют единственную общую точку O и единственный общий вектор — нулевой вектор $\mathbf{0}$.

Теорема 21.4. Пусть $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}'_0$ — неколлинеарные единичные времениподобные векторы пространства M , имеющие общее начало O и направленные в сторону будущего; P — содержащая эти векторы псевдоевклидова плоскость; $P_\perp$ — пространственноподобная плоскость, ортогональная плоскости P и проходящая через точку O (из леммы вытекает, что плоскости P и $P_\perp$ существуют и единственны). Тогда существует единственный гиперболический поворот (буст) B , который переводит вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$, сохраняя инвариантной плоскость P и оставляя неподвижной плоскость $P_\perp$; он имеет вид

$$B = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*, \quad (21.37)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}'_0$; $\mathbf{e}_1$ — единичный вектор в плоскости P , ортогональный вектору $\mathbf{e}_0$ и имеющий то из двух возможных направлений, которое совпадает с направлением проекции на него вектора $\mathbf{e}'_0$; $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — произвольный ортонормированный базис в плоскости $P_\perp$; векторы $\mathbf{e}_i^*$ связаны с векторами $\mathbf{e}_i$ зависимостями (21.34) ($i = 0, 1, 2, 3$); все векторы имеют начала в точке O (очевидно, что $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ — ортонормированный базис в плоскости P и что $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^3$ и $\{\mathbf{e}_i^*\}_{i=0}^3$ — взаимные ортонормированные базисы пространства M).

Вместе с тем, имеется бесконечное множество 4-винтов $D(\psi)$ ($\psi \in R$), которые также переводят вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$ и сохраняют инвариантной плоскость P , но отличаются от буста B наличием допол-

нительного пространственного поворота в плоскости $P_\perp$ на угол ψ :

$$D(\psi) = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \text{ch } \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \\ + \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* - \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \sin \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + \cos \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*, \quad (21.38)$$

причем $D = B$ при $\psi = 0$.

Кроме того, существует бесконечное множество бустов, которые, как и буст B , переводят вектор $\mathbf{e}_0$ в вектор $\mathbf{e}'_0$, но имеют инвариантные и неподвижные плоскости, отличающиеся от P и $P_\perp$ (примеры этих бустов приведены в конце доказательства теоремы).

Отметим, что, согласно (21.37) и (21.38), тензоры B и D имеют следующие матрицы компонент в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}_{i,j=0}^3$:

$$\begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (21.39)$$

Доказательство. Будем использовать обозначения, примененные в теореме. Так как плоскость P имеет сигнатуру $(+ -)$ и векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ образуют в ней ортонормированный базис, то

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1; \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (21.40)$$

Разложим вектор $\mathbf{e}'_0 \in P$ по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$:

$$\mathbf{e}'_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0 + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_1, \quad (21.41)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}'_0$ (рис. 21.5). Формула (21.41) совпадает с первой из формул Лоренца (10.9).

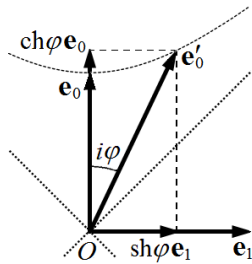


Рис. 21.5. Разложение единичного времениподобного вектора $\mathbf{e}'_0$ по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$.

Символ мнимой единицы i в обозначении угла между векторами указывает на необходимость использования гиперболических функций при оперировании с этим углом; пунктирная кривая — (псевдо)окружность единичного радиуса с центром в начале базиса O ; пунктирные прямые — сечение светового конуса.

Пользуясь зависимостями (21.30), (21.40) и $\text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = 1$, нетрудно проверить, что вектор $\mathbf{e}'_0$ вида (21.41) действительно является единичным и составляет с вектором $\mathbf{e}_0$ угол φ .

В разд. 10 показано, что гиперболический поворот (буст) B , преобразующий вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$, задается выражением (10.18):

$$B = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 - \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \\ + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

В силу (21.34), это выражение совпадает с (21.37):

$$B = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \\ + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \quad (21.42)$$

данная формула совпадает также со второй из формул (11.8).

Из обсуждения выражения (10.18) (с. 185) следует, что тензор B является искомым бустом, который переводит вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$, сохраняя инвариантной псевдоевклидову плоскость P и оставляя неподвижной пространственноподобную плоскость $P_\perp$, ортогональную P (в справедливости этого утверждения можно убедиться также путем непосредственной проверки действия тензора B на векторы плоскостей P и $P_\perp$).

Отметим, что хотя по условию теоремы $\mathbf{e}_0 \not\parallel \mathbf{e}'_0$, но формулы (21.41) и (21.42) верны и при $\mathbf{e}_0 \parallel \mathbf{e}'_0$, то есть при $\varphi = 0$. В этом случае они переходят в очевидные равенства $\mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}_0$ и $B = I$, где I — единичный тензор, имеющий вид (21.35).

Приведем два равенства, описывающие действие буста B на векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$. Из (21.42) с учетом (21.32) и (21.33) имеем:

$$B \cdot \mathbf{e}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_0; \\ B \cdot \mathbf{e}_1 = \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1, \quad (21.43)$$

где векторы $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$ — те же, что в (10.9) и (21.41).

Единственность буста B докажем методом от противного.

Пусть имеется еще один буст $\tilde{B}$, который, как и B , переводит вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$, сохраняя инвариантной плоскость P и оставляя неподвижной плоскость $P_\perp$. Разложим его по диадному базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}_{i,j=0}^3$:

$$\tilde{B} = b_{00} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + b_{01} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + b_{02} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* + b_{03} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3^* + \\ + b_{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + b_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + b_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + b_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^* + \\ + b_{20} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0^* + b_{21} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* + b_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + b_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \\ + b_{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0^* + b_{31} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^* + b_{32} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + b_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*, \quad (21.44)$$

где b_{ij} — компоненты буста $\tilde{B}$ в этом базисе.

Подействуем бустом $\tilde{B}$ на векторы $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. С помощью соотношений (21.32), (21.33) и (21.44) получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{B} \cdot \mathbf{e}_0 &= b_{00}\mathbf{e}_0 + b_{10}\mathbf{e}_1 + b_{20}\mathbf{e}_2 + b_{30}\mathbf{e}_3; \\ \tilde{B} \cdot \mathbf{e}_1 &= b_{01}\mathbf{e}_0 + b_{11}\mathbf{e}_1 + b_{21}\mathbf{e}_2 + b_{31}\mathbf{e}_3; \\ \tilde{B} \cdot \mathbf{e}_2 &= b_{02}\mathbf{e}_0 + b_{12}\mathbf{e}_1 + b_{22}\mathbf{e}_2 + b_{32}\mathbf{e}_3; \\ \tilde{B} \cdot \mathbf{e}_3 &= b_{03}\mathbf{e}_0 + b_{13}\mathbf{e}_1 + b_{23}\mathbf{e}_2 + b_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{21.45}$$

По условию, буст $\tilde{B}$ переводит вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$, сохраняя инвариантной плоскость P . Из этого вытекает, что он поворачивает всю плоскость P на угол φ , в частности, переводит, как и B , вектор $\mathbf{e}_1$ в $\mathbf{e}'_1$. Вместе с тем, буст $\tilde{B}$ оставляет неподвижной плоскость $P_\perp$, содержащую векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Следовательно,

$$\tilde{B} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}'_0; \quad \tilde{B} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1; \quad \tilde{B} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2; \quad \tilde{B} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3.\tag{21.46}$$

Подставим в (21.46) значения векторов $\tilde{B} \cdot \mathbf{e}_i$ из (21.45) и значения векторов $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_1$ из (21.43). Применяя теорему о единственности разложения вектора по базису, имеем:

$$\begin{aligned}b_{00} &= \text{ch } \varphi; & b_{10} &= \text{sh } \varphi; & b_{20} &= 0; & b_{30} &= 0; \\ b_{01} &= \text{sh } \varphi; & b_{11} &= \text{ch } \varphi; & b_{21} &= 0; & b_{31} &= 0; \\ b_{02} &= 0; & b_{12} &= 0; & b_{22} &= 1; & b_{32} &= 0; \\ b_{03} &= 0; & b_{13} &= 0; & b_{23} &= 0; & b_{33} &= 1.\end{aligned}$$

Отсюда и из (21.44) находим:

$$\tilde{B} = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \text{ch } \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*.\tag{21.47}$$

Сравнение выражений (21.42) и (21.47) показывает, что $\tilde{B} = B$, значит, буст B действительно единственный.

Теперь убедимся в наличии других тензоров, переводящих $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$.

Из (21.42) с учетом (21.34) видно, что буст B включает в себя тензор

$$I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^* = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,\tag{21.48}$$

который является единичным тензором в плоскости $P_\perp$ (см. формулу (10.17) и пояснение к ней). Именно присутствие этого тензора в составе буста B обеспечивает неподвижность плоскости $P_\perp$.

В разд. 4 главы 2 приведена формула (4.60), которая задает тензор поворота векторов в плоскости сигнатуры $(- -)$ (с. 63). С помощью этой формулы и (21.34) введем тензор $A(\psi)$, поворачивающий векторы в плоскости $P_\perp$ на угол ψ :

$$A(\psi) = \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* - \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \sin \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + \cos \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*. \quad (21.49)$$

Заменим в выражении (21.42) единичный тензор $I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$ тензором поворота $A(\psi)$. Полученный тензор обозначим символом $D(\psi)$:

$$D(\psi) = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \\ + \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* - \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^* + \sin \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^* + \cos \psi \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \quad (21.50)$$

заметим, что при $\psi = 0$ будет $A(0) = I_{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$ и $D(0) = B$.

Из выражений (21.50) и (11.19) следует, что тензор $D(\psi)$ является 4-винтом. Подействуем этим тензором на векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$. Применяя зависимости (21.32), (21.33), (21.43) и (21.50), получаем:

$$D(\psi) \cdot \mathbf{e}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_0 = B \cdot \mathbf{e}_0;$$

$$D(\psi) \cdot \mathbf{e}_1 = \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 = B \cdot \mathbf{e}_1.$$

Отсюда вытекает, что при любом ψ тензор $D(\psi)$ переводит вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$ и вектор $\mathbf{e}_1$ в $\mathbf{e}'_1$, подобно бусту B . Значит, векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ остаются в плоскости P после действия тензора $D(\psi)$ (потому что $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1 \in P$). А так как преобразование является линейным и векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ образуют базис в P , то сказанное означает, что тензор $D(\psi)$ не выводит векторы из плоскости P , то есть он сохраняет плоскость P инвариантной. Вместе с тем, тензор $D(\psi)$, как легко проверить, поворачивает векторы в плоскости $P_\perp$ на угол ψ (этот поворот осуществляется входящим в его состав тензором поворота $A(\psi)$ вида (21.49)).

На основании указанных свойств тензора $D(\psi)$, принимая во внимание, что $D(\psi) \neq B$ при $\psi \neq 0$ и что $D(\psi_1) \neq D(\psi_2)$ при $\psi_1 \neq \psi_2$ ($\psi_1, \psi_2 \in [0, 2\pi)$), заключаем, что действительно существует бесконечное множество 4-винтов, которые, как и буст B , переводят вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$ и сохраняют инвариантной плоскость P , при этом они отличаются от B тем, что производят дополнительный пространственный поворот в плоскости $P_\perp$. Эти 4-винты описываются формулой (21.50). Совпадение формулы (21.50) с формулой (21.38) доказывает справедливость последней.

Покажем, что наряду с бустом B существуют другие бусты, которые переводят, как и B , вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$, но имеют инвариантные и неподвижные плоскости, отличающиеся от плоскостей P и $P_\perp$.

Введем четверку векторов, зависящую от параметра a :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \frac{\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}'_0 + 2a\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}\sqrt{(\operatorname{ch} \varphi + 1) - 2a^2}} = \frac{(\operatorname{ch} \varphi + 1)\mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 + 2a\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}\sqrt{(\operatorname{ch} \varphi + 1) - 2a^2}}; \\ \mathbf{b}_1 &= \frac{\mathbf{e}'_0 - \mathbf{e}_0}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} \varphi - 1}} = \frac{(\operatorname{ch} \varphi - 1)\mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} \varphi - 1}}; \\ \mathbf{b}_2 &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi + 1}{(\operatorname{ch} \varphi + 1) - 2a^2}} \left[a\mathbf{e}_0 + a \frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\operatorname{sh} \varphi} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \right]; \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (21.51)$$

где в двух первых строках использована формула (21.41); участвующие здесь функции определены при

$$\varphi > 0; \quad |a| < \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi + 1}{2}}. \quad (21.52)$$

С помощью соотношений (21.31) и (21.51) нетрудно убедиться в том, что $\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ — ортонормированный базис пространства Минковского M . Пусть $\{\mathbf{b}_0^*, \mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \mathbf{b}_3^*\}$ — взаимный к нему базис; его векторы удовлетворяют равенствам (21.34) (с заменой в них векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_i^*$ векторами $\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{b}_i^*$ соответственно).

Составим буст B_a по образцу формулы (21.37), задающей буст B :

$$\begin{aligned} B_a &= \operatorname{ch} \chi \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^* + \operatorname{sh} \chi \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1^* + \\ &+ \operatorname{sh} \chi \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0^* + \operatorname{ch} \chi \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^* + \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^* + \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^*, \end{aligned} \quad (21.53)$$

здесь χ — вещественное число; векторы $\mathbf{b}_i$ определяются выражениями (21.51); буст B_a зависит от параметра a , входящего в (21.51).

По аналогии с установленными ранее свойствами буста B заключаем, что буст B_a поворачивает на угол χ векторы в псевдоевклидовой плоскости, содержащей векторы $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_1$, и оставляет неподвижными векторы в пространственноподобной плоскости, содержащей $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$. Из (21.51) вытекает, что при $a \neq 0$ эти плоскости не совпадают с P и $P_\perp$ (так как при $a \neq 0$ вектор $\mathbf{b}_0$ имеет составляющую вдоль вектора $\mathbf{e}_2$, ортогонального плоскости P , а вектор $\mathbf{b}_2$ имеет составляющие вдоль векторов $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$, ортогональных плоскости $P_\perp$).

Пользуясь формулами (21.32), (21.33), (21.41), (21.51) и (21.53), можно показать, что при угле χ , определяемом равенством

$$\operatorname{ch} \chi = \frac{\operatorname{ch} \varphi (\operatorname{ch} \varphi + 1) - a^2 (\operatorname{ch} \varphi - 1)}{(\operatorname{ch} \varphi + 1) + a^2 (\operatorname{ch} \varphi - 1)}, \quad (21.54)$$

выполняется зависимость

$$B_a \cdot \mathbf{e}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_0.$$

Эта зависимость означает, что при угле χ вида (21.54) и любом значении параметра a (удовлетворяющем второму из неравенств (21.52)) буст B_a преобразует вектор $\mathbf{e}_0$ в вектор $\mathbf{e}'_0$, причем, согласно сказанному выше, его инвариантная и неподвижная плоскости отличаются от P и $P_\perp$ (при $a \neq 0$). Следовательно, в самом деле имеется бесконечное множество бустов, которые, как и B , переводят вектор $\mathbf{e}_0$ в вектор $\mathbf{e}'_0$, но имеют инвариантные и неподвижные плоскости, отличающиеся от P и $P_\perp$. Итак, все утверждения теоремы 21.4 доказаны. ■

В теореме 21.4 утверждается единственность буста B . Подчеркнем, что единственность буста не обеспечивается одним только условием, что он переводит вектор $\mathbf{e}_0$ в $\mathbf{e}'_0$. Требуется еще, чтобы плоскость, содержащая эти векторы, оставалась инвариантной при действии буста.

Вновь рассмотрим три времениподобные прямые T , T' и T'' , проходящие через точку O и не лежащие в одной плоскости (рис. 21.6, *a*).

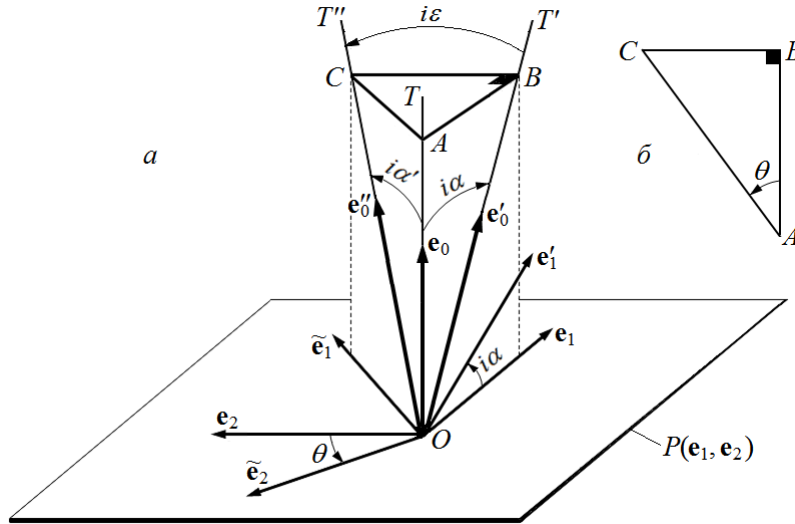


Рис. 21.6. Времениподобные прямые T , T' и T'' , пересекающиеся в точке O и не лежащие в одной плоскости (*a*), и треугольник ABC , вершины которого являются сечениями этих прямых плоскостью, ортогональной прямой T (*б*).

Обозначим единичные направляющие векторы прямых T , T' и T'' , ориентированные в сторону будущего, через $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}''_0$ соответственно. Благодаря тому, что эти векторы не лежат в одной плоскости, их ли-

нейная оболочка представляет собой трехмерное подпространство пространства Минковского M . А поскольку они времениподобные и сигнатура пространства M есть $(+ - -)$, то данное подпространство имеет сигнатуру $(+ - -)$, то есть оно является псевдоевклидовым. Обозначим его, как и прежде, символом M_3 .

Введем единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, следующим образом: вектор $\mathbf{e}_1$ ортогонален вектору $\mathbf{e}_0$, лежит в плоскости, содержащей прямые T и T' , и имеет то из двух возможных направлений, которое совпадает с направлением проекции на него вектора $\mathbf{e}_0'$, вектор $\mathbf{e}_2$ принадлежит подпространству M_3 , ортогонален векторам $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ и сонаправлен проекции на него вектора $\mathbf{e}_0''$, вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален подпространству M_3 (он может иметь любое из двух возможных направлений). Понятно, что векторы $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют ортонормированный базис подпространства M_3 и вместе с $\mathbf{e}_3$ составляют ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ пространства M . Считаем, что начала всех базисных векторов находятся в точке O .

Будем обозначать символом $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ плоскость, которая содержит векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (очевидно, что при ненулевых неколлинеарных векторах, имеющих общее начало, такая плоскость существует и единственна). На рис. 21.6, *a* показана плоскость $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (сам этот рисунок фактически изображает трехмерное подпространство M_3).

Примем дополнительное условие: пусть прямая T'' расположена по отношению к прямым T и T' таким образом, что вектор $\mathbf{e}_2$ принадлежит плоскости, содержащей прямые T' и T'' .

Зададим четыре тензора (оператора), осуществляющие преобразования пространства M :

- пространственный поворот A_ψ , реализующий поворот на угол ψ в пространственноподобной плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ при неподвижной псевдоевклидовой плоскости $P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3)$ (угол ψ отсчитывается от вектора $\mathbf{e}_1$ в направлении кратчайшего поворота к $\mathbf{e}_2$);
- гиперболический поворот (буст) B_α , который преобразует прямую T в прямую T' и имеет инвариантную псевдоевклидову плоскость, содержащую эти прямые;
- буст B'_ϵ , преобразующий прямую T' в T'' и имеющий инвариантную плоскость, содержащую эти прямые;
- буст $\tilde{B}_{\alpha'}$, переводящий прямую T в прямую T'' с инвариантной плоскостью, содержащей эти прямые.

Каждый из бустов имеет неподвижную пространственноподобную плоскость, ортогональную соответствующей инвариантной псевдоевклидовой плоскости. Согласно теореме 21.4, эти бусты — единственные,

обладающие указанными свойствами. Здесь индексы α , ε и α' обозначают углы гиперболических поворотов: α — угол между прямыми T и T' , ε — угол между прямыми T' и T'' , α' — угол между T и T'' (см. рис. 21.6).

Запишем эти тензоры в явном виде. Для этого введем ортонормированные базисы (свой для каждого тензора), в котором два вектора принадлежат инвариантной плоскости, а два другие принадлежат неподвижной плоскости.

Для тензоров A_ψ и B_α таким базисом служит $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, поскольку пары векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3\}$ принадлежат соответственно инвариантной и неподвижной плоскостям тензора A_ψ , а пары векторов $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ и $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ принадлежат инвариантной и неподвижной плоскостям тензора B_α .

Для буста B'_ε таким базисом является базис $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, получаемый из $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с помощью преобразования Лоренца (10.9) (с заменой в нем параметра φ углом α между векторами $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}'_0$):

$$\mathbf{e}'_0 = \text{ch } \alpha \mathbf{e}_0 + \text{sh } \alpha \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}'_1 = \text{sh } \alpha \mathbf{e}_0 + \text{ch } \alpha \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3; \quad (21.55)$$

в данном случае инвариантной плоскостью служит $P(\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_2)$, а неподвижной плоскостью — $P(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3)$. Покажем, это.

Ортонормированность базиса $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=0}^3$ вытекает из ортогональности преобразований Лоренца и ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^3$. Инвариантная плоскость буста B'_ε , согласно его определению, содержит прямые T' и T'' . Обозначим эту плоскость через $P(T', T'')$. Из $\mathbf{e}'_0 \in T'$ следует $\mathbf{e}'_0 \in P(T', T'')$. В силу принятого выше дополнительного условия, имеем: $\mathbf{e}_2 \in P(T', T'')$. А так как, по (21.55), $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2$, то $\mathbf{e}'_2 \in P(T', T'')$. Из принадлежности векторов $\mathbf{e}'_0$ и $\mathbf{e}'_2$ плоскости $P(T', T'')$ и их линейной независимости вытекает $P(\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_2) = P(T', T'')$. Следовательно, действительно инвариантной плоскостью буста B'_ε является плоскость $P(\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_2)$. Значит, его неподвижной плоскостью служит ортогональная ей плоскость $P(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3)$.

Подчеркнем, что тот факт, что базис $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ вида (21.55) является базисом указанного типа для буста B'_ε , обусловлен принятым дополнительным условием о принадлежности вектора $\mathbf{e}_2$ плоскости, содержащей прямые T' и T'' . Отметим, что базис $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ может быть получен из базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ посредством буста B_α :

$$\mathbf{e}'_i = B_\alpha \cdot \mathbf{e}_i \quad (i = 0, 1, 2, 3);$$

справедливость этой формулы легко проверяется с помощью приводимого далее выражения для буста B_α .

Теперь построим базис требуемого типа для буста $\tilde{B}_{\alpha'}$. Для этого спроецируем прямую T'' (вместе с $\mathbf{e}_0''$) на плоскость $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{e}}_1$ направляющий орт этой проекции, сонаправленный проекции вектора $\mathbf{e}_0''$ (см. рис. 21.6). Пусть θ — угол в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1$, отсчитываемый от $\mathbf{e}_1$ в направлении к $\tilde{\mathbf{e}}_1$. Тогда искомый базис $\{\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ может быть получен путем поворота базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ на угол θ в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\tilde{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{e}_0; \quad \tilde{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2; \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2; \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (21.56)$$

где учтено, что вектор $\mathbf{e}_2$ сонаправлен проекции на него вектора $\mathbf{e}_0''$ (это условие обеспечивает совпадение направлений поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\tilde{\mathbf{e}}_1$ и от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, что дает нужные знаки в (21.56) перед слагаемыми, содержащими $\mathbf{e}_2$). Инвариантной плоскостью буста $\tilde{B}_{\alpha'}$ служит псевдоевклидова плоскость $P(\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ (так как она содержит прямые T и T''), а его неподвижной плоскостью является ортогональная ей пространственноподобная плоскость $P(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

Будем помечать, как обычно, векторы базиса, взаимного к введенному базису, звездочкой.

Интересующие нас пространственный поворот A_ψ и бусты B_α , B'_ε и $\tilde{B}_{\alpha'}$ могут быть записаны с использованием введенных базисов и формул (11.8) и (21.37) в виде

$$\begin{aligned} A_\psi &= \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \cos \psi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \sin \psi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + \\ &\quad + \sin \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* + \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\ B_\alpha &= \operatorname{ch} \alpha \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{sh} \alpha \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \\ &\quad + \operatorname{sh} \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + \operatorname{ch} \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\ B'_\varepsilon &= \operatorname{ch} \varepsilon \mathbf{e}'_0 \mathbf{e}'_0^* + \operatorname{sh} \varepsilon \mathbf{e}'_0 \mathbf{e}'_2^* + \\ &\quad + \operatorname{sh} \varepsilon \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_0^* + \operatorname{ch} \varepsilon \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_2^* + \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1^* + \mathbf{e}'_3 \mathbf{e}'_3^*; \\ \tilde{B}_{\alpha'} &= \operatorname{ch} \alpha' \tilde{\mathbf{e}}_0 \tilde{\mathbf{e}}_0^* + \operatorname{sh} \alpha' \tilde{\mathbf{e}}_0 \tilde{\mathbf{e}}_1^* + \\ &\quad + \operatorname{sh} \alpha' \tilde{\mathbf{e}}_1 \tilde{\mathbf{e}}_0^* + \operatorname{ch} \alpha' \tilde{\mathbf{e}}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1^* + \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2^* + \tilde{\mathbf{e}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3^*. \end{aligned} \quad (21.57)$$

Перейдем в выражениях для тензоров B'_ε и $\tilde{B}_{\alpha'}$ к диадному базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}_{i,j=0}^3$, по которому разложены тензоры A_ψ и B_α . Для этого подставим в данные выражения значения векторов $\mathbf{e}'_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_i$ из (21.55) и (21.56) и значения векторов $\mathbf{e}_i^*$ и $\tilde{\mathbf{e}}_i^*$, получаемые из $\mathbf{e}'_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_i$ с помощью

равенств вида (21.34). После несложных преобразований находим:

$$\begin{aligned}
 B'_\varepsilon &= (\text{ch } \varepsilon \text{ ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* - \text{sh } \alpha \text{ ch } \alpha (\text{ch } \varepsilon - 1) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \text{sh } \varepsilon \text{ ch } \alpha \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* + \\
 &\quad + \text{sh } \alpha \text{ ch } \alpha (\text{ch } \varepsilon - 1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + (\text{ch}^2 \alpha - \text{ch } \varepsilon \text{ sh}^2 \alpha) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \text{sh } \varepsilon \text{ sh } \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + \\
 &\quad + \text{sh } \varepsilon \text{ ch } \alpha \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0^* - \text{sh } \varepsilon \text{ sh } \alpha \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* + \text{ch } \varepsilon \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*; \\
 \tilde{B}_{\alpha'} &= \text{ch } \alpha' \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^* + \text{sh } \alpha' \cos \theta \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^* + \text{sh } \alpha' \sin \theta \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2^* + \\
 &\quad + \text{sh } \alpha' \cos \theta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0^* + (\text{ch } \alpha' \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + k \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^* + \\
 &\quad + \text{sh } \alpha' \sin \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0^* + k \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^* + (\text{ch } \alpha' \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^*,
 \end{aligned} \tag{21.58}$$

где $k = \text{ch } \alpha' - 1$.

Из (21.57) и (21.58) вытекает, что рассматриваемые тензоры имеют следующие матрицы компонент в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$:

$$(A_\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (B_\alpha) = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & \text{sh } \alpha & 0 & 0 \\ \text{sh } \alpha & \text{ch } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{21.59}$$

$$(B'_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \text{ch } \varepsilon \text{ ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha & -\text{sh } \alpha \text{ ch } \alpha (\text{ch } \varepsilon - 1) & \text{sh } \varepsilon \text{ ch } \alpha & 0 \\ \text{sh } \alpha \text{ ch } \alpha (\text{ch } \varepsilon - 1) & \text{ch}^2 \alpha - \text{ch } \varepsilon \text{ sh}^2 \alpha & \text{sh } \varepsilon \text{ sh } \alpha & 0 \\ \text{sh } \varepsilon \text{ ch } \alpha & -\text{sh } \varepsilon \text{ sh } \alpha & \text{ch } \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{21.60}$$

$$(\tilde{B}_{\alpha'}) = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha' & \text{sh } \alpha' \cos \theta & \text{sh } \alpha' \sin \theta & 0 \\ \text{sh } \alpha' \cos \theta & \text{ch } \alpha' \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (\text{ch } \alpha' - 1) & 0 \\ \text{sh } \alpha' \sin \theta & \sin \theta \cos \theta (\text{ch } \alpha' - 1) & \text{ch } \alpha' \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21.61}$$

где матрицы тензоров обозначены символами теми же, что и тензоры, но заключенными в круглые скобки.

Отметим, что если угол, указанный в качестве индекса при тензоре, принимает нулевое значение, то этот тензор обращается в единичный тензор (осуществляющий тождественное преобразование), а его матрица в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ становится единичной матрицей.

Построим плоскость P_A , параллельную плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и проходящую через точку $A \in T$ ($A \neq O$; см. рис. 21.6, а). Так как векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ортогональны вектору $\mathbf{e}_0$, лежащему на прямой T , то плоскость $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и параллельная ей плоскость P_A ортогональны T . В силу времениподобности прямой T , из этого следует, что обе плоскости

имеют сигнатуру $(- -)$, то есть их геометрические свойства совпадают со свойствами собственно евклидовой плоскости. Пусть B и C — точки пересечения плоскости P_A с прямыми T' и T'' . Треугольник в этой плоскости с вершинами A , B и C обозначим символом $\triangle ABC$ (он изображен на рис. 21.6,б).

Линия пересечения плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ с плоскостью $P(T', T'')$ содержит вектор $\mathbf{e}_2$, потому что $\mathbf{e}_2 \in P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ по определению плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и одновременно $\mathbf{e}_2 \in P(T', T'')$ согласно принятому дополнительному условию. Линия пересечения плоскости P_A с плоскостью $P(T', T'')$ содержит отрезок BC (так как B и C являются точками пересечения плоскости P_A с прямыми T' и T''). Если две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, то, как известно, линии их пересечения с этой плоскостью параллельны. Поэтому $BC \parallel \mathbf{e}_2$. Отсюда и из $\mathbf{e}_2 \perp P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ и $P(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) = P(T, T')$ следует $BC \perp P(T, T')$. С учетом $AB \subset P(T, T')$ это означает, что $BC \perp AB$ (на рис. 21.6,б вершина B , в которой сходятся ортогональные отрезки BC и AB , помечена черным квадратом). Таким образом, условие $\mathbf{e}_2 \in P(T', T'')$ влечет $BC \perp AB$. Понятно, что верно и обратное: условие $BC \perp AB$ влечет $\mathbf{e}_2 \in P(T', T'')$. Угол θ , определенный как угол в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1$, равен углу в плоскости P_A между отрезками AB и AC (это объясняется тем, что $AB \parallel \mathbf{e}_1$ и $AC \parallel \tilde{\mathbf{e}}_1$, ибо P_A и $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ пересекают каждую из плоскостей $P(T, T')$ и $P(T, T'')$ по параллельным прямым).

На основании изложенного заключаем, что рассматриваемая ситуация тождественна той, к которой относится теорема 21.1 (ср. рисунки 21.1 и 21.6).

Тот факт, что тензоры A_ψ , B_α , B'_ϵ и $\tilde{B}_{\alpha'}$, задаваемые формулами (21.57), представляют собой пространственный поворот (тензор A_ψ) и бусты (три остальных тензора) вытекает непосредственно из строения этих формул. (В этом можно убедиться также, проанализировав действие тензоров на векторы, принадлежащие их инвариантным и неподвижным плоскостям.)

В соответствии с определением бустов B_α , B'_ϵ и $\tilde{B}_{\alpha'}$, первый из них преобразует прямую T в прямую T' , второй — прямую T' в T'' и третий — прямую T в T'' . Докажем, что формулы (21.57) и (21.58) обеспечивают выполнение этих условий.

В связи с тем, что бусты, являясь ортогональными тензорами, сохраняют метрику пространства, в частности, сохраняют длины векторов, достаточно доказать, что бусты переводят друг в друга единичные направляющие векторы прямых T , T' и T'' . Итак, докажем, что выпол-

няются следующие равенства:

$$B_\alpha \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}'_0; \quad B'_\varepsilon \cdot \mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}''_0; \quad \tilde{B}_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}''_0. \quad (21.62)$$

Из формул (21.57), (21.32) и (21.55) находим:

$$B_\alpha \cdot \mathbf{e}_0 = \operatorname{ch} \alpha \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \alpha \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_0;$$

это подтверждает справедливость первого равенства (21.62). Следовательно, буст B_α действительно переводит прямую T в T' .

Очевидно, что $\{\mathbf{e}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1\}$ — ортонормированный базис в плоскости $P(T, T'')$ (см. рис. 21.6, а). Разложим вектор $\mathbf{e}''_0 \in T''$ по этому базису:

$$\mathbf{e}''_0 = \operatorname{ch} \alpha' \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \alpha' \tilde{\mathbf{e}}_1,$$

где α' — угол между прямыми T и T'' ; подстановка сюда значения вектора $\tilde{\mathbf{e}}_1$ из (21.56) дает:

$$\mathbf{e}''_0 = \operatorname{ch} \alpha' \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \alpha' \cos \theta \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \alpha' \sin \theta \mathbf{e}_2. \quad (21.63)$$

Выше было сделано заключение, позволяющее применить здесь теорему 21.1. С помощью формул (21.2), входящих в эту теорему, преобразуем выражение (21.63) к виду

$$\mathbf{e}''_0 = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varepsilon \mathbf{e}_2. \quad (21.64)$$

Из (21.57), учитывая ортонормированность базиса $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ и зависимости (21.55), получаем:

$$B'_\varepsilon \cdot \mathbf{e}'_0 = \operatorname{ch} \varepsilon \mathbf{e}'_0 + \operatorname{sh} \varepsilon \mathbf{e}'_2 = \operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{ch} \alpha \mathbf{e}_0 + \operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{sh} \alpha \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \varepsilon \mathbf{e}_2,$$

что вместе с (21.64) приводит к равенству $B'_\varepsilon \cdot \mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}''_0$, совпадающему со вторым равенством (21.62). Значит, буст B'_ε в самом деле преобразует прямую T' в T'' .

Используя вторую формулу (21.58), находим:

$$\tilde{B}_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_0 = \operatorname{ch} \alpha' \mathbf{e}_0 + \operatorname{sh} \alpha' \cos \theta \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} \alpha' \sin \theta \mathbf{e}_2;$$

отсюда и из (21.63) вытекает третье равенство (21.62): $\tilde{B}_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}''_0$. Это означает, что буст $\tilde{B}_{\alpha'}$, как и должно быть, переводит прямую T в прямую T'' .

Таким образом, бусты B_α , B'_ε и $\tilde{B}_{\alpha'}$, задаваемые формулами (21.57) и (21.58), действительно осуществляют требуемые преобразования прямых T , T' и T'' .

Теорема 21.5. О суперпозиции бустов. Пусть $BC \perp AB$ или, что то же самое, $\mathbf{e}_2 \in P(T', T'')$ (это условие обеспечивает выполнение теоремы 21.1). Тогда

$$B'_\varepsilon \cdot B_\alpha = \tilde{B}_{\alpha'} \cdot A_\psi; \quad (21.65)$$

$$\tilde{B}_{\alpha'}^{-1} \cdot B'_\varepsilon \cdot B_\alpha = A_\psi, \quad (21.66)$$

где пространственный поворот A_ψ и гиперболические повороты (бусты) B_α , B'_ε и $\tilde{B}_{\alpha'}$ задаются формулами (21.57) и (21.58); $\tilde{B}_{\alpha'}^{-1}$ — тензор, обратный к $\tilde{B}_{\alpha'}$; точка — знак скалярного умножения тензоров; углы α , ε , α' и θ , входящие в (21.57) и (21.58), удовлетворяют соотношениям (21.2) и (21.3). Равенства (21.65) и (21.66) выполняются при угле ψ , связанном с углами α , ε , α' и θ зависимостями

$$\begin{aligned} \sin \psi &= -\frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon + 1}; \\ \cos \psi &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \varepsilon + 1}; \end{aligned} \quad (21.67)$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \psi) &= \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \varepsilon}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \varepsilon - 1}} = \frac{\operatorname{th} \varepsilon}{\operatorname{th} \alpha'}; \\ \cos(\theta - \psi) &= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \varepsilon - 1}} = \frac{\operatorname{th} \alpha}{\operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{th} \alpha'}. \end{aligned} \quad (21.68)$$

Равенства (21.65) и (21.66) равносильны. Два равенства в (21.67) равносильны и два равенства в (21.68) тоже равносильны (ибо одно из них получается из другого с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Пары равенств (21.67) и (21.68) равносильны между собой. Из первого равенства (21.67) следует $\psi < 0$ (потому что $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$; углы ψ и θ отсчитываются в направлении от AB к AC или, что то же самое, в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, см. рис. 21.6).

Напомним, что в суперпозиции тензоров (операторов) преобразования выполняются справа налево, то есть в (21.66) сначала действует тензор B_α , затем тензор B'_ε и потом тензор $\tilde{B}_{\alpha'}^{-1}$. Операция скалярного умножения тензоров осуществляется по правилу, которое сформулировано в разд. 2 главы 2 (с. 21) и иллюстрировано там же примером (2.3).

Следствие. В соответствии с равенством (21.66), суперпозиция трех указанных бустов, преобразующих времениподобные прямые T , T' и T'' по схеме $T \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow T$, представляет собой один пространственный поворот в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, ортогональной прямой T .

Доказательство теоремы 21.5. Равенство (21.65) можно доказать перемножением тензоров, применяя формулы (21.57) и (21.58). Но вместо этого можно перемножить матрицы тензоров в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$ (см. правило использования матриц вместо тензоров в разд. 2 главы 2, с. 32).

Из (21.59) – (21.61) после преобразований находим:

$$(B'_\varepsilon) \cdot (B_\alpha) = \begin{pmatrix} \text{ch } \varepsilon \text{ ch } \alpha & \text{sh } \alpha & \text{sh } \varepsilon \text{ ch } \alpha & 0 \\ \text{ch } \varepsilon \text{ sh } \alpha & \text{ch } \alpha & \text{sh } \varepsilon \text{ sh } \alpha & 0 \\ \text{sh } \varepsilon & 0 & \text{ch } \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (21.69)$$

$$(\tilde{B}_{\alpha'}) \cdot (A_\psi) = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha' & \text{sh } \alpha' \cos(\theta - \psi) \\ \text{sh } \alpha' \cos \theta & \text{ch } \alpha' \cos \theta \cos(\theta - \psi) + \sin \theta \sin(\theta - \psi) \\ \text{sh } \alpha' \sin \theta & \text{ch } \alpha' \sin \theta \cos(\theta - \psi) - \cos \theta \sin(\theta - \psi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sh } \alpha' \sin(\theta - \psi) & 0 \\ \text{ch } \alpha' \cos \theta \sin(\theta - \psi) - \sin \theta \cos(\theta - \psi) & 0 \\ \text{ch } \alpha' \sin \theta \sin(\theta - \psi) + \cos \theta \cos(\theta - \psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21.70)$$

здесь точка — знак умножения матриц.

Подставляя в правую часть выражения (21.70) значения функций $\text{ch } \alpha'$, $\text{sh } \alpha'$, $\sin \theta$ и $\cos \theta$ из (21.2) и (21.3), получаем матрицу, которая при выполнении зависимостей (21.68) совпадает с матрицей, стоящей в правой части выражения (21.69). Это доказывает равенство (21.65).

Поскольку бусты являются ортогональными тензорами, то для каждого из них существует обратный тензор, поэтому тензор $\tilde{B}_{\alpha'}^{-1}$ существует. Умножение обеих частей равенства (21.65) слева на этот тензор приводит к равенству (21.66), а умножение обеих частей равенства (21.66) слева на тензор $\tilde{B}_{\alpha'}$ дает равенство (21.65), значит, эти равенства эквивалентны. Поэтому из доказанной справедливости равенства (21.65) вытекает справедливость равенства (21.66).

Равносильность зависимостей (21.67) и (21.68) доказывается с помощью зависимостей (21.3) и известных тригонометрических формул, связывающих синус и косинус разности углов с синусами и косинусами самих углов. ■

Теоремы 21.1 и 21.5 относятся к случаю, когда выполняется условие $BC \perp AB$ (или эквивалентное условие $\mathbf{e}_2 \in P(T', T'')$). В этом случае формулы (21.2), (21.3) и (21.67) позволяют найти углы α' , θ и ψ

по двум известным углам α и ε , в связи с чем эти формулы принято называть *двухпараметрическими*. В более общем случае (не требующем выполнения условия $BC \perp AB$) формулы (21.9) выражают углы α' и θ через три параметра — через углы α и ε и скалярное произведение $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$. В этом случае можно вывести также формулы для угла ψ (аналогичные формулам (21.67)), которые выражают угол ψ через эти же три параметра α , ε и $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$. Такие формулы называются *трехпараметрическими*.

В приведенных выше теоремах считается, что $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha' > 0$ и $\theta > 0$. Однако некоторые из полученных формул, как легко убедиться, верны и при нулевых значениях углов.

Применим полученные геометрические соотношения к описанию вращения электрона.

Будем моделировать электрон материальной точкой, под которой, напомним, мы понимаем конструкцию, состоящую из точки и скрепленных с ней векторов (см. разд. 18).

Введем в пространстве Минковского M инерциальную систему отсчета $\{T, G\}$, которую назовем *исходной* (T — ось времени, G — физическое пространство; $G \perp T$). Придадим материальной точке, покоящейся относительно системы отсчета $\{T, G\}$, скорость $\mathbf{V}$ посредством буста B_α ($\mathbf{V} \in G$) и введем инерциальную систему отсчета $\{T', G'\}$, получаемую из $\{T, G\}$ действием этого же буста. Сразу же придадим материальной точке бустом B'_ε добавочную скорость $\mathbf{v}'$ относительно системы отсчета $\{T', G'\}$, ортогональную скорости $\mathbf{V}$ ($\mathbf{v}' \in G'$; $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$). Пусть $\{T'', G''\}$ — инерциальная система отсчета, получаемая из $\{T', G'\}$ действием буста B'_ε . Понятно, что $\{T', G'\}$ и $\{T'', G''\}$ — инерциальные системы отсчета, мгновенно сопутствующие материальной точке в промежуточном и конечном состояниях, при этом система отсчета $\{T', G'\}$ движется относительно $\{T, G\}$ со скоростью $\mathbf{V}$, а система отсчета $\{T'', G''\}$ движется относительно $\{T', G'\}$ со скоростью $\mathbf{v}'$.

Обозначим: $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки в конечном состоянии по отношению к исходной системе отсчета $\{T, G\}$ ($\mathbf{v} \in G$). Очевидно, что вектор $\mathbf{v}$ одновременно есть скорость системы отсчета $\{T'', G''\}$ относительно $\{T, G\}$. В исследуемом случае (при $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$) скорость $\mathbf{v}$ связана с $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}'$ законом сложения скоростей в простейшей форме (12.22):

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}, \quad (21.71)$$

где $V = |\mathbf{V}|$; c — скорость света.

Поскольку вектор $\mathbf{V}$ является скоростью движения системы отсчета $\{T', G'\}$ относительно системы отсчета $\{T, G\}$, то он лежит в физическом пространстве G , поэтому он ортогонален оси времени T ; вместе с тем, вектор $\mathbf{V}$ лежит в плоскости $P(T, T')$ и направлен от T к T' (рис. 21.7).

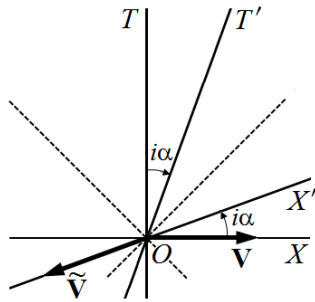


Рис. 21.7. Инерциальные системы отсчета $\{T, G\}$ и $\{T', G'\}$, движущиеся относительно друг друга.

$\mathbf{V}$ — скорость системы отсчета $\{T', G'\}$ относительно $\{T, G\}$; $\tilde{\mathbf{V}}$ — скорость системы отсчета $\{T, G\}$ относительно $\{T', G'\}$ ($\mathbf{V} \in G$; $\tilde{\mathbf{V}} \in G'$; $\tilde{\mathbf{V}} \neq -\mathbf{V}$; $|\tilde{\mathbf{V}}| = |\mathbf{V}|$); X и X' — сечения физических пространств G и G' плоскостью, проходящей через оси времени T и T' ; штриховые линии — сечение светового конуса.

Из указанных свойств вектора $\mathbf{V}$ следует, что он параллелен отрезку AB на рис. 21.6 и направлен от точки A к точке B . Аналогичным образом вектор $\mathbf{v}$, являясь скоростью системы отсчета $\{T'', G''\}$ относительно $\{T, G\}$, ортогонален прямой T , лежит в плоскости $P(T, T'')$ и направлен от T к T'' , поэтому вектор $\mathbf{v}$ параллелен отрезку AC на рис. 21.6 и направлен от A к C . Сказанное означает, что *угол θ между отрезками AB и AC есть угол поворота вектора скорости материальной точки при реализации двух последовательных бустов*. Учитывая это, будем трактовать вектор $\mathbf{v}$ как вектор скорости $\mathbf{V}$, повернутый на угол θ относительно своего исходного направления, а вектор $\mathbf{v}'\sqrt{1 - (V/c)^2}$, входящий в (21.71), как приращение вектора $\mathbf{V}$:

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{v}' \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}. \quad (21.72)$$

На основании равенств (21.27), (21.28), условия $\mathbf{v}' \perp \mathbf{V}$, теоремы 21.3 и эквивалентности (21.23) (в которой в данном случае $BD = BC$) заключаем, что рассматриваемая ситуация описывается теоремами 21.1 и 21.5 и иллюстрируется рисунками 21.1 и 21.6.

В соответствии с формулами (21.26), имеем:

$$\text{th } \alpha = \frac{V}{c}; \quad \text{th } \varepsilon = \frac{v'}{c}; \quad \text{th } \alpha' = \frac{v}{c}, \quad (21.73)$$

где $V = |\mathbf{V}|$; $v' = |\mathbf{v}'|$; $v = |\mathbf{v}|$.

С помощью (21.3), (21.68) и (21.73) находим:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\operatorname{th} \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{th} \alpha'} = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \frac{v'}{v}; \\ \sin(\theta - \psi) &= \frac{\operatorname{th} \varepsilon}{\operatorname{th} \alpha'} = \frac{v'}{v},\end{aligned}\quad (21.74)$$

откуда

$$\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \sin(\theta - \psi) > 0, \quad (21.75)$$

где учтено, что $\operatorname{ch} \alpha > 0$, $v' > 0$ и $v > 0$ (при $\varepsilon > 0$ и $\alpha' > 0$).

Проанализируем случай, когда добавочная скорость v' значительно меньше скорости V : $v' \ll V$. Это неравенство эквивалентно неравенству $v' \ll v$ (так как из (21.71) вытекает, что малая по модулю добавка $\mathbf{v}'\sqrt{1-(V/c)^2}$ к вектору $\mathbf{V}$ приводит к малому отличию модуля вектора $\mathbf{v}$ от модуля вектора $\mathbf{V}$). Отсюда и из (21.74) в силу $\operatorname{ch} \alpha \geq 1$ получаем: $\sin \theta \ll 1$ и $\sin(\theta - \psi) \ll 1$, поэтому $\sin \theta \approx \theta$ и $\sin(\theta - \psi) \approx \theta - \psi$ (при $v' \ll v$). Вместе с (21.75) это дает:

$$\theta \underset{v' \ll v}{\approx} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} (\theta - \psi)$$

или в эквивалентной форме

$$\psi \underset{v' \ll V}{\approx} -(\operatorname{ch} \alpha - 1) \theta, \quad (21.76)$$

где мы заменили условие $v' \ll v$ эквивалентным условием $v' \ll V$. Зависимость $\theta \approx \sin \theta$ и неравенство, входящее в (21.75), влекут $\theta > 0$, кроме того, $\operatorname{ch} \alpha > 1$ (при $\alpha > 0$). Из этих неравенств и (21.76) следует, что $\psi < 0$, как и утверждается в теореме 21.5.

Итак, если придать материальной точке скорость $\mathbf{V}$ и сразу же сообщить ей малую добавочную скорость $\mathbf{v}'$, ортогональную $\mathbf{V}$, то, согласно (21.65), состояние материальной точки будет таким же, как если сначала произвести пространственный поворот материальной точки на угол ψ вида (21.76) и затем придать ей скорость $\mathbf{v}$ в направлении, составляющем угол θ с направлением скорости $\mathbf{V}$ (все преобразования должны быть произведены посредством тензоров, входящих в (21.65)).

До сих пор мы считали, что рассматриваемые преобразования реализуются в один и тот же момент времени. Теперь «включим» время t (измеряемое в исходной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$) и будем считать, что величины ψ и θ являются функциями времени t и что в течение

каждого малого промежутка времени Δt реализуются поворот вектора скорости $\mathbf{V}$ на угол $\Delta\theta$ и поворот материальной точки на угол $\Delta\psi$, причем эти углы связаны между собой зависимостью вида (21.76):

$$\Delta\psi \underset{\Delta V \ll V}{\approx} -(\operatorname{ch} \alpha - 1) \Delta\theta = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Delta\theta, \quad (21.77)$$

где применена первая формула (10.4) и учтено, что из $v' \ll V$ и (21.72) следует $\Delta V = |\Delta \mathbf{V}| \ll V$.

Разделим крайние части выражения (21.77) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Полагая функции $\psi(t)$ и $\theta(t)$ дифференцируемыми и скорость V постоянной, получаем:

$$\Omega_W = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} - 1 \right) \omega, \quad (21.78)$$

где $\Omega_W = d\psi/dt$ — угловая скорость вращения материальной точки (вместе со скрепленными с ней векторами); $\omega = d\theta/dt$ — угловая скорость вращения вектора скорости $\mathbf{V}$ (она совпадает с орбитальной угловой скоростью при движении материальной точки по круговой орбите). Индекс W в символе Ω_W указывает на то, что данная формула получена с помощью метода, разработанного Вигнером (Wigner).

Принимая во внимание, что углы ψ и θ измеряются в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и возрастают в одном и том же направлении (от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$), можно заменить в равенстве (21.78) скалярные величины Ω_W и ω соответствующими псевдовекторами, ориентированными вдоль вектора $\mathbf{e}_3$, ортогонального плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и образующего вместе с $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ правоориентированный ортонормированный базис в физическом пространстве Γ :

$$\bar{\Omega}_W = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \bar{\omega}; \quad (21.79)$$

где скорость обозначена буквой v вместо V для удобства сравнения этой формулы с полученной ранее формулой.

Таким образом, если материальная точка движется с постоянной по модулю скоростью под действием бустов, которые в каждый момент времени удовлетворяют теореме 21.5, то она и скрепленные с ней векторы вращаются с угловой скоростью $\bar{\Omega}_W$ вида (21.79) в направлении, противоположном направлению вращения вектора скорости.

Представленный способ вывода формулы (21.79) следует работам Е. П. Вигнера [15–18]. Однако в этих работах допущена неточность. Вместо формул

$$\sin \theta = \frac{\text{sh } \varepsilon}{\text{sh } \alpha'} \quad \text{и} \quad \sin(\theta - \psi) = \frac{\text{ch } \alpha \text{ sh } \varepsilon}{\text{sh } \alpha'} \quad (21.80)$$

(см. (21.3) и (21.68)) получены формулы

$$\sin \theta = \frac{\text{ch } \alpha \text{ sh } \varepsilon}{\text{sh } \alpha'} \quad \text{и} \quad \sin(\theta - \psi) = \frac{\text{sh } \varepsilon}{\text{sh } \alpha'} \quad (21.81)$$

(см. в [16] выражения (8а) и (8б), где угол $\theta - \psi$ обозначен через δ). В результате вытекающая из [16] формула для скорости вращения материальной точки оказывается отличной от (21.79).

Причина несовпадения формул (21.81) с формулами (21.80) заключается в том, что они выведены Вигнером на основе равенства

$$B_\varepsilon \cdot B_\alpha = \tilde{B}_{\alpha'} \cdot A_\psi \quad (21.82)$$

(см. в [16] нумерованную формулу после (8б); здесь применены наши обозначения). Равенство (21.82) содержит буст B_ε , осуществляющий гиперболический поворот в плоскости $P(T, \mathbf{v}')$, вместо требуемого в данном случае буста B'_ε , который производит гиперболический поворот в плоскости $P(T', T'') = P(T', \mathbf{v}')$ (см. равенство (21.65)).

Сравнение формулы (21.79) с (21.1) показывает, что угловая скорость вращения электрона, рассчитанная по методу Вигнера, совпадает с угловой скоростью по Ферми-Уолкеру: $\bar{\Omega}_W = \bar{\Omega}_F$. Однако повторим сказанное ранее, что *перенос векторов по Ферми–Уолкеру, вращение Вигнера и прецессия Томаса требуют такого воздействия на электрон, которое не реализуется в атоме*. Тем не менее, разработанный Е. П. Вигнером метод исследования позволил вывести важные соотношения между углами поворота векторов в пространстве Минковского.

22. О недостатках точечной модели электрона

В современной физике считается, что электрон представляет собой точечный объект. Однако точечная модель электрона обладает принципиальными недостатками. В частности, такая модель:

- приводит к бесконечной энергии собственного электромагнитного поля электрона;
- не позволяет рассчитать самодействие электрона (из-за бесконечного значения собственного поля в месте нахождения электрона);
- не дает возможности вычислить спин электрона по обычным правилам механики (потому что вращающаяся точка неотличима от невращающейся и ее собственный момент количества движения всегда равен нулю).

Совершенно ясно, что любые материальные тела, в том числе электрон, не могут иметь нулевые размеры, то есть быть ничем. Модель электрона в виде точки — только первое приближение к реальности, математическая абстракция удобная лишь при анализе ситуации вдали от электрона.

В предыдущих разделах доказано, что если под материальной точкой, моделирующей электрон, понимать не просто геометрическую точку, а точку со скрепленными с ней векторами, то удастся получить важные результаты, согласующиеся с данными опытов. Этот факт служит существенным доводом в пользу того, что электрон имеет внутреннюю структуру, то есть не является точкой.

В следующих двух главах строится модель электрона, в которой он изображается не точечным геометрическим объектом. Эта модель успешно описывает свойства электронов и не имеет отмеченных выше недостатков.

Глава 4

«ТОЧЕЧНАЯ» ЧАСТИЦА

1. Наводящие соображения

Согласно методологии механики, материальные тела должны моделироваться геометрическими объектами той же размерности, какую имеет базисное геометрическое пространство (см. главу 1). В теории относительности базисное пространство является четырехмерным, поэтому *материальные тела должны моделироваться четырехмерными геометрическими объектами* (геометрические объекты большей размерности не помещаются внутрь пространства, а геометрические объекты меньшей размерности могут использоваться только для упрощения решения отдельных частных задач).

Поскольку специальная теория относительности создавалась для описания электродинамики, то естественно принять в качестве модели электрона четырехмерный геометрический объект, симметрия которого описывается группой Лоренца — группой симметрии пространства Минковского M . Таким объектом является в пространстве M четырехмерный шар, то есть тело, ограниченное трехмерной сферой.

Сферой, напомним, называется множество точек пространства, равноудаленных от заданной точки, называемой *центром* сферы.

В пространстве Минковского сфера, имеющая пространственноподобный радиус, задается уравнением (6.2) из главы 2:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -R^2, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек сферы относительно ее центра; R — радиус сферы ($R > 0$).

Из теорем 6.1, 6.4 и 6.5 главы 2 следует, что сфера вида (1.1) лоренц-инвариантна, ее асимптотической гиперповерхностью служит световой (изотропный) конус с вершиной в центре сферы, а сама сфера

представляет собой линейчатую гиперповерхность с изотропными образующими. Такая сфера, как показано в разд. 6 главы 2, является аналогом однополостного гиперboloида в трехмерном собственно евклидовом пространстве (рис. 1.1).

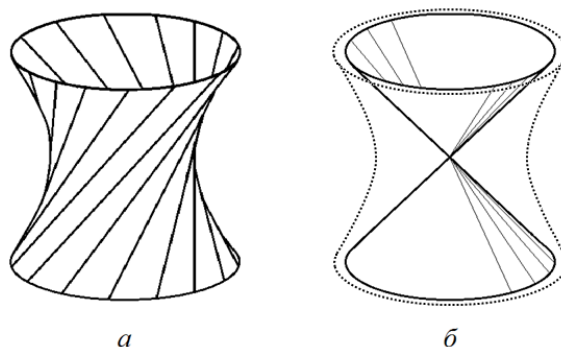


Рис. 1.1. Однополостный гиперboloид (а) и его асимптотический конус (б) в трехмерном собственно евклидовом пространстве.

Обе фигуры неограниченно продолжаются вверх и вниз; на рис. а показана одна из двух систем прямых образующих однополостного гиперboloида; на рис. б гиперboloид показан пунктиром.

Сказанное свидетельствует о целесообразности построения модели электрона в форме четырехмерного шара. Однако очевидно, что работать с таким объектом непросто, поэтому сначала рассмотрим его упрощенный вариант.

Взглянем на данный объект издали — с расстояния, существенно превосходящего радиус сферы. Тогда талия гиперboloида будет казаться очень тонкой, и мы фактически увидим вместо сферы ее асимптотическую гиперповерхность, то есть световой конус с вершиной в центре сферы. Математически это эквивалентно устремлению в уравнении сферы (1.1) радиуса сферы R к нулю, что приводит к уравнению светового конуса

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0. \quad (1.2)$$

Сравнение уравнений (1.1) и (1.2) показывает, что *световой конус представляет собой сферу нулевого радиуса в псевдоевклидовом пространстве* (напомним, что он состоит из изотропных прямых, проходящих через его вершину).

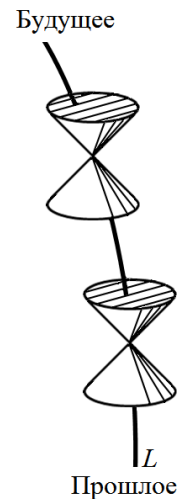
Примем следующие определения.

Частица — геометрическая конструкция, моделирующая электрон и имеющая форму четырехмерного шара в пространстве Минковского. Центр шара называется *центром* частицы; мировая линия центра шара — *мировой линией* частицы. Построению модели электрона в форме шара ненулевого радиуса посвящена глава 5.

«*Точечная*» *частица* — упрощенный вариант модели, при котором внешней границей частицы служит световой конус, то есть сфера нулевого радиуса. (Точечной она названа, потому что сечение ее трехмерным физическим пространством, проходящим через ее центр, имеет нулевой размер, а в кавычках, так как она неограниченно простирается в будущее и прошлое.) Именно этот вариант модели электрона рассматривается в настоящей главе (рис. 1.2).

Рис. 1.2. «Точечная» частица, движущаяся вдоль времениподобной мировой линии L .

Частица неограниченно продолжается в прошлое и будущее (ее изображение дано с понижением размерности на единицу).



Какова внутренняя структура такого объекта? Ответ на этот вопрос вытекает из анализа взаимодействия частиц.

Рассмотрим две «точечные» частицы λ и λ_1 , движущиеся в пространстве M вдоль времениподобных мировых линий L и L_1 (рис. 1.3). Будем полагать, что их взаимодействие складывается из воздействия частицы λ на λ_1 и воздействия частицы λ_1 на λ , подчиняющихся одинаковым закономерностям. Для определенности будем вести речь о воздействии частицы λ на λ_1 . Сконструируем возможный закон такого воздействия.

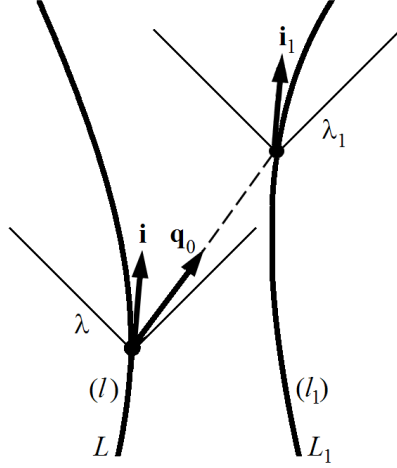


Рис. 1.3. «Точечные» частицы λ и λ_1 , движущиеся вдоль мировых линий L и L_1 .

$\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}_1$ — 4-скорости частиц λ и λ_1 (единичные касательные векторы к мировым линиям L и L_1 , ориентированные в сторону будущего и имеющие начала в центрах частиц); l и l_1 — собственные времена частиц (натуральные параметры на линиях L и L_1 , возрастающие в направлении будущего); тонкие прямые линии — световые конусы, служащие границами частиц (показаны только световые конусы будущего).

Глядя на рис. 1.3, естественно допустить, что результатом воздействия частицы λ на λ_1 является изменение 4-скорости $\mathbf{i}_1$ частицы λ_1 (это влечет изменение кривизны мировой линии L_1 и воспринимается на опыте как ускорение частицы λ_1). Так как в общем случае воздействие различно в разных точках мировой линии L_1 , то 4-скорость $\mathbf{i}_1$ частицы λ_1 является функцией ее собственного времени l_1 : $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1(l_1)$, будем считать эту функцию дифференцируемой. Простейший закон воздействия (линейный по вектору $\mathbf{i}_1$ и пропорциональный длительности воздействия dl_1) имеет вид

$$d\mathbf{i}_1 = K \cdot \mathbf{i}_1 dl_1, \quad (1.3)$$

где $d\mathbf{i}_1$ — приращение вектора $\mathbf{i}_1$ при изменении l_1 на величину dl_1 (точнее, дифференциал функции $\mathbf{i}_1(l_1)$); K — линейный оператор (двухвалентный тензор); точка — операция скалярного умножения. Предположим, что характеристики частицы λ_1 , испытывающей воздействие, входят в выражение для K только через некоторый скалярный множитель a_1 . Тогда закон воздействия частицы λ на частицу λ_1 может быть записан вместо (1.3) в форме

$$d\mathbf{i}_1 = a_1 F \cdot \mathbf{i}_1 dl_1 \quad (1.4)$$

или, что то же самое,

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dl_1} = a_1 F \cdot \mathbf{i}_1, \quad (1.5)$$

где $d\mathbf{i}_1/dl_1$ — производная функции $\mathbf{i}_1(l_1)$; a_1 — скаляр, зависящий только от характеристик частицы λ_1 ; F — двухвалентный тензор, который не зависит от характеристик частицы λ_1 , а определяется характеристиками частицы λ , оказывающей воздействие, и параметрами взаимного расположения частиц. Все величины в законе (1.5) вычисляются в месте нахождения центра частицы λ_1 .

Конкретизируем тензор F .

Поскольку вектор $\mathbf{i}_1$ имеет единичную длину, то $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = 1$. Дифференцируя обе части этого равенства, получаем:

$$d(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1) = d\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1 \cdot d\mathbf{i}_1 = 2\mathbf{i}_1 \cdot d\mathbf{i}_1 = 0.$$

Отсюда $\mathbf{i}_1 \cdot d\mathbf{i}_1 = 0$. Подставляя в это выражение значение $d\mathbf{i}_1$ из (1.4) и сокращая на a_1 и dl_1 (при $a_1 \neq 0$ и $dl_1 \neq 0$), находим:

$$\mathbf{i}_1 \cdot F \cdot \mathbf{i}_1 = 0. \quad (1.6)$$

Вследствие произвольности частицы λ_1 , равенство (1.6) должно выполняться при любом времениподобном единичном векторе $\mathbf{i}_1$, направленном в сторону будущего. Из этого условия на основании теоремы 8.1 главы 2 заключаем, что тензор F является антисимметричным.

Простейший антисимметричный двухвалентный тензор (бивектор), определяемый характеристиками частицы λ , как видно из рис. 1.3, может быть образован с помощью векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$; это есть, с точностью до знака, тензор $\mathbf{q}_0\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{q}_0$ (где $\mathbf{q}_0$ — направляющий вектор прямой, проходящей через центры частиц λ и λ_1 ; $\mathbf{i}$ — 4-скорость частицы λ ; тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между ними). Примем предварительно, что тензор F пропорционален этому бивектору:

$$F \sim \mathbf{q}_0\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{q}_0. \quad (1.7)$$

Потребуем, чтобы воздействие частицы λ на частицу λ_1 удовлетворяло *принципу причинности* (согласно которому событие может влиять только на будущие события) и *принципу близкодействия* (то есть определялось только теми характеристиками материальных тел, которые относятся к точке воздействия; в нашем случае такой точкой является центр частицы λ_1).

Очевидно, что принцип причинности будет выполнен, если принять, что рассматриваемое воздействие осуществляется при нахождении центра частицы λ_1 внутри светового конуса будущего частицы λ , как показано на рис. 1.3. Однако использование тензора (1.7) нарушает принцип близкодействия, потому что вектор $\mathbf{i}$ относится к центру частицы λ ,

а не к центру частицы λ_1 (относительно вектора $\mathbf{q}_0$ можно считать, что он приложен в центре частицы λ_1 , ибо, как направляющий вектор прямой, он одинаков во всех ее точках).

Удовлетворить принципу близкодействия можно, если допустить, что прямая на рис. 1.3, проходящая через центры частиц, изображает некоторый протяженный материальный объект, связанный с электроном, моделируемым частицей λ . В этом случае при известной мировой линии электрона можно определить характеристики движения этого объекта. Пусть $\mathbf{j}_0$ — 4-скорость той его точки, которая находится в центре электрона, моделируемого частицей λ_1 . Подставим 4-скорость $\mathbf{j}_0$ в формулу (1.7) на место 4-скорости $\mathbf{i}$. Тогда вместо (1.7) получим:

$$F \sim \mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0. \quad (1.8)$$

В результате тензор F оказывается относящимся именно к той точке частицы λ , которая совпадает с центром частицы λ_1 , как и должно быть для соблюдения принципа близкодействия.

Принимая во внимание, что рассматриваемое воздействие частицы λ на частицу λ_1 должно реализоваться при нахождении центра частицы λ_1 в любой точке внутренности светового конуса будущего частицы λ , заключаем, что моделируемое тело должно включать в себя указанные протяженные материальные объекты, идущие от его центра во всех времениподобных направлениях.

Итак, анализ возможного взаимодействия частиц приводит к следующей модели электрона, названной «точечной» частицей.

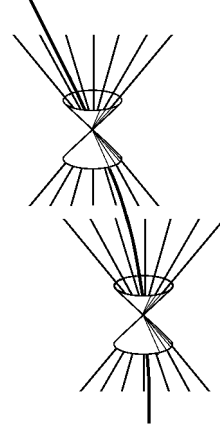
«Точечная» частица есть совокупность времениподобных прямых, проходящих через вершину светового конуса и равномерно заполняющих его внутренность (рис. 1.4). Каждая точка прямой характеризуется 4-скоростью $\mathbf{j}_0$, направляющим вектором прямой $\mathbf{q}_0$ и вместе с ними антисимметричным тензором (бивектором) $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$.

Времениподобные прямые, составляющие частицу, назовем *лучами* (потому что нас будут интересовать в основном полупрямые, выходящие из центра частицы в направлении будущего). Точки лучей будем называть *элементами лучей* или *элементами частицы*, чтобы отличить эти движущиеся в M фрагменты модели от неподвижных точек самого пространства M .

Будем считать, что упомянутые выше протяженные материальные объекты, принадлежащие разным физическим телам, могут свободно, без деформирования, проникать сквозь друг друга. Поэтому будем полагать, что моделирующие их лучи являются *недеформируемыми* и *взаимопроницаемыми* (это позволит в дальнейшем удовлетворить принципу суперпозиции полей).

Рис. 1.4. «Точечная» частица, состоящая из времениподобных прямых.

Показаны два положения частицы на мировой линии; световой конус, ограничивающий частицу, не входит в состав модели.



Примем, что *при движении частицы вдоль мировой линии сохраняются углы между всеми лучами и углы между вектором $\mathbf{i}$, касательным к мировой линии, и лучами*. Это условие позволяет рассчитать 4-скорость $\mathbf{j}_0$ любого элемента луча по обычным правилам кинематики (при известной мировой линии частицы и известной угловой скорости вращения частицы вокруг мировой линии).

Естественно допустить, что частица λ воздействует на частицу λ_1 тем активнее, чем большее количество ее лучей проходит вблизи центра частицы λ_1 . Это допущение оправдано тем, что при более реалистичном варианте модели, когда частица имеет ненулевой радиус, лучи частицы λ воздействуют не только на центр частицы λ_1 , но и на близкие к нему ее элементы. Чтобы учесть данный эффект, введем *плотность лучей* ε , равную количеству лучей, которые пересекают ортогональную им единичную площадку. Так как лучи расходятся от центра частицы во всех времениподобных направлениях, то эта величина убывает при удалении от центра частицы (мы подробно рассмотрим величину ε в разд. 3). Положим, что тензор F пропорционален плотности лучей частицы λ в окрестности центра частицы λ_1 . Тогда выражение (1.8) примет вид

$$F \sim \varepsilon (\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0). \quad (1.9)$$

Поскольку лучи заполняют всю внутренность светового конуса, ограничивающего частицу, то правая часть выражения (1.9) определена во всей внутренности светового конуса. В связи с этим далее будем вести речь о значении тензора F не в центре частицы λ_1 , а просто в точках пространства Минковского M .

Пусть $x \in M$ — точка, для которой рассчитывается тензор F . Обратим внимание на то, что через точку x проходят лучи от разных расположений частицы на мировой линии (рис. 1.5). Очевидно, что это

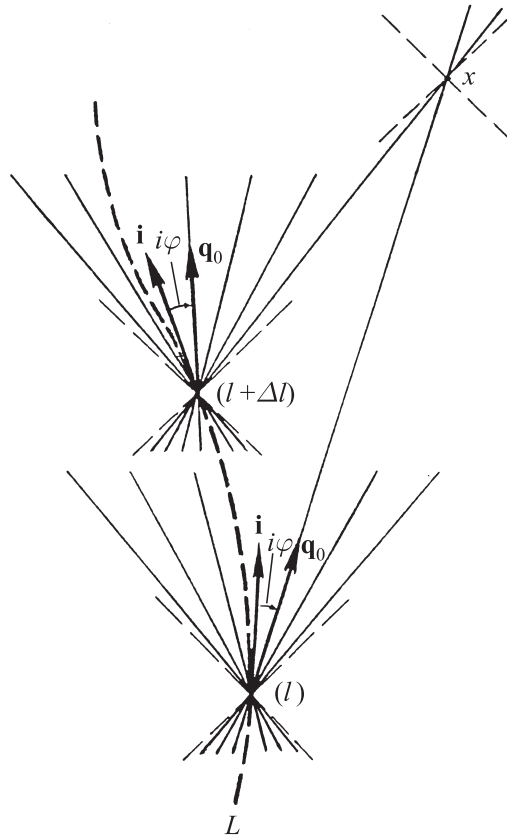


Рис. 1.5. Два расположения частицы, при которых ее лучи проходят через точку x .

Угол φ между 4-скоростью частицы $\mathbf{i}$ и направляющим ортом луча $\mathbf{q}_0$ не меняется при движении частицы; L — мировая линия частицы; символ мнимой единицы i в обозначении угла означает, что при оперировании с этим углом нужно использовать гиперболические функции вместо тригонометрических; тонкие штриховые линии — световые конусы.

те расположения, при которых центр частицы находится внутри светового конуса прошлого с вершиной в x . Следовательно, для вычисления значения тензора F в точке x нужно проинтегрировать правую часть выражения (1.9) по всем указанным расположениям частицы:

$$F(x) = a \int_{L_-} \varepsilon (\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0) dl, \quad (1.10)$$

здесь a — числовой коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин; L_- — участок мировой линии L , содержащийся внутри светового конуса прошлого с вершиной в x ; dl — элемент длины мировой линии L ; подынтегральная функция вычисляется в точке x ; интеграл берется по всем расположениям частицы с центром на L_- .

Таким образом, *частица порождает вокруг себя тензорнозначное поле $F(x)$, которое принимает значение (1.10) в точках пространства Минковского M и оказывает воздействие на любую другую частицу с центром в точке x по закону (1.5), где $F = F(x)$.*

Отметим, что здесь и далее термин «поле» применительно к тензору F понимается в обычном для механики смысле как функция $F(x)$, заданная в определенной области пространства, а не как некий материальный объект. Частицы в рассматриваемой модели взаимодействуют путем непосредственного контакта (потому что любые два световых конуса пересекаются), а не с помощью каких-либо дополнительных сущностей типа физических полей или виртуальных частиц.

Можно доказать, что если времениподобная мировая линия L неограниченно продолжается в прошлое и при удалении в прошлое не стремится к изотропной прямой, то для любой точки $x \in M$ существует участок L_- линии L , находящийся внутри светового конуса прошлого с вершиной в x , поэтому при указанном условии частица создает поле $F(x)$ во всех точках пространства Минковского.

2. «Точечная» частица

В предыдущем разделе на основе ряда наводящих соображений построена математическая конструкция, названная «точечной» частицей. Сформулируем ее определение в сжатой форме.

Рассматривается пространство Минковского M — четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(+ - - -)$, служащее базисным пространством специальной теории относительности.

«Точечная» частица есть совокупность времениподобных прямых, называемых *лучами*, которые пересекаются в одной точке — *центре* частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Лучи считаются недеформируемыми и взаимопроницаемыми. Точки лучей называются *элементами лучей* или *элементами частицы* (такое название принято, чтобы отличить эти движущиеся в M фрагменты модели от неподвижных точек самого пространства M). Очевидно, что симметрия «точечной» частицы описывается группой Лоренца.

Центр частицы движется в пространстве M вдоль времениподобной линии L — *мировой линии* частицы — с 4-скоростью $\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ — единичный времениподобный касательный вектор к L , направленный в сторону будущего и имеющий начало в центре частицы). При движении частицы сохраняются углы между всеми лучами и углы между вектором $\mathbf{i}$ и лучами частицы (см. рис. 1.4 и 1.5). Каждый элемент луча характеризуется 4-скоростью $\mathbf{j}_0$, направляющим вектором луча $\mathbf{q}_0$ и вместе с ними антисимметричным тензором $\mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0$.

Натуральный параметр l на мировой линии L , возрастающий в направлении будущего, именуется *собственным временем* частицы. Величина l измеряется в единицах длины. Собственным временем частицы называется также величина t_* , измеряемая в единицах времени и связанная с l формулой (1.1) главы 3:

$$l = ct_*, \quad (2.1)$$

где c — скорость света ($c = \text{const} > 0$); начало отсчета параметров l и t_* может быть выбрано в любой точке линии L .

Трехмерная пространственноподобная гиперплоскость Γ_* , ортогональная вектору $\mathbf{i}$ и проходящая через центр частицы, называется *собственным физическим пространством* частицы. Сечение частицы ее собственным физическим пространством представляет собой точку — центр частицы, поэтому можно сказать, что изнутри физического пространства Γ_* частица воспринимается как точка. Именно по этой причине она названа «точечной» (но в кавычках, потому что она неограниченно простирается в будущее и прошлое).

«Точечная» частица порождает в пространстве M поле антисимметричного двухвалентного тензора F , значение которого в точке $x \in M$ задается формулой (1.10):

$$F(x) = a \int_{L_-} \varepsilon (\mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0) dl, \quad (2.2)$$

где a — коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин; ε — плотность лучей в окрестности точки x (ее определение дано разд. 3); $\mathbf{q}_0$ — направляющий вектор луча, проходящего через точку x (единичный времениподобный вектор, ориентированный в сторону будущего); $\mathbf{j}_0$ — 4-скорость элемента луча, находящегося в точке x ; произведение векторов $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{j}_0$ тензорное; dl — элемент длины мировой линии L (дифференциал собственного времени частицы l); L_- — участок мировой линии L , содержащийся во внутренности светового конуса прошлого с вершиной в x ; интегрирование проводится по всем расположениям частицы с центром на L_- . Формула (2.2) относится к случаю, когда L_- — непустое множество. Если для некоторой точки x линия L_- — пустое множество, то $F(x)$ — нулевой двухвалентный тензор.

Назовем поле F *собственным полем* частицы. В тех случаях, когда одновременно с этим полем будут рассматриваться другие поля, будем пометать это поле индексом s : F_s (от английского self — сам).

«Точечная» частица оказывает воздействие на другую «точечную» частицу с центром в точке x в соответствии с законом (1.5):

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dl_1} = a_1 F \cdot \mathbf{i}_1, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{i}_1$, l_1 и a_1 — 4-скорость, собственное время и некоторая скалярная характеристика частицы, испытывающей воздействие; $F = F(x)$ — собственное поле частицы, оказывающей воздействие. При рассмотрении частицы, оказывающей воздействие, будем называть закон (2.3) *законом воздействия*. При описании движения частицы, испытывающей воздействие, будем именовать его *уравнением движения* частицы.

Закон (2.3) удовлетворяет *принципу причинности*, так как согласно (2.2) центр частицы, оказывающей воздействие, находится в прошлом по отношению к центру частицы, испытывающей воздействие. Этот закон удовлетворяет также *принципу близкодействия*, потому что воздействие осуществляется путем непосредственного контакта одной частицы с центром другой. Недеформируемость и взаимопроницаемость лучей разных частиц обеспечивает выполнение *принципа суперпозиции полей* (это означает, что если две частицы порождают собственные поля F_1 и F_2 в некоторой области пространства, то эти поля не искажают друг друга, то есть результирующее поле равно $F_1 + F_2$).

Повторим сказанное во введении, что в настоящей книге термины «элементарная частица», «электрон», «позитрон» и им подобные обозначают объекты реального мира. *Под термином «частица» понимается только строящаяся математическая конструкция.*

Сделаем несколько комментариев.

1. Мы трактуем лучи частицы как геометрические образы неких реальных объектов, из которых состоит моделируемое тело (электрон).

2. Принятое условие равномерности заполнения лучами внутренности светового конуса означает, что количество лучей, содержащихся в четырехмерном телесном угле, пропорционально величине угла и не зависит от ориентации телесного угла внутри светового конуса.

3. В определении частицы говорится о ее движении в пространстве Минковского M . Напомним, что четырехмерное пространство-время содержит все прошлые, настоящие и будущие расположения всех тел. Вследствие этого, в теории относительности термин «движение» имеет смысл, отличный от привычного. В частности, словосочетание «движение частицы вдоль мировой линии» означает не перемещение частицы из того места, где она находится, в то место, где ее еще нет (потому что она уже там имеется), а всего лишь наличие параметризации множества расположений частицы в пространстве M ее собственным временем l , то есть натуральным параметром на мировой линии.

4. Значение собственного поля F в точке x определяется, согласно формуле (2.2), теми лучами частицы, которые проходят через точку x . Использование в этой формуле операции интегрирования вместо операции суммирования (по лучам частицы) основано на допущении, что количество лучей, составляющих частицу, настолько велико и расстояния между соседними расположениями частицы на мировой линии настолько малы, что при расчете поля F фактор дискретности может не учитываться. Снижению роли этого фактора способствует также включение в формулу (2.2) плотности лучей ϵ , из-за чего эта формула фактически описывает не локальное значение поля F в точке x , а среднее значение поля в ближайшей окрестности точки x . Тем не менее, возможно, что при расчете поля F на очень больших расстояниях от мировой линии, где плотность лучей мала, потребуется перейти в формуле (2.2) от интегрирования к суммированию по лучам частицы.

5. Луч частицы представляет собой прямую линию. Это означает, что в рамках рассматриваемой модели движение луча вдоль себя не должно приводить к наблюдаемым эффектам (так как прямая, движущаяся вдоль себя, неотличима от неподвижной прямой из-за отсутствия на ней каких-либо «зарубок», позволяющих обнаружить такое движение). Данная модель удовлетворяет этому условию. Действительно, собственное поле частицы F определяется бивектором $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$. А этот бивектор не зависит от движения луча вдоль себя, потому что любая добавка к 4-скорости $\mathbf{j}_0$, направленная вдоль луча (то есть рав-

ная $q\mathbf{q}_0$, где q — произвольное число) не меняет бивектор, как видно из следующей цепочки равенств:

$$\mathbf{q}_0(\mathbf{j}_0 + q\mathbf{q}_0) - (\mathbf{j}_0 + q\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 + q\mathbf{q}_0\mathbf{q}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0 - q\mathbf{q}_0\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0.$$

3. Плотность лучей

Плотность лучей ε в окрестности некоторой точки $x \in M$ есть, по определению, суммарная длина отрезков лучей, заключенных в единичном объеме пространства, содержащем точку x .

Эквивалентное определение: *плотность лучей* ε есть количество лучей, пересекающих ортогональную им (трехмерную) единичную площадку, содержащую точку x .

Термин «плотность лучей» использован по аналогии с известным в физике твердого тела термином «плотность дислокаций» (означающим параметр, который равен суммарной длине отрезков дислокационных линий, заключенных в единичном объеме кристалла). Сформулированное определение величины ε не вполне строгое. Более строго эта величина определяется так. Плотностью лучей ε в окрестности точки x называется предел отношения суммарной длины отрезков лучей, заключенных в области пространства, содержащей точку x , к объему этой области при устремлении объема к нулю. Но для наших целей достаточно приведенных выше определений.

Рассмотрим сферу с времениподобным радиусом и центром в центре частицы. Она задается уравнением (6.1) из главы 2:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек сферы относительно ее центра; R — радиус сферы ($R > 0$). Сфера вида (3.1) является трехмерной гиперповерхностью. Она состоит из двух пол и является аналогом двуполостного гиперboloида в трехмерном собственно евклидовом пространстве (рис. 3.1).

Все лучи частицы ортогональны данной сфере. Докажем это.

Напомним, что (гипер)поверхность и пересекающая ее прямая считаются ортогональными, если направляющий вектор прямой ортогонален всем векторам, которые касательны к (гипер)поверхности в точке пересечения.

Дифференцируя обе части уравнения (3.1), имеем:

$$d(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 2\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 0,$$

откуда

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 0. \quad (3.2)$$

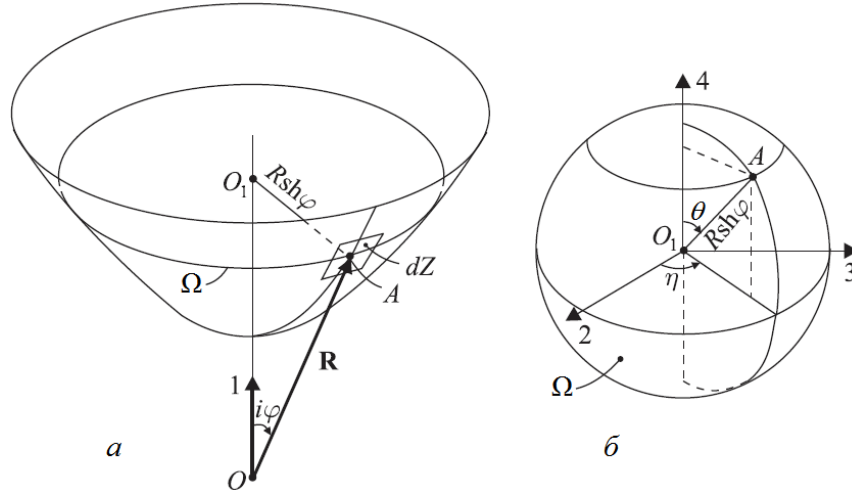


Рис. 3.1. *a* — одна из пол сферы, описываемой уравнением (3.1) (с центром в точке O); *б* — сечение этой полы, выделяемое условием постоянства угла φ между некоторой времени-подобной прямой, проходящей через O , и радиусом-вектором $\mathbf{R}$ точек полы.

Сфера на рис. *a* изображена с понижением размерности на единицу (поэтому изображенная на рис. *б* двумерная собственно евклидова сфера Ω имеет на рис. *a* вид окружности); R — радиус сферы; $R \operatorname{sh} \varphi$ — радиус двумерной сферы Ω ; φ, θ, η — угловые координаты на поле сферы; каждый из символов O_1 и A обозначает на рис. *a* и *б* одну и ту же точку; векторы, занумерованные цифрами от 1 до 4, образуют ортогональный базис пространства Минковского; символ мнимой единицы i в обозначении угла указывает на то, что при оперировании с этим углом следует использовать гиперболические функции вместо тригонометрических.

Так как центр рассматриваемой сферы находится в центре частицы, то радиусы-векторы $\mathbf{R}$ точек сферы являются направляющими векторами лучей частицы. Известно, что дифференциал радиуса-вектора точек поверхности направлен вдоль прямой, касающейся поверхности в точке конца радиуса-вектора. Поэтому из равенства (3.2) вытекает, что направляющий вектор произвольного луча частицы ортогонален любому вектору, который касателен к сфере в точке пересечения ее с лучом. Значит, в самом деле все лучи частицы ортогональны сфере.

Согласно теореме 6.3 из главы 2, любая времениподобная прямая, проходящая через центр сферы, является ее поворотной осью симметрии бесконечного порядка. Лучи частицы являются такими прямыми, поэтому каждый из них служит осью симметрии рассматриваемой сферы. Отсюда и из равномерности распределения лучей по внутренности светового конуса вытекает, что все лучи одинаково расположены по отношению к сфере. Следовательно, количество лучей, пересекающих единичную площадку на сфере, одинаково вдоль всей сферы. А так как лучи ортогональны сфере, то это означает, что плотность лучей ε вдоль любой из пол сферы постоянна и равна отношению общего количества лучей к площади полу. Обозначим: N — общее количество лучей, составляющих частицу; Z — площадь полу. Тогда

$$\varepsilon = \frac{N}{Z}. \quad (3.3)$$

Возьмем какую-либо времениподобную прямую, проходящую через центр рассматриваемой сферы, и введем на одной из пол сферы угловые координаты φ , θ и η , где φ — угол между этой прямой и радиусом-вектором $\mathbf{R}$ точек полу; θ и η — обычные сферические координаты на двумерной собственно евклидовой сфере радиуса $R \operatorname{sh} \varphi$, выделяемой на поле сферы условием $\varphi = \text{const}$; $\varphi \in [0, +\infty)$; $\theta \in [0, \pi]$; $\eta \in [0, 2\pi]$; $R = |\mathbf{R}|$ — радиус сферы (см. рис. 3.1). Нетрудно убедиться в том, что элементарная (трехмерная) площадка на поле сферы имеет площадь

$$dZ = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta. \quad (3.4)$$

Площадь каждой из пол сферы равна интегралу от правой части выражения (3.4) по всем значениям угловых координат φ , θ и η :

$$Z = \int_Z dZ = \int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{+\infty} \int_{\substack{0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta,$$

здесь символ Z обозначает как площадь полу, так и саму полу. Интегрируя, находим площадь полу:

$$Z = 4\pi R^3 \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi. \quad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) вытекают следующие формулы для вычисления ε :

$$\varepsilon(x) = \frac{N}{R^3 Z(1)}, \quad Z(1) = 4\pi \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi, \quad (3.6)$$

здесь x — точка пространства M , находящаяся во внутренней части светового конуса с вершиной в центре частицы; N — количество лучей, составляющих частицу; R — расстояние от центра частицы до точки x ; $Z(1)$ — площадь одной из пол сфер единичного радиуса (выраженная в безразмерных единицах). Размерность ε совпадает с размерностью величины R^{-3} .

Отметим, что плотность лучей ε убывает при удалении от центра частицы как $1/R^3$. Число 3 в показателе степени при R есть следствие четырехмерности пространства M (если бы пространство M было трехмерным, то величина ε убывала бы как $1/R^2$). Предел в формуле для $Z(1)$, строго говоря, равен бесконечности. Однако именно это обстоятельство позволяет получить с помощью формул (3.6) конечные значения величин (см. разд. 6).

4. Векторная и псевдовекторная составляющие антисимметричного тензора

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство Γ , имеющее сигнатуру $(+++)$ или $(---)$.

Напомним, что пространство сигнатуры $(+++)$ и пространство сигнатуры $(---)$ обладают одинаковыми геометрическими свойствами (это объясняется тем, что они преобразуются одно в другое простым изменением знаков всех скалярных произведений векторов).

Введем в пространстве Γ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Его векторы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \pm 1; \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где верхний знак относится к пространству сигнатуры $(+++)$, нижний знак — к пространству сигнатуры $(---)$.

Псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ есть трехвалентный совершенно антисимметричный единичный псевдотензор, который в тензорном базисе, образованном из векторов ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, имеет вид

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \tag{4.2}$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ : $\Delta = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный; тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения.

В линейной алгебре доказывается, что псевдотензор Леви-Чивита ε имеет вид (4.2) при использовании любого ортонормированного базиса. Это означает, что группа симметрии псевдотензора ε совпадает с ортогональной группой пространства Γ , то есть этот псевдотензор является изотропным (без множителя Δ величина ε являлась бы тензором, а не псевдотензором, и была бы симметричной относительно только группы вращений пространства Γ).

В определении псевдотензора ε фигурируют понятия «правоориентированный» и «левоориентированный». В абстрактном математическом пространстве эти понятия условны: не имеется объективных оснований считать, что свойством правоориентированности обладают базисы именно какого-то одного типа (и соответственно свойством левоориентированности базисы другого типа). Однако разделение множества базисов на право- и левоориентированные может быть произведено однозначным образом при соотнесении базисов с объектами физической реальности. Такое соотнесение обычно производится с помощью так называемого правила правой (левой) руки или правила буравчика.

В дальнейшем операции скалярного, бискалярного и трискалярного умножения тензоров выполняются в соответствии с правилом, иллюстрируемым следующим примером:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} \cdots \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} &= \mathbf{a}\mathbf{b} \cdots (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{y}\mathbf{z} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}\mathbf{b} \cdots \mathbf{y}\mathbf{z} = \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ — произвольные векторы; $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{z}$ — скалярные произведения векторов (числа).

С помощью операций скалярного, бискалярного и трискалярного умножения могут быть образованы из псевдотензора Леви-Чивита тензоры четвертого и второго рангов и скаляр:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \varepsilon &= \pm(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \\ &\quad + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \\ &\quad + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3); \\ \varepsilon \cdots \varepsilon &= -2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) = \mp 2I_\Gamma; \\ \varepsilon \cdots \varepsilon \cdots \varepsilon &= \mp 6, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $I_\Gamma = \pm(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$ — единичный (метрический) тензор над пространством Γ ; верхние знаки относятся к пространству сигнатуры $(+++)$, нижние знаки — к пространству сигнатуры $(---)$. При выводе формул (4.4) использованы соотношения (4.1), (4.2), равенство $\Delta^2 = 1$ и правило выполнения операций умножения (4.3).

Псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ участвует во многих математических формулах. В частности, с его помощью *векторное произведение* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma$ может быть представлено несколькими эквивалентными выражениями:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \cdot \varkappa = \mathbf{b}\mathbf{a} \cdot \cdot \varkappa = \varkappa \cdot \cdot \mathbf{b}\mathbf{a} = -\varkappa \cdot \cdot \mathbf{a}\mathbf{b}, \quad (4.5)$$

где бискалярное умножение тензоров выполняется по правилу (4.3); произведение $\mathbf{a} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{b}$ вычисляется по правилу, ясному из такого примера:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{y}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{y}.$$

Справедливость выражений (4.5) доказывается путем подстановки в них разложений векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и использования формул (4.1)–(4.3).

Выражения (4.5) верны как для пространства с сигнатурой $(+++)$, так и для пространства с сигнатурой $(---)$, потому что эти пространства различаются знаками скалярных произведений векторов, а выражения (4.5) содержат по два скалярных произведения. Величины $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в (4.5) могут быть не только векторами, но и псевдовекторами. Если обе они векторы или псевдовекторы, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — псевдовектор; если одна из них вектор, а другая псевдовектор, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — вектор.

Для векторов ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ на основании (4.1), (4.2) и (4.5) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \cdot \varkappa \cdot \mathbf{e}_3; \\ \Delta \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \cdot \varkappa \cdot \mathbf{e}_1; \\ \Delta \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \cdot \varkappa \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отметим, что псевдоскаляр Δ не может быть изъят из левых частей зависимостей (4.6) по той причине, что в средних и правых частях этих зависимостей стоят псевдовекторы, а вектор не может быть равен псевдовектору, так как это разные математические объекты.

В математической литературе приводятся определения векторного произведения, которые задают его направление по-разному. Так, в «Математической энциклопедии» в статье «Векторная алгебра» говорится, что тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ правоориентированная, а в статье «Векторное произведение» указано, что ориентация этой тройки векторов совпадает с ориентацией тройки базисных векторов, [23] (стлб. 635, 642). Понятно, что в случае правоориентированного базиса оба определения дают одно и то же направление псевдовектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,

тогда как при левоориентированном базисе они приводят к взаимно противоположным его направлениям.

Выражения (4.5) задают направление псевдовектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ такое же, как в первом из этих определений, то есть тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ является правоориентированной при любой ориентации базиса.

В качестве примера рассмотрим материальную точку, движущуюся в пространстве Γ по круговой траектории (рис. 4.1). На рисунке показаны ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и угловая скорость $\bar{\omega}$ (скорости $\mathbf{v}$ и $\bar{\omega}$ определяются по отношению к инерциальной системе отсчета с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$). Эти три величины связаны между собой известными зависимостями $\mathbf{v} = \bar{\omega} \times \mathbf{r}$ и $\bar{\omega} = (1/r^2)\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. При вычислении векторного произведения по формуле (4.5) величины $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\bar{\omega}$ образуют правоориентированную тройку векторов как при правоориентированном, так и при левоориентированном базисе (это легко проверяется с помощью (4.6)).

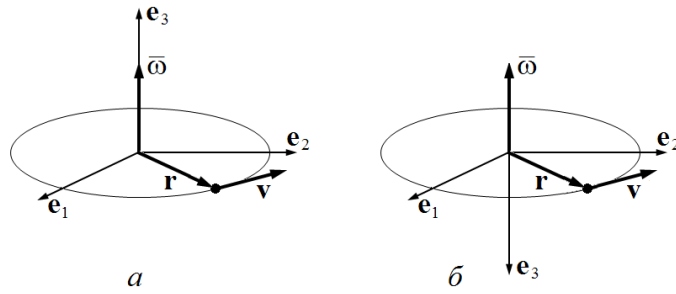


Рис. 4.1. Материальная точка, движущаяся по круговой траектории.

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис (на рис. *a* правоориентированный, на рис. *б* левоориентированный).

Отметим, что если формула выражает псевдовектор через величины, не зависящие от базиса (например, $\bar{\omega} = (1/r^2)\mathbf{r} \times \mathbf{v}$), то она не содержит в явном виде псевдоскаляр Δ . Если же формула выражает псевдовектор через векторы базиса, то она включает в себя псевдоскаляр Δ (например, в ситуации, показанной на рис. 4.1, $\bar{\omega} = \omega \Delta \mathbf{e}_3$).

Обратим внимание на то, что в случаях пространств с сигнатурами $(+++)$ и $(---)$ одни и те же формулы могут содержать разные знаки при скалярных произведениях векторов (потому что эти пространства различаются между собой именно знаками скалярных произведений векторов). Например, известная формула для двойного век-

торного произведения имеет следующий вид в этих пространствах:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \pm \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mp \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (4.7)$$

где верхние знаки относятся к пространству сигнатуры $(+++)$, нижние знаки — к пространству сигнатуры $(---)$.

Теорема 4.1. О векторной и псевдовекторной составляющих антисимметричного тензора. Пусть M — пространство Минковского; $\boldsymbol{\tau}$ — единичный времениподобный вектор; Γ — трехмерная пространственноподобная гиперплоскость в M , ортогональная вектору $\boldsymbol{\tau}$ и проходящая через точку его приложения ($\Gamma \perp \boldsymbol{\tau}$); $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ . Тогда любой двухвалентный антисимметричный тензор F над M может быть представлен в форме

$$F = F \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} F \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa \cdot \varkappa \quad (4.8)$$

или, что то же самое,

$$F = \mathbf{E} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} + \bar{H} \cdot \varkappa, \quad (4.9)$$

где обозначено:

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \bar{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa; \quad (4.10)$$

здесь $\mathbf{E}$ — вектор; $\bar{H}$ — псевдовектор ($\mathbf{E}, \bar{H} \in \Gamma$); тензорное произведение обозначено без символа умножения между сомножителями; точка — знак скалярного умножения; двоеточие — знак бискалярного умножения, выполняемого по правилу (4.3).

Величины $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ называются *векторной* и *псевдовекторной составляющими тензора* F . Если F — тензор электромагнитного поля, то величины $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ являются напряженностями электрического и магнитного полей (при векторе $\boldsymbol{\tau}$, ориентированном в сторону будущего; см. разд. 16 главы 3, с. 232).

Отметим, что если вектор $\boldsymbol{\tau}$ задан, то вместе с ним оказываются заданными гиперплоскость Γ и псевдотензор $\varkappa$ (первая как ортогональное дополнение вектора $\boldsymbol{\tau}$, проходящее через точку его приложения, второй как псевдотензор Леви-Чивита над Γ). Поэтому при известных $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ формула (4.9) однозначно определяет тензор F .

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ и Γ — вектор и гиперплоскость, удовлетворяющие условиям теоремы. Введем в гиперплоскости Γ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Его векторы подчиняются соотношениям (4.1) (со знаком минус в первой строке). Обозначим: $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$ и составим четверку векторов $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Так как $\boldsymbol{\tau} \perp \Gamma$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, то эта четверка является ортонормированным базисом в M .

Рассмотрим произвольный двухвалентный антисимметричный тензор F . Разложим его по диадному базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}_{i,j=0}^3$:

$$F = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 F_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (4.11)$$

где F_{ij} — компоненты тензора F в этом базисе. Вследствие антисимметричности тензора F , имеем:

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3), \text{ откуда } F_{ii} = 0. \quad (4.12)$$

Из (4.10) и (4.11) находим:

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 F_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_0 = \sum_{i=1}^3 F_{i0} \mathbf{e}_i, \quad (4.13)$$

где использованы равенства $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_0 = 0$ ($j = 1, 2, 3$) и $F_{00} = 0$ (отметим, что в правой части выражения (4.13) суммирование по индексу i производится в пределах от 1 до 3, а не от 0 до 3, как в средней части выражения). Поскольку, согласно (4.13), вектор $\mathbf{E}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \Gamma$, то $\mathbf{E} \in \Gamma$.

На основании (4.12), (4.13) и равенства $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_0$ можем записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} &= \sum_{i=1}^3 F_{i0} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0 - \sum_{i=1}^3 F_{i0} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 F_{i0} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^3 F_{0i} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i = \\ &= F_{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + F_{20} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + F_{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0 + F_{01} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + F_{02} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + F_{03} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

С помощью (4.2), (4.10), (4.11) и (4.12) получаем:

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{2} F \cdot \cdot \boldsymbol{\varkappa} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 F_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \cdot \\ &\quad \cdot \cdot \Delta(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = \\ &= \frac{1}{2} \Delta(F_{21} \mathbf{e}_3 - F_{31} \mathbf{e}_2 + F_{32} \mathbf{e}_1 - F_{12} \mathbf{e}_3 + F_{13} \mathbf{e}_2 - F_{23} \mathbf{e}_1) = \\ &= \Delta(F_{32} \mathbf{e}_1 + F_{13} \mathbf{e}_2 + F_{21} \mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (4.15)$$

где применено правило бискалярного умножения (4.3) и учтена ортонормированность базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Так как псевдовектор $\overline{H}$ равен линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \Gamma$, то $\overline{H} \in \Gamma$.

Из (4.1), (4.2), (4.12), (4.15) и равенства $\Delta^2 = 1$ находим:

$$\begin{aligned}\overline{H} \cdot \varkappa &= \Delta(F_{32}\mathbf{e}_1 + F_{13}\mathbf{e}_2 + F_{21}\mathbf{e}_3) \cdot \\ &\cdot \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = \\ &= -F_{32}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + F_{32}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - F_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + F_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - F_{21}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + F_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \\ &= F_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + F_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + F_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + F_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + F_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + F_{32}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Благодаря антисимметричности тензора F , выполняется равенство $F_{ii} = 0$ (при всех i), поэтому

$$\hat{0} = F_{00}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 + F_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + F_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + F_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad (4.17)$$

где $\hat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор.

Составим сумму левых частей выражений (4.14), (4.16), (4.17) и сумму их правых частей. Приравнявая между собой эти суммы и используя (4.11), получаем:

$$\mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \varkappa = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 F_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = F.$$

Отсюда вытекает формула (4.9). Последняя с учетом (4.10) приводит к формуле (4.8). ■

Обратим внимание на то, что угол между вектором $\mathbf{E}$ и псевдовектором $\overline{H}$, определяемыми равенствами (4.10), может быть разным при разных антисимметричных тензорах F .

Например, пусть

$$F = \mathbf{e}_1\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный времениподобный вектор; $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис пространства M . Тогда, в силу (4.10) и (4.2), имеем:

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_1 \quad \text{и} \quad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa = \Delta\mathbf{e}_1,$$

откуда $\mathbf{E} \parallel \overline{H}$, то есть угол между $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ равен 0 или π .

Если же

$$F = \mathbf{e}_1\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

то аналогичным образом получаем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \quad \text{и} \quad \overline{H} = \Delta\mathbf{e}_3,$$

значит, $\mathbf{E} \perp \overline{H}$, то есть в этом случае угол между $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ равен $\pi/2$.

5. Скорость «точечной» частицы

В настоящем разделе выводится формула, которая позволяет вычислить 4-скорость $\mathbf{j}_0$ любого элемента «точечной» частицы при известных мировой линии частицы и угловой скорости вращения частицы. Эта формула приведена в теореме 5.5 в конце раздела. Текст, предшествующий этой теореме, содержит определение 4-скорости $\mathbf{j}_0$ и вспомогательные утверждения.

Рассмотрим два расположения «точечной» частицы в пространстве M , отвечающие близким моментам l и $l + \Delta l$ ее собственного времени. Пусть $\mathbf{U}$ — вектор перемещения какого-либо элемента частицы (перемещение определяется относительно пространства M и отсчитывается от местонахождения элемента в некоторый момент l_0 собственного времени частицы). Обозначим через $\Delta \mathbf{U}$ приращение вектора $\mathbf{U}$ за промежуток времени Δl , разделяющий моменты l и $l + \Delta l$ (вектор $\Delta \mathbf{U}$, очевидно, не зависит от выбора момента времени l_0). Составим отношение $\Delta \mathbf{U} / \Delta l$ и найдем его предел при $\Delta l \rightarrow 0$. Этот предел является производной функции $\mathbf{U}(l)$. Примем его в роли 4-скорости элемента.

Итак, 4-скорость элемента частицы $\mathbf{j}_0$ есть, по определению, производная вектора перемещения элемента $\mathbf{U}$ по собственному времени частицы l :

$$\mathbf{j}_0 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta l} = \frac{d\mathbf{U}}{dl}. \quad (5.1)$$

Подчеркнем, что 4-скорость $\mathbf{j}_0$ представляет собой скорость относительно пространства Минковского M . Она не зависит от используемых систем отсчета и систем координат. В дальнейшем мы зачастую будем именовать 4-скорость просто *скоростью*.

При рассмотрении частицы в целом будем называть скорость элемента частицы $\mathbf{j}_0$ также *скоростью луча* и *скоростью частицы*.

Скорость $\mathbf{j}_0$ является величиной безразмерной (так как перемещение $\mathbf{U}$ и собственное время l измеряются в единицах длины). Если при решении задачи требуется использовать характеристику движения частицы, имеющую размерность скорости, то следует взять вместо $\mathbf{j}_0$ величину $c\mathbf{j}_0 = d\mathbf{U}/dt_*$, где c — скорость света; $t_* = l/c$ — собственное время частицы, измеряемое в единицах времени (см. формулу (2.1)).

В определении скорости $\mathbf{j}_0$ вместо вектора перемещения $\mathbf{U}$ можно использовать радиус-вектор $\mathbf{R}$ элемента частицы, отсчитываемый от какой-либо фиксированной точки пространства M . Поскольку приращения векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}$ при перемещении элемента за промежуток времени Δl одинаковы ($\Delta \mathbf{R} = \Delta \mathbf{U}$), то будет $\mathbf{j}_0 = d\mathbf{R}/dl$. Мы не стали использовать радиус-век-

тор $\mathbf{R}$, чтобы не создавать иллюзию того, что данная модель нуждается во введении какой-либо точки отсчета или системы отсчета.

Так как «точечная» частица представляет собой совокупность времениподобных прямых (именуемых лучами), которые пересекаются в центре частицы, то все элементы частицы, за исключением ее центра, располагаются во внутренности светового конуса с вершиной в центре частицы.

Введем обозначения: O — центр частицы; A — произвольный элемент частицы; $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы (единичный касательный вектор к мировой линии частицы L); $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча, содержащего элемент A ($\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ — времениподобные векторы, направленные в сторону будущего и имеющие начала в центре частицы; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$); $\mathbf{Q} = \overrightarrow{OA} = Q\mathbf{q}_0$ — вектор, соединяющий центр частицы O с элементом A ($Q > 0$ при нахождении элемента A в будущем относительно центра частицы O ; $Q < 0$ при нахождении A в прошлом относительно O ; $Q = 0$ при нахождении элемента A в центре частицы O); отметим, что $|Q| = \sqrt{|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}|}$ — расстояние между центром частицы O и элементом A (рис. 5.1).

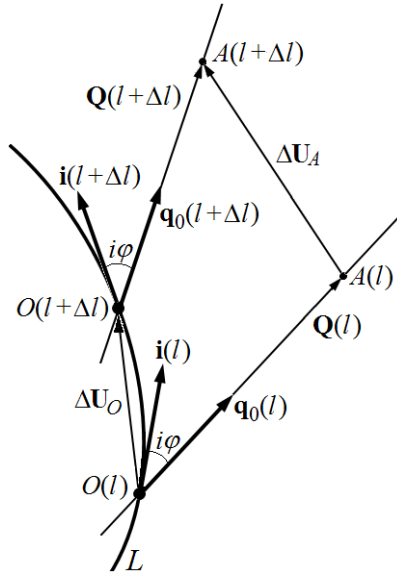


Рис. 5.1. Луч частицы в моменты времени l и $l + \Delta l$.

O — центр частицы, движущийся вдоль мировой линии L ; A — некоторый элемент луча; точки $O(l)$, $A(l)$, $O(l + \Delta l)$ и $A(l + \Delta l)$ могут не лежать в одной плоскости; линия L может не быть плоской кривой; угол φ между скоростью центра частицы $\mathbf{i}$ и направляющим вектором луча $\mathbf{q}_0$ не меняется при движении частицы.

Вследствие движения частицы, векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{Q}$ зависят от собственного времени частицы l . Будем считать, что функции $\mathbf{i}(l)$, $\mathbf{q}_0(l)$ и $\mathbf{Q}(l)$ дифференцируемые.

Теорема 5.1. 4-скорость $\mathbf{j}_0$ произвольного элемента «точечной» частицы имеет вид

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + Q\frac{d\mathbf{q}_0}{dl}, \quad (5.2)$$

где $q = dQ/dl$, причем параметр q одинаков для всех элементов, принадлежащих одному лучу частицы; другие обозначения указаны выше.

Доказательство. Рассмотрим луч, содержащий элемент A , в два близких момента времени l и $l + \Delta l$ (см. рис. 5.1). Из рисунка видно, что

$$\mathbf{Q}(l) + \Delta\mathbf{U}_A = \Delta\mathbf{U}_O + \mathbf{Q}(l + \Delta l), \quad (5.3)$$

где $\mathbf{Q}$ — вектор, соединяющий центр частицы O с элементом A ; $\Delta\mathbf{U}_A$ и $\Delta\mathbf{U}_O$ — перемещения элемента A и центра частицы O за время Δl .

Заменим в (5.3) величину $\mathbf{Q}(l + \Delta l)$ ее приближенным значением $\mathbf{Q}(l) + (d\mathbf{Q}/dl)\Delta l$ (это можно сделать, благодаря допущению о дифференцируемости функции $\mathbf{Q}(l)$):

$$\mathbf{Q}(l) + \Delta\mathbf{U}_A \underset{\Delta l \rightarrow 0}{\approx} \Delta\mathbf{U}_O + \mathbf{Q}(l) + \frac{d\mathbf{Q}}{dl}\Delta l.$$

Теперь обе части равенства сократим на $\mathbf{Q}(l)$ и разделим на Δl . Затем перейдем к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$. В результате, принимая во внимание определение скорости (5.1), получим:

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{Q}}{dl}, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{i}$ — 4-скорости элемента A и центра частицы O соответственно; все величины относятся к рассматриваемому моменту l собственного времени частицы.

Вследствие недеформируемости лучей, они сохраняют прямолинейность при любом движении частицы, поэтому во все моменты времени вектор $\mathbf{Q}$, соединяющий центр частицы O с элементом A , удовлетворяет равенству $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$. Подставляя в (5.4) на место вектора $\mathbf{Q}$ его значение $Q\mathbf{q}_0$ и производя дифференцирование, получаем требуемую формулу (5.2).

Остается доказать, что для всех элементов, принадлежащих одному лучу, параметр q принимает одно и то же значение. Воспользуемся свойством недеформируемости лучей.

Согласно формуле (5.2), скорость $\mathbf{j}_0$ состоит из трех слагаемых: $\mathbf{i}$, $q\mathbf{q}_0$ и $Q(d\mathbf{q}_0/dl)$. Слагаемое $\mathbf{i}$ одинаково для всех элементов частицы, поэтому движение частицы со скоростью $\mathbf{i}$ не приводит к деформированию луча. Слагаемое $Q(d\mathbf{q}_0/dl)$ включает в себя вектор $d\mathbf{q}_0/dl$ и

скаляр Q . Вектор $d\mathbf{q}_0/dl$ постоянен вдоль луча (в силу постоянства вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль луча) и ортогонален вектору $\mathbf{q}_0$, то есть ортогонален лучу (потому что дифференцирование по l обеих частей равенства $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$ дает $(d\mathbf{q}_0/dl) \cdot \mathbf{q}_0 = 0$). Величина Q равна по модулю расстоянию между элементом луча и центром частицы и имеет противоположные знаки для элементов, находящихся по разные стороны от центра частицы. Из этого вытекает, что слагаемое $Q(d\mathbf{q}_0/dl)$ характеризует вращение луча как целого вокруг центра частицы. Следовательно, это слагаемое тоже не приводит к деформированию луча.

Итак, из трех слагаемых, составляющих скорость $\mathbf{j}_0$, два не приводят к деформированию луча, значит, третье слагаемое, равное $q\mathbf{q}_0$, также не должно вызывать деформирования луча (в противном случае движение частицы со скоростью $\mathbf{j}_0$, равной сумме всех слагаемых, приводило бы к деформированию луча). Это слагаемое направлено вдоль луча, поэтому вызываемое им деформирование луча может состоять только в изменении расстояний между элементами луча. Очевидно, что при движении луча вдоль самого себя расстояния между элементами луча не изменяются в том и только том случае, если все элементы имеют одинаковые скорости. Так как слагаемое $q\mathbf{q}_0$ не должно приводить к деформированию луча, то из сказанного следует, что это слагаемое одинаково для всех элементов луча. Поскольку вектор $\mathbf{q}_0$ постоянен вдоль луча, то параметр q действительно принимает одно и то же значение для всех элементов, принадлежащих одному лучу. ■

Обратим внимание на следующие обстоятельства, касающиеся движения частицы.

1. Одно и то же движение «точечной» частицы может порождаться различными движениями образующих ее лучей. Это иллюстрирует рис. 5.2, на котором показаны два варианта движения лучей, приводящие к одному и тому же движению частицы вдоль мировой линии.

Поясним это утверждение. Нетрудно убедиться в том, что один из изображенных на рис. 5.2 вариантов движения лучей может быть преобразован в другой посредством дополнительного движения лучей вдоль самих себя. А поскольку движение прямой линии вдоль себя, как было отмечено в конце разд. 2, не обнаружимо, то оба варианта движения лучей действительно обеспечивают одинаковое движение частицы.

2. Элементы лучей, находящиеся в центре частицы, могут иметь скорости, отличающиеся от скорости самого центра частицы. Такая ситуация реализуется при $q \neq 0$, то есть в том случае, когда движение частицы вдоль мировой линии сопровождается движением лучей вдоль самих себя. Действительно, скорость центра частицы равна $\mathbf{i}$, а скорости элементов, находящихся в центре частицы, как следует из (5.2),

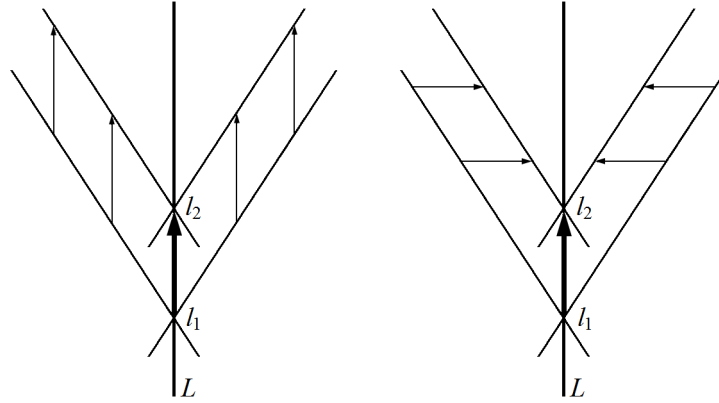


Рис. 5.2. Два варианта движения лучей, приводящие к одному и тому же движению «точечной» частицы.

На каждом из рисунков показаны два луча в моменты l_1 и l_2 собственного времени частицы (лучи — времениподобные прямые, пересекающиеся в центре частицы); толстая стрелка — вектор перемещения частицы; тонкие стрелки — возможные векторы перемещения лучей; L — мировая линия частицы.

равны $\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0$ (так как для таких элементов $Q = 0$). Поэтому для этих элементов при $q \neq 0$ будет $\mathbf{j}_0 \neq \mathbf{i}$. Таким образом, элементы частицы, которые находятся в некоторый момент времени в центре частицы, могут не принадлежать центру частицы в другие моменты времени.

3. Формула (5.2) содержит производную $d\mathbf{q}_0/dl$. При фиксированной мировой линии частицы эта производная не может принимать произвольные значения. Вместе с тем, она не определяется однозначно мировой линией. Действительно, допустим, что мировая линия L задана. Тогда однозначно определена функция $\mathbf{i}(l)$, так как скорость центра частицы $\mathbf{i}$ есть единичный касательный вектор к мировой линии. Однако движение всей частицы, очевидно, определено лишь с точностью до произвольного ее вращения вокруг L (точнее, вокруг касательной к L , проходящей через центр частицы). Приводимая далее теорема 5.4 конкретизирует это утверждение и устанавливает общий вид производной по времени от любого вектора, связанного с частицей.

Напомним, что согласно определению, принятому в разд. 2, собственное физическое пространство частицы Γ_* есть трехмерная пространственноподобная гиперплоскость, ортогональная вектору $\mathbf{i}$ и прохо-

дящая через центр частицы. Геометрия физического пространства Γ_* совпадает с геометрией трехмерного собственно евклидова пространства (так как пространства, имеющие сигнатуры $(- - -)$ и $(+ + +)$, различаются только знаками скалярных произведений векторов).

Введем в физическом пространстве Γ_* ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Векторы этого базиса удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0;\end{aligned}\tag{5.5}$$

Пусть $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* . В тензорном базисе, образованном из векторов базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, он имеет вид (4.2):

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \tag{5.6}$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* : $\Delta = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный. Отметим, что псевдотензор $\varkappa$ имеет вид (5.6) при использовании любого ортонормированного базиса пространства Γ_* . Поскольку векторы физического пространства Γ_* являются векторами пространства Минковского M , то можно считать, что псевдотензор $\varkappa$ определен над пространством M .

В случае не прямолинейной мировой линии L физическое пространство Γ_* перемещается вместе с частицей вдоль L не параллельно самому себе (так как оно ортогонально вектору $\mathbf{i}$, касательному к L), поэтому как само пространство Γ_* , так и связанные с ним базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и псевдотензор $\varkappa$ являются в общем случае функциями собственного времени частицы l .

Построим зависящий от времени l двухвалентный тензор (оператор)

$$A(l) = I + \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \Delta l, \tag{5.7}$$

где I — единичный тензор; $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы; c — скорость света; $\bar{\omega}$ — псевдовектор, принадлежащий собственному физическому пространству частицы Γ_* и имеющий размерность угловой скорости; $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* ; Δl — промежуток времени между двумя близкими моментами l и $l + \Delta l$ собственного времени частицы; величины, заключенные в квадратные скобки, относятся к моменту l ; функция $\mathbf{i}(l)$ считается дифференцируемой.

Группа Лоренца, напомним, есть ортогональная группа пространства Минковского. Она состоит из четырех связных компонент. Та из них, которая содержит единичный тензор, называется ограниченной группой Лоренца (см. разд. 11 главы 3).

Теорема 5.2. Тензор (оператор) Λ вида (5.7) (при произвольном псевдовекторе $\bar{\omega} \in \Gamma_*$) принадлежит ограниченной группе Лоренца и в каждый момент времени l преобразует вектор $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу

$$\Lambda(l) \cdot \mathbf{i}(l) \approx \mathbf{i}(l + \Delta l), \quad (5.8)$$

где равенство выполняется с точностью до первой степени Δl (при разложении функции $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ в ряд по степеням Δl).

Верно и обратное утверждение: тензор Λ , который принадлежит ограниченной группе Лоренца и преобразует вектор $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу (5.8), может быть представлен в виде (5.7) (с точностью до первой степени Δl при разложении его в ряд по степеням Δl).

Доказательство. Подействуем тензором Λ вида (5.7) на вектор $\mathbf{i}$:

$$\Lambda(l) \cdot \mathbf{i}(l) = I \cdot \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{i}}{dl} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) \Delta l - \mathbf{i} \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \cdot \mathbf{i} \right) \Delta l - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{i} \Delta l, \quad (5.9)$$

где величины в правой части равенства относятся к моменту l .

Воспользуемся следующими зависимостями:

$$I \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1; \quad \frac{d\mathbf{i}}{dl} \cdot \mathbf{i} = 0; \quad \varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}, \quad (5.10)$$

где $\hat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор; первая зависимость вытекает из свойств единичного тензора; вторая является следствием единичности вектора $\mathbf{i}$; третья получается дифференцированием по l обеих частей равенства $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$; четвертая зависимость объясняется тем, что согласно (5.6) все векторы, образующие $\varkappa$, лежат в гиперплоскости Γ_* и $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$.

При учете зависимостей (5.10) выражение (5.9) упрощается:

$$\Lambda(l) \cdot \mathbf{i}(l) = \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{i}}{dl} \Delta l.$$

Вследствие дифференцируемости функции $\mathbf{i}(l)$, выполняется приближенное равенство $\mathbf{i}(l + \Delta l) \approx \mathbf{i}(l) + (d\mathbf{i}/dl) \Delta l$ (с точностью до первой степени Δl), поэтому последнее выражение может быть записано в форме

$$\Lambda(l) \cdot \mathbf{i}(l) \approx \mathbf{i}(l + \Delta l) \quad (\text{с точностью до первой степени } \Delta l).$$

Отсюда заключаем, что тензор Λ вида (5.7) действительно преобразует вектор $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу (5.8). Докажем, что этот тензор принадлежит ограниченной группе Лоренца.

Тензор Λ^* , транспонированный (сопряженный) к Λ , получается переменой местами векторов в каждой из диад, образующих тензор. С помощью (5.6) и (5.7), учитывая симметричность тензора I , находим:

$$\Lambda^*(l) = I - \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \Delta l. \quad (5.11)$$

Из (5.7) и (5.11) следует, что

$$\Lambda(l) \cdot \Lambda^*(l) = \Lambda^*(l) \cdot \Lambda(l) \approx I$$

с точностью до первой степени Δl . Отсюда, на основании определения обратного тензора, имеем:

$$\Lambda^{-1}(l) \approx \Lambda^*(l), \quad (5.12)$$

где Λ^{-1} — тензор, обратный к Λ .

Равенство (5.12) (понимаемое как точное) служит критерием ортогональности тензора (см. формулу (2.21) в разд. 2 главы 2), поэтому тензор Λ ортогональный. Значит, он принадлежит группе Лоренца. А так как из (5.7) следует, что этот тензор допускает непрерывный переход к единичному тензору I (при $\Delta l \rightarrow 0$), то он принадлежит ограниченной группе Лоренца. Итак, мы доказали, что тензор Λ вида (5.7) преобразует вектор $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу (5.8) и принадлежит ограниченной группе Лоренца. Первое утверждение теоремы доказано.

Теперь докажем второе утверждение (обратное к первому). Пусть тензор Λ принадлежит ограниченной группе Лоренца и преобразует вектор $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу (5.8). Нужно доказать, что этот тензор может быть представлен в виде (5.7) (с точностью до первой степени Δl).

Разложим тензор Λ в ряд по степеням Δl и ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\Lambda \approx A + B\Delta l, \quad (5.13)$$

где A и B — некоторые тензоры. Найдем тензоры A и B .

Так как тензор Λ принадлежит ограниченной группе Лоренца, то он допускает непрерывный переход к единичному тензору I . Принимая во внимание, что он удовлетворяет зависимости (5.8) и что в общем случае $\mathbf{i}(l + \Delta l) \neq \mathbf{i}(l)$ при $\Delta l \neq 0$, заключаем, что переход к единичному тензору может иметь место только при $\Delta l \rightarrow 0$, то есть должно выполняться равенство $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Lambda = I$. С учетом этого равенства переход в обеих

частях выражения (5.13) к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$ дает: $A = I$, поэтому выражение (5.13) может быть переписано в виде

$$A \approx I + B\Delta l. \quad (5.14)$$

Поскольку тензор A принадлежит группе Лоренца, то он ортогональный. Следовательно, выполняется равенство $A^{-1} = A^*$ (являющееся критерием ортогональности тензора). На основании этого равенства и (5.14) имеем:

$$A^{-1} = A^* \approx (I + B\Delta l)^* = I + B^*\Delta l. \quad (5.15)$$

Из (5.14) и (5.15) находим:

$$A \cdot A^{-1} \approx I + (B + B^*)\Delta l \quad (5.16)$$

с точностью до первой степени Δl . По определению обратного тензора, имеет место равенство $A \cdot A^{-1} = I$. Отсюда и из (5.16) вытекает, что $B^* \approx -B$, то есть тензор B антисимметричный (с точностью до первой степени Δl).

Благодаря тому, что тензор A преобразует вектор $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу (5.8), реализуется зависимость

$$A(l) \cdot \mathbf{i}(l) \approx \mathbf{i}(l + \Delta l) \approx \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{i}}{dl} \Delta l.$$

Подставляя сюда значение тензора A из (5.14), получаем:

$$(I + B\Delta l) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} + B \cdot \mathbf{i} \Delta l \approx \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{i}}{dl} \Delta l,$$

откуда

$$B \cdot \mathbf{i} \approx \frac{d\mathbf{i}}{dl}. \quad (5.17)$$

Предположим, что $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$ (при рассматриваемом значении l), и введем единичный вектор $\mathbf{e}_1$, сонаправленный вектору $d\mathbf{i}/dl$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{i}}{dl} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right|; \quad (5.18)$$

из третьей из зависимостей (5.10) вытекает, что $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{i}$.

Зададим в пространстве M ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где вектор $\mathbf{e}_1$ имеет вид (5.18). Так как базис ортонормированный и

собственное физическое пространство частицы Γ_* ортогонально вектору $\mathbf{i}$, то векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ принадлежат Γ_* и удовлетворяют соотношениям (5.5).

Разложим тензор B по диадному базису, образованному из векторов базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. С учетом антисимметричности тензора B можем записать:

$$\begin{aligned} B = & 0\mathbf{i}\mathbf{i} + b_{01}\mathbf{i}\mathbf{e}_1 + b_{02}\mathbf{i}\mathbf{e}_2 + b_{03}\mathbf{i}\mathbf{e}_3 - \\ & - b_{01}\mathbf{e}_1\mathbf{i} + 0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + b_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + b_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \\ & - b_{02}\mathbf{e}_2\mathbf{i} - b_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + b_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \\ & - b_{03}\mathbf{e}_3\mathbf{i} - b_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - b_{23}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где b_{ij} — компоненты тензора B в этом диадном базисе.

Подействуем тензором B на вектор $\mathbf{i}$. На основании (5.17) и (5.19), учитывая ортонормированность базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, получаем:

$$B \cdot \mathbf{i} = -b_{01}\mathbf{e}_1 - b_{02}\mathbf{e}_2 - b_{03}\mathbf{e}_3 \approx \frac{d\mathbf{i}}{dl}. \quad (5.20)$$

Согласно (5.18),

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \mathbf{e}_1. \quad (5.21)$$

Из (5.20) и (5.21) следует, что

$$-b_{01}\mathbf{e}_1 - b_{02}\mathbf{e}_2 - b_{03}\mathbf{e}_3 \approx \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \mathbf{e}_1. \quad (5.22)$$

Умножим скалярно обе части равенства (5.22) поочередно на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Принимая во внимание соотношения (5.5), находим:

$$b_{01} \approx -\left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right|; \quad b_{02} \approx 0; \quad b_{03} \approx 0. \quad (5.23)$$

Переобозначим компоненты тензора B :

$$b_{12} = \frac{\omega_3}{c}; \quad b_{13} = -\frac{\omega_2}{c}; \quad b_{23} = \frac{\omega_1}{c}. \quad (5.24)$$

При компонентах b_{ij} вида (5.23) и (5.24) выражение (5.19) принимает форму

$$\begin{aligned} B \approx & 0\mathbf{i}\mathbf{i} - \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \mathbf{i}\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{i}\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{i}\mathbf{e}_3 + \\ & + \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \mathbf{e}_1\mathbf{i} + 0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \frac{\omega_3}{c} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \frac{\omega_2}{c} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \\ & - 0\mathbf{e}_2\mathbf{i} - \frac{\omega_3}{c} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \frac{\omega_1}{c} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \\ & - 0\mathbf{e}_3\mathbf{i} + \frac{\omega_2}{c} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \frac{\omega_1}{c} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.21) имеем:

$$B \approx \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + B_*, \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} B_* = & 0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \frac{\omega_3}{c}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \frac{\omega_2}{c}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \\ & - \frac{\omega_3}{c}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \frac{\omega_1}{c}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \\ & + \frac{\omega_2}{c}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \frac{\omega_1}{c}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Введем псевдовектор

$$\bar{\omega} = \Delta(\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3), \quad (5.27)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* (тот же, что в формуле (5.6)).

С помощью формул (5.5), (5.6), (5.26), (5.27) и равенства $\Delta^2 = 1$ можно убедиться в том, что

$$B_* = -\frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa. \quad (5.28)$$

Из (5.14), (5.25) и (5.28) находим:

$$\Lambda \approx I + \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \Delta l. \quad (5.29)$$

Ранее, при построении базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, мы предположили, что $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$. Очевидно, что формула (5.29) имеет смысл и при $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ (в этом случае $\{\mathbf{e}_i\}$ — любой ортонормированный базис в Γ_* , $b_{01} = 0$ и $B = B_*$).

Таким образом, тензор Λ действительно может быть представлен в виде (5.7) (с точностью до первой степени Δl). Оба утверждения теоремы доказаны. ■

Теорема 5.3. Тензор Λ , задаваемый формулой (5.7), представляет собой произведение двух тензоров:

$$\Lambda \approx G \cdot R \approx R \cdot G \quad (\text{с точностью до первой степени } \Delta l), \quad (5.30)$$

где

$$G = I + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) \Delta l; \quad R = I - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \Delta l. \quad (5.31)$$

Тензоры G и R принадлежат ограниченной группе Лоренца. Тензор G осуществляет гиперболический поворот (буст), при котором псевдоевклидова плоскость, содержащая векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$, является

инвариантной, то есть преобразуется сама в себя, а ортогональная ей пространственноподобная плоскость является неподвижной. Тензор R производит пространственный поворот, а именно, сохраняет неподвижной псевдоевклидову плоскость, содержащую вектор $\mathbf{i}$ и псевдовектор $\bar{\omega}$, и оставляет инвариантной (то есть преобразует саму в себя) ортогональную ей пространственноподобную плоскость.

Указанные преобразования, производимые тензорами G и R , имеют место в случае ненулевых $d\mathbf{i}/dl$ и $\bar{\omega}$. Если $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ или $\bar{\omega} = \mathbf{0}$, то, как видно из (5.31), соответствующий тензор равен единичному тензору I , поэтому осуществляемое им преобразование является тождественным (в записи равенства $\bar{\omega} = \mathbf{0}$ учтено, что нулевой псевдовектор совпадает с нулевым вектором).

Доказательство. Утверждение о том, что тензор A , задаваемый формулой (5.7), представляет собой произведение тензоров G и R , проверяется подстановкой в (5.30) значений этих тензоров из (5.31).

Докажем принадлежность тензоров G и R ограниченной группе Лоренца. Перемена местами векторов в каждой из диад, образующих тензоры G и R , приводит к транспонированным тензорам:

$$G^* = I - \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) \Delta l; \quad R^* = I + \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \Delta l, \quad (5.32)$$

здесь использованы симметричность тензора I и формулы (5.6) и (5.31). Из (5.31) и (5.32) находим:

$$G \cdot G^* = G^* \cdot G \approx I; \quad R \cdot R^* = R^* \cdot R \approx I$$

с точностью до первой степени Δl . Отсюда, по определению обратного тензора,

$$G^{-1} \approx G^*; \quad R^{-1} \approx R^*.$$

Каждое из этих равенств (понимаемое как точное) служит критерием ортогональности соответствующего тензора, поэтому тензоры G и R ортогональные. Следовательно, они принадлежат группе Лоренца. А так как, согласно (5.31), оба тензора допускают непрерывный переход к единичному тензору I (при $\Delta l \rightarrow 0$), то они действительно принадлежат ограниченной группе Лоренца.

Продemonстрируем, что тензор G осуществляет преобразование, указанное в теореме (при $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$).

Введем в пространстве M ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с вектором $\mathbf{e}_1$, задаваемым равенством

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{i}}{dl} \Big/ \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right|; \quad (5.33)$$

отметим, что ортогональность вектора $\mathbf{e}_1$ вектору $\mathbf{i}$ вытекает из третьей из зависимостей (5.10). Поскольку векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ ортогональны вектору $\mathbf{i}$, то они принадлежат собственному физическому пространству частицы Γ_* и удовлетворяют соотношениям (5.5).

С помощью (5.31) и (5.33) запишем тензор G в виде

$$G = I + \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \Delta l (\mathbf{e}_1 \mathbf{i} - \mathbf{i} \mathbf{e}_1).$$

Подействуем этим тензором на векторы базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{aligned} G \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{i} + \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \Delta l \mathbf{e}_1; \\ G \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 + \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| \Delta l \mathbf{i}; \\ G \cdot \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_2; \\ G \cdot \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{5.34}$$

здесь использована ортонормированность базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, включая соотношения (5.5).

Обозначим: P_1 — плоскость, которая содержит векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_1$ (в силу (5.33) она содержит также вектор $d\mathbf{i}/dl$); P_2 — плоскость, содержащая векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Эти плоскости взаимно ортогональны, так как $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортогональная система векторов. Плоскость P_1 псевдоевклидова, потому что содержит времениподобный вектор $\mathbf{i}$, а плоскость P_2 пространственноподобная, ибо она ортогональна псевдоевклидовой плоскости P_1 .

Вследствие линейности производимого тензором G преобразования, из (5.34) вытекает, что этот тензор оставляет инвариантной псевдоевклидову плоскость P_1 и сохраняет неподвижной ортогональную ей пространственноподобную плоскость P_2 . С учетом принадлежности тензора G ограниченной группе Лоренца это означает, что тензор G действительно производит указанный в теореме гиперболический поворот.

Теперь рассмотрим преобразование, производимое тензором R (при $\bar{\omega} \neq 0$).

Зададим в M ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, в котором вектор $\mathbf{u}_1$ определяется равенством

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\Delta \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|},$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* : $\Delta = 1$, если базис $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ в пространстве Γ_* правоориентированный, и $\Delta = -1$, если этот базис левоориентированный (вектор $\mathbf{u}_1$ имеет единичную длину и ортогонален

вектору $\mathbf{i}$, потому что $|\mathbf{u}_1| = \sqrt{|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1|} = 1$, $\mathbf{u}_1 \parallel \bar{\omega}$, $\bar{\omega} \in \Gamma_*$ и $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$. Отсюда, умножая обе части равенства на $\Delta|\bar{\omega}|$, имеем (с учетом $\Delta^2 = 1$):

$$\bar{\omega} = \Delta|\bar{\omega}| \mathbf{u}_1. \quad (5.35)$$

Ортонормированность базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ в M влечет ортонормированность базиса $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ в Γ_* . Так как псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ имеет одинаковый вид в тензорных базисах, образованных из векторов любых ортонормированных базисов пространства Γ_* , то можем записать по аналогии с (5.6):

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1). \quad (5.36)$$

Подействуем тензором R на векторы базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Пользуясь формулами (5.31), (5.35), (5.36) и ортонормированностью базиса, находим:

$$\begin{aligned} R \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{i}; \\ R \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_1; \\ R \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_2 + \frac{1}{c} |\bar{\omega}| \Delta l \mathbf{u}_3; \\ R \cdot \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{1}{c} |\bar{\omega}| \Delta l \mathbf{u}_2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Обозначим: P_3 — плоскость, содержащая векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}_1$ (согласно (5.35), она содержит также псевдовектор $\bar{\omega}$); P_4 — плоскость, содержащая векторы $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$. Плоскости P_3 и P_4 взаимно ортогональны, причем плоскость P_3 псевдоевклидова (так как содержит времени-подобный вектор $\mathbf{i}$), а плоскость P_4 пространственноподобная (потому что она ортогональна псевдоевклидовой плоскости P_3).

Из (5.37) заключаем, что тензор R сохраняет неподвижной псевдоевклидову плоскость P_3 и оставляет инвариантной ортогональную ей пространственноподобную плоскость P_4 . Поскольку тензор R принадлежит ограниченной группе Лоренца, то отсюда следует, что этот тензор в самом деле производит указанный в теореме пространственный поворот. ■

Будем говорить, что материальная точка движется в пространстве Минковского M под действием тензора (оператора) Λ , если в каждый момент ее собственного времени l этот тензор преобразует 4-скорость материальной точки $\mathbf{i}(l)$ в $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ по правилу

$$\Lambda(l) \cdot \mathbf{i}(l) \approx \mathbf{i}(l + \Delta l), \quad (5.38)$$

где равенство выполняется с точностью до первой степени Δl (при разложении функции $\mathbf{i}(l + \Delta l)$ в ряд по степеням Δl).

При рассмотрении «точечной» частицы будем говорить, что она движется в M под действием тензора (оператора) Λ , если любой вектор $\mathbf{a}$, неподвижно скрепленный с ней (включая 4-скорость центра частицы $\mathbf{i}$), преобразуется по правилу, аналогичному (5.38):

$$\Lambda(l) \cdot \mathbf{a}(l) \approx \mathbf{a}(l + \Delta l) \quad (5.39)$$

с точностью до первой степени Δl .

Теорема 5.4. Пусть «точечная» частица движется в пространстве Минковского M вдоль мировой линии L под действием тензора Λ , принадлежащего ограниченной группе Лоренца. Тогда для любого вектора $\mathbf{a} \in M$, неподвижно скрепленного с частицей, его производная по собственному времени частицы l имеет вид

$$\frac{d\mathbf{a}}{dl} = \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \cdot \mathbf{a}, \quad (5.40)$$

где $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы; $\bar{\omega} \in \Gamma_*$ — псевдовектор, определяемый тензором Λ ; $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* ; Γ_* — собственное физическое пространство частицы ($\Gamma_* \perp \mathbf{i}$).

Доказательство. Пусть Λ — тензор, удовлетворяющий условию теоремы; $\mathbf{a}$ — вектор, неподвижно скрепленный с частицей. Рассмотрим приращение вектора $\mathbf{a}$ за промежуток времени Δl , разделяющий два близких момента времени l и $l + \Delta l$:

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(l + \Delta l) - \mathbf{a}(l) \approx \Lambda(l) \cdot \mathbf{a}(l) - \mathbf{a}(l), \quad (5.41)$$

где учтена зависимость (5.39) (она выполняется, так как по условию теоремы частица движется под действием тензора Λ).

Согласно теореме 5.2, тензор Λ может быть представлен в виде (5.7). Подставляя в (5.41) значение этого тензора из (5.7), получаем:

$$\Delta \mathbf{a} \approx \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \cdot \mathbf{a} \Delta l.$$

Отсюда находим производную вектора $\mathbf{a}$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta l} = \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \cdot \mathbf{a},$$

здесь приближенное равенство заменено точным, потому что произведен переход к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$. Данное выражение доказывает справедливость формулы (5.40). ■

Пусть $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ (в некоторый момент l), $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_{\Gamma_*}$ — направляющий орт луча частицы ($\mathbf{q}_i$ и $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ — составляющие орта $\mathbf{q}_0$ вдоль $\mathbf{i}$ и Γ_* ; $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$). Тогда из (5.40) с учетом $dl = c dt_*$, $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$ и (4.5) имеем:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt_*} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_i = \mathbf{0}; \quad \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma_*}}{dt_*} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_{\Gamma_*} = \bar{\omega} \times \mathbf{q}_{\Gamma_*}, \quad (5.42)$$

где $\times$ — знак векторного умножения в Γ_* . Отсюда заключаем, что составляющая $\mathbf{q}_i$ вектора $\mathbf{q}_0$ не изменяется, а составляющая $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}$. Так как это относится ко всем лучам частицы, то, значит, $\bar{\omega}$ есть *угловая скорость* вращения частицы вокруг ее центра, причем $\bar{\omega}$ описывает вращение относительно собственного физического пространства частицы Γ_* ($\bar{\omega} \in \Gamma_*$).

Внимание! В общем случае $\bar{\omega}$ — лишь часть полной угловой скорости частицы, так как при $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$ тензор $\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl}$, входящий в (5.40), тоже может вносить вклад в пространственное вращение частицы (см. разд. 20 главы 3 и разд. 13 настоящей главы).

Теорема 5.5. О скорости «точечной» частицы. Пусть «точечная» частица движется в пространстве Минковского M вдоль мировой линии L под действием тензора (оператора), принадлежащего ограниченной группе Лоренца. Тогда 4-скорость $\mathbf{j}_0$ произвольного элемента частицы задается выражением

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \cdot \mathbf{Q}, \quad (5.43)$$

где $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы; q — параметр, одинаковый для всех элементов, принадлежащих одному лучу частицы; $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча, содержащего рассматриваемый элемент частицы ($\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ — времениподобные векторы, направленные в сторону будущего и имеющие начала в центре частицы; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$); l — собственное время частицы; c — скорость света; $\bar{\omega}$ — угловая скорость частицы относительно ее собственного физического пространства Γ_* ($\bar{\omega}$ не является полной угловой скоростью частицы, см. сказанное перед теоремой); $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* ; $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$ — вектор, соединяющий центр частицы с рассматриваемым элементом частицы ($Q > 0$ при нахождении элемента в будущем относительно центра частицы; $Q < 0$ при нахождении элемента в прошлом относительно центра; $Q = 0$ при нахождении элемента в центре частицы; $|Q| = \sqrt{|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}|}$ — расстояние между центром частицы и рассматриваемым элементом); $q = dQ/dl$; все величины относятся к одному и тому же моменту собственного времени частицы; величины $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{i}$, q , $\mathbf{q}_0$, $\varkappa$ безразмерные, l и Q имеют размерность длины.

Доказательство. Данная теорема является следствием теорем 5.1 и 5.4. Действительно, подставляя в формулу (5.2) значение производной $d\mathbf{q}_0/dl$, вытекающее из (5.40), и учитывая равенство $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$, получаем требуемую формулу (5.43). ■

Согласно формуле (5.43), 4-скорость «точечной» частицы $\mathbf{j}_0$ имеет четыре составляющие. Составляющая $\mathbf{i}$ одинакова для всех элементов частицы и совпадает со скоростью центра частицы. Она задает скорость поступательного движения частицы как целого вдоль мировой линии L . Составляющая $q\mathbf{q}_0$ описывает скорость движения каждого луча вдоль самого себя. Из сказанного после доказательства теоремы 5.1 и из рис. 5.2 вытекает, что одно и то же движение частицы вдоль мировой линии может быть порождено разными движениями лучей, различающимися перемещениями их вдоль самих себя. Поэтому параметр q , входящий в составляющую скорости $q\mathbf{q}_0$, может иметь различные значения при одном и том же движении частицы и может быть разным для разных лучей (он одинаков только для элементов, принадлежащих одному лучу частицы).

Третья и четвертая составляющие скорости, а именно

$$\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}\right) \cdot \mathbf{Q} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{c}\bar{\omega} \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{Q}, \quad (5.44)$$

характеризуют скорость вращения лучей вокруг центра частицы. Сравнение величин (5.44) с тензорами G и R , фигурирующими в теореме 5.3, позволяет заключить, что первая из величин (5.44) задает скорость гиперболического вращения частицы, а вторая — скорость ее пространственного вращения. Гиперболическое вращение осуществляется в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$, то есть в соприкасающейся плоскости мировой линии L (при $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$). Пространственное вращение происходит в плоскости, которая принадлежит Γ_* и ортогональна вектору $\mathbf{i}$ и псевдовектору $\bar{\omega}$ (при $\bar{\omega} \neq \mathbf{0}$). Отметим, что при не плоской мировой линии L первая из величин (5.44) может давать вклад также в пространственное вращение частицы (см. далее разд. 13).

Если мировая линия L фиксирована, то скорость гиперболического вращения частицы тоже фиксирована (так как тензор в первом из выражений (5.44) определяется функцией $\mathbf{i}(l)$, однозначно связанной с линией L). Однако пространственное вращение частицы может быть при этом произвольным, потому что псевдовектор $\bar{\omega}$ во втором выражении (5.44) не зависит от мировой линии L (единственное ограничение — он должен принадлежать физическому пространству Γ_* , ортогонально к касательной к L). Таким образом, движение частицы вдоль мировой линии L может сопровождаться произвольным ее вращением вокруг L .

6. Собственное поле «точечной» частицы

«Точечная» частица порождает в пространстве Минковского M поле антисимметричного двухвалентного тензора F , называемое собственным полем частицы и определяемое формулой (2.2). Рассчитаем поле F в предположении, что мировая линия частицы L известна.

Зафиксируем какую-либо точку x пространства M , не лежащую на мировой линии ($x \in M \setminus L$). Будем называть ее *точкой наблюдения*. Вследствие движения частицы, разные лучи частицы проходят, сменяя друг друга, через точку x (рис. 6.1).

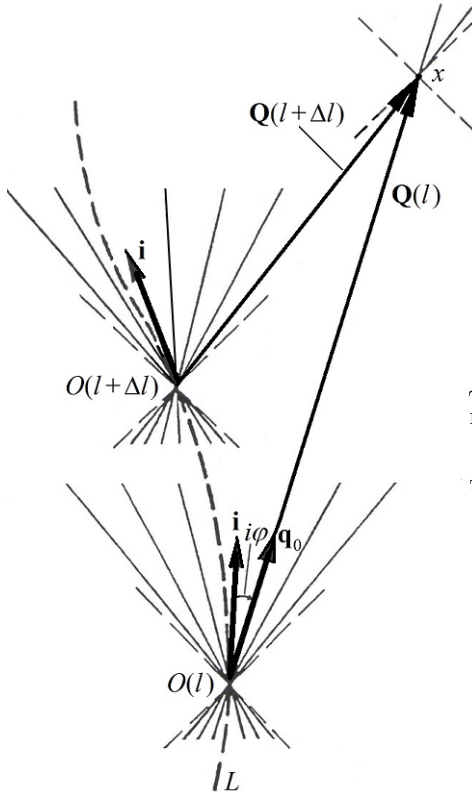


Рис. 6.1. «Точечная» частица, движущаяся вдоль мировой линии L .

Тонкие штриховые линии — световые конусы.

Пусть, как и ранее, L_- — участок мировой линии L , содержащийся во внутренней области светового конуса прошлого с вершиной в точке x . Согласно (2.2), значение поля F в точке x находится путем интегриро-

вания по всем расположениям частицы с центром на L_- . Далее будем рассматривать в основном именно эти расположения частицы.

Введем вектор $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ox}$, соединяющий центр частицы O с точкой наблюдения x (см. рис. 6.1). Так как при рассматриваемых расположениях частицы ее центр O находится во внутренности светового конуса прошлого с вершиной в x , то $\mathbf{Q}$ — времениподобный вектор, ориентированный в сторону будущего. Значит, его можно представить в виде $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$, где $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча, проходящего через x ; Q — расстояние от центра частицы до точки x ($Q = |\mathbf{Q}|$). Поскольку начало вектора $\mathbf{Q}$ движется вместе с центром частицы вдоль мировой линии, то вектор $\mathbf{Q}$ зависит от собственного времени частицы l : $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(l)$.

Обратим внимание на то, что зависимость $\mathbf{Q}(l)$, о которой идет речь, отличается от обозначавшейся тем же символом зависимости между $\mathbf{Q}$ и l , использованной в разд. 5. Там вектор $\mathbf{Q}$ принадлежал при всех l одному и тому же лучу частицы и вместе с ним двигался в пространстве M (см. рис. 5.1). Здесь же *при различных l вектор $\mathbf{Q}$ принадлежит разным лучам частицы*. Его начало перемещается вместе с центром частицы вдоль мировой линии, тогда как конец этого вектора остается все время в точке наблюдения x (см. рис. 6.1). Кроме того, в разд. 5 рассматривались произвольные элементы лучей, поэтому величина Q в равенстве $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$ могла иметь любой знак. Здесь же рассматриваются элементы лучей, находящиеся в будущем относительно центра частицы, поэтому здесь $Q > 0$.

Подставим в формулу (2.2) значения плотности лучей ε и скорости частицы $\mathbf{j}_0$ из (3.6) и (5.43) (заменив в (3.6) символ R на Q). В полученном выражении домножим числитель и знаменатель на Q . В итоге, учитывая, что $Q\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}$, найдем:

$$F(x) = \frac{aN}{Z(1)} \int_{L_-} \frac{\hat{f}}{Q^4} dl, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f} = & (\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}) + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}) \left(\mathbf{Q} \frac{d\mathbf{i}}{dl} - \frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{Q} \right) - \left(\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) (\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}) - \\ & - \frac{1}{c} \mathbf{Q}(\bar{\omega} \cdot \kappa \cdot \mathbf{Q}) + \frac{1}{c} (\bar{\omega} \cdot \kappa \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{Q}; \end{aligned} \quad (6.2)$$

формула (6.1), как и формула (2.2), относится к случаю, когда L_- — непустое множество, если же $L_- = \emptyset$ для некоторой точки x , то $F(x)$ — нулевой двухвалентный тензор.

Отметим, что в выражении (6.2) не участвует величина $q\mathbf{q}_0$, входящая в (5.43) и характеризующая скорость движения луча вдоль себя. Так и должно быть. Действительно, лучи частицы, согласно нашим представлениям, служат геометрическими образами неких протяженных материальных объектов. Моделируя эти объекты однородными прямыми линиями, мы фактически отказываемся от учета их внутреннего строения. В рамках такого приближения движение этих объектов вдоль себя не должно приводить к каким-либо физическим эффектам, в частности, оно не должно вносить вклад в собственное поле, воздействующее на другие материальные объекты.

В дальнейшем, для упрощения рассуждений, исключим из рассмотрения ситуацию, когда мировая линия частицы начинается или заканчивается на световом конусе прошлого с вершиной в точке наблюдения x . Иначе говоря, будем считать, что концевые (граничные) точки мировой линии, если они существуют, не лежат на этом световом конусе. При таком условии формулы (6.1) и (6.2) приводят к значению поля F , описываемому следующей теоремой.

Теорема 6.1. О собственном поле «точечной» частицы.

«Точечная» частица, имеющая гладкую времениподобную мировую линию L , создает в точке $x \in M \setminus L$ собственное поле

$$\begin{aligned}
 F(x) = & \frac{aN(\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q})_*}{4\pi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i})_*^3} + \\
 & + \frac{aN \left[(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}) \left(\mathbf{Q} \frac{d\mathbf{i}}{dl} - \frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{Q} \right) - \left(\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) (\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}) \right]_*}{4\pi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i})_*^3} + \\
 & + \frac{aN \left[\frac{1}{c} (\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{Q} - \frac{1}{c} \mathbf{Q} (\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{Q}) \right]_*}{4\pi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i})_*^3}, \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

где звездочка относится ко всем функциям в помеченном ею выражении и означает, что каждая функция вычисляется в точке O_* пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого с вершиной в x (рис. 6.2). Если мировая линия не пересекает этот световой конус, то $F(x)$ — нулевой двухвалентный тензор.

В (6.3) обозначено: a — числовой коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин (он будет конкретизирован в разд. 7); N — количество лучей, составляющих частицу; $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*x}$ — вектор, соединяющий точку O_* с точкой x (вектор $\mathbf{Q}_*$ направлен вдоль образующей светового конуса,

поэтому он изотропный, см. рис. 6.2); $\mathbf{i}_* = \mathbf{i}(l_*)$; $(d\mathbf{i}/dl)_* = (d\mathbf{i}/dl)(l_*)$; $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы (единичный касательный вектор к мировой линии L , ориентированный в направлении будущего); l — собственное время частицы; l_* — значение собственного времени l в точке O_* ; c — скорость света; $\bar{\omega}_* = \bar{\omega}(l_*)$ — угловая скорость вращения частицы относительно ее собственного физического пространства Γ_* , вычисленная в момент времени l_* ($\bar{\omega} \in \Gamma_*$); $\varkappa_*$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* (при расположении Γ_* в M , отвечающем моменту l_*); точка — знак скалярного умножения; тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между ними; собственное время l и вектор $\mathbf{Q}$ имеют размерность длины; вектор $\mathbf{i}$ и псевдотензор $\varkappa$ безразмерны.

Подчеркнем, что вектор $\mathbf{Q}_*$, в отличие от вектора $\mathbf{Q}$, не направлен вдоль какого-либо луча частицы, потому что вектор $\mathbf{Q}_*$ изотропный, а все лучи времениподобные.

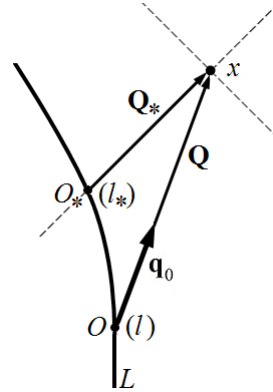


Рис. 6.2. Мировая линия L , пересекающая световой конус прошлого с вершиной в x .

Штриховые линии — световой конус; O_* — точка пересечения линии L и светового конуса; O — центр частицы, движущийся вдоль L .

Дальнейшее содержание настоящего раздела посвящено доказательству сформулированной теоремы. Свойства поля F , задаваемого формулой (6.3), и связь этого поля с электромагнитным полем электрона обсуждаются в следующих разделах.

Доказательство теоремы 6.1. В связи с тем, что мы исключили из рассмотрения ситуацию, когда концевые (граничные) точки мировой линии L принадлежат световому конусу прошлого с вершиной в точке x , то возможны три случая:

- мировая линия L находится целиком, включая граничные точки, во внешней области этого светового конуса;
- мировая линия L находится целиком, включая граничные точки, во внутренности этого светового конуса;
- мировая линия L пересекает данный световой конус, продолжаясь в обе стороны от него.

В первом случае участок L_- мировой линии L , который содержится во внутренности указанного светового конуса, представляет собой пустое множество. В такой ситуации, согласно пояснению к формуле (6.1), $F(x)$ является нулевым двухвалентным тензором. Последнее утверждение теоремы соответствует этому результату.

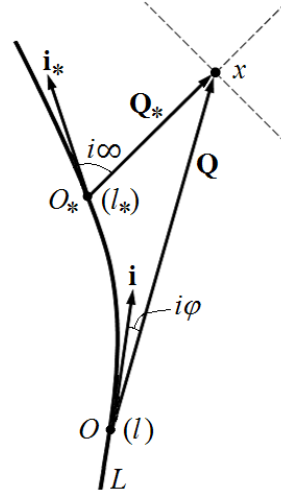
Теперь проанализируем два оставшихся случая. В обоих случаях линия L_- — непустое множество, поэтому поле F находится с помощью формулы (6.1) путем интегрирования по L_- .

Формула (6.1) содержит в знаменателе бесконечно большую величину $Z(1)$ (см. выражение (3.6) и примечание к нему). Поэтому поле F может быть ненулевым только при условии, что интеграл в формуле (6.1) принимает бесконечно большое значение, то есть расходится. Тензор $\hat{f}$, стоящий в числителе подынтегрального выражения, не влияет на расходимость интеграла, так как он не является в общем случае ни нулевым, ни бесконечно большим. Следовательно, расходимость интеграла может обеспечиваться только величиной Q . Эта величина стоит в знаменателе подынтегрального выражения, поэтому для расходимости интеграла необходимо, чтобы она принимала нулевое значение во внутренней точке или на границе участка интегрирования L_- . Такое может быть только тогда, когда мировая линия L пересекает световой конус прошлого с вершиной в точке x . Действительно, если пересечение отсутствует, то есть линия L целиком, включая граничные точки, располагается во внутренности этого светового конуса, то расстояние Q от центра частицы до точки x принимает ненулевые значения на всем участке интегрирования L_- , включая его границы. При этом интеграл заведомо сходится и поле F оказывается нулевым. Иначе обстоит дело, если пересечение имеет место. В этом случае при приближении центра частицы O к точке пересечения O_* величина Q стремится к нулю, так как она является длиной вектора $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ox}$, который переходит в пределе при $O \rightarrow O_*$ в изотропный вектор $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*x}$ (рис. 6.3). Следовательно, при наличии пересечения рассматриваемый интеграл в самом деле может оказаться расходящимся и тогда поле F может быть ненулевым.

Таким образом, мы показали, что если мировая линия L не пересекает световой конус прошлого с вершиной в точке x , то есть находится целиком либо во внешней области, либо во внутренности этого светового конуса, то поле F является нулевым. Значит, последнее утверждение теоремы верно. Одновременно мы показали, что если мировая линия L пересекает данный световой конус, то имеется возможность того, что поле F принимает ненулевое значение. Остановимся на этом случае.

Рис. 6.3. Иллюстрация к расчету собственного поля частицы.

Штриховые линии — световой конус с вершиной в точке x ; изотропный вектор $\mathbf{Q}_*$ есть предельное значение вектора $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ox}$ при $O \rightarrow O_*$ ($O \in L_-$) или, что то же самое, при $l \rightarrow l_*$ ($l < l_*$); символ мнимой единицы i в обозначении углов указывает на то, что при оперировании с этими углами следует использовать гиперболические функции вместо тригонометрических.



Итак, пусть мировая линия L пересекает световой конус прошлого с вершиной в x , причем точка пересечения O_* не совпадает с x (тогда $x \notin L$, как должно быть по условию теоремы). Отметим сразу же, что точка пересечения может быть только одна, потому что две разные точки одной полу светового конуса, как известно, не могут быть соединены гладкой времениподобной линией.

Напомним, что мы помечаем величины, относящиеся к точке пересечения O_* , индексом звездочка. В частности, l_* — значение собственного времени частицы l в точке O_* ; $\mathbf{i}_*$ — 4-скорость центра частицы в точке O_* ($\mathbf{i}_* = \mathbf{i}(l_*)$); $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*x}$ — вектор, соединяющий точку O_* с точкой x ($\mathbf{Q}_* \neq \mathbf{0}$, так как $O_* \neq x$). Вектор $\mathbf{Q}_*$ является изотропным и ориентированным в сторону будущего, потому что он принадлежит образующей светового конуса прошлого с вершиной в x и направлен в сторону вершины конуса (см. рис. 6.3).

Рассмотрим вектор $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ox}$. Временно будем считать, что центр частицы O может находиться в любой точке мировой линии L (а не только на L_-). Благодаря фиксированности точки x , вектор $\mathbf{Q}$ может рассматриваться как взятый с обратным знаком радиус-вектор центра частицы O относительно точки x . Так как $O \in L$ и мировая линия L гладкая (по условию теоремы), то радиус-вектор центра частицы является дифференцируемой функцией натурального параметра l на линии L , значит, функция $\mathbf{Q}(l)$ дифференцируемая (при всех l). Производная радиуса-вектора центра частицы по l есть 4-скорость центра

частицы $\mathbf{i}$, поэтому с учетом обратного знака вектора $\mathbf{Q}$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dl} = -\mathbf{i}. \quad (6.4)$$

Вследствие дифференцируемости функции $\mathbf{Q}(l)$, выполняется следующее приближенное равенство в окрестности момента l_* (с точностью до первой степени разности $l - l_*$):

$$\mathbf{Q}(l) \approx \mathbf{Q}_* + \frac{d\mathbf{Q}}{dl}(l_*)(l - l_*) = \mathbf{Q}_* - \mathbf{i}_*(l - l_*), \quad (6.5)$$

где $\mathbf{Q}_* = \mathbf{Q}(l_*)$, $\mathbf{i}_* = \mathbf{i}(l_*)$ и учтена зависимость (6.4).

Так как вектор $\mathbf{Q}_*$ изотропный, то $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{Q}_* = 0$. Отсюда и из (6.5) вытекает, что в окрестности момента l_* с точностью до членов, линейных по $l - l_*$, выполняется равенство

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} \approx -2 \mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*(l - l_*). \quad (6.6)$$

Пусть участку мировой линии L_- , по которому проводится интегрирование в (6.1), соответствуют значения переменной интегрирования $l \in (l_{\min}, l_*)$, где $l_{\min}$ — значение l в граничной точке мировой линии L со стороны прошлого (возможен случай $l_{\min} = -\infty$); l_* — значение l в точке пересечения O_* , которая является граничной точкой участка L_- со стороны будущего. Вернемся к рассмотрению расположений частицы с центром на L_- , то есть будем считать далее, что $l < l_*$.

При $l < l_*$ центр частицы O находится во внутренней части светового конуса прошлого с вершиной в x , поэтому $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ox}$ — ненулевой временноподобный вектор. Значит, $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} > 0$, откуда $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} = Q^2$, где Q — длина вектора $\mathbf{Q}$ ($Q > 0$). Вместе с (6.6) это дает:

$$Q^2 \approx -2 \mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*(l - l_*) \quad (6.7)$$

в линейном приближении по $l - l_*$ (при $l < l_*$). Отметим, что правая часть равенства (6.7) положительна, так как $l - l_* < 0$ и $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_* > 0$ (первое неравенство вытекает из того, что $l < l_*$; второе является следствием одинаковой временной ориентации векторов $\mathbf{Q}_*$ и $\mathbf{i}_*$, см. лемму 1 в разд. 8 главы 2).

Нас интересует ситуация, при которой интеграл в формуле (6.1) расходится. Для этого необходимо, как указывалось, чтобы величина Q , стоящая в знаменателе подынтегрального выражения, обращалась в нуль во внутренней точке или на границе участка интегрирования L_- . Ранее отмечалось, что величина Q стремится к нулю при

приближении центра частицы O к точке пересечения O_* , причем $Q \neq 0$ при $O \in L_-$, поэтому расходимость (или не расходимость) интеграла определяется поведением подынтегрального выражения только вблизи конца l_* интервала интегрирования $(l_{\min}, l_*)$. Отсюда следует, что расходимость интеграла и вместе с ней значение поля F не изменятся, если интервал интегрирования $(l_{\min}, l_*)$ заменить любой сколь угодно малой его частью (l_0, l_*) , где $l_{\min} < l_0 < l_*$. В самом деле, представим интеграл в (6.1) в виде суммы интегралов по интервалам $(l_{\min}, l_0)$ и (l_0, l_*) . На интервале $(l_{\min}, l_0)$ подынтегральная функция принимает конечные значения, поэтому интеграл сходится. С учетом бесконечно большого значения функции $Z(1)$, стоящей в знаменателе формулы (6.1), это означает, что интеграл по этому интервалу дает нулевой вклад в поле F . Значит, интервал интегрирования $(l_{\min}, l_*)$ действительно может быть уменьшен до (l_0, l_*) .

Пусть (l_0, l_*) — интервал, на котором с достаточной степенью точности выполняются приближенные равенства (6.7) и $\hat{f}(l) \approx \hat{f}(l_*)$ (где $\hat{f}$ определяется формулой (6.2)). Заменяем в формуле (6.1) интервал интегрирования $(l_{\min}, l_*)$ на (l_0, l_*) , тензор $\hat{f}(l)$ на $\hat{f}(l_*)$ и подставим значение величины Q^2 из (6.7):

$$F(x) = \frac{aN\hat{f}_*}{4Z(1)(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*)^2} \int_{l_0}^{l_*} \frac{dl}{(l-l_*)^2}, \quad (6.8)$$

где $\hat{f}_* = \hat{f}(l_*)$; учтено, что величины $\hat{f}_*$ и $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*$ не зависят от переменной интегрирования l . Очевидно, что полученный интеграл является расходящимся.

При выводе формулы (6.8) использованы приближенные равенства, тем не менее, мы поставили в формуле знак точного равенства. Это объясняется следующим. Вычислим интеграл, входящий в (6.8):

$$\int_{l_0}^{l_*} \frac{dl}{(l-l_*)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_0}^{l_* - \varepsilon} \frac{dl}{(l-l_*)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{l-l_*} \Big|_{l_0}^{l_* - \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{\varepsilon}{l_* - l_0} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Из этой цепочки равенств видно, что интеграл, стоящий под знаком предела, является бесконечно большой величиной, эквивалентной $1/\varepsilon$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$), поэтому интеграл в (6.8) не зависит от l_0 . Значит, величине l_0 может быть придано любое значение, в частности, можно считать, что она столь близка к l_* , что приближенные равенства (6.7) и $\hat{f}(l) \approx \hat{f}(l_*)$ выполняются с любой наперед заданной точностью на всем

интервале интегрирования (l_0, l_*) . Следовательно, тот факт, что эти равенства являются приближенными, не влияет на значение интеграла. Таким образом, наличие знака точного равенства в формуле (6.8) оправдано.

Формула (6.8) содержит величину $Z(1)$, которая включает в себя, согласно (3.6), интеграл по угловой переменной. Перейдем и в интеграле в (6.8) к угловой переменной (это позволит доказать в дальнейшем, что отношение этих расходящихся интегралов является конечной величиной). В качестве переменной интегрирования примем угол между векторами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{i}$. Он определен на всем участке L_- мировой линии, потому что при всех расположениях частицы с центром на L_- векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{i}$ являются времениподобными и имеют одинаковую временную ориентацию (оба направлены в сторону будущего).

Угол φ между векторами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{i}$ определяется формулой (10.1) из главы 3:

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}|}{|\mathbf{Q}| |\mathbf{i}|} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}}{Q}, \quad (6.9)$$

где использованы зависимости $|\mathbf{Q}| = Q$, $|\mathbf{i}| = 1$ и $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i} > 0$ (последнее неравенство есть следствие одинаковой временной ориентации векторов $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{i}$, см. лемму 1 в разд. 8 главы 2). Формула (6.9) задает угол φ с точностью до знака. Далее будем считать, что $\varphi \geq 0$.

В пределе при $l \rightarrow l_*$ вектор $\mathbf{Q}$ переходит в изотропный вектор $\mathbf{Q}_*$, поэтому его длина Q стремится к нулю. Вместе с тем, произведение $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}$ имеет ненулевой предел $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*$. Отсюда и из (6.9) вытекает, что функция $\operatorname{ch} \varphi$ и вместе с ней угол φ стремятся к бесконечности при $l \rightarrow l_*$ (в связи с этим мы обозначили на рис. 6.3 угол между векторами $\mathbf{Q}_*$ и $\mathbf{i}_*$ символом бесконечности ∞). Таким образом, поведение функции $\operatorname{ch} \varphi$ вблизи точки l_* определяется в основном поведением величины Q . Поэтому при рассмотрении ситуации в ближайшей окрестности точки l_* можно заменить в формуле (6.9) произведение $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}$ величиной $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*$. Осуществляя такую замену, получаем:

$$\operatorname{ch} \varphi \approx \frac{\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*}{Q}. \quad (6.10)$$

Зависимости (6.7) и (6.10) дают:

$$l - l_* \approx -\frac{\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*}{2 \operatorname{ch}^2 \varphi}. \quad (6.11)$$

Из (6.11) дифференцированием по φ находим:

$$dl \approx \frac{\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*}{\operatorname{ch}^3 \varphi} \operatorname{sh} \varphi d\varphi, \quad (6.12)$$

где учтено, что $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*$ — фиксированное число. Равенства (6.10)–(6.12) выполняются в ближайшей окрестности точки l_* (при $l < l_*$).

Отметим, что при некоторых взаимных расположениях мировой линии L и точки x может возникнуть ситуация, когда различным точкам интервала интегрирования (l_0, l_*) отвечает одно и то же значение угла φ (рис. 6.4).

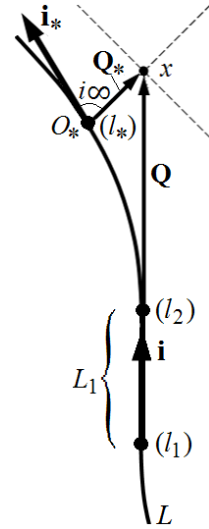


Рис. 6.4. Случай, когда на участке L_1 мировой линии L угол φ между векторами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{i}$ постоянен ($\varphi = 0$ при всех $l \in [l_1, l_2]$).

В таком случае отсутствует взаимно однозначное соответствие между множествами значений переменных l и φ , поэтому нельзя перейти в выражении (6.8) от интегрирования по l к интегрированию по φ . Данное затруднение, однако, может быть преодолено. Дело в том, что расходимость интеграла в (6.8) обусловлена поведением подынтегральной функции только вблизи точки l_* . В связи с этим допустимо еще более сузить интервал интегрирования. Вследствие гладкости мировой линии L , угол φ между векторами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{i}$ стремится к бесконечности непрерывным образом (при $l \rightarrow l_*$). Значит, этот угол не может оставаться неизменным вплоть до точки l_* . Если исключить из рассмотрения экзотические варианты конфигурации линии L (типа быстроосциллирующей кривой), то на основании сказанного можно сделать вывод, что найдется интервал $(l'_0, l_*) \subset (l_0, l_*)$, на котором функция $\varphi(l)$ является строго монотонно возрастающей. Поскольку это свойство функции $\varphi(l)$ обеспечивает взаимно однозначное соответствие между множествами значений переменных l и φ , то на интервале (l'_0, l_*) уже возможен переход к интегрированию по угловой переменной φ .

Заменим в (6.8) интервал интегрирования (l_0, l_*) интервалом (l'_0, l_*) и перейдем к интегрированию по переменной φ путем подстановки в подынтегральное выражение величин $l - l_*$ и dl из зависимостей (6.11) и (6.12). Верхний предел интегрирования по φ равен бесконечности, ибо, как отмечалось, $\varphi \rightarrow +\infty$ при $l \rightarrow l_*$. Нижний предел интегрирования, соответствующий величине l'_0 , обозначим через φ_0 (величину φ_0 конкретизировать не будем, так как она не участвует в окончательном результате). Подставим также значение площади $Z(1)$ из (3.6). После выполнения указанных преобразований получим:

$$F(x) = \frac{aN\hat{f}_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_0}^{\Phi} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi}{4\pi(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*)^3 \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi}, \quad (6.13)$$

где несобственный интеграл по промежутку $(\varphi_0, +\infty)$ представлен, согласно его определению, в виде предела соответствующего определенного интеграла; знак точного равенства сохранен по причине, аналогичной той, по которой поставлен знак точного равенства в (6.8). Использование в обоих интегралах одних и тех же символов φ и Φ в качестве переменной интегрирования и верхнего предела допустимо, потому что определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, а предел функции при устремлении аргумента к бесконечности не зависит от обозначения аргумента.

Заменим в выражении (6.13) отношение пределов функций пределом их отношения и воспользуемся известными значениями интегралов от гиперболических функций (см. формулы в конце разд. 10 главы 3, с. 186). Дополняя эти действия очевидными преобразованиями, найдем:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{aN\hat{f}_*}{4\pi(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*)^3} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4} \operatorname{ch}(2\Phi) - \frac{1}{4} \operatorname{ch}(2\varphi_0)}{\frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\Phi) - \frac{1}{2} \Phi} = \\ &= \frac{aN\hat{f}_*}{4\pi(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*)^3} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(2\Phi) \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(2\varphi_0)}{\operatorname{ch}(2\Phi)}\right)}{\operatorname{sh}(2\Phi) \left(1 - \frac{2\Phi}{\operatorname{sh}(2\Phi)}\right)} = \frac{aN\hat{f}_*}{4\pi(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*)^3} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \operatorname{th}^{-1}(2\Phi). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу $\operatorname{th}(2\Phi) \rightarrow 1$ при $\Phi \rightarrow +\infty$, имеем:

$$F(x) = \frac{aN\hat{f}_*}{4\pi(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}_*)^3}.$$

Подставляя в это равенство значение тензора $\hat{f}$ из (6.2), получаем требуемую формулу (6.3). ■

Отметим, что замена отношения пределов функций пределом их отношения, осуществленная в конце доказательства теоремы 6.1, не является вполне корректной процедурой с точки зрения классического математического анализа, из-за бесконечного значения пределов. Будем считать, однако, эту замену допустимой. Возможно, что указанную некорректность можно «обойти» в рамках нестандартного анализа [24], если принять, что величина Φ в (6.13) есть некоторое бесконечно большое гипердействительное число. В этом случае предельные переходы в числителе и знаменателе формулы (6.13) окажутся ненужными, поэтому производить такое некорректное преобразование не потребуется.

7. Собственное поле «точечной» частицы (координатное представление)

Формула (6.3) задает собственное поле F «точечной» частицы в тензорном (бескоординатном) виде. Для сравнения этого поля с известными физическими характеристиками материальных тел выразим его через параметры движения частицы относительно инерциальной системы отсчета, а также представим это поле в координатной форме.

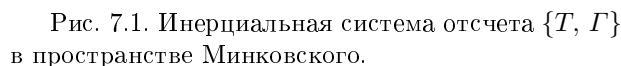
Введем в пространстве Минковского M инерциальную систему отсчета $\{T, G\}$, где T — ось времени, G — физическое пространство (рис. 7.1).

Обозначим: τ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; t — координатное время или просто время (отсчитывается вдоль оси T в направлении от прошлого к будущему); C — точка оси T , которой соответствует момент времени $t = 0$; L — мировая линия «точечной» частицы (гладкая времениподобная линия); $\mathbf{R}_L$ — радиус-вектор точек мировой линии L относительно точки C (он же — радиус-вектор центра частицы, движущегося вдоль L). Всем точкам физического пространства G при каждом его расположении в M отвечает один и тот же момент координатного времени.

Поскольку $\dim T = 1$, $\dim F = 3$ и $T \perp G$, то векторное пространство, ассоциированное с пространством M , есть прямая сумма векторных пространств, ассоциированных с T и G . Значит, радиус-вектор $\mathbf{R}_L$ может быть представлен, причем единственным образом, в виде суммы

$$\mathbf{R}_L = ct\tau + \rho, \quad (7.1)$$

где $ct\tau$ — составляющая радиуса-вектора $\mathbf{R}_L$ вдоль оси времени T (ct — натуральный параметр на оси T ; c — скорость света); ρ — составляю-



щая $\mathbf{R}_L$ вдоль физического пространства Γ (см. рис. 7.1). Из $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$ следует $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho} = 0$, а из $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma$ и отрицательной определенности метрической формы в Γ вытекает $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} \leq 0$.

Именно траектории тел являются предметом рассмотрения в классической механике. Подчеркнем, что траектория тела зависит от выбора системы

отсчета. Это объясняется тем, что траектория представляет собой некоторую кривую в физическом пространстве. А так как в разных системах отсчета физические пространства, вообще говоря, различны и движутся по-разному, то точки пересечения их с мировой линией тела прочерчивают в них разные кривые. В отличие от траектории, мировая линия тела определяется вне связи с системой отсчета и поэтому не зависит от нее (см. разд. 5 главы 3).

Вектор ρ служит радиусом-вектором точек траектории L_Γ относительно точки $T \cap \Gamma$. Производная

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{v} \quad (7.2)$$

есть *скорость* центра частицы относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. Вектор $\mathbf{v}$ лежит в Γ и является касательным вектором к траектории частицы L_Γ (при $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; см. рис. 7.1). Вследствие отрицательной определенности метрической формы в Γ , выполняется неравенство $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \leq 0$. Из $\tau \in T$, $\mathbf{v} \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$ следует $\tau \cdot \mathbf{v} = 0$. Обозначим длину (модуль) вектора $\mathbf{v}$ через v : $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|}$ ($v \geq 0$). Величину v будем называть, так же как вектор $\mathbf{v}$, *скоростью* центра частицы (относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$). Из определения скорости v и неравенства $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \leq 0$ вытекает, что $v^2 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Скорость центра частицы относительно пространства M описывается единичным касательным вектором $\mathbf{i}$ к мировой линии L , направленным в сторону будущего (см. разд. 3 главы 3). Эта скорость, называемая также 4-*скоростью*, определяется как производная вектора перемещения центра частицы по собственному времени частицы l . Вектор перемещения материальной точки $\mathbf{U}$ совпадает с разностью значений ее радиуса-вектора в текущий и начальный моменты времени ($\mathbf{U}(l) = \mathbf{R}(l) - \mathbf{R}(l_0)$). Поэтому производная вектора перемещения равняется производной радиуса-вектора. В связи с этим можем записать применительно к нашему случаю:

$$\mathbf{i} = \frac{d\mathbf{R}_L}{dl}. \quad (7.3)$$

На основании равенств (7.1)–(7.3), учитывая постоянство величин c и τ , имеем:

$$\mathbf{i} = \frac{d\mathbf{R}_L}{dl} = \frac{d\mathbf{R}_L}{dt} \frac{dt}{dl} = (c\tau + \mathbf{v}) \frac{dt}{dl}. \quad (7.4)$$

Умножим крайние части этого выражения скалярно на самих себя (при этом равенство сохранится):

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (c\tau + \mathbf{v}) \cdot (c\tau + \mathbf{v}) \left(\frac{dt}{dl}\right)^2 = (c^2 \tau \cdot \tau + 2c\tau \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \left(\frac{dt}{dl}\right)^2.$$

Отсюда, принимая во внимание зависимости $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0$, $v^2 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $v \geq 0$ и $c > 0$, а также тот факт, что $dt/dl > 0$ (так как оба параметра, t и l , возрастают в направлении будущего), находим:

$$0 \leq v < c; \quad \frac{dt}{dl} = \frac{1}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (7.5)$$

Из (7.4) и (7.5) получаем:

$$\mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (7.6)$$

Дифференцирование обеих частей равенства (7.6) по собственному времени частицы l при учете постоянства величин $\boldsymbol{\tau}$ и c дает:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \frac{\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{v}}{dl} \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] - \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \frac{(-1)}{2c^2} \frac{d(v^2)}{dl}}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (7.7)$$

Из $v^2 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ следует $d(v^2)/dl = -2\mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}/dl)$. Кроме того, имеем: $d\mathbf{v}/dl = (d\mathbf{v}/dt)(dt/dl)$. С помощью этих соотношений и выражения (7.5) равенство (7.7) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \frac{\dot{\mathbf{v}} \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] - \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \dot{\mathbf{v}}\right)}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^2}, \quad (7.8)$$

где $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$ — ускорение центра частицы относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Зафиксируем точку наблюдения $x \in M \setminus L$, в которой будем рассчитывать собственное поле частицы F , и рассмотрим расположение физического пространства Γ в M , при котором оно проходит через точку x (см. рис. 7.1).

Пусть, как и в разд. 6, O_* — точка пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого с вершиной в x ; $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*x}$ — вектор, соединяющий точку O_* с точкой наблюдения x . Вектор $\mathbf{Q}_*$ изотропный,

ибо он принадлежит образующей светового конуса. Обозначим: O' — ортогональная проекция точки O_* на физическое пространство Γ (см. рис. 7.1). Так как траектория частицы L_Γ совпадает с ортогональной проекцией мировой линии L на физическое пространство Γ , то $O' \in L_\Gamma$.

Разложим вектор $\mathbf{Q}_*$ на сумму составляющих вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ :

$$\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*O'} + \overrightarrow{O'Ox} = c(t - t_{O_*})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}', \quad (7.9)$$

где $c(t - t_{O_*})\boldsymbol{\tau} = \overrightarrow{O_*O'}$; t и t_{O_*} — моменты координатного времени, отвечающие точкам O' и O_* соответственно (момент t отвечает всем точкам физического пространства Γ в рассматриваемом его расположении, в том числе точке наблюдения x); $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'Ox}$ ($\mathbf{r}' \in \Gamma$). Отметим, что так как точка O_* принадлежит одновременно мировой линии L и световому конусу прошлого с вершиной в x , причем $x \notin L$, то $t_{O_*} < t$, поэтому $t - t_{O_*} > 0$.

Изотропность вектора $\mathbf{Q}_*$ означает, что $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{Q}_* = 0$. Отсюда и из (7.9) находим:

$$t - t_{O_*} = \frac{r'}{c}, \quad (7.10)$$

где r' — длина вектора $\mathbf{r}'$ ($r' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{|\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'|}$; $r' \geq 0$); учтены равенства $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}' = 0$ и $r'^2 = -\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'$ (первое из них является следствием единичности вектора $\boldsymbol{\tau}$, второе вытекает из соотношений $\boldsymbol{\tau} \in T$, $\mathbf{r}' \in \Gamma$ и $T \perp \Gamma$; третье равенство обусловлено отрицательной определенностью метрической формы в Γ); использованы также неравенства $t - t_{O_*} > 0$ и $r' \geq 0$. Из выражения (7.10) и неравенства $t - t_{O_*} > 0$ следует $r' > 0$, поэтому $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$.

На основании (7.9) и (7.10) имеем:

$$\mathbf{Q}_* = r' \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right), \quad (7.11)$$

здесь и далее учтено, что $r' \neq 0$; $\mathbf{r}'/r'$ — мнимое единичный вектор, направленный так же, как $\mathbf{r}'$: $(\mathbf{r}'/r') \cdot (\mathbf{r}'/r') = -1$.

Полученные зависимости позволяют представить в координатном виде первые два слагаемые в формуле (6.3), задающей собственное поле частицы F . Для представления в координатном виде третьего слагаемого, содержащего угловую скорость $\bar{\omega}$, требуется дополнительное построение.

Рассмотрим собственное физическое пространство частицы Γ_* и физическое пространство инерциальной системы отсчета Γ в расположениях, при которых они проходят через некоторую точку O_L мировой

линии L . Допустим, что в этом случае $\mathbf{i} \nparallel \boldsymbol{\tau}$. Тогда Γ_* и Γ наклонены по отношению друг к другу и их пересечение $\Gamma_* \cap \Gamma$ есть двумерная плоскость (так как $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$, $\Gamma \perp \boldsymbol{\tau}$ и оба физических пространства являются трехмерными гиперплоскостями в четырехмерном пространстве M).

Зафиксируем в плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$ какой-либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и введем в гиперплоскостях Γ_* и Γ ортонормированные базисы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ соответственно. Вектор $\mathbf{e}_{3*}$ ортогонален плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$ в Γ_* . Вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$ в Γ . Каждый из векторов $\mathbf{e}_{3*}$ и $\mathbf{e}_3$ может иметь любое из двух взаимно противоположных направлений, ортогональных плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$ соответственно в Γ_* и в Γ (в дальнейшем мы конкретизируем направления этих векторов). Из $\mathbf{i} \perp \Gamma_*$, $\boldsymbol{\tau} \perp \Gamma$ и $|\mathbf{i}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1$ следует, что $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\}$ и $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированные базисы в M . Будем считать, что все базисные векторы имеют начала в точке O_L .

Далее запись $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначает плоскость, содержащую векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Ортонормированность базисов $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\}$ и $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ влечет $P(\mathbf{i}, \mathbf{e}_{3*}) \perp P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и $P(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3) \perp P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Поскольку пространство M четырехмерное и все базисные векторы имеют общее начало, то отсюда вытекает, что $P(\mathbf{i}, \mathbf{e}_{3*})$ и $P(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3)$ — одна и та же плоскость. Обозначим ее через P . Так как $P(\mathbf{i}, \mathbf{e}_{3*}) = P(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3) = P$, то $\mathbf{i}, \mathbf{e}_{3*}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3 \in P$.

Из формулы (7.6) и зависимостей $\mathbf{i}, \boldsymbol{\tau} \in P$ и $\mathbf{i} \nparallel \boldsymbol{\tau}$ заключаем, что $\mathbf{v} \in P$ и $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{v}$ — скорость центра частицы относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$). В силу $\mathbf{v}, \mathbf{e}_3, \boldsymbol{\tau} \in P$, $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{e}_3 \perp \boldsymbol{\tau}$, имеем: $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_3$. Учитывая это, придадим вектору $\mathbf{e}_3$ то из двух возможных направлений, которое совпадает с направлением вектора $\mathbf{v}$, то есть положим

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (7.12)$$

где $v = |\mathbf{v}|$ ($v \neq 0$, так как $\mathbf{v}$ — ненулевой неизотропный вектор).

Направление вектора $\mathbf{e}_{3*}$ конкретизируем, приписав ему следующее значение:

$$\mathbf{e}_{3*} = \frac{\frac{v}{c}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (7.13)$$

С помощью (7.6) и (7.12) легко убедиться в том, что вектор $\mathbf{e}_{3*}$ вида (7.13) ортогонален вектору $\mathbf{i}$, поэтому $\mathbf{e}_{3*} \in \Gamma_*$. Кроме того, он удовлетворяет зависимостям $|\mathbf{e}_{3*}| = 1$, $\mathbf{e}_{3*} \perp \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_{3*} \perp \mathbf{e}_2$, значит, этот вектор действительно может быть принят в качестве вектора введенного выше ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\} \subset \Gamma_*$.

Отметим, что формулы (7.6) и (7.13) фактически представляют собой преобразования Лоренца (это видно из сравнения их с формулами (9.1), (9.5) и (9.8) из разд. 9 главы 3).

Выражение (6.3) для поля F содержит произведение $\bar{\omega} \cdot \varkappa$, где $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения частицы относительно собственного физического пространства Γ_* ($\bar{\omega} \in \Gamma_*$), $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* .

Разложим псевдовектор $\bar{\omega}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\} \subset \Gamma_*$:

$$\bar{\omega} = \Delta_*(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_{3*}), \quad (7.14)$$

где Δ_* — единичный псевдоскаляр в Γ_* : $\Delta_* = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\}$ правоориентированный, и $\Delta_* = -1$, если базис левоориентированный; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты угловой скорости $\bar{\omega}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\}$.

Псевдотензор $\varkappa$, как отмечалось, имеет одинаковый вид при использовании любого ортонормированного базиса, поэтому по аналогии с (5.6) можем записать:

$$\varkappa = \Delta_*(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{3*} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{3*} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{3*} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{3*} + \mathbf{e}_{3*} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{3*} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (7.15)$$

Введем псевдовектор

$$\bar{\omega}_\Gamma = \Delta(\omega_{\Gamma 1} \mathbf{e}_1 + \omega_{\Gamma 2} \mathbf{e}_2 + \omega_{\Gamma 3} \mathbf{e}_3), \quad (7.16)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ; величины $\omega_{\Gamma 1}, \omega_{\Gamma 2}, \omega_{\Gamma 3}$ связаны с компонентами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ псевдовектора $\bar{\omega}$ зависимостями

$$\omega_{\Gamma 1} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \omega_{\Gamma 2} = \frac{\omega_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \omega_{\Gamma 3} = \omega_3. \quad (7.17)$$

Из (7.16) и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \Gamma$ вытекает $\bar{\omega}_\Gamma \in \Gamma$, поэтому $\omega_{\Gamma 1}, \omega_{\Gamma 2}, \omega_{\Gamma 3}$ — компоненты псевдовектора $\bar{\omega}_\Gamma$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Обозначим: $\varkappa_\Gamma$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ , он задается правой частью формулы (7.15), если убрать в ней звездочки в индексах.

С помощью формул (7.13)–(7.17), учитывая ортонормированность базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3*}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, получаем:

$$\bar{\omega} \cdot \varkappa = \bar{\omega}_\Gamma \cdot \varkappa_\Gamma + \omega_{\Gamma 1} \frac{v}{c} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \boldsymbol{\tau}) + \omega_{\Gamma 2} \frac{v}{c} (\mathbf{e}_1 \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{e}_1). \quad (7.18)$$

В случае $\omega_1 = \omega_2 = 0$, согласно (7.14), частица вращается с угловой скоростью $\bar{\omega} = \Delta_* \omega_3 \mathbf{e}_{3*}$ в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то есть в плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$. Формула (7.18) принимает в этом случае вид $\bar{\omega} \cdot \varkappa = \bar{\omega}_\Gamma \cdot \varkappa_\Gamma$. Отсюда, по аналогии с (5.42), имеем для всех $\mathbf{a} \in \Gamma_* \cap \Gamma$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt_*} = \bar{\omega} \times \mathbf{a} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{a} = -\bar{\omega}_\Gamma \cdot \varkappa_\Gamma \cdot \mathbf{a} = \bar{\omega}_\Gamma \times \mathbf{a}. \quad (7.19)$$

(в Γ_*) (в Γ)

Так как $dt_* = dt\sqrt{1-(v/c)^2}$, то из (7.19) следует, что в данной ситуации при $v = 0$ псевдовектор $\bar{\omega}_\Gamma$ является угловой скоростью частицы относительно Γ (причем, по (7.13)–(7.17), $\bar{\omega}_\Gamma = \bar{\omega}$). Если же $v \neq 0$, то угловой скоростью в Γ служит величина $\bar{\omega}_\Gamma\sqrt{1-(v/c)^2}$.

В общем случае вращение частицы происходит в плоскости, которая содержится в Γ_* , но не содержится в Γ . Поскольку вращение, происходящее в одной плоскости, невозможно представить как вращение, происходящее в другой плоскости, то псевдовектор $\bar{\omega}_\Gamma$, лежащий в Γ , не является в общем случае угловой скоростью частицы. Тем не менее, учитывая рассмотренный случай $\omega_1 = \omega_2 = 0$ и наличие взаимно однозначной связи $\bar{\omega}_\Gamma$ с угловой скоростью $\bar{\omega}$ (см. (7.16) и (7.17)), будем называть псевдовектор $\bar{\omega}_\Gamma$ *условной угловой скоростью* частицы.

Собственное поле F «точечной» частицы имеет вид (6.3). Подставим в формулу (6.3) значения величин $\mathbf{i}$, $d\mathbf{i}/dl$, $\mathbf{Q}_*$ и $\bar{\omega} \cdot \boldsymbol{\varkappa}$ из выражений (7.6), (7.8), (7.11) и (7.18). После несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
 F(x) = & \\
 = & \frac{aN \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]_*}{4\pi r'^2 \left(1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{r' c}\right)_*^3} \left[\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right]_* + \\
 & + \frac{aN}{4\pi c^2 r' \left(1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{r' c}\right)_*^3} \left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{r' c}\right) \left[\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}} \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \right] - \right. \\
 & \left. - \left(\dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \left[\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right]_* \right\} + E_\omega(x), \tag{7.20}
 \end{aligned}$$

где $E_\omega(x) =$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{aN \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]_*^{3/2}}{4\pi c r' \left(1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{r' c}\right)_*^3} \left\{ \left[\left(\bar{\omega}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\varkappa}_\Gamma \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) - \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \left(\bar{\omega}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\varkappa}_\Gamma \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \right] + \right. \\
 & + \omega_{\Gamma 1} \frac{v}{c} \left[\left(\mathbf{e}'_2 \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \left(\boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{r}'}{r'} \boldsymbol{\tau}\right) + (\boldsymbol{\tau} \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_2 \boldsymbol{\tau}) + \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_2 \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \right] - \\
 & \left. - \omega_{\Gamma 2} \frac{v}{c} \left[\left(\mathbf{e}'_1 \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \left(\boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{r}'}{r'} \boldsymbol{\tau}\right) + (\boldsymbol{\tau} \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_1 \boldsymbol{\tau}) + \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_1 \frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) \right]_* \right\}; \tag{7.21}
 \end{aligned}$$

мы заменили здесь обозначения векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ для того, чтобы, во-первых, подчеркнуть, что эти векторы подчиняются определенному ограничению (вместе они образуют ортонормированный базис в плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$), и, во-вторых, чтобы отличить их от рассматриваемых далее векторов произвольного ортонормированного базиса в Γ ; *звездочки справа от скобок означают, что все величины, заключенные в скобки, вычисляются в точке O_* пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого с вершиной в точке наблюдения x* (см. рис. 7.1); смысл других символов указан после формулы (7.24).

При выводе формул (7.20) и (7.21) использованы зависимости

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}'_1 = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}'_2 = 0; \quad \varkappa_\Gamma \cdot \boldsymbol{\tau} = \hat{0}, \quad (7.22)$$

где $\hat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор; первая зависимость вытекает из определения вектора $\boldsymbol{\tau}$; вторая и третья являются следствиями того, что $\boldsymbol{\tau} \in T$, $T \perp \Gamma$, $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{r}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \in \Gamma$ и $\varkappa_\Gamma$ — псевдотензор над Γ .

Отметим, что если $\bar{\omega} = \mathbf{0}$ в точке O_* , то $F_\omega(x) = \hat{0}$ (это следует из формул (7.14), (7.16), (7.17) и (7.21)).

Так как тензор F является двухвалентным и антисимметричным, то, по теореме 4.1, он имеет векторную $\mathbf{E}$ и псевдовекторную $\bar{H}$ составляющие. С помощью формул (4.5), (4.7), (4.10) и (7.20)–(7.22) находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= F \cdot \boldsymbol{\tau} = \\ &= \frac{aN \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]_* \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_*}{4\pi r'^2 \left(1 + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_*^3} + \frac{aN \left\{ \frac{\mathbf{r}'}{r'} \times \left[\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\}_*}{4\pi c^2 r' \left(1 + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_*^3} - \\ &- \frac{aN \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]_*^{3/2}}{4\pi c r' \left(1 + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_*^3} \left\{ \left(\bar{\omega}_\Gamma \times \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right) + \omega_{\Gamma 1} \frac{v}{c} \left[\mathbf{e}'_2 + \left(\mathbf{e}'_2 \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right) \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\Gamma 2} \frac{v}{c} \left[\mathbf{e}'_1 + \left(\mathbf{e}'_1 \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right) \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right] \right\}_*; \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa_\Gamma = \frac{\mathbf{r}'}{r'} \times \mathbf{E}(x), \quad (7.24)$$

где $\times$ — знак векторного умножения в физическом пространстве Γ ; применены равенства $(\mathbf{r}'/r') \cdot (\mathbf{r}'/r') = -1$ и $(\mathbf{r}'/r') \times (\mathbf{r}'/r') = 0$.

В правых частях формул (7.23) и (7.24) все векторы принадлежат физическому пространству Γ , поэтому $\mathbf{E} \in \Gamma$ и $\overline{H} \in \Gamma$ (это следует также из теоремы 4.1). Из (7.24) и свойств векторного произведения вытекает, что при любом движении частицы $\overline{H} \perp \mathbf{E}$.

Напомним примененные обозначения: x — точка наблюдения (произвольная точка пространства M , не принадлежащая мировой линии частицы L); a — числовой коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин; N — количество лучей, составляющих частицу (далее мы придадим произведению aN определенное значение, см. (7.26)); $\mathbf{v}$ — скорость центра частицы относительно рассматриваемой инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $v = |\mathbf{v}|$; c — скорость света; $\mathbf{r}'$ — составляющая изотропного вектора $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*x}$, направленная вдоль физического пространства Γ (O_* — точка пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого с вершиной в x ; см. рис. 7.1); $r' = |\mathbf{r}'|$; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$ — ускорение центра частицы относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ (t — время в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$); $\varkappa_\Gamma$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ ; $\overline{\omega}_\Gamma$ — условная угловая скорость вращения частицы вокруг ее центра, рассчитанная относительно физического пространства Γ (она определяется формулами (7.16) и (7.17), которые выражают ее через угловую скорость $\overline{\omega}$ вращения частицы относительно ее собственного физического пространства Γ_*); ω_{Γ_1} и ω_{Γ_2} — компоненты псевдовектора $\overline{\omega}_\Gamma$ вдоль направлений векторов $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$, образующих ортонормированный базис в плоскости $\Gamma_* \cap \Gamma$ (при $\mathbf{i} \nparallel \boldsymbol{\tau}$; если $\mathbf{i} \parallel \boldsymbol{\tau}$, то $v = 0$ и, как видно из (7.21) и (7.23), в этом случае компоненты ω_{Γ_1} , ω_{Γ_2} и векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ не участвуют в формулах, задающих F , $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$); двоеточие — знак бискалярного умножения, выполняемого по правилу (4.3); тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между ними.

Все величины в правых частях формул (7.20), (7.21), (7.23) и (7.24), как указывалось, вычисляются в точке O_* пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого с вершиной в точке наблюдения x . В инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ точкам x и O_* отвечают моменты координатного времени t и t_{O_*} соответственно. Согласно (7.10), эти моменты связаны между собой зависимостью

$$t_{O_*} = t - \frac{r'}{c}. \quad (7.25)$$

Таким образом, значения величин F , $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ в момент времени t определяются характеристиками частицы, относящимися к тому про-

шедшему моменту t_{O_*} , когда центр частицы находился в точке O_* мировой линии L (см. рис. 7.1). С равным основанием можно сказать, что значения величин F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ в момент t определяются характеристиками частицы, соответствующими тому моменту времени, когда центр частицы находился в точке O' траектории L_Γ (действительно, траектория частицы L_Γ , являясь линией в физическом пространстве Γ , движется вместе с ним, при этом в момент t_{O_*} , когда гиперплоскость Γ проходила через точку O_* , точка O' траектории L_Γ совпадала с O_*).

Внимание! Физическое пространство Γ наделено отрицательно определенной метрической формой. Между тем, в физических теориях обычно считается, что рассматриваемое трехмерное пространство имеет положительно определенную метрическую форму. *Для перехода к положительно определенной метрической форме нужно изменить во всех формулах знаки скалярных произведений векторов, принадлежащих Γ , на противоположные.*

Если в формуле (7.23) произвести такое преобразование и придать произведению aN значение

$$aN = 4\pi e \quad (\text{в системе СГС}) \quad \text{или} \quad aN = \frac{e}{\varepsilon_0} \quad (\text{в СИ}), \quad (7.26)$$

то при $\bar{\omega}_\Gamma = \mathbf{0}$ формулы (7.23) и (7.24) совпадут (с точностью до обозначений) с известными выражениями для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых движущимся точечным телом с электрическим зарядом e [25] (§ 63) (ε_0 — электрическая постоянная).

Этот результат позволяет заключить, что «точечная» частица может служить моделью электрически заряженного тела. При этом величины $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ являются напряженностями электрического и магнитного полей, создаваемых таким телом. А так как, согласно теореме 4.1, тензор F восстанавливается по известным $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ с помощью формулы

$$F = \mathbf{E}\tau - \tau\mathbf{E} + \bar{H} \cdot \kappa, \quad (7.27)$$

то собственное поле частицы F может быть интерпретировано как электромагнитное поле, порождаемое движущимся электрически заряженным телом. Далее применяется первый вариант условия (7.26).

Формула (6.3) задает поле F в виде, не зависящем от систем отсчета и систем координат. Формулы (7.20), (7.21), (7.23) и (7.24) задают значения этого поля и его составляющих $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ в выбранной инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$. При численных расчетах полей F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ удобно пользоваться их координатными представлениями в ортонормированном базисе. Рассмотрим координатные представления этих полей.

Введем в физическом пространстве Γ какой-либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Дополним его вектором $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$. Четверка векторов $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образует ортонормированный базис пространства M , потому что удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Разложим тензор F по диадному базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}_{i,j=0}^3$, составленному из векторов базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, а вектор $\mathbf{E}$ и псевдовектор $\bar{H}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (так как $\mathbf{E}, \bar{H} \in \Gamma$):

$$F = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 F_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j; \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 E_i \mathbf{e}_i; \quad \bar{H} = \Delta \sum_{i=1}^3 H_i \mathbf{e}_i, \quad (7.29)$$

где F_{ij} , E_i , H_i — компоненты (координаты) величин соответственно F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ в указанных базисах; Δ — единичный псевдоскаляр в Γ : $\Delta = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный.

С помощью зависимостей (7.28) и (7.29) выразим компоненты величин F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ через сами эти величины:

$$\begin{aligned} F_{00} &= \mathbf{e}_0 \cdot F \cdot \mathbf{e}_0; & F_{0\alpha} &= -\mathbf{e}_0 \cdot F \cdot \mathbf{e}_\alpha; \\ F_{\alpha 0} &= -\mathbf{e}_\alpha \cdot F \cdot \mathbf{e}_0; & F_{\alpha\beta} &= \mathbf{e}_\alpha \cdot F \cdot \mathbf{e}_\beta; \\ E_\alpha &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_\alpha; & H_\alpha &= -\Delta \bar{H} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; учтено, что $\Delta^2 = 1$.

Подставим значение тензора F из (7.27) в первые четыре выражения (7.30). Учитывая равенство $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$, зависимости (4.2), (7.28) и последние два выражения в (7.30), находим матрицу компонент тензора F в базисе $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$:

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ могут быть вычислены путем подстановки в последние два выражения (7.30) значений этих полей, задаваемых

формулами (7.23) и (7.24). Компоненты поля F могут быть найдены либо с помощью его матричного представления (7.31) (при известных компонентах полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$), либо посредством подстановки значения этого поля (7.20) в первые четыре выражения (7.30).

Взаимопроницаемость лучей разных частиц обеспечивает *суперпозицию* порождаемых ими электромагнитных полей. Это означает, что если имеются k частиц, каждая из которых создает при отсутствии других частиц свое поле F_i (i — номер частицы), то в случае совместного действия частиц (при тех же их мировых линиях) результирующее поле F будет равно сумме полей F_i :

$$F(x) = \sum_{i=1}^k F_i(x), \quad (7.32)$$

где x — любая точка пространства M , не принадлежащая мировым линиям частиц.

8. «Точечная» частица — модель электрона

«Точечная» частица представляет собой совокупность времениподобных прямых (названных лучами), которые равномерно заполняют внутренность светового конуса (см. рис. 1.4, с. 311). Симметрия такого геометрического объекта, как отмечено в разд. 2, описывается группой Лоренца.

В предыдущем разделе показано, что «точечная» частица может рассматриваться как модель электрически заряженного тела. Принимая во внимание, что она представляет собой практически простейший лоренц-инвариантный геометрический объект в пространстве Минковского, а из двух элементарных электрических зарядов — протона и электрона — простейшим считается в настоящее время электрон, будем трактовать «точечную» частицу как *модель электрона*.

Полагая, что лучи частицы могут быть связаны каким-то образом с фотонами — квантами света, назовем строящуюся модель, включая ее вариант, изложенный в главе 5, *лучистой моделью электрона*. Под величиной e в условии (7.26) будем понимать заряд электрона ($e < 0$).

9. Собственное поле «точечной» частицы (обсуждение)

«Точечная» частица порождает в пространстве Минковского M поле F , описываемое формулой (6.3). Из этой формулы видно, что поле F не связано ни с какой системой отсчета. Так и должно быть, потому что эта величина является тензором. (Вводя в M инерциальную систему отсчета, можно описать поле F также с помощью формулы (7.20), справедливой именно в данной системе отсчета.) Вместе с тем, составляющие $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ этого поля зависят от системы отсчета, так как согласно их определениям ($\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}$ и $\overline{H} = (1/2)F \cdot \boldsymbol{\varkappa}_r$) они выражаются через поле F с помощью характеристик системы отсчета $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\varkappa}_r$.

При $\overline{\omega}_r = \mathbf{0}$ составляющие $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ поля F , задаваемые формулами (7.23) и (7.24), совпадают с известными значениями напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых точечным электрическим зарядом (при выполнении условия (7.26)), поэтому F — электромагнитное поле заряда и $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ — его электрическая и магнитная составляющие. При $\overline{\omega}_r \neq \mathbf{0}$ слагаемые в формулах (6.3), (7.21) и (7.23), содержащие $\overline{\omega}_r$ (или $\overline{\omega}$), вносят дополнительный вклад в поля F , $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$, обусловленный пространственным вращением частицы. В главе 5 посредством учета этих слагаемых будет описано важное свойство электрона — так называемый аномальный магнитный момент электрона.

Из (7.24) вытекает, что электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\overline{H}$ поля взаимно ортогональны во всех точках пространства Минковского и при любом движении «точечной» частицы. Следует отметить, что это свойство полей $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ является специфической чертой электромагнитного поля, а не общим свойством векторной и псевдовекторной составляющих антисимметричных тензоров (ср. со сказанным в конце разд. 4).

Обсуждаемые формулы для полей F , $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ получены на основании только геометрических соображений, без каких-либо допущений о физической природе полей. Мы просто связали с каждым элементом частицы бивектор $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$ и затем нашли сумму этих бивекторов для всех элементов, которые при движении частицы проходят, сменяя друг друга, через рассматриваемую точку пространства M ($\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча; $\mathbf{j}_0$ — скорость элемента луча). Физическая характеристика моделируемого электрона — его заряд e — входит в полученные выражения лишь через условие (7.26), которое приписывает произведению aN значение $4\pi e$. Таким образом, электромагнитное поле является в значительной мере геометрическим эффектом.

Развиваемый подход к описанию электромагнитного поля F позволяет понять, почему в формулах (7.20) и (7.23) присутствуют слагаемые с разной зависимостью от расстояния r' (первые слагаемые в этих формулах пропорциональны r'^{-2} , вторые и третьи слагаемые пропорциональны r'^{-1}). Дело в том, что, согласно обычным правилам механики, движение «точечной» частицы может быть представлено в виде комбинации поступательного движения и вращения, в связи с чем скорость частицы $\mathbf{j}_0$ состоит из двух слагаемых (при $q = 0$, см. (5.43)). Слагаемое $\mathbf{i}$, описывающее поступательное движение частицы, одинаково для всех элементов частицы, а слагаемое, отвечающее вращению, пропорционально Q , то есть пропорционально удалению элемента от центра вращения. Поскольку поле F линейно зависит от скорости $\mathbf{j}_0$, то, благодаря этому свойству скорости, слагаемые в (7.20) и (7.23), которые связаны с гиперболическим и пространственным вращениями частицы, содержат величину r' в степени, на единицу большей, чем слагаемые, связанные с поступательным движением частицы. Отметим, что именно по этой причине слагаемые, обусловленные вращением частицы, дают основной вклад в электромагнитное поле на большом удалении от мировой линии частицы.

В инерциальной системе отсчета гиперболическое вращение материальной точки воспринимается как ее ускоренное движение. Составляющая электромагнитного поля, обусловленная ускоренным движением заряда, называется *волновой* частью поля.

Из доказательства теоремы 6.1 вытекает, что основной вклад в собственное поле частицы F вносят лучи, которые непосредственно примыкают к световому конусу, ограничивающему частицу. Более того, поле F определяется предельными значениями характеристик лучей при приближении к световому конусу. Значит, *в опыте поле F должно восприниматься как распространяющееся вдоль светового конуса, то есть со скоростью света c* . Этот вывод, подчеркнем, справедлив несмотря на то, что все лучи частицы находятся во внутренности светового конуса и среди них нет лучей, которые лежали бы на самом световом конусе.

В формулах (6.3), (7.20) и (7.23) первые два слагаемые полностью определяются заданием мировой линии L . Третье слагаемое включает в себя угловую скорость $\bar{\omega}$ (или $\bar{\omega}_L$). Поскольку угловая скорость $\bar{\omega}$ не зависит от конфигурации мировой линии L , то движение частицы вдоль линии L может сопровождаться произвольным вращением ее вокруг L . В связи с этим *для нахождения полей F , E и $\bar{H}$ должны быть известны как мировая линия L , так и угловая скорость $\bar{\omega}$* .

Построенная модель позволяет понять, почему величина электрического заряда тела не меняется при преобразованиях Лоренца, подобно энергии или импульсу тела. Дело в том, что по условию (7.26) заряд e пропорционален количеству лучей частицы N . А так как величина N остается неизменной при любом движении частицы, то вместе с ней сохраняет свое значение и заряд e . Поясним это следующим примером. Допустим, что мимо нас проносится космический корабль с двумя космонавтами. Понятно, что какая бы скорость у него ни была, количество космонавтов в нем не изменится, оно не станет равным ни полутора, ни двум с половиной.

Формулы (7.20), (7.21), (7.23) и (7.24) для полей F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ содержат величины, относящиеся только к центру частицы, а не к ее лучам, поэтому в тех случаях, когда интерес представляют сами формулы, а не их обоснование, можно условно считать, что частица является точечной (без кавычек) и движется в физическом пространстве Γ вдоль траектории L_Γ .

Обратим внимание на то, что обычно расчет напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых движущимся электрическим зарядом, проводится на основе уравнений Максвелла с применением потенциалов Лиенара–Вихерта [25] (§ 63). Здесь же поля F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ найдены без использования уравнений Максвелла и потенциалов Лиенара–Вихерта.

10. Собственное поле «точечной» частицы при прямолинейной мировой линии

Формулы (7.20), (7.23) и (7.24) связывают значения полей F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ в момент времени t с характеристиками частицы, которые относятся не к самому моменту t , а к прошедшему моменту t_O , задаваемому формулой (7.25). Это обстоятельство затрудняет вычисление полей.

Вместе с тем, при прямолинейной мировой линии L и постоянном псевдовекторе $\bar{\omega}$ можно преобразовать формулы для полей F , $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ таким образом, чтобы они связывали значения полей в момент времени t с характеристиками частицы, относящимися к этому же моменту t . Произведем такое преобразование формул для двух случаев движения «точечной» частицы относительно инерциальной системы отсчета: для равномерного прямолинейного движения частицы (без вращения) и для вращения частицы с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижного центра.

Итак, будем считать, что в пространстве Минковского M введена инерциальная система отсчета $\{T, \Gamma\}$, где T — ось времени, Γ — трехмерное физическое пространство ($\Gamma \perp T$), и будем пользоваться принятыми ранее обозначениями: τ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы (единичный касательный вектор к мировой линии L , направленный в сторону будущего); $\mathbf{v}$ — скорость центра частицы относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$.

А. Равномерное прямолинейное движение частицы

Рассмотрим «точечную» частицу, имеющую прямолинейную временноподобную мировую линию L (рис. 10.1). Так как L — прямая линия, то в данном случае $\mathbf{i}$ — ее направляющий вектор ($\mathbf{i} = \text{const}$; $|\mathbf{i}| = 1$).

При использовании инерциальной системы отсчета траектория частицы совпадает с ортогональной проекцией мировой линии на физическое пространство, поэтому в случае прямолинейной мировой линии L траектория L_Γ частицы является прямой линией в физическом пространстве Γ (или точкой, если $\mathbf{i} \parallel \tau$).

В разд. 6 главы 3 доказано, что условие $\mathbf{i} = \text{const}$ эквивалентно условию $\mathbf{v} = \text{const}$. Значит, центр частицы движется относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, то есть прямолинейно и равномерно (или покоится, если $\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Так как скорость $\mathbf{v}$ является касательным вектором к траектории L_Γ (при $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), то из прямолинейности траектории L_Γ следует, что вектор $\mathbf{v}$ направлен вдоль L_Γ , как показано на рис. 10.1.

Допустим, что частица не вращается вокруг своей мировой линии L , то есть $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\Gamma = \mathbf{0}$ при всех t .

Поля F и $\mathbf{E}$, порождаемые частицей при таком движении, описываются первыми слагаемыми в формулах (7.20) и (7.23) (потому что в этом случае $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ и $\bar{\omega}_\Gamma = \mathbf{0}$). Поле $\bar{H}$ выражается через $\mathbf{E}$, как и в общем случае, с помощью формулы (7.24). Однако эти формулы связывают значения полей, относящиеся к моменту времени t , с характеристиками частицы, отвечающими не моменту t , а прошедшему моменту t_{O_*} . Для получения формул, в которых все величины относятся к моменту t , оказывается удобным воспользоваться формулой (6.3), задающей поле F в бескоординатной форме.

Так как при рассматриваемом движении частицы $\bar{\omega} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{i} = \text{const}$ (откуда $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$), то в правой части формулы (6.3) остается только первое слагаемое:

$$F(x) = \frac{aN(\mathbf{Q}_*\mathbf{i} - \mathbf{iQ}_*)}{4\pi(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i})^3}, \quad (10.1)$$

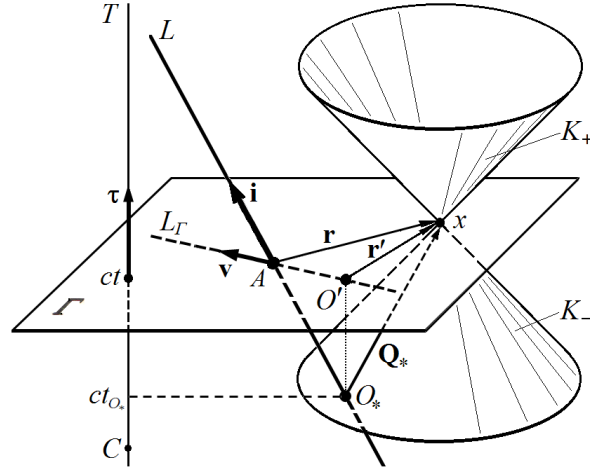


Рис. 10.1. Иллюстрация к расчету поля F в случае равномерного прямолинейного движения «точечной» частицы относительно инерциальной системы отсчета.

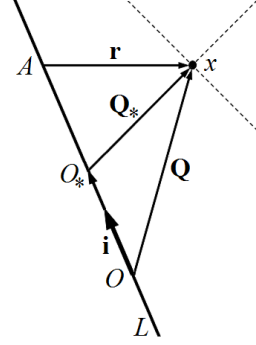
$\{T, \Gamma\}$ — инерциальная система отсчета (физическое пространство Γ показано в расположении, проходящем через точку наблюдения x); L — прямолинейная мировая линия частицы ($L \not\equiv x$); L_Γ — траектория частицы в физическом пространстве Γ (ортогональная проекция мировой линии L на Γ); t — момент координатного времени, отвечающий всем точкам физического пространства Γ при данном его расположении (в том числе точкам x и $A = L \cap \Gamma$); c — скорость света; $K_+ \cup K_-$ — световой конус с вершиной в точке наблюдения x ; K_+ — световой конус будущего; K_- — световой конус прошлого; O_* — точка пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого K_- ; t_{O_*} — момент координатного времени, отвечающий точке O_* ; C — точка оси времени, которой соответствует нулевой момент координатного времени; гиперплоскость Γ и световой конус $K_+ \cup K_-$ даны с понижением размерности на единицу.

где $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{O_*x}$ — изотропный вектор, соединяющий точку $O_* = L \cap K_-$ с точкой наблюдения x (см. рис. 10.1); напомним, что формула (6.3) относится к случаю $x \notin L$, поэтому $\mathbf{Q}_* \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим плоскость, содержащую мировую линию L и точку x . Поскольку линия L является времениподобной, то эта плоскость псевдоевклидова (рис. 10.2).

Рис. 10.2. Псевдоевклидова плоскость, содержащая мировую линию L и точку наблюдения x .

Тонкие штриховые линии — световой конус.



Пусть O — произвольная точка линии L . Обозначим: $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ox}$. Из рисунка видно, что $\mathbf{Q} = \overrightarrow{OO_*} + \mathbf{Q}_*$ (при любом расположении точки O на L). Так как $\overrightarrow{OO_*} \in L$, то $\overrightarrow{OO_*} = a\mathbf{i}$, где a — некоторое число, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q} &= (\overrightarrow{OO_*} + \mathbf{Q}_*)\mathbf{i} - \mathbf{i}(\overrightarrow{OO_*} + \mathbf{Q}_*) = \\ &= (a\mathbf{i} + \mathbf{Q}_*)\mathbf{i} - \mathbf{i}(a\mathbf{i} + \mathbf{Q}_*) = \mathbf{Q}_*\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}_*. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для любой точки $O \in L$ антисимметричный тензор (бивектор) $\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}$ принимает одно и то же значение, равное $\mathbf{Q}_*\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}_*$. В частности, если в качестве точки O взять точку $A = L \cap \Gamma$ (то есть положить $\mathbf{Q} = \overrightarrow{Ax} = \mathbf{r} \in \Gamma$; см. рис. 10.1 и 10.2), то получим:

$$\mathbf{r}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{r} = \mathbf{Q}_*\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}_*. \quad (10.2)$$

Из (7.6) и (10.2) находим:

$$\mathbf{Q}_*\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}_* = \mathbf{r}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{r} = \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (10.3)$$

где $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}|}$ ($r \neq 0$, так как $x \notin L$); $\mathbf{r}/r$ — мнимое единичный вектор, направленный так же, как $\mathbf{r}$. Из (10.3) следует, что можно заменить в формуле (10.1) бивектор $\mathbf{Q}_*\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}_*$ правой частью формулы (10.3). Поскольку $\boldsymbol{\tau} = \text{const}$, $\mathbf{v} = \text{const}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{Ax}$ и точкам A и x соответствует один и тот же момент времени t , то в результате такой замены числитель в правой части формулы (10.1) окажется выраженным через величины, относящиеся к моменту t .

Теперь преобразуем произведение $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}$, входящее в знаменатель формулы (10.1).

Построим плоскость, содержащую траекторию частицы L_Γ и точку наблюдения x . Из $L_\Gamma \subset \Gamma$ и $x \in \Gamma$ следует, что эта плоскость лежит в Γ , значит, она является пространственноподобной (рис. 10.3).

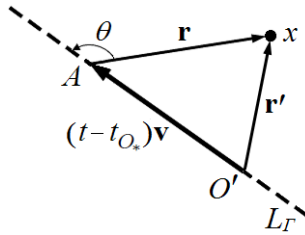


Рис. 10.3. Пространственноподобная плоскость, содержащая траекторию частицы L_Γ и точку наблюдения x .

В рассматриваемый момент t центр частицы находится в точке A .

На рис. 10.3 символы O' и $\mathbf{r}'$ имеют тот же смысл, что на рис. 7.1 и 10.1: O' — проекция точки O_* на физическое пространство Γ (она же — точка траектории L_Γ , в которой центр частицы находился в момент времени t_{O_*}); $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'x}$. Пусть, как и ранее, $r' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{|\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'|}$.

Так как центр частицы движется вдоль траектории L_Γ с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ и в момент t он находится в точке A , а в момент t_{O_*} находился в точке O' , то $\overrightarrow{O'A} = (t - t_{O_*})\mathbf{v}$. Из рис. 10.3 видно, что $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A} + \mathbf{r}$, поэтому, учитывая, что согласно (7.10) $t - t_{O_*} = r'/c$, можем записать:

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A} + \mathbf{r} = (t - t_{O_*})\mathbf{v} + \mathbf{r} = r' \frac{\mathbf{v}}{c} + \mathbf{r}. \quad (10.4)$$

Подставим значение (10.4) вектора $\mathbf{r}'$ в формулу (7.11):

$$\mathbf{Q}_* = r' \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right) = r' \boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}' = r' \boldsymbol{\tau} + r' \frac{\mathbf{v}}{c} + \mathbf{r}. \quad (10.5)$$

Поскольку вектор $\mathbf{Q}_*$ изотропный, то $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{Q}_* = 0$. Следовательно, скалярный квадрат величины, стоящей в (10.5) справа, равен нулю:

$$\left(r' \boldsymbol{\tau} + r' \frac{\mathbf{v}}{c} + \mathbf{r} \right) \cdot \left(r' \boldsymbol{\tau} + r' \frac{\mathbf{v}}{c} + \mathbf{r} \right) = r'^2 - r'^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 + 2r' \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} - r^2 = 0,$$

здесь применены равенства $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -v^2$ и $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = -r^2$ (знаки минус в двух последних равенствах обусловлены отрицательной определенностью метрической формы в Γ). Отсюда получаем вспомогательное соотношение, которое потребуется далее:

$$r'^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] + 2r' \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} = r^2. \quad (10.6)$$

Вычислим величину $(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i})^2$. С помощью (7.6), (10.5) и зависимостей $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -v^2$ находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i} &= \left(r' \boldsymbol{\tau} + r' \frac{\mathbf{v}}{c} + \mathbf{r} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \left\{ r' \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i})^2 = r'^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] + 2r' \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}.$$

Из этого равенства и из (10.6) получаем:

$$(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i})^2 = r^2 + \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}. \quad (10.7)$$

Введем угол θ между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ (см. рис. 10.3). Так как оба вектора принадлежат физическому пространству Γ , имеющему сигнатуру $(- -)$, то этот угол определяется формулой (3.3) из главы 2 (с. 38). Поэтому

$$\cos \theta = - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{v}|} = - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r v} \quad (\theta \in [0, \pi]). \quad (10.8)$$

Из (10.8) вытекает, что

$$\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} = -r \frac{v}{c} \cos \theta. \quad (10.9)$$

Формула (10.8) верна лишь при $r \neq 0$ и $v \neq 0$, но формула (10.9), очевидно, справедлива и при нулевых r и v (в этом случае угол θ не определен).

Выражения (10.7), (10.9) и равенство $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ приводят к зависимости

$$(\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i})^2 = r^2 \frac{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \theta}{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}. \quad (10.10)$$

Подстановка в формулу (10.1) значений величин $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i} - \mathbf{i} \mathbf{Q}_*$ и $\mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{i}$ из (10.3) и (10.10) и использование условия (7.26) ($aN = 4\pi e$) дает искомое выражение для поля F , создаваемого «точечной» частицей в точке $x \in M \setminus L$:

$$F(x) = \frac{e \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]}{r^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{3/2}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (10.11)$$

Образует с помощью формул (4.10) и (10.11) вектор $\mathbf{E}$ и псевдовектор $\overline{H}$:

$$\mathbf{E}(x) = F \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{e \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]}{r^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (10.12)$$

$$\overline{H}(x) = \frac{1}{2} F \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Gamma = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}(x), \quad (10.13)$$

здесь применены зависимости $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Gamma = \hat{0}$ и $\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Gamma = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — произвольные векторы из Γ ; см. (4.5)).

Формулы (10.11)–(10.13) верны в случае, когда «точечная» частица движется относительно рассматриваемой инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно и без вращения (то есть при $\mathbf{v} = \text{const}$ и $\overline{\omega} = \overline{\omega}_\Gamma = \mathbf{0}$).

Формулы (10.12) и (10.13) совпадают с известными формулами для напряженностей электрического и магнитного полей, порождаемых точечным электрическим зарядом e , движущимся с постоянной скоростью [25] (§38). Это ещё раз подтверждает, что «точечная» частица является адекватной моделью точечного заряда.

Напомним обозначения, примененные в формулах (10.11)–(10.13): $\mathbf{v}$ — скорость центра частицы относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$; $v = |\mathbf{v}|$ ($0 \leq v < c$); c — скорость света; $\mathbf{r}$ — вектор, конец которого находится в точке наблюдения x , а начало — в центре частицы (при расположении центра частицы в M , одномоментном с x); $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от центра частицы до точки наблюдения x ($r \neq 0$, так как $x \notin L$); θ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T .

Полученные формулы связывают значения полей F , $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ в момент времени t с характеристиками частицы, относящимися к этому

же моменту t . Это обстоятельство, разумеется, не означает, что поля распространяются с бесконечной скоростью. Просто мы выразили в полученном ранее выражении для F характеристики частицы, отвечающие прошедшему моменту времени t_{O_*} , через характеристики, отвечающие текущему моменту t , воспользовавшись прямолинейностью мировой линии L и отсутствием вращения частицы.

Если «точечная» частица покоится ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), то формулы (10.11)–(10.13) принимают вид

$$F(x) = \frac{e}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r} \right); \quad \mathbf{E}(x) = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \overline{H}(x) = \mathbf{0}; \quad (10.14)$$

это — обычные формулы, описывающие электрическое поле неподвижного точечного заряда e .

Б. Вращение частицы вокруг ее центра

Рассмотрим «точечную» частицу, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своего центра, неподвижного относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, то есть рассмотрим случай $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и $\overline{\omega} = \text{const}$.

В этом случае, согласно (7.6), $\mathbf{i} = \boldsymbol{\tau}$. Следовательно, мировая линия частицы L прямолинейна и параллельна оси времени T , а собственное физическое пространство частицы Γ_* совпадает с координатным физическим пространством Γ ($L \parallel T$; $\Gamma_* = \Gamma$). Поэтому совпадают псевдотензоры Леви-Чивита над Γ_* и Γ , а также совпадают псевдовекторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_\Gamma$ ($\varkappa = \varkappa_\Gamma$; $\overline{\omega} = \overline{\omega}_\Gamma$, последнее вытекает из (7.14), (7.16), (7.17) и равенства $v = 0$). В данном случае мировая линия L направлена вдоль отрезка O_*O' (так как $O_* \in L$, $O_*O' \parallel T$ и $L \parallel T$; см. рис. 10.1), точка A совпадает с O' и вся траектория частицы L_Γ вырождается в точку. Кроме того, из $O' = A$, $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'x}$ и $\mathbf{r} = \overrightarrow{Ax}$ вытекает $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ и $r' = r$.

В рассматриваемом случае в формулах (7.20) и (7.23) для полей F и $\mathbf{E}$ первые слагаемые имеют вид (10.14), а вторые слагаемые отсутствуют (так как $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$), поэтому из (7.20), (7.21), (7.23) и (7.24) с учетом выписанных выше соотношений имеем:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{e}{cr} \left[\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \left(\overline{\omega} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\overline{\omega} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right]; \\ \mathbf{E}(x) &= \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{e}{cr} \overline{\omega} \times \frac{\mathbf{r}}{r}; \\ \overline{H}(x) &= \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E}(x) = -\frac{e}{cr} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\overline{\omega} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{e}{cr} \left[\overline{\omega} + \left(\overline{\omega} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right], \end{aligned} \quad (10.15)$$

здесь применены формулы (4.5), (4.7) и равенства $(\mathbf{r}/r) \times (\mathbf{r}/r) = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{r}/r) \cdot (\mathbf{r}/r) = -1$; e — заряд электрона ($e < 0$); $\mathbf{r}$ — вектор, имеющий начало в центре частицы и конец в точке наблюдения x ; $r = |\mathbf{r}|$ ($r \neq 0$, в силу $x \notin L$); $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $\bar{\omega} = \text{const}$ — угловая скорость вращения частицы; $\mathbf{E}$ — *вихревое поле*; $\bar{H}$ — *безвихревое поле* (см. (9.6) в главе 5, с. 463).

Преобразуем найденное выражение для $\bar{H}$ (при $\bar{\omega} \neq \mathbf{0}$). Обозначим:

$$\mathbf{a} = \frac{\bar{\omega}}{\Delta\omega} \quad (\mathbf{a} \in \Gamma; \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1; |\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|} = 1), \quad (10.16)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ; $\omega = |\bar{\omega}|$ ($\omega \neq 0$, ибо $\bar{\omega} \neq \mathbf{0}$).

Будем считать, что используется правоориентированный базис. Тогда $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения, определяемый по правилу правого винта (это означает, что плоскость, ортогональная вектору $\mathbf{a}$ и проходящая через его начало, вращается в направлении против часовой стрелки при взгляде на нее со стороны конца вектора $\mathbf{a}$). В данном случае $\Delta = 1$, но мы будем сохранять этот псевдоскаляр в формулах, чтобы отличать псевдовекторные величины от векторных. Поскольку мы рассматриваем случай $\bar{\omega} = \text{const}$, то $\omega = \text{const}$ и $\mathbf{a} = \text{const}$.

Из (10.16) следует:

$$\bar{\omega} = \Delta\omega\mathbf{a}. \quad (10.17)$$

Введем угол γ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$:

$$\cos \gamma = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} \quad (\gamma \in [0, \pi]), \quad (10.18)$$

где знак минус объясняется отрицательной определенностью метрической формы в Γ ; учтено, что $|\mathbf{a}| = 1$.

С помощью (10.17) и (10.18) находим:

$$\bar{\omega} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\Delta\omega \cos \gamma. \quad (10.19)$$

На основании (10.15), (10.17) и (10.19) получаем:

$$\bar{H}(x) = \frac{e}{cr} \left(\Delta\omega \cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \bar{\omega} \right) = \Delta \frac{e\omega}{cr} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (10.20)$$

где e — заряд электрона ($e < 0$); c — скорость света; $r = |\mathbf{r}|$; $\mathbf{r}$ — вектор, имеющий начало в центре частицы и конец в точке x ; Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве Γ ; $\omega = |\bar{\omega}|$; $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения частицы; $\mathbf{a}$ — вектор, определяемый формулой (10.16); γ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$ (см. (10.18)); $\bar{H}, \bar{\omega}, \mathbf{a}, \mathbf{r} \in \Gamma$; предполагается, что базис правоориентированный (при этом $\Delta = 1$).

Таким образом, «точечная» частица при вращении вокруг своего центра, неподвижного относительно инерциальной системы отсчета, порождает электромагнитное поле вида (10.15), которое включает в себя магнитную составляющую (10.20). В главе 5 будет доказано, что именно эта составляющая обуславливает так называемый аномальный магнитный момент электрона.

11. Динамика «точечной» частицы

Предыдущие разделы были посвящены анализу поля, которое «точечная» частица порождает в пространстве Минковского. Это поле воздействует на другие частицы. Чтобы проанализировать воздействие, рассмотрим «точечную» частицу, находящуюся под действием поля, создаваемого окружающими частицами. Именно это поле будем обозначать здесь символом F . Собственное поле частицы, обозначавшееся ранее таким символом, в этом разделе не рассматривается.

Согласно (1.5), (2.3) и (7.32), *уравнение движения* «точечной» частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}, \quad (11.1)$$

где $\mathbf{i}$, l и a_1 — 4-скорость, собственное время и некоторая скалярная характеристика изучаемой «точечной» частицы; F — результирующее поле, порождаемое другими частицами в месте нахождения центра данной частицы; для упрощения записи мы убрали в уравнении (11.1) индекс «1» при величинах $\mathbf{i}$ и l , так как в этом и двух следующих разделах рассматривается только частица, испытывающая воздействие.

Отметим, что если исследуется частица, оказывающая воздействие, то уравнение (11.1) именуется *законом воздействия* (см. с. 315).

Из содержания предыдущих разделов следует, что тензор F может быть интерпретирован как тензор электромагнитного поля. В таком случае при

$$a_1 = \frac{e}{m_e c^2} \quad (11.2)$$

уравнение (11.1) совпадает, с точностью до обозначений, с известным уравнением движения электрически заряженного точечного тела в электромагнитном поле F [25] (§ 23) (здесь e — электрический заряд тела, m_e — его масса, c — скорость света). Это свидетельствует о согласии данной модели с электродинамикой.

Поскольку мы трактуем «точечную» частицу как модель электрона, то будем считать, что в уравнении (11.1) коэффициент a_1 имеет значение (11.2), где e и m_e — заряд и масса электрона ($e < 0$; $m_e > 0$).

В разд. 18 главы 3 рассмотрена конструкция, которая состоит из точки ненулевой массы и скрепленных с ней векторов; она названа материальной точкой. Доказано, что при движении этой конструкции под действием тензора, принадлежащего ограниченной группе Лоренца, ее эволюция описывается уравнением, названным основным законом динамики материальной точки:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = K \cdot \mathbf{u}, \quad (11.3)$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, скрепленный с материальной точкой; l — собственное время материальной точки, измеряемое в единицах длины; K — антисимметричный тензор, осуществляющий воздействие; все величины вычисляются в месте нахождения материальной точки.

Там же отмечено, что при $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{i}}$ (где $\dot{\mathbf{i}}$ — 4-скорость материальной точки) закон (11.3) определяет форму мировой линии и называется уравнением движения материальной точки:

$$\frac{d\dot{\mathbf{i}}}{dl} = K \cdot \dot{\mathbf{i}}. \quad (11.4)$$

Понятно, что в случае «точечной» частицы центр частицы вместе с исходящими из него направляющими векторами лучей $\mathbf{q}_0$ может быть интерпретирован как указанная материальная точка. Следовательно, для «точечной» частицы справедливы все результаты, полученные в разд. 18–20 главы 3 (при замене в них вектора $\mathbf{u}$ на $\mathbf{q}_0$). В частности, для «точечной» частицы выполняются уравнения (11.3) и (11.4).

Строго говоря, в главе 3 предполагалось, что с материальной точкой скреплено всё пространство векторов, имеющих начала в этой точке. Между тем, векторы $\mathbf{q}_0$ составляют лишь некоторое подмножество этого пространства. Однако данное обстоятельство не является принципиальным, потому что выполнение закона (11.3) для векторов $\mathbf{q}_0$ обеспечивает выполнение его для всех векторов. Действительно, векторы $\mathbf{q}_0$ образуют четырехмерную структуру, поэтому среди них заведомо имеются четыре линейно независимых вектора. Так как их можно принять в роли базиса векторного пространства, то из подчинения этих векторов закону (11.3) вытекает в силу линейности закона, что все векторы преобразуются в соответствии с этим законом.

Поскольку для «точечной» частицы выполняется уравнение (11.4), то оно служит уравнением движения «точечной» частицы. Сравнение уравнений (11.1) и (11.4) приводит к следующему значению тензора K для «точечной» частицы:

$$K = a_1 F. \quad (11.5)$$

Подставляя это значение K в (11.3) и заменяя вектор $\mathbf{u}$ на $\mathbf{q}_0$, получаем *основной закон динамики* «точечной» частицы:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0, \quad (11.6)$$

где $\mathbf{q}_0$ — направляющий вектор луча; остальные обозначения те же, что в (11.1), в частности, коэффициент a_1 имеет значение (11.2); закон (11.6) выполняется для всех лучей «точечной» частицы.

Уравнение движения (11.1) подробно исследовано в работах по электродинамике, поэтому не будем останавливаться на нем, а проанализируем закон (11.6).

Рассмотрим «точечную» частицу, которая движется в пространстве Минковского M под действием поля F в соответствии с законом (11.6). Предположим, что ее мировая линия L найдена (путем решения уравнения движения (11.1)). Тогда для каждого момента времени l известны 4-скорость центра «точечной» частицы $\mathbf{i}$ (единичный касательный вектор к L) и производная $d\mathbf{i}/dl$.

Отметим, что из $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ следует $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = 0$, откуда $\mathbf{i} \cdot d\mathbf{i}/dl = 0$, поэтому векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$ ортогональны (при $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$).

В разд. 18 главы 3 выведена формула (18.8), устанавливающая общий вид тензора K , входящего в закон (11.3). С учетом (11.5) эта формула задает общий вид тензора F при известной мировой линии L :

$$a_1 F = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + k_1 (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) + k_2 (\xi_3 \xi_1 - \xi_1 \xi_3) + k_3 (\xi_2 \xi_3 - \xi_3 \xi_2), \quad (11.7)$$

где множитель a_1 определяется формулой (11.2); k_i — коэффициенты размерности (длина)⁻¹, они могут зависеть от l ; $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ — сопровождающий «точечную» частицу ортонормированный (неинерциальный) базис, определяемый следующим образом: если $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$, то $\xi_0 = \mathbf{i}$, $\xi_1 = -\frac{d\mathbf{i}/dl}{|d\mathbf{i}/dl|}$, ξ_2 и ξ_3 — два любых взаимно ортогональных единичных вектора в пространственноподобной плоскости, которая ортогональна псевдоевклидовой плоскости, содержащей векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$; если $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$, то $\{\xi_i\}$ — любой ортонормированный базис, в котором $\xi_0 = \mathbf{i}$; все векторы ξ_i имеют начала в центре частицы.

Подстановка в (11.1) величины $a_1 F$ из (11.7) приводит, благодаря ортонормированности базиса $\{\xi_i\}$, к тождеству $d\mathbf{i}/dl = d\mathbf{i}/dl$. Это означает, что тензор F , задаваемый формулой (11.7), действительно обеспечивает выполнение уравнения (11.1) при любых коэффициентах k_i .

Таким образом, тензор F , реализующий движение «точечной» частицы по закону (11.6), обязательно имеет вид (11.7).

Антисимметричные тензоры (бивекторы), входящие в правую часть формулы (11.7), производят вращения «точечной» частицы в четырех плоскостях. Бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ осуществляет гиперболическое вращение в псевдоевклидовой плоскости, содержащей векторы $\mathbf{i}$ и $d\mathbf{i}/dl$. Три других бивектора производят пространственные вращения в трех координатных плоскостях в собственном физическом пространстве частицы Γ_* ($\Gamma_* \perp \mathbf{i}$). Наличие у этих бивекторов произвольных коэффициентов k_i означает, что движение «точечной» частицы вдоль мировой линии L может сопровождаться произвольным вращением ее вокруг L .

Обратим внимание на то, что бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ не только осуществляет гиперболическое вращение «точечной» частицы, но может вносить вклад и в ее пространственное вращение (см. далее разд. 13).

Упростим правую часть формулы (11.7).

Согласно теореме 5.4, направляющий вектор луча $\mathbf{q}_0$ преобразуется по закону (5.40):

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c}\bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \cdot \mathbf{q}_0, \quad (11.8)$$

где $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения частицы относительно собственного физического пространства частицы Γ_* ($\Gamma_* \perp \mathbf{i}$; $\bar{\omega} \in \Gamma_*$); $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* .

Теорема 11.1. Тензор a_1F , фигурирующий в законе (11.6), равен тензору, стоящему в формуле (11.8) в квадратных скобках:

$$a_1F = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c}\bar{\omega} \cdot \varkappa. \quad (11.9)$$

Доказательство. Равенство левых частей формул (11.6) и (11.8) влечет равенство их правых частей:

$$a_1F \cdot \mathbf{q}_0 = \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c}\bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \cdot \mathbf{q}_0,$$

откуда

$$\left\{ a_1F - \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) - \frac{1}{c}\bar{\omega} \cdot \varkappa \right] \right\} \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}. \quad (11.10)$$

Ранее в настоящем разделе было показано, что если линейный закон выполняется для векторов $\mathbf{q}_0$, то он выполняется для всех векторов пространства Минковского M . Значит, уравнение (11.10) справедливо для всех векторов. Отсюда и из невырожденности скалярного умножения в M вытекает, что тензор в фигурных скобках в (11.10) является нулевым, поэтому формула (11.9) верна. ■

Итак, тензор $a_1 F$ может быть записан в виде как (11.7), так и (11.9).

Приведем еще одну форму записи тензора $a_1 F$.

Пусть P_ω — плоскость в пространстве Γ_* , которая ортогональна $\bar{\omega}$, проходит через центр частицы и неподвижна относительно Γ_* . Очевидно, что при вращении, характеризуемом псевдовектором $\bar{\omega}$, векторы, лежащие в плоскости P_ω , вращаются в этой плоскости, а векторы, ортогональные P_ω , остаются неподвижными, поэтому будем называть P_ω *плоскостью вращения*.

Введем в пространстве M ортонормированный базис $\{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ с началом в центре частицы, где $\zeta_0 = \mathbf{i}$; ζ_1 и ζ_2 — два взаимно ортогональных единичных вектора в плоскости P_ω , неподвижных относительно P_ω и таких, что вращение, описываемое псевдовектором $\bar{\omega}$, происходит в направлении кратчайшего поворота от ζ_1 к ζ_2 ; ζ_3 — единичный вектор, параллельный $\bar{\omega}$. Понятно, что $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ — ортонормированный базис в собственном физическом пространстве частицы Γ_* .

Угловая скорость $\bar{\omega}$ при так введенных векторах ζ_i имеет вид

$$\bar{\omega} = \Delta \omega \zeta_3, \quad (11.11)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* : $\Delta = 1$, если базис $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный; $\omega = |\bar{\omega}|$. Скаляр ω называется, как и $\bar{\omega}$, *угловой скоростью* ($\omega \geq 0$).

Из указанных в разд. 4 свойств псевдотензора Леви-Чивита вытекает, что псевдотензор $\varkappa$, заданный над Γ_* , выражается одинаковым образом через векторы любого ортонормированного базиса в Γ_* , поэтому мы можем записать по аналогии с (5.6):

$$\varkappa = \Delta(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 - \zeta_1 \zeta_3 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 \zeta_1 - \zeta_2 \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1), \quad (11.12)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* , тот же, что в (11.11).

Обозначим: $\hat{\Omega} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa$. Отсюда и из (11.11) и (11.12) находим:

$$\hat{\Omega} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa = \omega(\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_2 \zeta_1). \quad (11.13)$$

Поскольку пространство Γ_* наделено сигнатурой $(- - -)$, то плоскость вращения P_ω имеет сигнатуру $(- -)$. В главе 2 было показано, что антисимметричный тензор (бивектор) вида $\omega(\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_2 \zeta_1)$ задает вращение векторов в такой плоскости согласно формуле (4.64) (с. 64):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt_*} = \hat{\Omega} \cdot \mathbf{u} = \omega(\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_2 \zeta_1) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{при } \mathbf{u} \in P_\omega);$$

здесь применены обозначения настоящего раздела. Так как в этом случае угловая скорость равна ω и тензор $\hat{\Omega}$ пропорционален ω , то он назван тензором угловой скорости.

Отметим следующее. Если заменить коэффициенты k_i , входящие в формулу (11.7), новыми величинами ω_j посредством зависимостей $k_1 = \omega_3/c$, $k_2 = \omega_2/c$, $k_3 = \omega_1/c$, то можем записать:

$$\begin{aligned} & k_1(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1) + k_2(\xi_3\xi_1 - \xi_1\xi_3) + k_3(\xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_2) = \\ &= \frac{1}{c}\omega_3(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1) + \frac{1}{c}\omega_2(\xi_3\xi_1 - \xi_1\xi_3) + \frac{1}{c}\omega_1(\xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_2) = \\ &= -\frac{1}{c}(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) \cdot \varkappa = -\frac{1}{c}\bar{\omega} \cdot \varkappa, \end{aligned}$$

где обозначено (с учетом формулы (11.13)): $\omega_3(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1) = -\bar{\omega}_3 \cdot \varkappa$; $\omega_2(\xi_3\xi_1 - \xi_1\xi_3) = -\bar{\omega}_2 \cdot \varkappa$; $\omega_1(\xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_2) = -\bar{\omega}_1 \cdot \varkappa$; $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$. На основании формул (11.11) и (11.13) заключаем, что введенные величины $\bar{\omega}_i$ удовлетворяют зависимостям $\bar{\omega}_i = \Delta\omega_i\xi_i$ ($i = 1, 2, 3$), поэтому выражение $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 = \Delta(\omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 + \omega_3\xi_3)$ есть разложение псевдовектора $\bar{\omega}$ по базису $\{\xi_i\}$. Произвольность коэффициентов k_i в (11.7) влечет произвольность компонент ω_i псевдовектора $\bar{\omega}$, следовательно, пространственное вращение частицы может быть произвольным. Обратим внимание на то, что из выписанной выше цепочки равенств вытекает тождественность формул (11.7) и (11.9).

Продолжим рассмотрение тензора угловой скорости.

С помощью (11.13) и второго из равенств (4.4) ($\varkappa \cdot \varkappa = 2I_{\Gamma_*}$, где I_{Γ_*} — единичный тензор в Γ_*) получаем:

$$\hat{\Omega} \cdot \varkappa = (-\bar{\omega} \cdot \varkappa) \cdot \varkappa = -\bar{\omega} \cdot (\varkappa \cdot \varkappa) = -\bar{\omega} \cdot 2I_{\Gamma_*} = -2\bar{\omega}.$$

Отсюда и из (11.11) имеем:

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{2}\hat{\Omega} \cdot \varkappa = \Delta\omega\zeta_3. \quad (11.14)$$

Заметим, что второе равенство в этом выражении можно вывести, пользуясь (11.12), (11.13) и правилом (4.3) бискалярного умножения тензоров.

Формулы (11.13) и (11.14) устанавливают связь между псевдовектором угловой скорости $\bar{\omega}$ и тензором угловой скорости $\hat{\Omega}$.

Подстановка в (11.9) величины $-\bar{\omega} \cdot \varkappa$ из (11.13) приводит к еще одной форме записи тензора a_1F :

$$a_1F = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + \frac{1}{c}\omega(\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2\zeta_1). \quad (11.15)$$

Таким образом, тензор F , осуществляющий движение «точечной» частицы в соответствии с законом (11.6), может быть представлен в любой из эквивалентных форм (11.7), (11.9) или (11.15).

Напомним обозначения, примененные в (11.9) и (11.15): F — поле, действующее на исследуемую «точечную» частицу; $a_1 = e/(m_e c^2)$ (где e и m_e — заряд и масса электрона; c — скорость света); $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы (единичный касательный вектор к мировой линии L , направленный в сторону будущего); l — собственное время частицы, измеряемое в единицах длины; $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения частицы относительно ее собственного физического пространства Γ_* ($\bar{\omega} \in \Gamma_*$); $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* , определяемый формулой (11.12); $\omega = |\bar{\omega}|$ — модуль угловой скорости $\bar{\omega}$, называемый, так же как $\bar{\omega}$, угловой скоростью; $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ — ортонормированный базис в Γ_* такой, что векторы ζ_1 и ζ_2 лежат в плоскости вращения и вращение, задаваемое угловой скоростью $\bar{\omega} = \Delta \omega \zeta_3$, происходит в направлении кратчайшего поворота от ζ_1 к ζ_2 ; Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* : $\Delta = 1$, если базис $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный.

Далее нам потребуются составляющие вектора $\mathbf{q}_0$, направленные вдоль вектора $\mathbf{i}$ и вдоль гиперплоскости Γ_* . Для их нахождения умножим вектор $\mathbf{q}_0$ на единичный тензор I , записанный в виде $I = \mathbf{i}\mathbf{i} + (I - \mathbf{i}\mathbf{i})$ (где $\mathbf{i}\mathbf{i}$ — диада):

$$\mathbf{q}_0 = I \cdot \mathbf{q}_0 = [\mathbf{i}\mathbf{i} + (I - \mathbf{i}\mathbf{i})] \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{i}\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 + (I - \mathbf{i}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{q}_0. \quad (11.16)$$

Обозначим:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{i}\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0)\mathbf{i}; \quad \mathbf{q}_{\Gamma_*} = (I - \mathbf{i}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{q}_0. \quad (11.17)$$

Поскольку

$$\mathbf{i} \cdot (I - \mathbf{i}\mathbf{i}) = \mathbf{i} \cdot I - \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{i} - \mathbf{i} = \mathbf{0},$$

то $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_{\Gamma_*} = 0$. Отсюда и из (11.16), (11.17) следует, что векторы $\mathbf{q}_i$ и $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ дают в сумме $\mathbf{q}_0$, причем вектор $\mathbf{q}_i$ направлен вдоль $\mathbf{i}$ и ортогонален вектору $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ (значит, $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ направлен вдоль Γ_*), поэтому эти векторы являются искомыми составляющими вектора $\mathbf{q}_0$:

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_{\Gamma_*} \quad (\mathbf{q}_i \parallel \mathbf{i}; \quad \mathbf{q}_{\Gamma_*} \in \Gamma_*; \quad \mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_{\Gamma_*}). \quad (11.18)$$

Рассмотрим случай $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$. Согласно (11.9) и (11.15), в этом случае «точечная» частица находится под действием поля F , которое может быть записано в следующих эквивалентных формах:

$$a_1 F = -\frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \varkappa \quad \text{или} \quad a_1 F = \frac{1}{c} \omega (\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_2 \zeta_1). \quad (11.19)$$

Из (11.8) или из (11.6) и (11.19) заключаем, что в данном случае направляющий вектор луча $\mathbf{q}_0$ преобразуется по закону

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dt_*} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_0, \quad (11.20)$$

где t_* — собственное время частицы; применено равенство $dl = c dt_*$.

Так как условие $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ эквивалентно условию $d\mathbf{i}/dt_* = \mathbf{0}$, то из первого выражения в (11.17) вытекает:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt_*} = \frac{d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0)}{dt_*} = \mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{q}_0}{dt_*}. \quad (11.21)$$

Умножим обе части равенства (11.20) на диаду $\mathbf{i}\mathbf{i}$:

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{q}_0}{dt_*} = -\mathbf{i} \cdot (\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_0).$$

Поскольку псевдотензор $\varkappa$ определен над Γ_* , то в круглых скобках стоит вектор, принадлежащий Γ_* . Умножение его на $\mathbf{i}$ дает ноль, поэтому правая часть формулы есть нулевой вектор. Левая часть, по (11.21), равна производной вектора $\mathbf{q}_i$. Следовательно, эта формула влечет равенство

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt_*} = \mathbf{0}. \quad (11.22)$$

Подставим в закон (11.20) разложение (11.18) вектора $\mathbf{q}_0$. Учитывая (11.22), находим:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dt_*} = \frac{d\mathbf{q}_i}{dt_*} + \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma_*}}{dt_*} = \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma_*}}{dt_*} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_i - \bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_{\Gamma_*} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_{\Gamma_*},$$

где использовано равенство $\varkappa \cdot \mathbf{q}_i = \hat{0}$, вытекающее из $\mathbf{q}_i \parallel \mathbf{i}$ и $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$. Отсюда имеем:

$$\frac{d\mathbf{q}_{\Gamma_*}}{dt_*} = -\bar{\omega} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_{\Gamma_*} = \bar{\omega} \times \mathbf{q}_{\Gamma_*}, \quad (11.23)$$

где $\times$ — знак векторного умножения в Γ_* ; применена формула (4.5), выражающая векторное произведение через псевдотензор $\varkappa$.

На основании (11.22) и (11.23) заключаем, что составляющая $\mathbf{q}_i$ вектора $\mathbf{q}_0$ не изменяется, а составляющая $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ вращается в Γ_* с угловой скоростью $\bar{\omega}$. Вращение происходит вокруг центра частицы, потому что вектор $\mathbf{q}_0$ имеет начало в центре частицы. В связи с тем, что сказанное верно для всех лучей, данный результат относится ко всей частице и может быть сформулирован следующим образом.

В случае $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ «точечная» частица находится под действием поля F вида (11.19). Это поле вращает частицу относительно ее собственного физического пространства Γ_* с угловой скоростью, равной входящему в (11.19) псевдовектору $\bar{\omega}$.

Сделаем несколько примечаний.

1. Если $d\mathbf{i}/dl \neq \mathbf{0}$, то дополнительный вклад в пространственное вращение «точечной» частицы может вносить бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ (см. далее разд. 13), поэтому в общем случае $\bar{\omega}$ — только часть полной угловой скорости частицы.

2. Если центр «точечной» частицы движется относительно наблюдателя, то пространственное вращение частицы происходит в плоскости, которая в общем случае не содержится в трехмерном физическом пространстве лабораторной системы отсчета, а наклонена по отношению к нему и пересекает его по некоторой прямой.

В самом деле, плоскость P_ω , в которой происходит пространственное вращение частицы содержится в собственном физическом пространстве частицы Γ_* . При движении частицы относительно исследователя, пространство Γ_* наклонено по отношению к физическому пространству лабораторной системы отсчета Γ (см. рисунок на с. 136). Принимая во внимание, что гиперплоскости Γ и Γ_* пересекаются по двумерной плоскости и что $P_\omega \subset \Gamma_*$, заключаем отсюда, что плоскость P_ω содержится в Γ в том и только том случае, если она совпадает с пересечением $\Gamma \cap \Gamma_*$. Если же плоскость P_ω не совпадает с $\Gamma \cap \Gamma_*$, то она не содержится в гиперплоскости Γ , а наклонена по отношению к Γ и пересекает Γ по некоторой прямой, лежащей в $\Gamma \cap \Gamma_*$.

3. Вращение «точечной» частицы определяется по отношению к ее собственному физическому пространству Γ_* . Последнее удовлетворяет условиям: а) $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$, б) при движении частицы одна и та же точка пространства Γ_* находится в центре частицы и движется вместе с ним. Это означает, что пространство Γ_* определено лишь с точностью до произвольного вращения его вокруг вектора $\mathbf{i}$. В связи с этим при описании движения частицы относительно лабораторной системы отсчета нужно учитывать как вращение частицы относительно Γ_* , так и вращение самого пространства Γ_* относительно лабораторной системы отсчета.

4. Уравнения (11.22) и (11.23) эквивалентны уравнениям (5.42) (с. 342), причем и в разд. 5, и в настоящем разделе эти уравнения выведены на основе формулы (5.40). Однако в разд. 5 вывод этих уравнений занимает три строки, а в настоящем разделе — почти страницу. Причина, по которой потребовалось провести столь громоздкий вывод, будет объяснена в разд. 14.

12. Вращение электрона магнитным полем

Вращение электрона магнитным полем было исследовано в разд. 19 главы 3, при этом электрон был моделирован материальной точкой со скрепленными с ней векторами. Опишем этот же эффект с помощью модели электрона в виде «точечной» частицы.

Пусть в инерциальной системе отсчета $\{T, G\}$ действует постоянное и однородное магнитное поле $\bar{H}$, а электрическое поле $\mathbf{E}$ отсутствует:

$$\bar{H} = \text{const} \neq \mathbf{0}; \quad \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\bar{H}, \mathbf{E} \in G). \quad (12.1)$$

Тензор электромагнитного поля F связан с напряженностями $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$ формулой (4.9) (см. также формулу (16.1) в главе 3, с. 232):

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \bar{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}, \quad (12.2)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T ; $\boldsymbol{\varkappa}$ — псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством G . В ситуации, описываемой формулами (12.1), выражение (12.2) упрощается:

$$F = \bar{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}. \quad (12.3)$$

Проанализируем случай, когда *центр масс электрона неподвижен относительно системы отсчета $\{T, G\}$* . В этом случае мировая линия L «точечной» частицы, моделирующей электрон, прямолинейна и параллельна оси времени T , а собственное физическое пространство-частицы G_* совпадает с физическим пространством системы отсчета G . Вследствие прямолинейности мировой линии L , единичный вектор $\mathbf{i}$, касательный к L , постоянен, то есть $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$.

Согласно выводу, сделанному в предыдущем разделе, при $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ «точечная» частица находится под действием поля F вида (11.19): $a_1 F = -\frac{1}{c} \bar{\omega} \cdot \boldsymbol{\varkappa}$, которое вращает частицу с угловой скоростью, равной входящему в эту формулу псевдовектору $\bar{\omega}$. Переобозначим псевдовектор $\bar{\omega}$ символом $\bar{\Omega}_H$ (для удобства сравнения последующего результата с полученным в разд. 19 главы 3) и запишем данную формулу в виде

$$F = -\frac{1}{a_1 c} \bar{\Omega}_H \cdot \boldsymbol{\varkappa}. \quad (12.4)$$

Теорема 12.1. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы или псевдовекторы, принадлежащие физическому пространству G ; $\boldsymbol{\varkappa}$ — псевдотензор Леви-Чивита над G . Тогда из $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varkappa}$ вытекает $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Доказательство. Умножим обе части равенства $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varkappa}$ бискалярно на $\boldsymbol{\varkappa}$ и воспользуемся ассоциативностью скалярного умножения и второй из зависимостей (4.4) ($\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{\varkappa} = 2I_\Gamma$, где I_Γ — единичный тензор в Γ). В результате получим вытекающие одно из другого равенства, доказывающие теорему:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varkappa} &\implies (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) \cdot \boldsymbol{\varkappa} = (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) \cdot \boldsymbol{\varkappa} \implies \\ \implies \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) &= \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) \implies \mathbf{a} \cdot 2I_\Gamma = \mathbf{b} \cdot 2I_\Gamma \implies \\ \implies 2\mathbf{a} \cdot I_\Gamma &= 2\mathbf{b} \cdot I_\Gamma \implies 2\mathbf{a} = 2\mathbf{b} \implies \mathbf{a} = \mathbf{b}. \blacksquare \end{aligned}$$

Формулы (12.3) и (12.4) приводят к равенству $-\frac{1}{a_1 c} \bar{\Omega}_H \cdot \boldsymbol{\varkappa} = \bar{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}$. Отсюда, по теореме 12.1, имеем: $-\frac{1}{a_1 c} \bar{\Omega}_H = \bar{H}$, что вместе с (11.2) дает:

$$\bar{\Omega}_H = -\frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad (\bar{\Omega}_H \in \Gamma), \quad (12.5)$$

где e и m_e — заряд и масса электрона ($e < 0$); c — скорость света.

Из результатов предыдущего раздела следует, что под действием поля F вида (12.4) направляющий вектор $\mathbf{q}_0$ произвольного луча частицы и его составляющие $\mathbf{q}_T$ и $\mathbf{q}_\Gamma$, направленные вдоль оси времени T и вдоль гиперплоскости Γ , преобразуются в соответствии с законами (11.20), (11.22) и (11.23):

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dt} = -\bar{\Omega}_H \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{q}_0; \quad \frac{d\mathbf{q}_T}{dt} = \mathbf{0}; \quad \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \bar{\Omega}_H \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (12.6)$$

где собственное время частицы t_* заменено координатным временем t , так как в данной ситуации они совпадают (с точностью до постоянного слагаемого); индексы при составляющих вектора $\mathbf{q}_0$ изменены с $\mathbf{i}$ на T и с Γ_* на Γ с учетом $\mathbf{i} \parallel T$ и $\Gamma_* = \Gamma$; $\times$ — векторное умножение в Γ .

Уравнения (12.6) приводят к следующему выводу относительно действия магнитного поля на «точечную» частицу, моделирующую электрон. Временная составляющая $\mathbf{q}_T$ направляющего орта $\mathbf{q}_0$ любого луча частицы не изменяется. А пространственная составляющая $\mathbf{q}_\Gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}_H$ вида (12.5), одинаковой для всех лучей. Вращение происходит вокруг центра частицы, потому что вектор $\mathbf{q}_0$ имеет начало в центре частицы.

Изнутри трехмерного физического пространства Γ инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ полученный результат «выглядит» следующим образом. Пусть в физическом пространстве Γ находится электрон, центр масс которого неподвижен относительно Γ . Тогда при

действии на него магнитного поля с напряженностью $\bar{H}$ электрон вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}_H$ вида (12.5) вокруг оси, параллельной $\bar{H}$ и проходящей через его центр масс. В главе 5 будет доказано, что самодействие электрона увеличивает угловую скорость $\bar{\Omega}_H$ примерно в 1.00116 раз. С учетом этого коэффициента формула (12.5) согласуется с результатами опытов с относительной погрешностью $5 \cdot 10^{-6}$.

Данный вывод совпадает с выводом, сделанным в разд. 19 главы 3. Такое совпадение закономерно, потому что центр «точечной» частицы вместе с исходящими из него направляющими векторами лучей может быть интерпретирован как материальная точка со скрепленными с ней векторами (рассматривавшаяся в качестве модели электрона в главе 3).

Результат, полученный в настоящем разделе, может быть получен также способом, изложенным в разд. 19 главы 3, для чего достаточно заменить в проведенных там выкладках вектор $\mathbf{u}$ направляющим вектором луча $\mathbf{q}_0$.

В физической литературе результаты опытов по воздействию магнитного поля на электроны обычно объясняются ларморовской прецессией электронных спинов. Подробное обоснование отсутствия этой прецессии приведено в конце разд. 19 главы 3.

13. Вращение электрона электрическим полем

Вращение электрона электрическим полем было проанализировано в разд. 20 главы 3 на основе модели электрона в виде материальной точки со скрепленными с ней векторами. Полученные результаты остаются верными и при моделировании электрона «точечной» частицей, поскольку последняя, точнее, ее центр вместе с исходящими из него направляющими векторами лучей, фактически является именно такой материальной точкой (чтобы получить эти же результаты с помощью «точечной» частицы, достаточно заменить в упомянутом разделе вектор $\mathbf{u}$ направляющим вектором луча $\mathbf{q}_0$). Поэтому не будем повторять многостраничные выкладки, а ограничимся постановкой задачи и изложением результатов.

Рассмотрим электрон в атоме. Будем считать, что ядро атома покоится относительно инерциальной системы отсчета $\{T, G\}$, причем ось времени T проходит через центр масс ядра (при этом она совпадает с мировой линией ядра). Обозначим положительный заряд ядра через $Z|e|$ (Z — количество протонов в ядре; e — заряд электрона; $e < 0$).

Согласно закону Кулона, ядро создает в физическом пространстве Γ напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей вида

$$\mathbf{E} = \frac{Z|e|}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (13.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек физического пространства Γ относительно центра масс ядра ($\mathbf{r} \in \Gamma$; $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$); $r = |\mathbf{r}|$ ($r > 0$).

Из (12.2) и (13.1) находим тензор электромагнитного поля F , порождаемый ядром атома:

$$F = \frac{Z|e|}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (13.2)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — орт оси времени T , направленный в сторону будущего.

В связи с тем, что мы моделируем электрон «точечной» частицей, уравнение (11.1) служит уравнением его движения. При указанном тензоре F одним из решений этого уравнения является, как известно, движение электрона вокруг ядра по круговой траектории (орбите) с постоянной по модулю скоростью. Мировая линия L «точечной» частицы, моделирующей электрон, представляет собой в этом случае винтовую линию, ось которой совпадает с мировой линией ядра, то есть с осью времени T . Далее будем рассматривать именно такое движение «точечной» частицы (рис. 13.1).

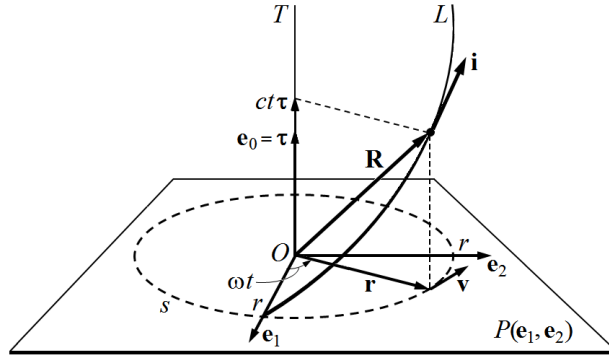


Рис. 13.1. Центр «точечной» частицы, движущийся вдоль винтовой мировой линии L .

$\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра частицы относительно точки $O \in T$ (он же — радиус-вектор точек линии L); $\mathbf{i}$ — единичный касательный вектор к линии L (4-скорость центра частицы); s — траектория центра частицы в физическом пространстве Γ (окружность радиуса r); ω — орбитальная угловая скорость частицы.

Задача. Найти вращение «точечной» частицы, вызываемое действием тензора F вида (13.2) и удовлетворяющее закону (11.6).

Данная задача решена в разд. 20 главы 3. Изложим полученные результаты, сделав предварительно необходимые построения.

В связи с тем, что закон (11.6) содержит значение поля F в месте нахождения центра частицы, будем считать, что вектор $\mathbf{r}$ в (13.2) есть радиус-вектор центра частицы относительно центра орбиты (он же — радиус-вектор точек орбиты), при этом r — радиус орбиты.

Винтовая мировая линия L является трехмерным объектом, следовательно, она содержится в трехмерном подпространстве пространства Минковского M . Обозначим это подпространство символом M_3 .

Введем, как и в разд. 20 главы 3, два базиса — базис, неподвижный относительно пространства M , и базис, сопровождающий «точечную» частицу.

Первый базис построим следующим образом. Зададим в подпространстве M_3 ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в точке O , от которой отсчитывается координатное время t ($O \in T$), и базисными векторами, определяемыми так: $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$ — орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; орт $\mathbf{e}_1$ ортогонален орту $\mathbf{e}_0$ и направлен от точки O в сторону той точки мировой линии L , которая соответствует нулевому моменту времени t ; орт $\mathbf{e}_2$ ортогонален векторам $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_1$ и направлен в том из двух возможных направлений, при котором движение центра частицы по траектории происходит в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ (см. рис. 13.1). Введем орт $\mathbf{e}_3$, ортогональный подпространству M_3 и образующий вместе с $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ правоориентированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в физическом пространстве Γ . Понятно, что $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис в пространстве M . Базис $\{\mathbf{e}_i\}$ называется *неподвижным*. Очевидно, что траектория центра частицы s лежит в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Обозначим эту плоскость через $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

В базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ винтовая мировая линия L , круговая траектория s , скорость $\mathbf{v}$ центра «точечной» частицы и орбитальная угловая скорость $\bar{\omega}$ частицы описываются уравнениями соответственно

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= ct\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r} = ct\mathbf{e}_0 + r\cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + r\sin(\omega t)\mathbf{e}_2; \\ \mathbf{r} &= r\cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + r\sin(\omega t)\mathbf{e}_2; \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -v\sin(\omega t)\mathbf{e}_1 + v\cos(\omega t)\mathbf{e}_2 \quad (v = \omega r); \\ \bar{\omega} &= \Delta\omega\mathbf{e}_3,\end{aligned}\tag{13.3}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек мировой линии L относительно точки O

(см. рис. 13.1); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек траектории s относительно ее центра $\Gamma \cap T$ ($\mathbf{r} \in P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \Gamma$); $r = |\mathbf{r}|$; t — время в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ (координатное время); $\omega = |\bar{\omega}|$ (ω называется, как и $\bar{\omega}$, орбитальной угловой скоростью частицы); $v = |\mathbf{v}|$ (v именуется, как и $\mathbf{v}$, скоростью центра частицы); Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве Γ ($\Delta=1$ в правоориентированном базисе и $\Delta=-1$ в левоориентированном базисе; в нашем случае $\Delta=1$, так как базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный); использовано постоянство величин r , ω и $\mathbf{e}_i$; скорости $\mathbf{v}$ и $\bar{\omega}$ определяются относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$.

Теперь введем второй базис. Зададим векторы

$$\xi_0 = \mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}; \quad \xi_1 = -\frac{d\mathbf{i}/dl}{|d\mathbf{i}/dl|} = \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \xi_2 = \frac{\frac{v}{c}\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{v}}{v}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}; \quad \xi_3 = \mathbf{e}_3; \quad (13.4)$$

считаем, что начала всех векторов ξ_i совпадают с центром частицы. В разд. 20 главы 3 доказано, что набор векторов $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ является ортонормированным базисом в пространстве M . Этот базис движется вместе с частицей, поэтому он назван *сопровождающим* базисом. Поскольку векторы ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 ортогональны вектору $\mathbf{i}$, то они образуют ортонормированный базис в собственном физическом пространстве «точечной» частицы Γ_* (последнее, напомним, представляет собой трехмерную гиперплоскость, проходящую через центр частицы и ортогональную вектору $\mathbf{i}$).

Пусть F — тензор, задаваемый выражением (13.2); a_1 — параметр, входящий в закон (11.6). В разд. 20 главы 3 приведено разложение тензора $a_1 F$ по диадному базису $\{\xi_i \xi_j\}$ (формула (20.21), с. 252):

$$\begin{aligned} a_1 F &= \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_0 \xi_1 - \xi_1 \xi_0) + \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1), \end{aligned} \quad (13.5)$$

где во втором равенстве применены две первые зависимости из (13.4). В том же разделе в формулу (13.5) введен дополнительный коэффициент k с целью исследовать воздействие на векторы не только тензора F вида (13.2), но и других тензоров:

$$a_1 F = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) + k \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right| (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1); \quad (13.6)$$

при $k=1$ эта формула совпадает с (13.5), при $k=0$ в ее правой части остается только бивектор $\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl}$. Отметим, что коэффициент k вве-

ден лишь во второе слагаемое в правой части формулы. Первое слагаемое нельзя домножать на коэффициент, отличный от единицы, так как в этом случае не будет выполняться уравнение движения (11.1).

Обозначим: $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт произвольного луча частицы; $P(\mathbf{i}, \xi_3)$ и $P(\xi_1, \xi_2)$ — плоскости, которые содержат указанные в скобках векторы (из ортонормированности базиса $\{\xi_i\}$ вытекает, что эти плоскости взаимно ортогональны; первая плоскость псевдоевклидова, вторая пространственноподобная).

Результаты разд. 20 главы 3 позволяют заключить, что при действии поля F вида (13.6) составляющая вектора $\mathbf{q}_0$, направленная вдоль плоскости $P(\mathbf{i}, \xi_3)$, остается неизменной, а составляющая вдоль плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$ вращается в этой плоскости относительно базиса $\{\xi_i\}$ с угловой скоростью

$$o = -\frac{1 - k\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \omega, \quad (13.7)$$

которая одинакова для всех лучей; здесь k — коэффициент, входящий в (13.6); v — скорость центра частицы; ω — орбитальная угловая скорость частицы; положительное значение o отвечает вращению в направлении от ξ_1 к ξ_2 (см. формулу (20.26), с. 253).

Будем трактовать указанное вращение векторов $\mathbf{q}_0$ как вращение самой «точечной» частицы. Подчеркнем, что это есть вращение частицы относительно сопровождающего базиса $\{\xi_i\}$. Между тем, нас интересует вращение частицы относительно неподвижного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, связанного с инерциальной системой отсчета $\{T, \Gamma\}$. Однако описание вращения с позиции системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ сопряжено с принципиальным затруднением.

Это затруднение и способ его преодоления изложены в разд. 20 главы 3. Повторим сказанное там (в сокращенном виде и с заменой термина „материальная точка“ термином „точечная“ частица“ и вектора $\mathbf{u}$ вектором $\mathbf{q}_0$).

Окружающий мир воспринимается нами как трехмерный, поэтому при описании вращения тела подразумевается, что плоскость вращения лежит в трехмерном физическом пространстве Γ . Однако упомянутая выше плоскость вращения $P(\xi_1, \xi_2)$ не содержится в Γ (это вытекает из наличия у вектора $\xi_2 \in P(\xi_1, \xi_2)$ ненулевой составляющей вдоль оси T , ортогональной Γ , см. (13.4)). А так как вращение тела, которое происходит в одной плоскости, не может быть описано как вращение в другой плоскости, то излагаемое далее представление о вращении «точечной» частицы в плоскости, содержащейся в Γ , заведомо не является строгим.

Пусть $\mathbf{q}_P$ — составляющая вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$. Вращаясь в этой плоскости относительно базиса $\{\xi_1, \xi_2\}$, вектор $\mathbf{q}_P$ оказывается в некоторые моменты времени направленным вдоль вектора ξ_1 , который лежит в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (так как $\xi_1 = \mathbf{r}/r \in P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, см. (13.4)). Значит, в эти моменты вектор $\mathbf{q}_P$ принадлежит плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \Gamma$. Если ограничиться рассмотрением только таких моментов времени, то нам будет казаться, что вектор $\mathbf{q}_P$ все время находится в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, то есть что он вращается в этой плоскости.

В разд. 20 главы 3 доказано, что вектор $\mathbf{q}_P$ находится в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в те и только те моменты времени t_i , которые удовлетворяют условию $\sin(ot_i) = 0$ (где o задается формулой (13.7); использовано начальное условие: $\mathbf{q}_P|_{t=0} = q_P \xi_1$). В эти моменты времени

$$\mathbf{q}_P(t_i) = q_P \cos((\omega + o)t_i) \mathbf{e}_1 + q_P \sin((\omega + o)t_i) \mathbf{e}_2. \quad (13.8)$$

Если бы равенство (13.8) выполнялось при всех t , то из него вытекало бы, что вектор $\mathbf{q}_P$ вращается в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ с угловой скоростью $\omega + o$. Однако в моменты времени, отличные от t_i , этот вектор, как показано в разд. 20 главы 3, не только не принадлежит плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, но и не принадлежит физическому пространству Γ (ибо в эти моменты он имеет ненулевую составляющую вдоль оси T , ортогональной Γ).

Тем не менее, рассуждая с позиции исследователя, находящегося внутри физического пространства Γ , условимся трактовать дискретный набор последовательных расположений вектора $\mathbf{q}_P$ в плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ как вращение вектора $\mathbf{q}_P$ в этой плоскости с указанной угловой скоростью, которую обозначим через Ω : $\Omega = \omega + o$. Подставим в это равенство значение величины o из (13.7) и заменим скалярные величины Ω и ω соответствующими псевдовекторами (это можно сделать, так как они описывают вращения в одной и той же плоскости $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ с одинаковым положительным направлением от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$):

$$\bar{\Omega} = \left(1 - \frac{1 - k\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \bar{\omega}, \quad (13.9)$$

где $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{e}_3$; $\bar{\omega} = \Delta\omega\mathbf{e}_3$ (Δ — единичный псевдоскаляр в Γ , см. последнюю формулу в (13.3) и пояснение к ней); $\bar{\Omega}$ и $\bar{\omega}$ — угловые скорости относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, связанного с системой отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Поскольку псевдовектор $\bar{\Omega}$ не зависит от выбора вектора $\mathbf{q}_0$, то он может быть интерпретирован как угловая скорость собственного вращения «точечной» частицы относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Таким образом, если под действием тензора F вида (13.6) электрон обращается вокруг неподвижного ядра по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$, то он одновременно вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$, задаваемой формулой (13.9).

Найдем угловую скорость $\bar{\Omega}$ при нескольких значениях параметра k (введенного при преобразовании формулы (13.5) в (13.6) специально, чтобы исследовать разные варианты воздействия на «точечную» частицу). На основании (13.9) приходим к таким результатам.

1. Если

$$k = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\left(\frac{v}{c}\right)^2} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{1}{2},$$

то $\bar{\Omega} = \mathbf{0}$. Это означает, что «точечная» частица не вращается относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$.

2. При $k = 0$ будет

$$\bar{\Omega} = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \xrightarrow[v \rightarrow c]{} -\infty, \quad (13.10)$$

где учтено, что $v < c$ и $\omega > 0$. В данном случае из (13.6) вытекает:

$$a_1 F = \frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl}. \quad (13.11)$$

Движение вектора под действием тензора $a_1 F$ вида (13.11) называется *переносом вектора по Ферми–Уолкеру* (E. Fermi и A. G. Walker).

3. Если $k = 1$, то

$$\bar{\Omega} = \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\bar{\omega}; \quad \bar{\Omega} \xrightarrow[v \rightarrow c]{} \bar{\omega}. \quad (13.12)$$

Обратим внимание на то, что в случаях 1 и 2 тензор F определяется формулой (13.6), в которой $k \neq 1$. Такой тензор не реализуется в атомах, поэтому данные случаи представляют лишь теоретический интерес. Практически значимым является только случай 3, когда $k = 1$ и формула (13.6) переходит в (13.5). В этом случае тензор F задается выражением (13.2), то есть он представляет собой тензор электромагнитного поля, порождаемый атомным ядром. Этот тензор обеспечивает

как движение электрона вокруг ядра по некоторой траектории, так и его вращение с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (13.12) (при круговой траектории).

Воспользуемся известной зависимостью между орбитальной угловой скоростью $\bar{\omega}$, скоростью $\mathbf{v}$ и ускорением $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$ центра «точечной» частицы:

$$\bar{\omega} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{v^2} \quad (13.13)$$

(вывод этой формулы имеется в разд. 20 главы 3).

С помощью формулы (13.13) выражение (13.12) для угловой скорости $\bar{\Omega}$ может быть переписано в форме

$$\bar{\Omega} = \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) \bar{\omega} = \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{v^2} \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \bar{\omega}. \quad (13.14)$$

Из (13.14) при учете равенств $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{e}_3$, $\bar{\omega} = \Delta\omega\mathbf{e}_3$ и $v = \omega r$ вытекает, что при малых скоростях v и ω зависимость угловой скорости Ω от v и ω имеет вид соответственно

$$\Omega(v) \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{v^3}{2c^2 r} \quad \text{и} \quad \Omega(\omega) \underset{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{\omega^3 r^2}{2c^2}, \quad (13.15)$$

где r — радиус орбиты.

Отметим, что базис $\{\mathbf{e}_i\}$ построен так, что орбитальная угловая скорость $\bar{\omega}$ сонаправлена вектору $\mathbf{e}_3$, поэтому в равенстве $\bar{\omega} = \Delta\omega\mathbf{e}_3$ величина ω неотрицательна ($\omega = |\bar{\omega}| \geq 0$). Но в аналогичном равенстве $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{e}_3$ величина Ω в общем случае может иметь любой знак (ср. (13.10) и (13.15)).

Резюме. Если под действием электрического поля (13.1), создаваемого ядром атома, электрон обращается вокруг ядра по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$, то под действием этого же поля он вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (13.14) (угловые скорости $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$ определяются по отношению к инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$, в которой ядро атома неподвижно).

Из (13.14) видно, что указанное вращение происходит в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Обозначим эту плоскость через $P(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Так как она содержится в физическом пространстве Γ , то для направляющего вектора $\mathbf{q}_0$ любого луча «точечной» частицы его составляющая $\mathbf{q}_\Gamma$, направленная вдоль Γ , вращается в соответствии с законом

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{q}_\Gamma.$$

Внимание! Представление о том, что вращение электрона происходит в плоскости $P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \subset \Gamma$, является условным. В действительности вращение происходит не в этой плоскости, а в плоскости $P(\xi_1, \xi_2)$, которая не содержится в физическом пространстве Γ , а лишь пересекает его вдоль прямой с направляющим вектором $\xi_1 = \mathbf{r}/r$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона относительно центра орбиты (см. формулу (13.7) и текст перед ней).

В разд. 20 главы 3 приведены подробные комментарии к полученному результату (с. 259–260). Не будем повторять их, а продублируем важный практический пример использования этих результатов.

Вращение электрона влияет на его энергию. Это влияние может приводить как к увеличению, так и к уменьшению энергии электрона в зависимости от взаимной ориентации угловой скорости вращения электрона и спина электрона. С этим эффектом связана так называемая *тонкая структура* уровней энергии атомов — расщепление уровней энергии на подуровни. Покажем, что *вращение орбитального электрона с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (13.14) служит причиной разности уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода.*

В состояниях $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ орбитальный электрон характеризуется одним и тем же главным квантовым числом $n = 2$ и одним и тем же орбитальным квантовым числом $l = 1$, но противоположными направлениями спина $\bar{s}$. В состоянии $2p_{3/2}$ спин электрона $\bar{s}$ сонаправлен орбитальному моменту количества движения $\bar{l}$, а в состоянии $2p_{1/2}$ спин $\bar{s}$ противоположен $\bar{l}$ (псевдовекторы помечены чертой над символом).

Подчеркнем, что последовательное введение понятия спина электрона возможно только в рамках не точечной модели электрона (см. главу 5).

Представим часть энергии электрона, связанную со спином, в виде $\hbar\omega_s$, где $\hbar$ — постоянная Планка, ω_s — некоторая угловая скорость (ее значение не конкретизируем, так как она не входит в окончательный результат). Угловая скорость вращения электрона $\bar{\Omega}$ сонаправлена орбитальной угловой скорости $\bar{\omega}$ (см. (13.14)), а последняя сонаправлена орбитальному моменту количества движения $\bar{l}$, поэтому угловая скорость $\bar{\Omega}$ тоже сонаправлена $\bar{l}$. Вместе с тем, спин $\bar{s}$ в одном из рассматриваемых состояний сонаправлен, а в другом противоположен $\bar{l}$. Значит, псевдовекторы $\bar{\Omega}$ и $\bar{s}$ параллельны. Это обстоятельство дает возможность сложить угловые скорости Ω и ω_s (с соответствующим знаком). Следовательно, в состоянии $2p_{3/2}$ та часть энергии электрона, которая связана с вращением, равна $\hbar(\omega_s + \Omega)$, а в состоянии $2p_{1/2}$ она равна $\hbar(\omega_s - \Omega)$ (малость Ω позволяет считать, что $\omega_s > \Omega$, поэтому для соблюдения положительности энергии взята разность $\omega_s - \Omega$).

Квантовые числа n и l одинаковы в обоих рассматриваемых состояниях, значит, электрон имеет в этих состояниях одну и ту же энергию орбитального движения. Отсюда заключаем, что разность ΔE полной энергии E электрона в этих состояниях обусловлена только различием вращательной части энергии. С учетом сказанного выше и формулы (13.14) это означает, что

$$\Delta E = \hbar(\omega_s + \Omega) - \hbar(\omega_s - \Omega) = 2\hbar\Omega \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \hbar\omega. \quad (13.16)$$

Согласно модели атома Н. Бора, момент количества движения электрона, обращающегося вокруг ядра, может принимать значения, только кратные постоянной Планка $\hbar$. Запишем этот постулат Бора для случая круговой орбиты в нерелятивистском приближении:

$$rm_e v = n\hbar, \quad (13.17)$$

где r — радиус орбиты; m_e и v — масса и орбитальная скорость электрона; n — главное квантовое число.

В данном случае сила электростатического притяжения электрона ядром атома является центростремительной силой. Приравнивая эти силы, имеем:

$$-\frac{e^2}{r^2} = -\frac{m_e v^2}{r},$$

откуда

$$rm_e v^2 = e^2. \quad (13.18)$$

Заменяя в (13.18) произведение $rm_e v$ его значением (13.17), находим скорость электрона v :

$$v = \frac{e^2}{n\hbar}. \quad (13.19)$$

Из (13.17) и (13.19) определяем радиус орбиты r :

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e e^2}. \quad (13.20)$$

На основании формул (13.15), (13.16), (13.19) и (13.20) получаем:

$$\Delta E = 2\hbar\Omega \underset{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{\hbar v^3}{c^2 r} = \frac{m_e c^2 \alpha^4}{n^5}, \quad (13.21)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Отсюда, пользуясь равенством $n = 2$ и известными значениями констант, находим:

$$\Delta E \approx 7.256 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} \approx 4.535 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}. \quad (13.22)$$

Переход к частоте ν с помощью зависимости $\Delta E = h\nu$ дает:

$$\nu \approx 10\,950 \text{ МГц.} \quad (13.23)$$

Это значение частоты ν отличается от экспериментального значения $10\,968 \text{ МГц}$ [10] на относительную величину $2 \cdot 10^{-3}$. В главе 5 будет доказано, что при вращении электрона внешним магнитным полем самодействие электрона приводит к увеличению угловой скорости его вращения примерно в 1.00116 раза. В связи с тем, что приращение энергии ΔE пропорционально угловой скорости вращения электрона Ω (см. (13.21)), оно должно быть умножено на этот же коэффициент. Вставляя в формулы (13.22) и (13.23) этот коэффициент, получаем: $\nu \approx 10\,963 \text{ МГц}$, что снижает относительную погрешность до $5 \cdot 10^{-4}$.

Данный результат означает, что разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода действительно объясняется вращением орбитального электрона с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (13.14), при этом причиной вращения электрона служит электрическое поле ядра атома.

14. Сравнение двух моделей электрона

Мы рассмотрели две модели электрона — материальную точку со скрепленными с ней векторами (в разд. 18–20 главы 3) и «точечную» частицу (в настоящей главе). При решении задачи о воздействии на электрон электромагнитного поля обе модели приводят к одному и тому же результату. Следовательно, с математической точки зрения они равноправны (по крайней мере в рамках данной задачи). Тем не менее с позиции механики между этими моделями имеется принципиальное различие. Поясним это различие с помощью простого примера.

Движение твердого тела часто иллюстрируется рисунком, на котором действующие на тело внешние силы заменены главным вектором сил, приложенным к центру масс тела. При этом считается, что тело движется в соответствии со вторым законом Ньютона.



Рис. 14.1. Бублик, висящий на веревочке.

Рассмотрим, для примера, висящий на веревочке бублик (рис. 14.1). Возьмем молоток и ударим со всей силы по центру масс бублика. Что произойдет с бубликом? Понятно, что ничего (если только мы не заденем его рукояткой молотка). Однако, если бы на месте бублика был твердый диск,

то он «улетел» бы в соответствии со вторым законом Ньютона. Этот пример наглядно показывает, что взаимодействие реализуется только между материальными телами, а не между материальным телом и мысленным образом или двумя мысленными образами.

Разумеется, теорема о движении центра масс тела дается в механике в формулировке, которая учитывает этот факт.

Следует уточнить, что физические теории оперируют абстрактными математическими конструкциями, которые, конечно, представляют собой мысленные образы, однако *для реализации взаимодействия необходимо, чтобы рассматриваемые мысленные образы имели в реальном мире материальные прообразы.*

Центр масс тела, по определению, является математической конструкцией, которая не имеет материального прообраза, поэтому непосредственно воздействовать на него невозможно.

Отметим, что в упомянутом выше примере с диском воздействие оказывается не на центр масс, а на элемент диска, расположенный в месте нахождения центра масс, при этом после удара сначала идет упругая волна по диску и только после того, как она охватывает весь диск, он «улетает».

Вернемся к сравнению двух моделей электрона.

В случае модели в виде материальной точки со скрепленными с ней векторами поле F оказывает воздействие на эти векторы. Последние имеют материальных прообразов, поэтому, согласно сказанному выше, такая модель не может считаться реалистичной, несмотря на соответствие полученных результатов экспериментальным данным.

По-другому обстоит дело в случае «точечной» частицы. Поскольку мы трактуем прямолинейные лучи частицы как геометрические образы неких протяженных материальных объектов, а прямая является линейной оболочкой своего направляющего вектора, то и направляющие векторы лучей фактически являются геометрическими образами этих материальных объектов. Согласие результатов с опытными данными подтверждает справедливость модели. Это согласие дает основание полагать также, что в реальном мире существуют указанные материальные объекты.

Отмеченное преимущество «точечной» частицы относится к задаче о воздействии на электрон поля F . Вместе с тем «точечная» частица обладает еще одним важным преимуществом перед моделью электрона в виде материальной точки со скрепленными с ней векторами. Она позволяет найти собственное электромагнитное поле электрона, тогда как материальная точка не дает возможности это сделать.

И, наконец, модель электрона в виде «точечной» частицы допускает развитие (см. главу 5), в отличие от модели в виде материальной точки.

Прокомментируем некоторые положения построенной теории.

1. В разд. 18 главы 3 исследовано действие ортогонального тензора на материальную точку со скрепленными с ней векторами и выведен основной закон динамики материальной точки (18.5). С его помощью получен в разд. 11 настоящей главы основной закон динамики «точечной» частицы (11.6):

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0, \quad (14.1)$$

где $\mathbf{q}_0$ — направляющий вектор произвольного луча частицы.

Вместе с тем в разд. 1 настоящей главы выведено уравнение движения «точечной» частицы (1.5):

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}, \quad (14.2)$$

где $\mathbf{i}$ — 4-скорость центра частицы.

С математической точки зрения уравнение движения (14.2) является частным случаем основного закона динамики (14.1) при $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$. Однако эта ситуация представляется более сложной, если взглянуть на нее с позиции механики. В самом деле, в соответствии со сказанным ранее, поле F может действовать только на такие математические конструкции, у которых имеются материальные прообразы в реальном мире. Между тем, 4-скорость $\mathbf{i}$, хотя и выделена объективно как касательный вектор к мировой линии, но она не имеет материального прообраза, поэтому, строго говоря, поле F не может действовать на вектор $\mathbf{i}$. Это затруднение разрешается следующим образом.

В рамках рассматриваемой теории считается, что элементами «точечной» частицы, имеющими материальные прообразы, являются лучи, образующие частицу. Следовательно, *движение «точечной» частицы в пространстве Минковского должно определяться суммарным действием поля F на все лучи частицы*. Это означает, что уравнение движения частицы должно получаться как результат применения основного закона динамики (14.1) ко всем векторам $\mathbf{q}_0$, а не путем формальной подстановки в закон (14.1) вектора $\mathbf{i}$ вместо вектора $\mathbf{q}_0$. Поясним это подробнее.

В связи с тем, что начала всех векторов $\mathbf{q}_0$ находятся в центре частицы, значение поля F в законе (14.1) одинаково для всех векторов $\mathbf{q}_0$, поэтому не удивительно, что уравнение движения (14.2) имеет тот же вид, что и закон (14.1) (с заменой вектора $\mathbf{q}_0$ вектором $\mathbf{i}$). Однако при моделировании электрона не шаром нулевого радиуса, каковым является «точечная» частица, а геометрическим объектом ненулевого размера поле F будет действовать в общем случае на векторы, приложенные

к разным элементам этого геометрического объекта, поэтому при неоднородном поле F уравнение движения может оказаться отличающимся от уравнения (14.2).

2. В конце разд. 11 было отмечено, что уравнения

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt_*} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma_*}}{dt_*} = \bar{\omega} \times \mathbf{q}_{\Gamma_*} \quad (14.3)$$

хотя и выведены в разд. 5 и 11 на основе одного и того же закона (5.40), но их вывод занимает в разд. 5 три строки, тогда как в разд. 11 почти страницу (см. (5.42) в разд. 5 и (11.22), (11.23) в разд. 11). Объясним необходимость подробного вывода.

В соответствии со сказанным выше, законы динамики относятся к направляющим векторам лучей $\mathbf{q}_0$. Последние, во-первых, служат геометрическими образами неких материальных объектов и, во-вторых, являются времениподобными векторами. Между тем, составляющие $\mathbf{q}_{\Gamma_*}$ векторов $\mathbf{q}_0$, направленные вдоль физического пространства Γ_* , не имеют материальных прообразов и представляют собой пространственноподобные векторы, поэтому для применения к ним законов динамики требуется обоснование. Подробный вывод уравнений (14.3), проведенный в разд. 11, и является таким обоснованием. Вместе с тем этот вывод оправдывает осуществленный в разд. 5 вывод уравнений (14.3) путем формальной подстановки составляющих вектора $\mathbf{q}_0$ в закон (5.40).

3. В разд. 19 и 20 главы 3 было обосновано отсутствие ларморовской прецессии электронных спинов (см. с. 244, 260). Приведем еще один довод в подтверждение этого результата.

Момент количества движения тела и магнитный момент электрически заряженного тела являются математическими конструкциями, которые, как и центр масс тела, не имеют материальных прообразов, поэтому непосредственно воздействовать на них невозможно.

Рассмотрим влияние магнитного поля на орбитальный и собственный моменты количества движения электрона.

Пусть электрон обращается по круговой орбите вокруг положительно заряженного ядра атома. При нахождении его в диаметрально противоположных точках орбиты однородное магнитное поле действует на него с силами, которые равны по модулю и противоположны по направлению. Суммарный механический момент, создаваемый такими парами сил, стремится расположить плоскость орбиты перпендикулярно полю. Совместное действие этого момента и сил инерции приводит к ларморовской прецессии орбиты. При этом математическая формула, описывающая данный эффект, выглядит так, как будто магнитное

поле действует непосредственно на орбитальный момент количества движения электрона, вызывая его прецессию вокруг направления поля. В действительности, разумеется, магнитное поле действует не на псевдовектор орбитального момента, а на сам электрон.

Теперь пусть одиночный электрон находится в магнитном поле. В современной физике принято моделировать электрон геометрической точкой. В рамках такой модели электрон в принципе не может иметь отличный от нуля собственный момент количества движения (спин), так как вращающаяся точка неотличима от невращающейся. Но даже если допустить, что спин имеется, то всё равно он не может прецессировать, ибо магнитное поле при действии на точечный заряд порождает только лоренцеву силу, которая не создает механического момента, необходимого для возникновения прецессии, а воздействовать непосредственно на спин, как отмечено выше, невозможно. Поэтому при использовании традиционной точечной модели электрона ларморовская прецессия электронного спина не может иметь места.

Подчеркнем, что экспериментальные данные, которые принято объяснять ларморовской прецессией электронных спинов, успешно объяснены в разд. 12 и 13 вращением электронов, при этом была применена модель электрона в виде «точечной» частицы.

15. Выводы

Математическая конструкция, названная «точечной» частицей, состоит из времениподобных прямых, которые равномерно заполняют внутренность светового конуса и движутся как целое вдоль мировой линии в пространстве Минковского. Считается, что эти прямые, именуемые лучами, служат геометрическими образами неких протяженных материальных объектов.

«Точечная» частица является практически простейшим лоренц-инвариантным геометрическим объектом и приводит к верному значению электромагнитного поля заряда при произвольном его движении. Это дает основание принять «точечную» частицу в качестве модели элементарного электрического заряда — электрона. Данная модель названа *лучистой моделью электрона*.

В рамках этой модели электромагнитное поле заряда рассчитывается без применения уравнений Максвелла. Модель фактически объединяет заряд и его электромагнитное поле в одном геометрическом объекте. Электромагнитное поле оказывается в значительной мере геометрическим эффектом. Модель дает ясные ответы на вопросы, почему

поле имеет две составляющие — волновую и неволновую (пропорциональные $1/r$ и $1/r^2$ соответственно), и почему величина электрического заряда не подвергается лоренцевым преобразованиям (это подробно объяснено в разд. 9).

С помощью «точечной» частицы удалось описать не только движение электрона вдоль мировой линии, но и его собственное вращение. Доказано, что именно собственное вращение орбитального электрона ответственно за разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода, причем само это вращение является следствием воздействия на электрон электрического поля ядра атома. Собственным вращением электронов объясняются также результаты опытов по воздействию магнитного поля на электроны.

В данной модели взаимодействие «точечных» частиц осуществляется путем непосредственного контакта лучей одной частицы с центром другой, поэтому модель удовлетворяет *принципу близкодействия*. Она удовлетворяет также *принципу причинности*, потому что центр частицы, оказывающей воздействие, находится в прошлом по отношению к центру частицы, испытывающей воздействие. Недеформируемость и взаимопроницаемость лучей частицы обеспечивает выполнение *принципа суперпозиции полей*.

Модель предсказывает, что вращение электрического заряда вносит в порождаемое им электромагнитное поле дополнительный вклад. В главе 5 будет доказано, что именно этот вклад является ответственным за так называемый аномальный магнитный момент электрона.

Отметим два недостатка модели. Модель не позволяет описать самовоздействие электрона, так как собственное поле «точечной» частицы принимает бесконечно большое значение в ее центре. Не описывает она также важнейшую характеристику электрона — его спин. Оба недостатка объясняются тем, что «точечная» частица представляет собой шар нулевого радиуса в пространстве Минковского. Преодолеть эти недостатки позволяет модель электрона в виде шара ненулевого радиуса. Построению этой модели посвящена глава 5.

Глава 5

ЧАСТИЦА НЕНУЛЕВОГО РАДИУСА

1. Наводящие соображения

«Точечная» частица, построенная в предыдущей главе, представляет собой совокупность времениподобных прямых, названных лучами, которые пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке; центр частицы движется в пространстве Минковского вдоль мировой линии, именуемой мировой линией частицы (рис. 1.1).

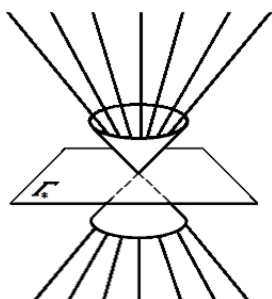


Рис. 1.1. «Точечная» частица, состоящая из времениподобных прямых.

Γ_* — собственное физическое пространство частицы (трехмерная пространственноподобная гиперплоскость, проходящая через центр частицы и ортогональная касательному вектору к мировой линии); физическое пространство и световой конус даны с понижением размерности на единицу; световой конус, ограничивающий частицу, не входит в состав модели.

Модернизируем «точечную» частицу так, чтобы она описывала спин электрона, то есть его собственный момент количества движения.

Обратим внимание на то, что спин «точечной» частицы не может быть связан с ее вращением как целого. Действительно, «точечная» частица может вращаться, значит, она может иметь отличный от нуля момент количества движения. Однако в этом случае, как следует из результатов разд. 10Б главы 4 (с. 377), собственное поле частицы будет содержать слагаемые, обратно пропорциональные первой степени

расстояния от центра частицы. При трактовке данного поля как электромагнитного это означает непрерывное излучение электромагнитных волн, что не согласуется с представлением о спине.

Поэтому введем спин другим способом.

Отметим, что в настоящем разделе излагаются только наводящие соображения. Строгая математическая формализация строящейся геометрической конструкции будет дана в следующих разделах.

Допустим, что лучи имеют ненулевую толщину. Точнее, примем, что они представляют собой одинаковые цилиндры бесконечной длины (при этом прямые, показанные на рис. 1.1, — их оси). Допустим также, что эти лучи-цилиндры вращаются вокруг своих осей с одинаковыми угловыми скоростями.

В таком случае сечение частицы ее собственным физическим пространством Γ_* будет не точкой, как в случае «точечной» частицы, а шаром, состоящим из круговых сечений лучей. Эти сечения имеют общий центр, но по-разному ориентированы в Γ_* , при этом они вращаются вокруг общего центра каждое в своей плоскости. Припишем каждому сечению момент количества движения, равный моменту количества движения соответствующего луча при его вращении вокруг своей оси. Так как лучи одинаковы и угловые скорости их вращения тоже одинаковы, то все моменты количества движения сечений равны по модулю. При этом они различны по направлению, из-за разной ориентации сечений. Суммарный момент количества движения сечений и будет играть роль *спина* частицы.

Таким образом, строящаяся геометрическая конструкция состоит из вращающихся цилиндров бесконечной длины, оси которых пересекаются в одной точке и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Можно доказать, что огибающей гиперповерхностью этой конструкции служит (псевдо)сфера, радиус которой равен радиусу цилиндров, поэтому конструкция фактически является четырехмерным шаром ненулевого радиуса. В связи с этим будем называть эту конструкцию *частицей ненулевого радиуса*. Подчеркнем, что она представляет собой четырехмерный объект, состоящий из трехмерных протяженных элементов. По-прежнему будем именовать эти элементы *лучами*. Совокупность осей лучей, пересекающихся в одной точке — *центре* частицы, — назовем *остовом* частицы. Как и в случае «точечной» частицы, мы считаем, что лучи являются геометрическими образами неких материальных объектов.

Важно, что *спин частицы обусловлен вращением лучей вокруг своих осей и никак не связан с вращением остова частицы, то есть с вращением частицы как целого*.

Мы только что допустили, что луч частицы представляет собой цилиндр. Однако мы вынуждены сразу же отказаться от этого допущения. Причина в следующем.

Если бы материальный объект, моделируемый лучом, имел идеальную цилиндрическую форму, то его вращение вокруг своей оси не могло бы быть физически наблюдаемым, потому что на его поверхности нет «зарубок», которые позволили бы зарегистрировать это вращение.

Поясним чуть подробнее. Граница любого поперечного сечения цилиндра является окружностью. При вращении цилиндра вокруг своей оси каждая такая окружность вращается вдоль самой себя. А такое вращение необнаружимо так же, как необнаружимо движение прямой линии вдоль себя.

Итак, луч не может быть моделирован цилиндром (рис. 1.2, *а*).

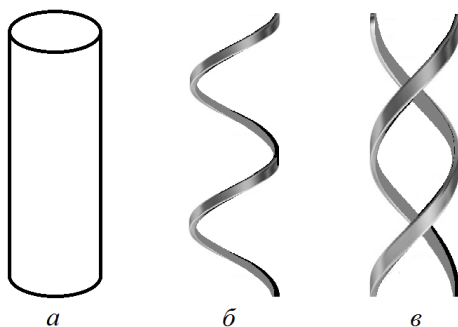


Рис. 1.2. Гипотетические виды луча частицы.

Рассмотрим другие варианты. Выше при введении понятия спина частицы мы приписали сечению луча, находящемуся в собственном физическом пространстве, момент количества движения, который равен моменту количества движения луча. Вычисление последнего требует интегрирования по всей длине луча. Однако, если луч имеет форму, при которой все его поперечные сечения обладают одинаковыми моментами количества движения, то необходимость в интегрировании фактически отпадает. Очевидно, что данному условию удовлетворяет тело, имеющее винтообразную форму, поэтому будем искать варианты лучей среди тел именно такой формы.

Можно было бы принять в качестве луча винтовую линию, вращающуюся вокруг своей оси (рис. 1.2, *б*). В таком случае его вращение могло бы быть наблюдаемым. Однако эта модель тоже не является приемлемой. Действительно, рассмотрим внешнее воздействие на луч. Оно приложено к какой-то точке винтовой линии. А так как эта точка

не лежит на оси луча, то воздействие оказывается неотцентрированным (приложенным не на оси симметрии тела). Поэтому с позиции механики допущение о такой форме луча не является удовлетворительным.

Можно было бы допустить, что луч состоит из двух винтовых линий наподобие известной двойной винтовой линии молекулы ДНК или даже из нескольких винтовых линий с общей осью, симметрично расположенных относительно друг друга (рис. 1.2, в). В этом случае вращение луча могло бы быть наблюдаемым и результирующее воздействие на него было бы отцентрированным. Тем не менее, такое строение луча тоже не представляется удовлетворительным с точки зрения механики, ибо остается неясным, каким образом поддерживается постоянное взаимное расположение винтовых линий при отсутствии между ними контакта или какого-либо взаимодействия.

Многочисленные попытки построения модели луча привели к следующему варианту, оказавшемуся успешным.

Луч — это винтообразный объект, который образован одинаковыми «толстыми» винтовыми линиями, соприкасающимися между собой; луч имеет времениподобную ось и вращается вокруг нее (рис. 1.3).

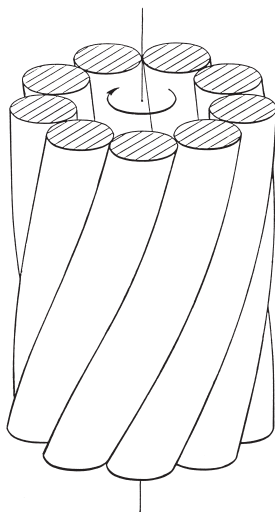


Рис. 1.3. Один из лучей частицы.

Итак, будем считать, что частица ненулевого радиуса есть совокупность лучей вида, показанного на рис. 1.3. Перейдем к детальному ее описанию.

2. Частица ненулевого радиуса

Дадим строгое определение частицы ненулевого радиуса. Начнем с определения осей.

Назовем *осями* времениподобные прямые, которые пересекаются в одной точке — *центре* — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Всю совокупность осей назовем *остовом*.

В дальнейшем, после введения понятий луча и частицы, оси будем называть также осями лучей, центр — центром частицы и остов — остовом частицы.

Теперь детализируем понятие луча.

Зафиксируем некоторое расположение остова в пространстве Минковского M . Пусть при этом центр находится в точке $O \in M$. Далее будем обозначать буквой O также сам центр. Зададим какой-либо единичный времениподобный вектор $\mathbf{i}$, ориентированный в сторону будущего и отложенный от центра (этот вектор в дальнейшем будет играть роль направляющего орта оси симметрии частицы; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$). В соответствии с только что сказанным, оси есть времениподобные прямые, проходящие через центр. Обозначим символом $\mathbf{q}_0$ направляющий орт произвольной оси, тоже ориентированный в сторону будущего и отложенный от центра (этот орт свой для каждой оси; $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$).

В следующих разделах при описании движения частицы в пространстве M центр O будет находиться на мировой линии частицы, а орт $\mathbf{i}$ при определенных типах движения частицы будет совпадать с направляющим ортом касательной к мировой линии в точке нахождения центра частицы.

Введем для оси с направляющим ортом $\mathbf{q}_0$ такое трехмерное подпространство $C_{\mathbf{q}_0} \subset M$, которое содержит саму ось и пространственно-подобную плоскость, ортогональную векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$. Более формально можно сказать, что $C_{\mathbf{q}_0}$ — это аффинное подпространство пространства M , для которого ассоциированным векторным пространством служит

$$\text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \quad (\text{при } \mathbf{q}_0 \neq \mathbf{i}), \quad (2.1)$$

где символ $\text{Lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}\}$ обозначает линейную оболочку векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}$; верхний значок $\perp$ — переход к ортогональному дополнению в векторном пространстве, ассоциированном с M ; знак $\oplus$ — прямая сумма векторных пространств. Для оси с направляющим ортом $\mathbf{q}_0$, равным $\mathbf{i}$, подпространство $C_{\mathbf{q}_0}$ определяется не единственным образом, такую ось исключим из рассмотрения (без ущерба для дальнейшего).

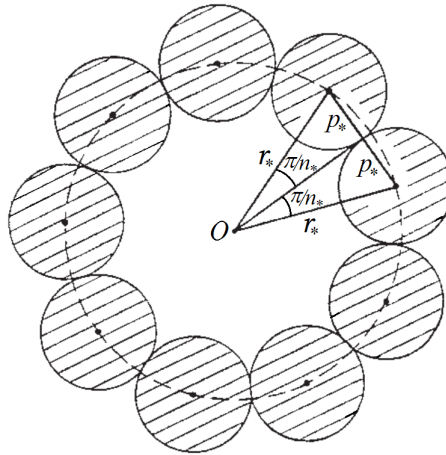
Подпространство $C_{\mathbf{q}_0}$ введено с целью построения луча внутри него.

Условимся обозначать каждое аффинное (точечное) пространство и ассоциированное с ним векторное пространство единым символом. В частности, в дальнейшем символом $C_{\mathbf{q}_0}$ будем обозначать наряду с указанным аффинным подпространством еще и векторное пространство (2.1). Символом $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ будем обозначать вместе с векторным пространством также времениподобную прямую, являющуюся осью с направляющим ортом $\mathbf{q}_0$. Запись $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (при $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{i}$) будем применять для обозначения как векторного пространства, так и ортогональной к ортам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ пространственноподобной плоскости, проходящей через центр O . Заметим, что $O = Lin\{\mathbf{q}_0\} \cap Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Зададим в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ фигуру, состоящую из n_* штук одинаковых кругов радиуса p_* , которые касаются друг друга и центры которых располагаются вдоль окружности радиуса r_* с центром в точке O . Эта фигура будет играть роль поперечного сечения луча (рис. 2.1). Подчеркнем, что n_* — целое положительное число (безразмерная величина); p_* и r_* имеют размерность длины; $r_* > p_* > 0$.

Для последующего не имеет значения, являются круги замкнутыми множествами или открытыми, то есть содержат или не содержат они свои границы.

Рис. 2.1. Поперечное сечение луча (показанное количество кругов условное).



На рис. 2.1 изображен треугольник с вершинами в точке O и в центрах двух соседних кругов. Две его стороны имеют длину r_* , третья сторона — длину $2p_*$. Угол при вершине O равен $2\pi/n_*$ (так как фигура состоит из n_* одинаковых кругов). Вследствие равнобедренности треугольника, биссектриса этого угла разбивает треугольник на два одинаковых прямоугольных треугольника. В каждом из них угол при

вершине O равен π/n_* , противолежащий катет имеет длину p_* , гипотенуза имеет длину r_* . Отсюда на основании свойств прямоугольных треугольников получаем следующую формулу, которая неоднократно будет использована в дальнейшем:

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}. \quad (2.2)$$

Лучом с осью $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ назовем трехмерный винтообразный объект в $C_{\mathbf{q}_0}$, который «заметет» показанная на рис. 2.1 фигура, если придать ей винтовое движение в $C_{\mathbf{q}_0}$ вдоль оси $Lin\{\mathbf{q}_0\}$, то есть если перемещать фигуру параллельно самой себе вдоль оси $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ с одновременным вращением ее вокруг этой же оси. Поскольку ось $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ ортогональна плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, содержащей фигуру, то все поперечные сечения луча имеют вид такой же, какой имеет эта фигура.

При таком движении фигуры каждый из ее n_* кругов «заметает» в $C_{\mathbf{q}_0}$ ту самую «толстую» винтовую линию, о которой сказано в конце разд. 1. Будем именовать ее *спиралью*. Луч состоит из n_* одинаковых спиралей (см. рис. 1.3). Как и в случае «точечной» частицы, будем считать, что лучи являются *недеформируемыми* и *взаимопроницаемыми*.

Частица есть совокупность лучей, введенных указанным выше способом. Будем считать, что движение лучей в пространстве M происходит таким образом, что образуемая ими конструкция — частица — повторяет себя во все моменты времени. Это означает, в частности, сохранение углов между всеми осями лучей и углов между вектором $\mathbf{i}$ и всеми осями лучей. Поэтому частица — недеформируемый четырехмерный объект в пространстве Минковского M . Введенные ранее центр и остов будем именовать *центром частицы* и *остовом частицы*. При наделении частицы массой, благодаря сферической симметрии частицы, ее центр служит *центром масс*.

Назовем *мировой линией* частицы мировую линию ее центра и *собственным временем* частицы собственное время ее центра (натуральный параметр на мировой линии, возрастающий в сторону будущего).

Примем, что все лучи вращаются вокруг своих осей с одинаковой и постоянной *угловой скоростью* ω , которая определяется как производная угла поворота луча по собственному времени частицы. Угол поворота отсчитывается относительно базиса, скрепленного с остовом частицы (базис будет введен в разд. 3). Подчеркнем, что каждый луч лежит и вращается в своем трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$.

Отметим, что векторное пространство (2.1) использовано при введении подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$ с той целью, чтобы любая гиперплоскость, ортогональная вектору $\mathbf{i}$, пересекала луч по его поперечному сечению.

Собственное физическое пространство частицы определим как трехмерную пространственноподобную гиперплоскость Γ_* , проходящую через центр частицы и ортогональную вектору $\mathbf{i}$: $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$.

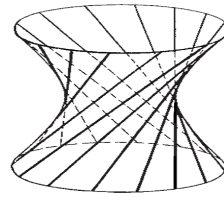
Сечение частицы гиперплоскостью Γ_* будем именовать *центральной сечением* частицы. Оно состоит из поперечных сечений лучей (так как сечения лежат в плоскостях $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, которые содержатся в $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\} = \Gamma_*$). Эти сечения по-разному ориентированы в Γ_* и имеют единственную общую точку — центр частицы O (см. рис. 2.1).

Допустим, что количество лучей столь велико, что при расчетах можно заменять суммирование по конечному набору осей лучей интегрированием по всем времениподобным прямым, проходящим через центр частицы. При таком допущении *центральное сечение частицы — сферическая оболочка в Γ_* со срединным радиусом r_* и толщиной $2p_*$* .

Если трактовать фигуру на рис. 2.1 как круговое кольцо ширины $2p_*$, то лучи выглядят как пустотелые цилиндры с внутренним радиусом $r_* - p_*$ и внешним радиусом $r_* + p_*$. При этом внешней границей частицы служит гиперповерхность, огибающая все лучи-цилиндры. Она состоит из прямых, которые совпадают с предельными положениями прямолинейных образующих цилиндров при устремлении осей лучей к световому конусу. Так как образующие параллельны осям, то их пределы — это изотропные прямые. Поэтому внешняя граница частицы является линейчатой гиперповерхностью с изотропными образующими. Из симметрии частицы относительно поворотов вокруг центра следует, что внешняя граница представляет собой сферу. Последняя является аналогом однополостного гиперboloида в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 2.2; см. также разд. 6 главы 2, с. 91). Эта сфера имеет центр в центре частицы, радиус $r_* + p_*$ и описывается уравнением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -(r_* + p_*)^2$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек сферы.

Рис. 2.2. Однополостный гиперboloид в трехмерном евклидовом пространстве.

Показана одна из двух систем прямолинейных образующих.



Поскольку внешняя граница частицы — сфера, то частица фактически представляет собой четырехмерный *шар* в пространстве Минковского. Радиус этого шара равен $r_* + p_*$. Однако мы будем называть *радиусом* частицы величину r_* (ибо, как будет показано далее, $p_* \ll r_*$). Одновременно $r_* + p_* \approx r_*$ — полутолщина луча; $2p_*$ — толщина спирали.

Мы определили частицу пока что не полностью (в частности, не задали шаг винтовых спиралей и уравнение движения частицы). Однако сказанного уже достаточно для введения важных понятий спина луча и спина частицы, поэтому в ближайших разделах введем эти понятия и укажем следствия, вытекающие из наличия спина луча и спина частицы. Детализацию конструкции продолжим в разд. 10 (с. 463).

Итак, *частица ненулевого радиуса* — это четырехмерный шар в пространстве Минковского. Она представляет собой совокупность винтообразных объектов — лучей, показанных на рис. 1.3. Лучи имеют времениподобные оси, которые пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Каждый луч состоит из n_* одинаковых «толстых» винтовых линий, названных спиралью, и вращается вокруг своей оси.

Отметим, что при «взгляде» на частицу издали, когда внутреннее строение лучей неразлично, лучи выглядят как прямые линии, а вся частица — в точности так, как «точечная» частица (см. рис. 1.1, с. 406).

3. Спин луча

Согласно сказанному в разд. 2, каждый луч лежит в своем трехмерном подпространстве C_{q_0} и вращается в нем с постоянной угловой скоростью ω , которая одинакова для всех лучей и определяется как производная угла поворота луча по собственному времени частицы.

Спин луча есть момент количества движения луча, обусловленный его вращением вокруг собственной оси.

Напомним, что момент количества движения называется также *кинетическим моментом*, *моментом импульса* и *угловым моментом*.

Вычислим спин луча. Это можно сделать по обычным правилам механики, потому что поперечные сечения луча лежат и вращаются в пространственноподобных плоскостях.

Луч состоит из n_* винтообразных спиралей (см. рис. 1.3 на с. 409). Пусть каждая спираль имеет массу m_* , которая равномерно распределена по ее объему и не меняется при движении частицы ($m_* > 0$). В силу винтовой симметрии луча, спин луча может быть найден как момент количества движения любого его поперечного сечения в предположении, что вся масса луча сосредоточена в этом сечении.

Пусть луч имеет направляющий орт оси $\mathbf{q}_0$. Рассмотрим его поперечное сечение, лежащее в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (эта плоскость проходит через центр частицы O ; см. разд. 2). Пусть Γ_* — собственное физическое пространство частицы (трехмерная гиперплоскость, прохо-

дящая через центр O и ортогональная вектору $\mathbf{i}$). Сечение частицы гиперплоскостью Γ_* мы назвали центральным сечением частицы. Поскольку $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ и $Lin^\perp\{\mathbf{i}\} = \Gamma_*$, то $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset \Gamma_*$. Следовательно, рассматриваемое сечение луча принадлежит центральному сечению частицы. В соответствии со сказанным выше спин луча может быть найден как момент количества движения этого поперечного сечения луча (при условии, что вся масса луча сосредоточена в нем). Это сечение имеет вид, показанный на рис. 2.1. Оно вращается с угловой скоростью o в плоскости своего залегания вокруг своего центра, совпадающего с центром частицы O , поэтому его момент количества движения — спин луча — представляет собой псевдовектор, принадлежащий Γ_* , ортогональный сечению и приложенный в точке O . Обозначим *спин луча* символом $\bar{K}_*$ (черта вверху — знак псевдовектора).

Будем считать, что каждый из n_* кругов, образующих сечение луча, имеет массу m_* , равную массе спирали и эта масса равномерно распределена по его поверхности. Момент количества движения (кинетический момент) сечения относительно точки O равен сумме кинетических моментов кругов, образующих сечение. Согласно известным положениям механики, кинетический момент каждого круга может быть представлен в виде суммы двух величин: кинетического момента центра масс круга относительно той же точки O (рассчитанного в предположении, что вся масса круга находится в центре масс) и кинетического момента круга относительно его центра масс. При равномерном распределении массы по поверхности круга центр масс круга совпадает с его геометрическим центром. Учитывая это, находим по обычным правилам механики, что первый и второй указанные кинетические моменты равны по модулю соответственно

$$m_*|o|r_*^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}m_*|o|p_*^2,$$

где угловая скорость o взята по модулю, так как в дальнейшем мы будем считать, что она имеет разные знаки при вращении луча в противоположные стороны. Сумма кинетических моментов всех n_* кругов, образующих сечение, есть его кинетический момент, то есть спин луча.

Отсюда с учетом формулы (2.2) заключаем, что *модуль спина луча имеет следующее значение*:

$$|\bar{K}_*| = n_*m_*|o|r_*^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right] = n_*m_*|o|r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right), \quad (3.1)$$

где n_* — количество винтовых спиралей, образующих луч; m_* — масса спирали; o — угловая скорость вращения луча; r_* — радиус окружности,

на которой находятся центры кругов, образующих поперечное сечение луча; p_* — радиус круга (см. рис. 2.1). Величина r_* , напомним, названа радиусом частицы.

Зададим в пространстве Γ_* ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в центре частицы O , векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, лежащими в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, и вектором $\mathbf{e}_3$, ортогональным этой плоскости. Будем считать, что базис скреплен с остовом частицы и что угол поворота луча отсчитывается относительно него. Тогда вращение рассматриваемого поперечного сечения луча относительно этого базиса может быть описано с помощью любого из уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt_*} = \bar{o} \times \mathbf{r} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt_*} = \hat{o} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.2)$$

здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек данного поперечного сечения относительно точки O ; t_* — собственное время частицы; $\times$ — векторное произведение в Γ_* ; $\bar{o}$ и $\hat{o}$ — псевдовектор угловой скорости и двухвалентный антисимметричный тензор (бивектор) угловой скорости, задаваемые равенствами

$$\bar{o} = o\Delta\mathbf{e}_3; \quad \hat{o} = o(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad (3.3)$$

где o — угловая скорость вращения луча относительно этого базиса ($o > 0$ при вращении луча в направлении, совпадающем с направлением кратчайшего поворота от вектора $\mathbf{e}_1$ к вектору $\mathbf{e}_2$, и $o < 0$ при вращении луча в противоположном направлении); Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* ($\Delta = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, и $\Delta = -1$, если базис левоориентированный); тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между ними.

Отметим, что первое уравнение в (3.2) представляет собой обычное уравнение вращения тела в трехмерном пространстве; справедливость второго уравнения подтверждается формулами (4.64) и (4.65) главы 2 (с. 64). Эквивалентность двух уравнений (3.2) вытекает из приводимого ниже второго равенства (3.5) и выражения (4.5) главы 4 (с. 322).

Псевдовектор $\Delta\mathbf{e}_3$ и бивектор $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ связаны между собой зависимостями

$$\Delta\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \cdot \cdot \varkappa; \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\Delta\mathbf{e}_3 \cdot \varkappa, \quad (3.4)$$

где двоеточие — знак бискалярного умножения; $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* . Формулы (3.4) доказываются с помощью соотношений (4.1)–(4.3) из главы 4 с учетом того, что Γ_* имеет сигнатуру $(---)$, они верны для любого ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \Gamma_*$.

С помощью (3.3) и (3.4) находим связь между псевдовектором угловой скорости $\bar{o}$ и бивектором $\hat{o}$:

$$\bar{o} = -\frac{1}{2}\hat{o} \cdot \cdot \varkappa; \quad \hat{o} = -\bar{o} \cdot \varkappa. \quad (3.5)$$

Вследствие осевой симметрии поперечного сечения луча, его момент количества движения при вращении вокруг своей оси сонаправлен псевдовектору угловой скорости. Отсюда заключаем с учетом формул (3.3) и найденного значения (3.1) модуля спина луча, что *спин луча* может быть представлен как псевдовектор $\bar{K}_*$ или как антисимметричный тензор (бивектор) K_* вида

$$\bar{K}_* = n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \Delta \mathbf{e}_3; \quad K_* = n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \quad (3.6)$$

где $\wedge$ — знак внешнего умножения векторов ($\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$); остальные обозначения те же, что в (3.1) и (3.3). Подчеркнем, что формулы (3.6) не зависят от выбора ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в Γ_* (при условии, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ и угловая скорость o имеет знак, указанный в пояснении к равенствам (3.3)).

Из (3.4) и (3.6) следует, что псевдовектор $\bar{K}_*$ и бивектор K_* связаны зависимостями, аналогичными зависимостям (3.5) между псевдовектором $\bar{o}$ и бивектором $\hat{o}$:

$$\bar{K}_* = -\frac{1}{2} K_* \cdot \cdot \varkappa; \quad K_* = -\bar{K}_* \cdot \varkappa. \quad (3.7)$$

Бивекторы $\hat{o}$ и K_* удобно использовать при рассмотрении вращения луча с позиции четырехмерного пространства Минковского M , а псевдовекторы $\bar{o}$ и $\bar{K}_*$ — при описании вращения в рамках трехмерного физического пространства Γ_* (так как $\bar{o}, \bar{K}_* \in \Gamma_*$).

4. Постоянная тонкой структуры

Полученное в разд. 3 выражение для модуля спина луча $|\overline{K}_*|$ позволяет дать новое определение и с высокой точностью вычислить значение одной из важнейших физических констант — постоянной тонкой структуры α . Покажем это.

Из формулы (3.1) находим:

$$\frac{|\overline{K}_*|}{m_*|o|r_*^2} = n_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \quad (\text{при } o \neq 0). \quad (4.1)$$

В связи с тем, что мы рассматриваем нашу частицу в качестве модели электрона, величины в левой части равенства (4.1) могут быть интерпретированы как фундаментальные постоянные. Они имеют разные физические размерности, но в данной комбинации образуют безразмерную величину (это следует из безразмерности правой части равенства). В квантовой электродинамике известна безразмерная фундаментальная константа — постоянная тонкой структуры α . Она характеризует электромагнитное взаимодействие элементарных частиц.

Приравняем безразмерную правую часть равенства (4.1) к α^{-1} :

$$n_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) = \alpha^{-1}. \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.2) экспериментальное значение $\alpha_{\text{exp}}^{-1} \approx 137,0359991$ [26], получаем: $n_* \approx 136,999985$, то есть

$$n_* = 137 \quad (4.3)$$

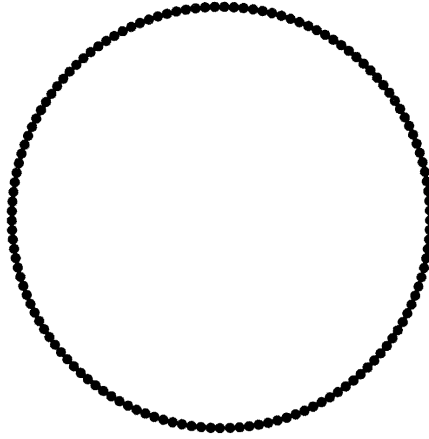
с относительной погрешностью $1 \cdot 10^{-7}$. Тот факт, что для величины n_* , задающей количество спиралей в луче, получено целочисленное значение со столь высокой точностью, является существенным доводом в пользу справедливости модели.

В дальнейшем будем считать соотношение (4.3) (понимаемое как точное равенство) постулатом модели (рис. 4.1; ср. с рис. 2.1, с. 411).

На основании этого результата может быть дано новое определение константы α .

Постоянная тонкой структуры α есть величина, задаваемая формулами (4.2) и (4.3).

Из (4.2) и (4.3) находим: $\alpha_{\text{theor.}} \approx 0,0072973518$, что совпадает с экспериментальным значением $\alpha_{\text{exp.}} \approx 0,0072973526$ [26] с относительной погрешностью $1 \cdot 10^{-7}$.

Рис. 4.1. Поперечное сечение луча частицы при $n_* = 137$.

Обратим внимание на то, что в справочнике [27], изданном ранее работы [26], приведено другое экспериментальное значение постоянной тонкой структуры: $\alpha_{\text{exp.}} \approx 0,0072973531$. Оно отличается от указанного выше значения $\alpha_{\text{theor.}}$ на относительную величину $2 \cdot 10^{-7}$. Из сравнения представленных в [26] и [27] данных видно, что уточненное экспериментальное значение α существенно ближе к теоретическому по сравнению с более ранним значением. Будем надеяться, что дальнейшие опыты еще более приблизят экспериментальное значение константы α к ее теоретическому значению, вытекающему из формул (4.2) и (4.3).

Оценим вероятность того, что достигнутая близость теоретического значения константы α к экспериментальному значению не является случайным совпадением. В данной модели целая часть числа α^{-1} , равная 137, принята в качестве постулата, поэтому нужно оценить вероятность того, насколько не случайна близость теоретического и экспериментального значений дробной части α^{-1} . Теоретическое и экспериментальное значения константы α^{-1} равны соответственно 137,036014 и 137,035999. Разность между дробными частями этих чисел составляет 0,000015. Дробные части всегда лежат в интервале $[0, 1)$. Зафиксируем в этом интервале точку $0,035999 = x_0$, отвечающую дробной части экспериментального значения α^{-1} , и построим окружающий эту точку промежуток $[x_0 - 0,000015, x_0 + 0,000015]$. Дробная часть теоретического значения α^{-1} попадает в этот промежуток. Вероятность случайности этого события равна отношению длины промежутка к длине

интервала $[0, 1)$, то есть равна $3 \cdot 10^{-5}$. Соответственно, вероятность того, что попадание не является случайным, составляет 0,99997. Столь высокое значение вероятности подтверждает справедливость модели, в частности, свидетельствует о том, что принятый геометрический образ луча с большой степенью достоверности отвечает реальности (см. рис. 1.3, 2.1 и 4.1).

Следует отметить, что физические теории, как правило, не позволяют количественно оценить их достоверность. Обычно мы просто верим, что чем точнее теория описывает физическое явление, тем она правильнее. Однако история науки показывает, что это не всегда верно. Например, система мира Птолемея весьма точно описывает видимые движения планет по небосводу, а теория теплорода правильно описывает тепловые явления. Между тем, наука отказалась от обеих теорий. Строящаяся частица представляет собой редкий пример теоретической модели, позволяющей количественно оценить степень ее достоверности.

Итак, каждый луч частицы обладает спином $\bar{K}_*$ (или K_*) вида (3.6), который обусловлен вращением луча вокруг своей оси. При задаваемом равенством (4.3) количестве спиралей, составляющих луч, модель приводит к значению постоянной тонкой структуры α , которое совпадает с экспериментальным значением с относительной погрешностью $1 \cdot 10^{-7}$. При этом вероятность того, что это совпадение не является случайным, составляет 0,99997.

Подчеркнем, что формула (4.2) выражает постоянную α через одну целочисленную характеристику частицы n_* , тогда как обычно эта постоянная определяется в физике как безразмерная комбинация трех других фундаментальных констант — заряда электрона e , постоянной Планка $\hbar$ и скорости света c :

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{в системе СГС}). \quad (4.4)$$

Завершая раздел, отметим, что, согласно (2.2) и (4.3),

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{137} \approx \frac{\pi}{137} r_* \approx \frac{1}{44} r_*. \quad (4.5)$$

Отсюда $p_* \ll r_*$. Именно благодаря этому неравенству мы назвали ранее радиусом частицы величину r_* , а не величину $r_* + p_*$. В дальнейшем это неравенство будет неоднократно использовано для упрощения расчетов.

5. Спин частицы

«Спин является ключевым и до конца еще непонятым свойством материи».

Л. Б. Окунь [28]

Спин частицы есть векторная сумма спинов ее лучей (вычисленных в разд. 3). Рассчитаем спин частицы.

Возьмем произвольный луч. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси. Поперечные сечения луча (одинаковые вдоль всего луча) имеют вид, изображенный на рис. 2.1 и 4.1 (с. 411 и 419). Рассмотрим поперечное сечение луча, лежащее в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Оно принадлежит, как было показано в разд. 3, центральному сечению частицы, то есть сечению частицы ее собственным физическим пространством Γ_* . Спин луча $\bar{K}_*$ вычислен в разд. 3 как момент количества движения этого сечения луча при его вращении вокруг его центра, совпадающего с центром частицы O (в предположении, что вся масса луча сосредоточена в этом сечении). Спин $\bar{K}_*$ — псевдовектор, который принадлежит Γ_* , ортогонален данному сечению луча и приложен в центре частицы O .

Спроецируем ось луча $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ на гиперплоскость Γ_* . Поскольку $\Gamma_* = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$, то проецирование точек оси осуществляется вдоль прямых, параллельных вектору $\mathbf{i}$, поэтому прямая, являющаяся проекцией оси, лежит в плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Одновременно она лежит в Γ_* , значит, эта прямая есть $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \cap \Gamma_*$. Из $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \perp Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ вытекает, что эта прямая ортогональна рассматриваемому поперечному сечению луча, лежащему в $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Кроме того, эта прямая проходит через центр частицы O (так как ось луча, проекцией которой она является, проходит через O). Следовательно, вращение луча вокруг его оси воспринимается изнутри трехмерного физического пространства Γ_* как вращение данного поперечного сечения луча вокруг этой прямой.

Оси всех лучей частицы являются времениподобными прямыми, проходящими через центр частицы O , поэтому их проекции на физическое пространство Γ_* представляют собой прямые в Γ_* , проходящие через точку O . Каждая из них ортогональна поперечному сечению соответствующего луча и служит в Γ_* осью вращения этого сечения.

Отметим, что в псевдоевклидовой плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ существует бесконечное множество времениподобных прямых, проходящих через центр частицы O . Любая из них может служить осью луча. Так как вся плоскость $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (при фиксированных $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$) проецируется на Γ_* в одну прямую линию, то эта прямая является проекцией всех

осей лучей, лежащих в $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Рассмотрим лучи с такими осями. Их поперечные сечения, принадлежащие Γ_* , лежат в одной и той же плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, имеют одинаковый вид и общий центр O , поэтому можно было бы принять, что эти лучи имеют в Γ_* одно общее поперечное сечение. Мы, однако, будем рассматривать такие поперечные сечения лучей как разные, хотя и налагающиеся друг на друга.

Итак, центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей, которые имеют вид, показанный на рис. 4.1, и вращаются в Γ_* вокруг ортогональных к ним осей. Эти сечения имеют единственную общую для всех них точку — центр частицы O . Поскольку фигура на рис. 4.1 близка к круговому кольцу, то внешняя граница центрального сечения частицы близка к сфере в Γ_* с радиусом, равным внешнему радиусу фигуры.

Мы трактуем частицу как шар в пространстве Минковского. Тем не менее, мы не можем принять, что частица обладает симметрией относительно всех лоренцевых преобразований. Дело в том, что винтовые спирали не могут переходить друг в друга одновременно при пространственном повороте и при зеркальном отражении, так как первое преобразование не меняет их ориентацию, а второе меняет (то есть переводит правозакрученные спирали в левозакрученные и наоборот). Учитывая это обстоятельство, а также тот факт, что определение луча содержит времениподобный вектор $\mathbf{i}$, единый для всех лучей, примем, что *частица является симметричной относительно любых пространственных поворотов, сохраняющих вектор $\mathbf{i}$* . Данное утверждение придает вектору $\mathbf{i}$ смысл направляющего орта оси симметрии частицы. Из этой симметрии вытекает, что *центральное сечение частицы симметрично относительно произвольных поворотов в Γ_* вокруг центра частицы O* (ибо в силу $\Gamma_* = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ любой такой поворот не меняет вектор $\mathbf{i}$).

Рассмотрим поперечное сечение какого-либо луча, принадлежащее центральному сечению частицы. Повернем его на угол π вокруг оси, которая лежит с ним в одной плоскости и проходит через центр частицы O . Тогда оно окажется в той же плоскости, но будет вращаться в противоположном направлении.

Поясним это на примере с часами. Глядя на циферблат, мы видим стрелки часов вращающимися, как принято говорить, по ходу часовой стрелки. Теперь перевернем часы циферблатом от нас. Тогда, если бы корпус часов был прозрачным, то мы увидели бы, что стрелки вращаются против хода часовой стрелки. Так же и сечение луча — при переворачивании оно оказывается вращающимся в противоположном направлении.

Из указанной симметрии центрального сечения частицы вытекает, что повернутое поперечное сечение луча совпадет с поперечным сече-

нием некоторого луча. Значит, имеется луч, поперечное сечение которого лежит в той же плоскости, что и исходное сечение, но вращается в противоположном направлении (с той же по модулю угловой скоростью). Понятно, что суммарный момент количества движения этого и исходного сечений равен нулю. Таким образом, для каждого луча частицы найдется луч, спин которого имеет такую же по модулю величину, какую имеет спин данного луча, но противоположен ему по направлению. Так как эти спины компенсируют друг друга, то можно констатировать, что в целом спин всей частицы равен нулю.

Тем не менее, настоящая конструкция позволяет ввести ненулевой спин частицы. Действительно, до сих пор мы рассматривали вращение луча частицы, которое происходит внутри трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, фигурирующего в определении луча (см. разд. 2). Однако, вследствие четырехмерности пространства Минковского M , поворот луча вокруг его оси может совершаться не только внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$, но и с выходом из него. Далее будет показано, что такой поворот луча на угол π приводит к переориентации луча, то есть к преобразованию правозакрученных спиралей, составляющих луч, в левозакрученные (и наоборот) с одновременным изменением направления вращения луча внутри $C_{\mathbf{q}_0}$ на противоположное. Тем самым этот поворот ведет к изменению знака спина луча. Поэтому, если допустить, что некоторые лучи частицы меняют свою ориентацию, в то время как другие лучи остаются без изменений, то сумма спинов всех лучей может оказаться не равной нулю. А это и означает, что спин частицы может быть отличным от нуля.

Дальнейшее содержание настоящего раздела представляет собой математическую формализацию высказанных соображений. В конце раздела мы резюмируем полученный результат (с. 443).

Зафиксируем некоторое расположение частицы в пространстве M и рассмотрим произвольный ее луч. Пусть, по-прежнему, $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча и $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы. Построим в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset \Gamma_*$ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в центре частицы O ($\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1$; $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$).

Введем ряд величин, которые потребуются нам в дальнейшем.

Согласно формуле (3.4) из главы 2 (с. 38), угол φ между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ определяется равенством

$$\text{ch } \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0, \quad (5.1)$$

где учтено, что $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$ и $\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 > 0$ (последнее неравенство является следствием того, что оба вектора, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$, времениподобные

и направлены в сторону будущего). Формула (5.1) определяет угол φ лишь с точностью до знака. Будем считать, что $\varphi > 0$ ($\varphi \neq 0$, так как мы исключили из рассмотрения случай $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$, см. пояснение к формуле (2.1), с. 410).

Зададим в плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ два вектора:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i} - \frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0; \quad (5.2)$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i} + \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0, \quad (5.3)$$

где $\text{sh } \varphi \neq 0$, ибо $\varphi \neq 0$. Из (5.1)–(5.3) и зависимостей $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$, $\text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = 1$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} &= -1; & \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}_0 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_2 = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= -1; & \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Отсюда и из свойств векторов $\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{i}$ следует, что $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$ и $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ представляют собой *ортонормированные базисы в пространстве M* (их началом считаем центр частицы O). Отсюда же имеем:

$$\mathbf{n} \in \Gamma_* \quad \text{и} \quad \mathbf{g} \perp C_{\mathbf{q}_0}, \quad (5.5)$$

где первая зависимость объясняется тем, что $\Gamma_* = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ и, согласно (5.4), $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$; вторая зависимость вытекает из того, что в силу $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ выполняется $C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{q}_0\} \oplus Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = Lin\{\mathbf{q}_0\} \oplus Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и, по (5.4), $\mathbf{g} \perp Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Из (5.2) и (5.3), находим:

$$\mathbf{i} = \text{ch } \varphi \mathbf{q}_0 + \text{sh } \varphi \mathbf{g}; \quad (5.6)$$

$$\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}, \quad (5.7)$$

векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$ были введены специально, чтобы выполнялись эти равенства (рис. 5.1).

Далее будем считать, что все линейные операторы определены над векторным пространством, ассоциированным с пространством Минковского (это векторное пространство мы обозначаем тем же символом M , что и само пространство Минковского). Напомним, что пространство линейных операторов изоморфно пространству двухвалентных тензоров, причем имеется взаимно однозначное соответствие между композицией операторов и скалярным произведением тензоров. В связи

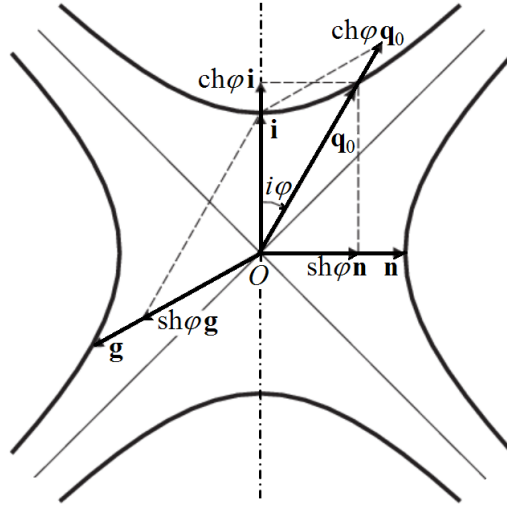


Рис. 5.1. Векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$ в псевдоевклидовой плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Тонкие прямые линии — сечение светового конуса плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$; штрих-пунктирная прямая — ось симметрии частицы; гиперболы — (псевдо)окружности единичного радиуса; показаны составляющие векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$, входящие в правые части равенств (5.6) и (5.7); $\mathbf{g} \perp \mathbf{q}_0$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$ (см. (5.4)); символ мнимой единицы i в обозначении угла означает, что при оперировании с этим углом следует использовать гиперболические функции вместо тригонометрических.

с этим понятия «линейный оператор» и «двухвалентный тензор» могут использоваться как синонимы (см. разд. 2 главы 2). В дальнейшем будем писать просто «оператор» и «тензор».

Результатом действия оператора (тензора) A на вектор $\mathbf{x}$ является вектор $A \cdot \mathbf{x}$.

Оператор (тензор) A^* , *транспонированный* или *сопряжённый* к A , получается переменной местами векторов в каждой из диад, образующих A . Так, если $A = \alpha \mathbf{a}\mathbf{x} + \beta \mathbf{b}\mathbf{y} + \dots + \gamma \mathbf{c}\mathbf{z}$, то $A^* = \alpha \mathbf{x}\mathbf{a} + \beta \mathbf{y}\mathbf{b} + \dots + \gamma \mathbf{z}\mathbf{c}$ (где $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ — числа; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}$ — векторы).

Ортогональная группа пространства M называется *группой Лоренца*. Она состоит из четырех связных компонент. Та из них, которая содержит единичный оператор I , сама является группой и называется *ограниченной группой Лоренца*. Операторы ограниченной группы

Лоренца не меняют временную и пространственную ориентации в M . (Подробнее о группе Лоренца сказано в разд. 11 главы 3.)

Подпространство называется *неподвижным* (при действии некоторого оператора), если все векторы, принадлежащие ему, не изменяются при действии оператора, и называется *инвариантным*, если все векторы, принадлежащие подпространству, преобразуются в векторы, также принадлежащие этому подпространству.

Известно, что вращение в плоскости характеризуется неподвижной точкой, вращение в трехмерном пространстве — неподвижной точкой или прямой, вращение в четырехмерном пространстве — неподвижной точкой, прямой или плоскостью. Обычно в случаях неподвижной точки или прямой говорят о вращении вокруг соответственно точки или прямой. Будем называть и вращение с неподвижной плоскостью (в случае четырехмерного пространства) вращением *вокруг плоскости*.

Базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ пространства Минковского M называется *ортонормированным*, если его векторы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1; \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Единичный или *тождественный оператор* I (он же *единичный*, *метрический* или *фундаментальный тензор*) имеет следующий вид в диадном базисе, образованном из векторов ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$I = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad (5.9)$$

где диады $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ участвуют со знаками минус по причине отрицательной определенности метрической формы в пространственноподобной гиперплоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{e}_0\}$.

Тот факт, что оператор I вида (5.9) действительно является единичным, вытекает из выполнения для любого $\mathbf{x} \in M$ следующей зависимости:

$$I \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot I = \mathbf{x},$$

эта зависимость легко проверяется путем разложения вектора $\mathbf{x}$ по рассматриваемому базису и использования выражений (5.8) и (5.9) (см. также формулы (2.15) и (2.16) в главе 2, с. 24).

Теорема 5.1. Об операторе пространственного поворота в пространстве Минковского. Пусть $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — какой-либо ортонормированный базис пространства Минковского M (он удовлетворяет соотношениям (5.8)); γ — угол отсчитываемый в плоско-

сти $\text{Lin}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_2$ к $\mathbf{e}_3$. Оператор (тензор)

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma = & \mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \cos\gamma \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sin\gamma \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \\ & - \sin\gamma \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \cos\gamma \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.10)$$

осуществляет поворот векторов на угол γ вокруг псевдоевклидовой плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ (иначе говоря, поворот с неподвижной псевдоевклидовой плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ и инвариантной пространственноподобной плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$). Оператор Π_γ принадлежит ограниченной группе Лоренца.

Доказательство. Начнем с доказательства того, что оператор Π_γ вида (5.10) принадлежит ограниченной группе Лоренца.

Поменяем местами векторы в каждой из диад в (5.10). В результате получим оператор Π_γ^* , сопряженный к Π_γ :

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma^* = & \mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \cos\gamma \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sin\gamma \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \\ & - \sin\gamma \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \cos\gamma \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.8)–(5.10) находим: $\Pi_\gamma \cdot \Pi_\gamma^* = \Pi_\gamma^* \cdot \Pi_\gamma = I$ при любом γ . На основании определения обратного оператора заключаем, что $\Pi_\gamma^* = \Pi_\gamma^{-1}$. Данное равенство является критерием ортогональности оператора (см. с. 26), поэтому Π_γ — ортогональный оператор. Значит, он принадлежит группе Лоренца. А так как, согласно (5.9) и (5.10), оператор Π_γ допускает непрерывный переход к единичному оператору I (при $\gamma \rightarrow 0$), то он, как и утверждается, принадлежит ограниченной группе Лоренца.

Теперь докажем основное утверждение теоремы.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in M$ и разложим его по базису $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \quad (5.11)$$

Представим координаты x_2 и x_3 этого вектора в виде $x_2 = r \cos\beta$ и $x_3 = r \sin\beta$ (рис. 5.2). Тогда разложение (5.11) примет форму

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + r \cos\beta \mathbf{e}_2 + r \sin\beta \mathbf{e}_3. \quad (5.12)$$

Подействуем на вектор $\mathbf{x}$ оператором Π_γ . С помощью (5.8), (5.10) и (5.12) получаем:

$$\Pi_\gamma \cdot \mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + r \cos(\beta + \gamma)\mathbf{e}_2 + r \sin(\beta + \gamma)\mathbf{e}_3. \quad (5.13)$$

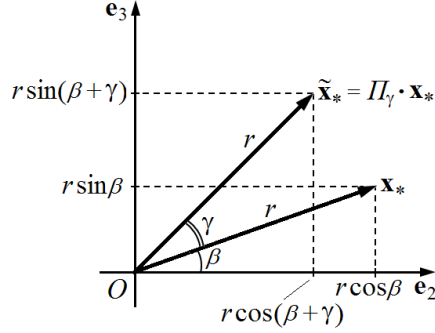


Рис. 5.2. Составляющая вектора $\mathbf{x}$ вдоль плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$: $\mathbf{x}_*$ — до поворота; $\tilde{\mathbf{x}}_*$ — после поворота.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_* &= x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \\ &= r \cos \beta \mathbf{e}_2 + r \sin \beta \mathbf{e}_3; \\ \tilde{\mathbf{x}}_* &= \Pi_\gamma \cdot \mathbf{x}_* = \\ &= r \cos(\beta + \gamma) \mathbf{e}_2 + r \sin(\beta + \gamma) \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Из (5.11) – (5.13) вытекает, что под действием оператора Π_γ составляющая вектора $\mathbf{x}$ вдоль плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$, равная $x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1$, остается неизменной, а составляющая вдоль плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, которая имеет вид $x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = r \cos \beta \mathbf{e}_2 + r \sin \beta \mathbf{e}_3$, преобразуется в $r \cos(\beta + \gamma) \mathbf{e}_2 + r \sin(\beta + \gamma) \mathbf{e}_3$, то есть поворачивается в плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ на угол γ (см. рис. 5.2).

Таким образом, оператор Π_γ действительно принадлежит ограниченной группе Лоренца и осуществляет указанный в теореме поворот. ■

Вернемся к рассмотрению частицы. Воспользуемся введенными ранее ортонормированными базисами $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$ и $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ ($\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$; $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$ — векторы, определенные равенствами (5.2) и (5.3)).

В соответствии с (5.9) единичный оператор I имеет следующий вид в диадных базисах, образованных из векторов базисов $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$ и $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$:

$$I = \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{g} \mathbf{g} = \mathbf{i} \mathbf{i} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{n} \mathbf{n}. \quad (5.14)$$

Зададим два оператора (тензора):

$$\begin{aligned}\Pi_\beta &= \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{g} \mathbf{g} - \cos \beta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \\ &\quad - \sin \beta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \cos \beta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2;\end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}\Pi_\gamma &= \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \cos \gamma \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sin \gamma \mathbf{e}_2 \mathbf{g} - \\ &\quad - \sin \gamma \mathbf{g} \mathbf{e}_2 - \cos \gamma \mathbf{g} \mathbf{g}.\end{aligned} \quad (5.16)$$

Из теоремы 5.1 следует, что оператор Π_β поворачивает векторы вокруг плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{q}_0, \mathbf{g}\}$ на угол β , а оператор Π_γ поворачивает векторы вокруг плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$ на угол γ (угол β отсчитывается

в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, а угол γ — в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$). Согласно (5.14)–(5.16), $\Pi_\beta = \Pi_\gamma = I$ при всех β и γ , кратных 2π . Заметим, что в общем случае (при произвольных β и γ) операторы Π_β и Π_γ , как нетрудно убедиться, не коммутируют ($\Pi_\beta \cdot \Pi_\gamma \neq \Pi_\gamma \cdot \Pi_\beta$).

Условимся применять операторы Π_β и Π_γ вида (5.15) и (5.16) только к векторам, относящимся к лучу с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$, и будем называть их *операторами поворота луча*.

Луч, напомним, состоит из винтовых спиралей и лежит в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$. Чтобы выяснить, как действуют на луч введенные операторы, представим (упрощенно) одну из спиралей луча в виде винтовой линии с осью, совпадающей с осью луча (рис. 5.3).

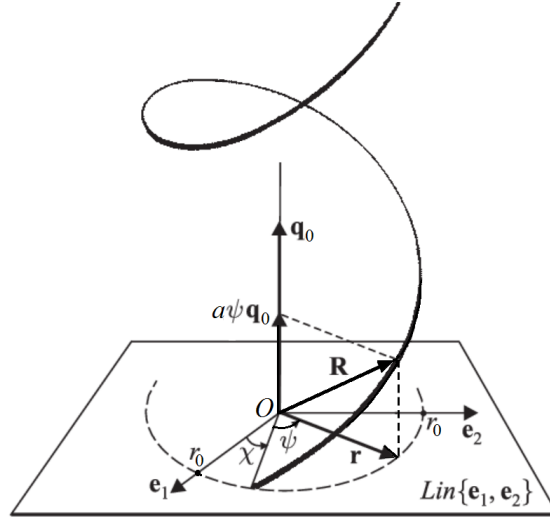


Рис. 5.3. Винтовая линия в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$.

Ранее было показано, что $C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (см. пояснение к (5.5)). Отсюда и из ортонормированности базиса $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$ вытекает, что $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный базис в $C_{\mathbf{q}_0}$. В этом базисе уравнение винтовой линии имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + a\psi\mathbf{q}_0 = r_0 \cos(\chi + \psi)\mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi)\mathbf{e}_2 + a\psi\mathbf{q}_0, \quad (5.17)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек линии относительно центра частицы O (см. рис. 5.3); $\mathbf{r}$ — проекция вектора $\mathbf{R}$ на плоскость $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ($\mathbf{r} = r_0 \cos(\chi + \psi)\mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi)\mathbf{e}_2$); r_0 — радиус винтовой линии;

χ — угол в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ между $\mathbf{e}_1$ и радиусом-вектором точки пересечения винтовой линии с плоскостью $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; ψ — *винтовая переменная* — угол, на который вектор $\mathbf{r}$ поворачивается при движении конца $\mathbf{R}$ вдоль линии ($\psi \in (-\infty, +\infty)$; $\psi = 0$ при $\mathbf{R} \in Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$); направление возрастания углов χ и ψ совпадает с направлением кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$; $a\psi$ — натуральный параметр на оси луча, отсчитываемый от центра частицы O в направлении, указываемом вектором $\mathbf{q}_0$ ($a = \text{const} > 0$; мы не конкретизируем значение параметра a , потому что для содержания настоящего раздела это не важно). Шаг винтовой линии равен $2\pi a$. Название «винтовая переменная» для параметра ψ обусловлено тем, что этот параметр позволяет индивидуализировать точки винтовой линии (так как каждой точке линии отвечает определенное его значение).

Уравнение (5.17) и рис. 5.3 соответствуют случаю, когда ориентации в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и винтовой линии совпадают. Это означает, что при вращении вектора $\mathbf{r}$ в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ проекция конца вектора $\mathbf{R}$ на ось луча движется в направлении, указываемом вектором $\mathbf{q}_0$. Если ориентации базиса и винтовой линии противоположны, то перед последним слагаемым в (5.17) нужно поставить знак минус.

Уравнение оси луча:

$$\mathbf{R}_{\text{axis}} = a\psi\mathbf{q}_0, \quad (5.18)$$

где $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ — радиус-вектор точек оси относительно центра частицы O ; a и ψ — те же, что в (5.17).

Подействуем операторами Π_β и Π_γ на векторы $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ и $\mathbf{R}$. Из (5.15) – (5.18), учитывая ортонормированность базиса $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$, находим:

$$\Pi_\beta \cdot \mathbf{R}_{\text{axis}} = \Pi_\gamma \cdot \mathbf{R}_{\text{axis}} = \mathbf{R}_{\text{axis}}; \quad (5.19)$$

$$\Pi_\beta \cdot \mathbf{R} = r_0 \cos(\chi + \psi + \beta)\mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi + \beta)\mathbf{e}_2 + a\psi\mathbf{q}_0; \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma \cdot \mathbf{R} = r_0 \cos(\chi + \psi)\mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi) \cos\gamma \mathbf{e}_2 + \\ + r_0 \sin(\chi + \psi) \sin\gamma \mathbf{g} + a\psi\mathbf{q}_0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Выражение (5.19) означает, что операторы Π_β и Π_γ не изменяют положения оси луча. Из (5.20) (с учетом (5.17)) вытекает, что при действии оператора Π_β *винтовая линия остается внутри подпространства* $C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, поворачиваясь вокруг оси луча на угол β . Именно с помощью этого оператора, полагая $\beta = ot$, можно описать вращение луча внутри $C_{\mathbf{q}_0}$ с угловой скоростью o (см. далее).

Иначе обстоит дело в случае оператора Π_γ . Из (5.17) и (5.21) видно, что под действием оператора Π_γ винтовая линия поворачивается

на угол γ вокруг оси луча (точнее, вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$), при этом *она выходит некоторой своей частью из подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$* (так как вектор $\Pi_\gamma \cdot \mathbf{R}$ имеет составляющую вдоль направления $\mathbf{g}$, которое, согласно (5.5), ортогонально подпространству $C_{\mathbf{q}_0}$). Рассмотрим ситуацию, когда параметр γ меняется от 0 до π . Из (5.21) следует, что вначале, при $\gamma = 0$, винтовая линия находится внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$. При возрастании γ она выходит из $C_{\mathbf{q}_0}$ (с сохранением расположения оси в $C_{\mathbf{q}_0}$). И затем, при $\gamma = \pi$, она снова оказывается в $C_{\mathbf{q}_0}$. В этом положении ее уравнение, по (5.21), принимает форму

$$(\Pi_\gamma \cdot \mathbf{R})|_{\gamma=\pi} = \Pi_\gamma|_{\gamma=\pi} \cdot \mathbf{R} = r_0 \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi) (-\mathbf{e}_2) + a\psi \mathbf{q}_0, \quad (5.22)$$

где равенство $(\Pi_\gamma \cdot \mathbf{R})|_{\gamma=\pi} = \Pi_\gamma|_{\gamma=\pi} \cdot \mathbf{R}$ вытекает из независимости вектора $\mathbf{R}$ от γ .

Сравнение уравнений (5.17) и (5.22) демонстрирует, что после поворота на угол π винтовая линия оказывается расположенной по отношению к базису $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$ точно так, как до поворота она была расположена по отношению к базису $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. А поскольку эти базисы имеют противоположные ориентации, то, значит, винтовая линия тоже имеет в этих положениях противоположные ориентации, иначе говоря, после такого поворота правозакрученная винтовая линия оказывается левозакрученной, а левозакрученная становится правозакрученной.

Принимая во внимание, что спирали, образующие луч, представляют собой «толстые» винтовые линии, можем заключить, что сказанное относится и к ним. А именно, *при повороте луча вокруг его оси на угол π с промежуточным выходом из подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$ винтовые спирали, составляющие луч, превращаются из правозакрученных в левозакрученные (или наоборот, если вначале они были левозакрученными).*

Далее нас будет интересовать не сам развивающийся во времени процесс вращения луча под действием оператора Π_γ , а только начальная и конечная конфигурации луча при повороте на угол π . Назовем оператор Π_γ вида (5.16) при $\gamma = \pi$ *оператором переориентации луча* и обозначим его через Π :

$$\Pi = \Pi_\gamma|_{\gamma=\pi} = \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{g} \mathbf{g}. \quad (5.23)$$

Оператор Π , как и Π_γ , свой для каждого луча (ибо векторы $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{g}$, вообще говоря, различны для разных лучей). Будем применять этот оператор только к лучу с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$.

Луч, подвергшийся действию оператора Π , назовем *переориентированным*. Характеристики такого луча будем помечать штрихами.

Заметим, что переориентация луча может быть осуществлена с помощью поворота его на угол π не только вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$, как описано выше, но и вокруг любой плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}\}$, где вектор $\mathbf{e} \in Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (это сразу следует из того, что при построении ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ одному из базисных векторов может быть придано любое направление в этой плоскости).

Внутри трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператор переориентации луча Π играет роль *оператора зеркального отражения* в плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$ (чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть его действие на произвольный вектор $\mathbf{x} \in C_{\mathbf{q}_0}$, разложенный по базису $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; это же вытекает из (5.17) и (5.22) с учетом $\Pi_\gamma|_{\gamma=\pi} = \Pi$).

Обратим внимание на то обстоятельство, что осуществляемая оператором Π переориентация луча может быть произведена, как показано выше, посредством *непрерывного* преобразования (путем вращения луча вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$ на угол π с промежуточным выходом из $C_{\mathbf{q}_0}$). Из этого следует важный вывод: *материальные прообразы лучей (если таковые существуют) могут быть переориентированы*.

Поясним это на простом примере. Пусть стрелка часов показывает на цифру 3, а нам нужно, чтобы она показывала на цифру 9. Очевидно, что в геометрической модели часов стрелка может быть переведена в нужное положение путем зеркального отражения в соответствующей плоскости. Однако в реальности зеркальное отражение произвести невозможно, так как оно потребовало бы мгновенного перескока атомов стрелки на конечное расстояние (причем разных атомов на разные расстояния). Вместе с тем, мы можем перевести стрелку в нужное положение посредством непрерывного вращения. Аналогичным образом обстоит дело с любыми материальными телами. Мы можем осуществлять над ними только такие преобразования, которые реализуются посредством непрерывного движения. Дискретные же преобразования материальных тел (зеркальное отражение, инверсия и т. п.) на практике неосуществимы. Поскольку лучи частицы допускают переориентацию путем непрерывного вращения, то их материальные прообразы могут быть переориентированы.

Вывод о возможности переориентации материальных прообразов лучей сделан выше в предположении фиксированного расположения частицы в пространстве M . Понятно, что он остается верным и в том случае, когда центр частицы движется вдоль прямолинейной мировой линии, а остов частицы, состоящий из осей лучей, движется поступа-

тельно (потому что в этом случае использовавшиеся векторные пространства перемещаются параллельно самим себе).

Допустим, что частица движется именно таким образом. Напомним, что каждый луч частицы вращается вокруг своей оси внутри соответствующего подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$. Будем считать, что подпространство $C_{\mathbf{q}_0}$ и его базис $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ движутся поступательно вместе с осью луча. Найдем скорость вращения луча.

Вновь рассмотрим винтовую линию с осью, совпадающей с осью луча (см. рис. 5.3). Пусть t — время в инерциальной системе отсчета, сопутствующей центру частицы (при указанном движении частицы оно совпадает с собственным временем частицы). Задать вращение винтовой линии можно двумя способами: либо принять, что параметр β в выражениях (5.15) и (5.20) зависит от t , либо заменить в (5.17) постоянную величину χ переменной $\chi + \beta(t)$ (последнее означает, что точке пересечения винтовой линии с плоскостью $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ придается вращение вокруг оси луча). Оба варианта приводят к уравнению вращения винтовой линии в форме

$$\mathbf{R}(t) = \Pi_{\beta(t)} \cdot \mathbf{R} = r_0 \cos(\chi + \psi + \beta(t)) \mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi + \beta(t)) \mathbf{e}_2 + a\psi \mathbf{q}_0. \quad (5.24)$$

Дифференцирование левой и правой частей выражения (5.24) по времени t (при постоянных $r_0, \chi, \psi, a, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$) дает:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = -\dot{\beta} r_0 \sin(\chi + \psi + \beta(t)) \mathbf{e}_1 + \dot{\beta} r_0 \cos(\chi + \psi + \beta(t)) \mathbf{e}_2, \quad (5.25)$$

где точка над символом обозначает производную по t . Из (5.18), (5.24) и (5.25), в силу ортонормированности базиса $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в $C_{\mathbf{q}_0}$, вытекает, что $\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}_{\text{axis}} = 0$ и $\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = 0$ при всех t . Значит, вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}(t)$ ортогонален векторам $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ и $\mathbf{R}(t)$. А так как $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ и $\mathbf{R}(t)$ имеют начала на оси луча и $\mathbf{R}_{\text{axis}}, \mathbf{R}(t), \dot{\mathbf{R}}(t) \in C_{\mathbf{q}_0}$, то из указанной ортогональности векторов следует, что винтовая линия действительно вращается вокруг своей оси внутри $C_{\mathbf{q}_0}$.

Очевидно, что каждая винтовая спираль, входящая в состав луча, может быть представлена в виде совокупности (связки) винтовых линий (с параметрами r_0 и χ , вообще говоря, различными для разных винтовых линий из связки). Поэтому вектор $\dot{\mathbf{R}}$ может быть интерпретирован как скорость вращения луча. Если принять, что $\beta = ot$ (при $o = \text{const}$), то из (5.25) имеем: $|\dot{\mathbf{R}}| = \sqrt{|\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}|} = |o|r_0$. Отсюда и из (5.25) заключаем, что в этом случае луч вращается вокруг своей оси внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$ с угловой скоростью o в направлении, ко-

торое при $\phi > 0$ совпадает с направлением кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, а при $\phi < 0$ противоположно этому направлению.

Теперь рассмотрим переориентированную винтовую линию. Согласно доказанному ранее, она находится внутри того же подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$, где находилась до переориентации, и имеет ту же ось, что и до переориентации. Уравнение вращения переориентированной винтовой линии получается применением оператора переориентации Π к радиусу-вектору $\mathbf{R}(t)$. С помощью (5.23) и (5.24), учитывая ортонормированность базиса $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$, находим:

$$\dot{\mathbf{R}}'(t) = \Pi \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) = r_0 \cos(\chi + \psi + \beta(t))\mathbf{e}_1 - r_0 \sin(\chi + \psi + \beta(t))\mathbf{e}_2 + a\dot{\psi}\mathbf{q}_0, \quad (5.26)$$

где штрих означает принадлежность к переориентированному лучу или винтовой линии.

Скорость вращения переориентированной винтовой линии может быть найдена либо дифференцированием радиуса-вектора $\mathbf{R}'(t)$ по времени t , либо применением оператора Π к скорости $\dot{\mathbf{R}}(t)$. Из (5.26) или из (5.23) и (5.25) получаем:

$$\dot{\mathbf{R}}'(t) = \Pi \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) = -\dot{\beta}r_0 \sin(\chi + \psi + \beta(t))\mathbf{e}_1 - \dot{\beta}r_0 \cos(\chi + \psi + \beta(t))\mathbf{e}_2. \quad (5.27)$$

На основании (5.26) и (5.27) заключаем, что после переориентации, как и до нее, винтовая линия вращается вокруг своей оси внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$. Однако *в переориентированном состоянии скорость вращения винтовой линии противоположна скорости ее вращения в непереориентированном состоянии*. Докажем это утверждение.

В связи с тем, что до переориентации и после нее винтовая линия вращается вокруг одной и той же оси, для доказательства достаточно сравнить указанные скорости в какой-либо одной точке пространства. Выберем в качестве такой точки точку пересечения непереориентированной и переориентированной винтовых линий. Подставив в равенство $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}'(t)$ значения радиусов-векторов из (5.24) и (5.26), находим: $\sin(\chi + \psi + \beta) = 0$, откуда $\cos(\chi + \psi + \beta) = \pm 1$. В этом случае из (5.25) и (5.27) получаем, что скорости вращения $\dot{\mathbf{R}}(t)$ и $\dot{\mathbf{R}}'(t)$ равны одна $\dot{\beta}r_0\mathbf{e}_2$, а другая $-\dot{\beta}r_0\mathbf{e}_2$, то есть они в самом деле противоположны.

Доказанное утверждение относится, в частности, к точке винтовой линии, лежащей в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Такая точка характеризуется значением винтовой переменной $\psi = 0$, поэтому после переориентации, как видно из (5.26), она остается в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. При этом, согласно доказанному, она вращается со скоростью, противоположной первоначальной.

Поскольку каждая винтовая спираль, входящая в состав луча, может быть представлена в виде совокупности винтовых линий, то полученный результат относится и к лучу частицы. Из этого результата вытекает, что поперечное сечение луча, лежащее в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, оказывается после переориентации в этой же плоскости и вращается, как и весь переориентированный луч, со скоростью, противоположной первоначальной.

В разд. 3 показано, что спин луча $\bar{K}_*$ равен моменту количества движения данного поперечного сечения луча (в предположении, что вся масса луча сосредоточена в этом сечении). Так как после переориентации луча это сечение вращается со скоростью, противоположной скорости его вращения в исходном состоянии, то, следовательно, *спин переориентированного луча равен спину непереориентированного луча с противоположным знаком*. Отсюда и из (3.6) вытекает, что спин переориентированного луча, представленный в форме псевдовектора $\bar{K}'_*$ и бивектора K'_* задается выражениями

$$\bar{K}'_* = -n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \Delta \mathbf{e}_3; \quad K'_* = -n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \quad (5.28)$$

где все символы имеют те же значения, что и в формулах (3.1) и (3.6), в частности, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и псевдоскаляр Δ относятся к состоянию луча до его переориентации.

В связи с тем, что переориентация луча изменяет его момент количества движения, для ее реализации требуется преодоление гироскопических сил. В дальнейшем будет показано, что переориентация лучей возможна под действием градиентного магнитного поля.

Вычислим спин всей частицы. По определению, данному в начале раздела, он равен сумме спинов лучей, составляющих частицу. Будем считать, что величины n_*, m_*, o и r_* , фигурирующие в формулах (3.6) и (5.28), одинаковы для всех лучей.

Центральное сечение частицы, напомним, есть сечение частицы ее собственным физическим пространством Γ_* . Оно состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей, проходящих через центр частицы O . Каждому такому сечению соответствует определенная ортонормированная тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \Gamma_*$, входящих в формулы (3.6) и (5.28) (векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в плоскости сечения, вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален плоскости сечения). Центральное сечение частицы, как отмечалось, симметрично относительно произвольных поворотов в Γ_* вокруг центра частицы O , поэтому концы векторов $\mathbf{e}_3$ равномерно распределены по всем направлениям, выходящим

из точки O (рис. 5.4). Отсюда сразу вытекает, что сумма всех векторов $\mathbf{e}_3$ равняется нулевому вектору. На основании этого вывода и зависимостей (3.6) и (5.28) заключаем, что частица имеет нулевой спин как при отсутствии переориентации лучей, так и в том случае, когда все ее лучи подверглись переориентации. Вместе с тем, частица может иметь ненулевой спин, если переориентации подверглась только часть лучей. Найдем условие, которое обеспечивает максимальное (по модулю) значение спина частицы.

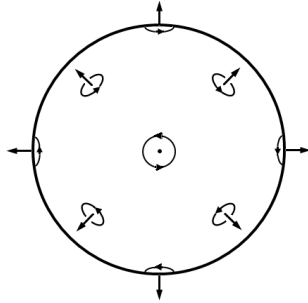


Рис. 5.4. Центральное сечение частицы в состоянии до переориентации лучей.

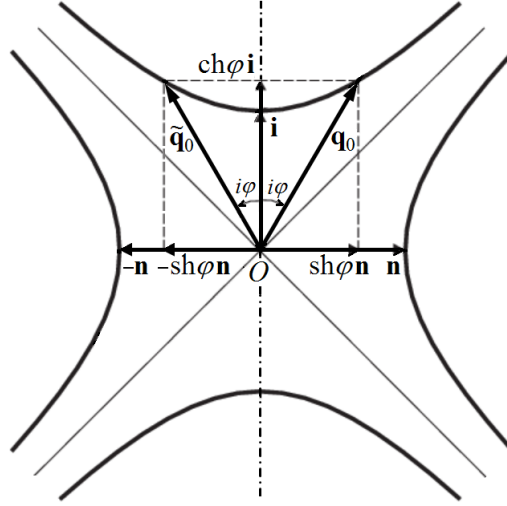
Прямолинейные стрелки — векторы $\mathbf{e}_3$ (их начала находятся в центре частицы O); круговые стрелки — направления вращения поперечных сечений лучей вокруг векторов $\mathbf{e}_3$ (при направлениях этих стрелок, изображенных на рисунке, спины лучей $\bar{K}_*$ сонаправлены векторам $\mathbf{e}_3$).

Возьмем произвольный луч. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси. Поставим в соответствие этому лучу другой луч, направляющий орт оси которого $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ принадлежит плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, образует с вектором $\mathbf{i}$ угол такой же, какой образует с $\mathbf{i}$ вектор $\mathbf{q}_0$, но расположен в этой плоскости по другую сторону от $\mathbf{i}$ по сравнению с $\mathbf{q}_0$ (рис. 5.5). Из (5.1), (5.7) и рис. 5.5 имеем:

$$\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}; \quad \widetilde{\mathbf{q}}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} - \text{sh } \varphi \mathbf{n}. \quad (5.29)$$

Рассмотрим поперечные сечения этих двух лучей, принадлежащие центральному сечению частицы. По определению луча, одно из сечений лежит в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, другое — в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \widetilde{\mathbf{q}}_0\}$. Из $\widetilde{\mathbf{q}}_0 \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0 \nparallel \mathbf{i}$ следует $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \widetilde{\mathbf{q}}_0\} = \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, поэтому $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \widetilde{\mathbf{q}}_0\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Значит, оба поперечных сечения находятся в одной и той же плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, то есть они накладываются друг на друга. Докажем, что скорости вращения этих сечений противоположны.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированная тройка векторов в Γ_* , соответствующая лучу с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$ ($\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$; $\mathbf{e}_3$ ортогонален этой плоскости). Из (5.4) и (5.5) вытекает, что $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n} \in \Gamma_*$, поэтому вектор $\mathbf{n}$ может быть использован в роли вектора $\mathbf{e}_3$. В связи с этим далее будем считать, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$.

Рис. 5.5. Векторы $\mathbf{q}_0$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ в плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Гиперболы — (псевдо)окружности единичного радиуса; тонкие прямые линии — сечение светового конуса плоскостью $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$; штрих-пунктирная прямая — ось симметрии частицы; показаны составляющие векторов $\mathbf{q}_0$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0$, входящие в правые части равенств (5.29); символ i в обозначении угла указывает на необходимость использования гиперболических функций при оперировании с этим углом.

Согласно теореме 5.1, оператор (тензор)

$$\begin{aligned} \Pi_\delta = & \mathbf{i}\mathbf{i} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \cos \delta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sin \delta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \\ & - \sin \delta \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \cos \delta \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.30)$$

поворачивает векторы на угол δ вокруг вектора $\mathbf{i}$, точнее, вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1\}$ (угол δ отсчитывается в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$).

Поддействуем оператором Π_δ на векторы $\mathbf{q}_0$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0$. С помощью формул (5.29) и (5.30), принимая во внимание ортонормированность базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, получаем при $\delta = \pi$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$:

$$\Pi_\delta|_{\delta=\pi} \cdot \mathbf{q}_0 = \widetilde{\mathbf{q}}_0; \quad \Pi_\delta|_{\delta=\pi} \cdot \widetilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{q}_0. \quad (5.31)$$

Из этих зависимостей следует, что оси рассматриваемых лучей переходят друг в друга при пространственном повороте на угол π вокруг

вектора $\mathbf{i}$. Значит, сами лучи тоже переходят друг в друга при таком повороте (с точностью до поворота лучей вокруг их осей). Поэтому поперечные сечения этих лучей, лежащие в центральном сечении частицы, также переходят друг в друга. Следовательно, скорость вращения одного из сечений может быть найдена как результат действия оператора Π_δ на скорость вращения другого сечения. Отсюда вытекает, что поперечное сечение луча с ортом оси $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ вращается со скоростью

$$\Pi_\delta|_{\delta=\pi} \cdot \dot{\mathbf{R}}(t)|_{\psi=0} = -\dot{\beta}r_0 \sin(\chi + \beta(t))\mathbf{e}_1 - \dot{\beta}r_0 \cos(\chi + \beta(t))\mathbf{e}_2, \quad (5.32)$$

где $\dot{\mathbf{R}}(t)$ — скорость вращения луча с ортом оси $\mathbf{q}_0$; использованы формулы (5.25) и (5.30); учтено, что поперечные сечения лучей, лежащие в центральном сечении частицы, характеризуются значением винтовой переменной $\psi = 0$.

Правая часть равенства (5.32) совпадает с правой частью выражения (5.27) (при $\psi = 0$). А так как это выражение описывает вращение со скоростью, противоположной скорости вращения луча с ортом оси $\mathbf{q}_0$, то, значит, скорости вращения интересующих нас поперечных сечений лучей действительно противоположны.

Ранее было показано, что спин луча равен моменту количества движения его поперечного сечения, лежащего в центральном сечении частицы (в предположении, что вся масса луча сосредоточена в этом сечении). Поскольку у лучей с ортами осей $\mathbf{q}_0$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ такие поперечные сечения, как доказано, накладываются друг на друга и вращаются с противоположными скоростями, то эти лучи имеют спины противоположных знаков, то есть спин луча с ортом оси $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ описывается теми же выражениями (5.28), что и спин переориентированного луча с ортом оси $\mathbf{q}_0$. Следовательно, суммарный спин лучей с ортами осей $\mathbf{q}_0$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ равен нулю. Однако, если один из лучей подвергнуть переориентации, то его спин поменяет знак, и тогда суммарный спин этих лучей окажется равным двойному спину непереориентированного луча.

Разобьем все множество лучей частицы на пары способом аналогичным тому, каким была образована пара лучей с ортами осей $\mathbf{q}_0$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_0$ (см. рис. 5.5).

Возможность реализации такого разбиения объясняется симметрией частицы относительно произвольных пространственных поворотов, сохраняющих вектор $\mathbf{i}$. Действительно, в силу этой симметрии для любого луча существует луч, получаемый из него пространственным поворотом на угол π вокруг вектора $\mathbf{i}$. А так как, согласно (5.31), полученный луч переходит в исходный луч при таком же повороте, то оба эти луча равноправны. Они и образуют указанную пару.

Суммарный спин каждой пары лучей, по доказанному выше, равен нулю, поэтому мы в очередной раз приходим к выводу о том, что в исходном, непереориентированном состоянии частица имеет нулевой спин. Вместе с тем, если какие-то из лучей переориентировать, то спин частицы может оказаться не равным нулю. Для того, чтобы получить максимальный по модулю спин, поступим следующим образом.

Зададим в Γ_* произвольный единичный вектор $\mathbf{k}$ с началом в центре частицы O ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1$). Пусть A — прямая, проходящая через точку O и имеющая направляющий вектор $\mathbf{k}$ ($A \subset \Gamma_*$). Отметим сразу же, что вследствие симметрии центрального сечения частицы относительно любых поворотов вокруг центра частицы O , последующие рассуждения не зависят от выбора направления вектора $\mathbf{k}$.

Возьмем произвольную пару лучей из образованного нами разбиения. В соответствии с доказанным выше, поперечные сечения этих лучей, принадлежащие центральному сечению частицы, накладываются друг на друга и вращаются с противоположными скоростями. Следовательно, псевдовекторы спинов этих лучей равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, ортогональной плоскости сечений. Проекции этих спинов на прямую A одинаковы по модулю, при этом одна из проекций сонаправлена, а другая противонаправлена вектору $\mathbf{k}$. (Если спин луча ортогонален прямой A , то его проекция на A есть нулевой вектор; такие лучи исключим из рассмотрения, ибо, как легко убедиться, они не влияют на последующий результат.) Подвергнем переориентации луч, проекция спина которого на прямую A противонаправлена вектору $\mathbf{k}$, а другой луч оставим без изменения. Тогда спин переориентированного луча поменяет направление на противоположное и станет равным спину луча, не подвергшегося переориентации; при этом проекции обоих спинов на прямую A будут сонаправлены вектору $\mathbf{k}$. Затем произведем аналогичные переориентации во всех парах лучей.

Вследствие симметрии центрального сечения частицы (в исходном состоянии) относительно любых поворотов вокруг центра частицы O , для каждой рассматриваемой пары лучей найдется другая пара лучей, расположенная по отношению к первой симметрично относительно любого заданного поворота вокруг прямой A . Псевдовекторы спинов этих двух пар лучей будут расположены после указанной переориентации симметрично относительно этого же поворота вокруг прямой A . Следовательно, после переориентации всех пар лучей псевдовекторы спинов будут образовывать конфигурацию, которая симметрична относительно любых поворотов вокруг прямой A . При этом, в соответствии

с указанным способом переориентации лучей, спины всех лучей будут иметь проекции на A , сонаправленные вектору $\mathbf{k}$. Отсюда вытекает, что суммарный спин всех лучей, то есть *спин частицы*, будет направлен вдоль прямой A в сторону, задаваемую вектором $\mathbf{k}$. Причем этот спин будет максимально возможным (по модулю), потому что все лучи вносят однонаправленные вклады в спин частицы. А так как проведенные рассуждения, как отмечалось, не зависят от выбора направления вектора $\mathbf{k}$, то данный способ переориентации лучей обеспечивает максимальное по модулю значение спина частицы при любом $\mathbf{k}$. Вычислим это максимальное значение спина частицы.

В исходном состоянии (до переориентации лучей) центральное сечение частицы симметрично относительно произвольных поворотов в физическом пространстве Γ_* вокруг центра частицы O , поэтому псевдовекторы спинов лучей $\overline{K}_*$ равномерно распределены по всем направлениям в Γ_* , выходящим из точки O . Будем считать, что использовавшиеся ранее базисы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (вводимые для каждого луча в отдельности) правоориентированные, причем векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ направлены таким образом, что кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ совпадает с направлением вращения луча. В таком случае, согласно сказанному в пояснении к формуле (3.3) (с. 416), угловая скорость вращения луча o положительна и псевдоскаляр Δ равен $+1$. Тогда из (3.6) следует, что спин луча $\overline{K}_*$ сонаправлен вектору $\mathbf{e}_3$, поэтому он может быть представлен в форме

$$\overline{K}_* = |\overline{K}_*| \mathbf{e}_3, \quad (5.33)$$

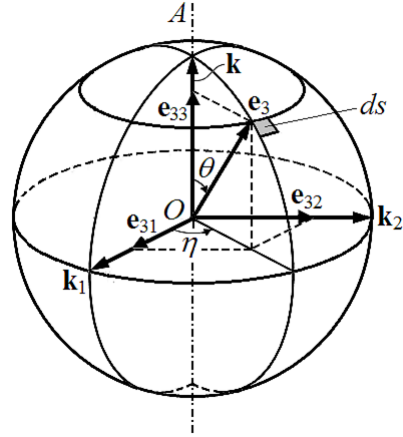
где $|\overline{K}_*|$ — модуль спина луча, одинаковый для всех лучей.

Пусть $\mathbf{k}$ — введенный выше единичный вектор с началом в центре частицы O ; A — как и ранее, прямая с направляющим вектором $\mathbf{k}$, проходящая через точку O и служащая осью симметрии центрального сечения частицы при рассматриваемом способе переориентации лучей. Зададим в собственном физическом пространстве частицы Γ_* ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ и связанную с ним сферическую систему координат с началом в центре частицы O и угловыми координатами θ и η . Рассмотрим сферу в Γ_* , имеющую единичный радиус и центр в точке O (рис. 5.6).

Векторы $\mathbf{e}_3$, относящиеся к разным лучам, играют роль радиусов-векторов точек сферы, показанной на рис. 5.6, поэтому координата θ представляет собой угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}_3$ ($\theta \in [0, \pi]$), а координата η есть угол между вектором $\mathbf{k}_1$ и проекцией $\mathbf{e}_3$ на плоскость $Lin\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$, отсчитываемый от $\mathbf{k}_1$ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{k}_1$ к $\mathbf{k}_2$ ($\eta \in [0, 2\pi]$). С помощью рис. 5.6 нетрудно убедиться

Рис. 5.6. Сфера единичного радиуса и базис $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ в Γ_* .

Спин частицы сонаправлен вектору $\mathbf{k}$; $\mathbf{e}_3$ — единичный вектор, задающий направление спина одного из лучей частицы; $\mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{33}$ — составляющие вектора $\mathbf{e}_3$ вдоль базисных векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}$ (они равны слагаемым в правой части формулы (5.34)); ds — элемент площади сферы; A — ось симметрии центрального сечения частицы.



в том, что разложение вектора $\mathbf{e}_3$ по базису $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ имеет вид

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \cos \eta \mathbf{k}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{k}_2 + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (5.34)$$

После переориентации лучей, произведенной указанным выше способом, половина лучей меняет направления своих спинов на противоположные. В этом случае формула (5.33) остается верной, но в ней векторы $\mathbf{e}_3$, относящиеся ко всем лучам, образуют углы с вектором $\mathbf{k}$, меньшие $\pi/2$ ($\theta \in [0, \pi/2)$), то есть в этом случае концы всех векторов $\mathbf{e}_3$ принадлежат верхней полусфере на рис. 5.6. (Мы не конкретизируем способ переориентации лучей, спины которых ортогональны вектору $\mathbf{k}$ ($\theta = \pi/2$), потому что такие лучи не дают вклада в спин частицы.)

Поскольку до переориентации лучей псевдовекторы $\bar{K}_*$ были равномерно распределены по всем направлениям в Γ_* , выходящим из точки O , то после переориентации лучей концы векторов $\mathbf{e}_3$, входящих в (5.33), оказываются равномерно распределенными по верхней полусфере на рис. 5.6. Следовательно, на единицу площади полусферы приходится $N/(2\pi)$ концов векторов $\mathbf{e}_3$, где N — общее количество лучей частицы, 2π — площадь полусферы единичного радиуса. Элемент ds площади сферы радиуса r задается, как известно, выражением

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\eta. \quad (5.35)$$

Спин частицы $\bar{K}$ есть, по определению, сумма спинов лучей, поэтому на основании (5.33), (5.34) и (5.35) (при $r = 1$), учитывая постоянство величин $|\bar{K}_*|$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}$ и указанное выше распределение концов

векторов $\mathbf{e}_3$ по полусфере, получаем:

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \bar{K}_* ds = \frac{N}{2\pi} |\bar{K}_*| \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_3 ds = \\ &= \frac{N}{2\pi} |\bar{K}_*| \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\sin \theta \cos \eta \mathbf{k}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{k}_2 + \cos \theta \mathbf{k}) \sin \theta d\theta d\eta = \\ &= \frac{N}{2} |\bar{K}_*| \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.1) находим:

$$\bar{K} = \frac{1}{2} N n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \Delta \mathbf{k}, \quad (5.36)$$

где угловая скорость o не заключена под знак модуля и добавлен единичный псевдоскаляр Δ с учетом $o > 0$ и $\Delta = +1$ (положительность o и Δ вытекает из принятых выше допущений о правоориентированности базисов $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и о том, что кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ совпадает с направлением вращения луча). Отметим, что в правой части формулы псевдоскаляр Δ должен присутствовать обязательно, потому что псевдовектор не может равняться вектору, ибо это разные математические объекты (хотя в (5.33) мы допустили такую неточность).

При выводе формулы (5.36) использовано предположение о том, что количество лучей частицы N столь велико, что суммирование по лучам частицы может быть заменено интегрированием по всем возможным направлениям, исходящим из центра частицы O . Данная ситуация аналогична той, которая имеет место в механике макроскопических тел, где моделирование тел сплошной средой позволяет заменить суммирование по отдельным атомам интегрированием по объему тела.

Пусть m — масса частицы. Будем считать, что масса частицы обладает свойством аддитивности, то есть она равняется сумме масс элементов частицы. Тогда

$$m = N n_* m_*, \quad (5.37)$$

где N — количество лучей частицы; n_* — количество винтовых спиралей, образующих луч; m_* — масса спирали (величины n_* и m_* одинаковы для всех лучей).

На основании (3.3), (5.36) и (5.37) получаем *спин частицы* в форме псевдовектора $\bar{K}$ и в форме антисимметричного тензора K , а также по аналогии с (3.6) и (3.7) устанавливаем связь между этими величинами:

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \Delta \mathbf{k}; \quad K = \frac{1}{2} m o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2; \quad (5.38)$$

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} K \cdot \cdot \varkappa; \quad K = -\bar{K} \cdot \varkappa, \quad (5.39)$$

где $\mathbf{k} \in \Gamma_*$ — единичный вектор, определяющий способ переориентации лучей частицы; $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ — ортонормированный правоориентированный базис в Γ_* ($\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\} \subset \Gamma_*$); m — масса частицы, удовлетворяющая равенству (5.37); o — угловая скорость собственного вращения лучей (каждый луч вращается вокруг своей оси внутри своего трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$; $o > 0$); r_* — радиус частицы (смысл величины r_* ясен из рис. 2.1, с. 411); n_* — количество винтовых спиралей, из которых состоит луч (согласно (4.3), $n_* = 137$); Δ — единичный псевдоскаляр в собственном физическом пространстве частицы Γ_* (здесь $\Delta = +1$, так как базис $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ правоориентированный); $\wedge$ — символ внешнего умножения векторов ($\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1$); $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* (см. разд. 4 главы 4, с. 320); считается, что величины o , r_* и n_* одинаковы для всех лучей.

Спин частицы $\bar{K}$ сонаправлен вектору $\mathbf{k}$ и согласован с направлением вращения по правилу правого винта.

Внимание! Формула (5.38) задает максимально возможный по модулю спин частицы. Это значение спина обеспечивается принятым способом переориентации лучей частицы.

Резюмируем содержание настоящего раздела.

Лучи частицы вращаются вокруг своих осей с постоянной и одинаковой по модулю угловой скоростью o , при этом каждый луч вращается внутри своего трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0} \subset M$ (угловая скорость o равна производной угла поворота луча по собственному времени частицы; угол поворота отсчитывается относительно базиса, скрепленного с остовом частицы). Такое вращение луча может быть описано как результат действия на луч оператора поворота P_β вида (5.15) при $\beta = ot$ (где t — собственное время частицы). Момент количества движения луча, обусловленный этим вращением, называется *спином луча* и задается выражениями (3.6).

Центральное сечение частицы, то есть сечение частицы ее собственным физическим пространством Γ_* , состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей, имеющих единственную

общую точку — центр частицы O . Каждое сечение вращается вместе с лучом с угловой скоростью ω . Изнутри физического пространства Γ_* это вращение воспринимается как происходящее вокруг оси, ортогональной сечению и проходящей через центр частицы O . Спин луча равен моменту количества движения его сечения (в предположении, что вся масса луча сосредоточена в этом сечении). Векторная сумма спинов всех лучей есть *спин частицы*. В исходном состоянии частицы ее центральное сечение симметрично относительно произвольных поворотов вокруг точки O (см. рис. 5.4, с. 436), поэтому для каждого поперечного сечения существует другое поперечное сечение, которое накладывается на это сечение и вращается с той же скоростью, но в противоположном направлении. Вследствие этого, в исходном состоянии частица имеет нулевой спин.

Благодаря четырехмерности пространства M , луч может поворачиваться вокруг своей оси не только внутри трехмерного подпространства C_{q_0} , но и с выходом из него. Этот поворот осуществляется оператором Π_γ вида (5.16). После реализуемого этим оператором поворота на угол π луч снова оказывается внутри подпространства C_{q_0} , при этом он становится *переориентированным*. Это означает, что винтовые спирали, образующие луч, преобразуются из правозакрученных в левозакрученные (или наоборот, если вначале они были левозакрученными). Одновременно луч меняет направление своего вращения внутри C_{q_0} на противоположное, что приводит к изменению знака спина луча.

При переориентации всех лучей частицы ее спин равен нулю, как и в исходном состоянии. Если же переориентирована лишь часть лучей, то спин частицы может быть ненулевым. Спин частицы принимает максимально возможное по модулю значение при переориентации лучей, производимой в соответствии со следующим условием.

Условие переориентации лучей. Пусть частица находится в исходном состоянии, когда она симметрична относительно любых пространственных поворотов, сохраняющих вектор $\mathbf{i}$. Зафиксируем в собственном физическом пространстве частицы Γ_* произвольный единичный вектор $\mathbf{k}$ с началом в центре частицы O . Лучи частицы, псевдовекторы спинов которых образуют с $\mathbf{k}$ углы, лежащие в интервале $(\pi/2, \pi]$, подвергаются переориентации, а лучи, спины которых образуют с $\mathbf{k}$ углы из интервала $[0, \pi/2)$, остаются без изменения.

Лучи, спины которых образуют с вектором $\mathbf{k}$ угол $\pi/2$, не влияют на спин частицы, поэтому не имеет значения, переориентированы они или нет.

При выполнении данного условия спин частицы $\bar{K}$ принимает значение (5.38). При любом другом способе переориентации лучей спин

частицы имеет меньшее по модулю значение, причем, повторим, при отсутствии переориентации, а также в случае переориентации всех лучей, спин частицы равен нулю.

Для любого заданного направления в Γ_* можно произвести переориентацию лучей так, что спин частицы будет ориентирован именно в этом направлении. Это объясняется произвольностью выбора вектора $\mathbf{k}$, входящего в условие переориентации лучей.

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства.

1. Тот факт, что переориентация лучей осуществляется посредством непрерывного преобразования (поворотом на угол π с помощью оператора P_γ), означает, что *материальные прообразы лучей (если они существуют) могут быть переориентированы*.

2. Переориентация лучей, приводящая к изменению спина частицы, реализуется путем поворота лучей вокруг их осей. При этом сами оси (то есть остов частицы) остаются неподвижными. Следовательно, *изменение спина частицы может быть произведено без вращения частицы как целого*.

3. При интерпретации построенной частицы как модели электрона ее собственное электромагнитное поле определяется движением лучей. Поскольку переориентация лучей, приводящая к изменению спина частицы, реализуется без движения осей лучей, то *изменение величины и направления спина частицы может быть реализовано без изменения создаваемого ею электромагнитного поля* (по крайней мере, при измерении поля с усреднением по областям, размеры которых превышают диаметр луча, равный диаметру частицы $2(r_* + p_*)$).

4. При вычислении угловой скорости вращения лучей о угол поворота луча отсчитывается относительно базиса, скрепленного с остовом частицы, а производная угла поворота берется по собственному времени частицы, поэтому *угловая скорость ω , спин луча $\bar{K}_*$ и спин частицы $\bar{K}$ являются внутренними характеристиками частицы, не зависящими от ее движения относительно пространства M* .

Мы рассмотрели ситуацию, когда частица движется в пространстве Минковского не вращаясь как целое (то есть без вращения остова частицы, состоящего из осей лучей). Между тем, если такое вращение имеет место, то кинетический момент частицы получает добавку к его значению, найденному выше. В последующем мы не будем включать эту добавку в понятие спина. Поэтому далее термины «спин луча» и «спин частицы» обозначают только те составляющие кинетических моментов луча и частицы, которые обусловлены собственным вращением лучей вокруг их осей.

6. Спин и собственный магнитный момент электрона

Мы трактуем строящуюся частицу как модель электрона, поэтому найденный в разд. 5 спин частицы будем считать характеристикой электрона. При выполнении принятого в разд. 5 условия переориентации лучей (с. 444) *спин электрона* в форме псевдовектора $\bar{K}$ и в форме антисимметричного тензора K задается выражениями (5.38) и (5.39):

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m_e \omega r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \Delta \mathbf{k}; \quad K = \frac{1}{2} m_e \omega r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2; \quad (6.1)$$

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} K \cdot \cdot \varkappa; \quad K = -\bar{K} \cdot \varkappa, \quad (6.2)$$

где m_e — масса электрона; остальные обозначения те же, что в (5.38).

Введем *собственный магнитный момент электрона* $\bar{\mu}$ с помощью формулы, которая связывает магнитный и кинетический моменты в электродинамике:

$$\bar{\mu} = \gamma \bar{K} = \frac{e}{2m_e c} \bar{K} \quad (\text{в системе СГС}), \quad (6.3)$$

где e — заряд электрона ($e < 0$); c — скорость света. Входящий в (6.3) коэффициент γ именуется *гиромагнитным* (или *магнитомеханическим*) *отношением*:

$$\gamma = \frac{e}{2m_e c} \quad (\text{в системе СГС}). \quad (6.4)$$

Так как $e < 0$, то $\gamma < 0$, поэтому собственный магнитный момент $\bar{\mu}$ и спин $\bar{K}$ электрона — противонаправленные псевдовекторы.

В физике считается, что собственный магнитный момент электрона $\bar{\mu}$ совпадает по модулю с магнетоном Бора μ_B :

$$|\bar{\mu}| = \mu_B \quad (\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} \text{ в системе СГС}). \quad (6.5)$$

Из (6.3) и (6.5) вытекает, что спин электрона $\bar{K}$ равен по модулю постоянной Планка:

$$|\bar{K}| = \hbar. \quad (6.6)$$

Следует отметить, что в физике предположение о коллинеарности собственного магнитного момента электрона $\vec{\mu}$ и спина $\vec{K}$ ($\vec{\mu} = \gamma \vec{K}$) дополняется условием, что гиромагнитное отношение имеет значение, в два раза большее значения (6.4): $\gamma = \frac{e}{m_e c}$. Вместе с (6.5) это дает для спина электрона значение, в два раза меньшее значения (6.6): $|\vec{K}| = \frac{\hbar}{2}$. В разд. 7 будет доказано, что тот экспериментальный эффект, для описания которого вводится искусственное условие об удвоенном значении гиромагнитного отношения γ , успешно описывается строящейся моделью электрона при «стандартном» значении (6.4) параметра γ и значении (6.6) спина $\vec{K}$. Отметим также, что для орбитального магнитного момента электрона в физике принимается обычное значение гиромагнитного отношения (6.4).

Из выражений (6.1) и (6.6) с учетом (4.2) и (4.4) находим:

$$or_*^2 = \frac{2|\vec{K}|}{m_e \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right)} = \frac{2\hbar}{m_e \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right)} = \frac{2\hbar \alpha n_*}{m_e} = \frac{2n_* e^2}{m_e c}.$$

Отсюда получаем следующую формулу, которая потребуется нам в дальнейшем:

$$r_* = 2n_* \frac{e^2}{m_e c (or_*)}. \quad (6.7)$$

7. Аномальный магнитный момент электрона

В настоящем разделе исследуется вращение электрона магнитным полем. Это явление уже анализировалось в разд. 12 главы 4 с помощью модели электрона в виде «точечной» частицы и был получен следующий результат (с. 389).

Пусть электрон, точнее, его центр масс, неподвижен относительно лабораторной инерциальной системы отсчета. Тогда при действии на электрон постоянного и однородного магнитного поля с напряженностью $\vec{H}$ он вращается вокруг центра масс с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_H = -\frac{e}{m_e c} \vec{H}, \quad (7.1)$$

где e и m_e — заряд и масса электрона ($e < 0$); c — скорость света.

Зависимость (7.1) соответствует результатам опытов С. Барнетта (1909 г.) и опытов А. Эйнштейна и В. де Хааза (1915 г.). Современные более точные эксперименты, базирующиеся на методе электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) [29], приводят к зависимости

$$\bar{\Omega}_H \approx -1.00115965 \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (7.2)$$

Сравнение зависимостей (7.1) и (7.2) показывает, что экспериментальные данные отличаются от теоретических на очень малую относительную величину. Очевидно, что это отличие обусловлено *самодействием* электрона. А именно, при вращении электрона внешним магнитным полем его собственное поле получает добавку, магнитная составляющая которой, складываясь с внешним магнитным полем, приводит к указанному отличию.

Модель электрона в виде «точечной» частицы не дает возможности учесть самодействие электрона, потому что собственное поле «точечной» частицы принимает бесконечно большое значение в месте нахождения центра частицы. Модель электрона в виде частицы ненулевого радиуса позволяет это сделать.

Для учета самодействия электрона нужно добавить в правую часть формулы (7.1) магнитную составляющую собственного поля электрона.

Мы не конкретизировали пока еще собственное поле частицы ненулевого радиуса. В дальнейшем будет показано, что при усреднении поля по областям с размерами, превышающими диаметр луча, это поле вдали от центра частицы совпадает с собственным полем «точечной» частицы. Поэтому, упрощая, примем, что всюду снаружи от центрального сечения частицы, а также на его внешней границе собственное поле частицы совпадает с собственным полем «точечной» частицы.

Согласно формуле (10.20) из главы 4 (с. 378), магнитная составляющая $\bar{H}_s$ собственного поля «точечной» частицы, вращающейся с угловой скоростью $\bar{\Omega}_H$ вокруг неподвижного центра, имеет вид

$$\bar{H}_s(x) = \Delta \frac{e \Omega_H}{c r} \left(\cos \theta \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (7.3)$$

где x — произвольная точка физического пространства, не совпадающая с центром частицы; Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве (предполагается, что используемый базис правоориентированный, поэтому здесь $\Delta = 1$); e — заряд электрона (при трактовке «точечной» частицы как модели электрона, $e < 0$); $\Omega_H = |\bar{\Omega}_H|$ ($\Omega_H > 0$); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки x относительно центра частицы (при расположении центра частицы, одномоментном с точкой x по часам лабораторной системы отсчета); $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между точкой x и центром

частицы; $\mathbf{a}$ — единичный вектор, сонаправленный $\bar{\Omega}_H$ ($\bar{\Omega}_H = \Delta\Omega_H\mathbf{a}$); θ — угол между единичными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}/r$ ($\theta \in [0, \pi]$), мы заменили букву γ , входящую в (10.20), буквой θ , потому что далее буква γ используется в качестве обозначения гиромагнитного отношения.

В соответствии с принятым выше допущением, собственное поле частицы, действующее на внешней границе ее центрального сечения, совпадает с собственным полем «точечной» частицы, действующим на том же расстоянии от центра частицы. Центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей с единственной общей точкой — центром частицы O (см. разд. 2, с. 413). На внешней границе центрального сечения располагаются те точки кругов радиуса p_* , изображенных на рис. 2.1 (с. 411), которые удалены от центра O на расстояние $r = r_* + p_* = r_*(1 + \frac{p_*}{r_*}) = r_*(1 + \sin \frac{\pi}{n_*})$ (с учетом (2.2): $p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$). Следовательно, в этих точках поле $\bar{H}_s$ задается выражением (7.3) при $r = r_*(1 + \sin \frac{\pi}{n_*})$. Обозначим это значение поля символом $\bar{H}_{s1}$:

$$\bar{H}_{s1} = \Delta \frac{e\Omega_H}{cr_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \left(\cos \theta \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right); \quad (7.4)$$

отметим, что $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор, поэтому $\bar{H}_{s1}$ зависит от направления вектора $\mathbf{r}$, но не зависит от расстояния r .

По смыслу рассматриваемой модели электрона, порождаемое им электромагнитное поле создается материальными прообразами винтовых спиралей, образующих лучи частицы. Поскольку спирали располагаются по периферии лучей (см. рис. 1.3, с. 409), то во внутренней области центрального сечения частицы поле отсутствует. Значит, на рис. 2.1 в точках кругов радиуса p_* , наиболее близких к центру O , то есть при $r = r_* - p_*$, выполняется $\bar{H}_s = \bar{0}$ ($\bar{0}$ — нулевой псевдовектор). Вместе с тем в точках кругов, находящихся от центра частицы на расстоянии $r_* + p_*$, поле $\bar{H}_s$ имеет значение (7.4). Допустим, что на самих кругах поле $\bar{H}_s$ изменяется линейным образом между этими двумя значениями (вдоль направлений, которые исходят радиально из центра частицы и проходят через центры кругов). В таком случае в центрах кругов (то есть при $r = r_*$) поле $\bar{H}_s$ равно половине величины $\bar{H}_{s1}$ (рис. 7.1).

На основании данного допущения будем считать при последующих расчетах, что на каждом круге среднее значение поля $\bar{H}_s$ равно $\frac{1}{2}\bar{H}_{s1}$. Тогда среднее значение поля $\bar{H}_s$ по всему центральному сечению частицы может быть вычислено как среднее значение величины $\frac{1}{2}\bar{H}_{s1}$ по сфере радиуса r_* , имеющей центр в центре частицы O .

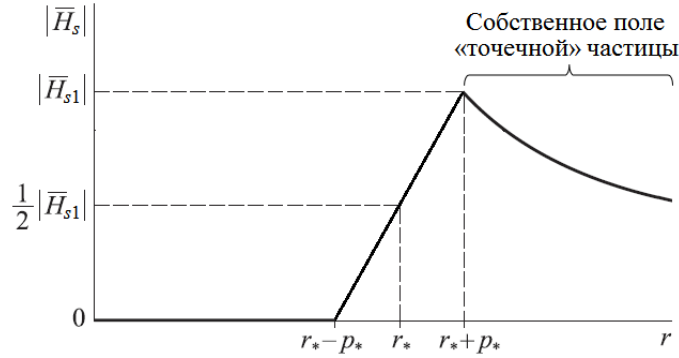


Рис. 7.1. Зависимость собственного магнитного поля $\overline{H}_s$ вращающейся частицы от расстояния r до центра частицы (при сделанных допущениях).

Рассмотрим сферу в физическом пространстве частицы, имеющую радиус r и центр в центре частицы O . Пусть, как и ранее, $\mathbf{a}$ — единичный вектор, сонаправленный угловой скорости вращения частицы $\overline{\Omega}_H$. Зададим ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$ с началом в O и связанную с ним сферическую систему координат с угловыми координатами $\theta \in [0, \pi]$ и $\eta \in [0, 2\pi)$ (рис. 7.2).

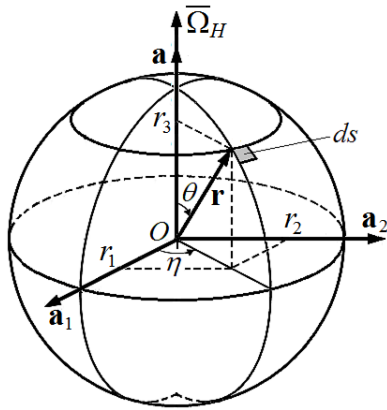


Рис. 7.2. Сфера радиуса r и базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$ в физическом пространстве частицы, которое в данном случае совпадает с физическим пространством лабораторной инерциальной системы отсчета.

$\overline{\Omega}_H$ — угловая скорость вращения частицы; $\mathbf{a} = \overline{\Omega}_H / |\overline{\Omega}_H|$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек сферы; r_1, r_2, r_3 — координаты вектора $\mathbf{r}$ в базисе $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$; $r = |\mathbf{r}|$; ds — элемент площади сферы.

Среднее значение поля $\overline{H}_s$ по центральному сечению частицы, которое обозначим символом $\overline{H}_{s*}$, может быть найдено в соответствии со сказанным выше, как среднее значение половины величины $\overline{H}_{s1}$ по

сфере радиуса r_* :

$$\overline{H}_{s*} = \frac{1}{2S} \int_{(S)} \overline{H}_{s1} ds, \quad (7.5)$$

где буква S обозначает площадь сферы радиуса r_* , а также саму сферу; ds — элемент площади этой сферы.

Во введенной сферической системе координат элемент площади ds сферы радиуса r_* , площадь S этой сферы и единичный вектор $\mathbf{r}/r$ описываются формулами

$$\begin{aligned} ds &= r_*^2 \sin \theta d\theta d\eta; \quad S = 4\pi r_*^2; \\ \frac{\mathbf{r}}{r} &= \sin \theta \cos \eta \mathbf{a}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{a}_2 + \cos \theta \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

С помощью (7.4)–(7.6) получаем:

$$\begin{aligned} \overline{H}_{s*} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta e \Omega_H}{4\pi r_*^2 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \times \\ &\times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\cos \theta (\sin \theta \cos \eta \mathbf{a}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{a}_2 + \cos \theta \mathbf{a}) - \mathbf{a}] r_*^2 \sin \theta d\theta d\eta. \end{aligned}$$

Интегрируя и учитывая равенство $\overline{\Omega}_H = \Delta \Omega_H \mathbf{a}$, находим:

$$\overline{H}_{s*} = -A \frac{e}{3cr_*} \overline{\Omega}_H, \quad (7.7)$$

где

$$A = \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (7.8)$$

Добавим в правую часть формулы (7.1) поле $\overline{H}_{s*}$:

$$\overline{\Omega}_H = -\frac{e}{m_e c} (\overline{H} + \overline{H}_{s*}). \quad (7.9)$$

Подставляя в (7.9) значение (7.7) поля $\overline{H}_{s*}$ и решая полученное уравнение относительно $\overline{\Omega}_H$, приходим к зависимости

$$\overline{\Omega}_H = -\frac{1}{1 - A \frac{e^2}{3m_e c^2 r_*}} \frac{e}{m_e c} \overline{H}, \quad (7.10)$$

где параметр A задается формулой (7.8).

Коэффициент при $\overline{H}$ в (7.10) содержит неизвестный радиус частицы r_* . Для его нахождения воспользуемся формулой (6.7):

$$r_* = 2n_* \frac{e^2}{m_e c (or_*)}. \quad (7.11)$$

Произведение or_* , входящее в (7.11), представляет собой линейную скорость вращения центров кругов, образующих поперечное сечение луча (см. рис. 2.1, с. 411). Напомним, что центр частицы движется вдоль мировой линии в пространстве Минковского со скоростью, которая равна единице (при измерении времени в единицах длины) и равна скорости света c (при измерении времени в единицах времени, см. разд. 3 главы 3, с. 114–115). Естественнo допустить, что линейная скорость вращения поперечных сечений лучей, точнее, скорость их периферийных точек тоже равна единице или c в тех же двух случаях. Так как угловая скорость o имеет размерность $(\text{время})^{-1}$, а периферийные точки находятся на расстоянии $r_* + p_*$ от оси вращения, то сказанное означает выполнение равенства

$$o(r_* + p_*) = c. \quad (7.12)$$

Отсюда и из формулы (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$) получаем:

$$or_* = \frac{c}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (7.13)$$

Из (7.11) и (7.13) находим:

$$r_* = 2n_* \frac{e^2}{m_e c^2} \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right). \quad (7.14)$$

Подстановка в (7.10) величин A и r_* из (7.8) и (7.14) дает:

$$\overline{\Omega}_H = - \frac{1}{1 - \frac{1}{6n_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)^2}} \frac{e}{m_e c} \overline{H} \approx -1.0011640 \frac{e}{m_e c} \overline{H}, \quad (7.15)$$

где использовано равенство $n_* = 137$ (см. (4.3), с. 418).

Сравнение найденного значения угловой скорости $\overline{\Omega}_H$ с экспериментальным значением (7.2) показывает, что учет самодействия частицы позволил описать опытные данные с относительной погрешностью,

меньшей $5 \cdot 10^{-6}$. Заметим, что без учета самодействия, как видно из сравнения зависимостей (7.1) и (7.2), относительная погрешность составляет гораздо большую величину $1 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, результаты, полученные в разд. 12 главы 4 и в настоящем разделе, доказывают, что *экспериментальный эффект, описываемый зависимостью (7.2), заключается во вращении электронов магнитным полем, причем отличие числового коэффициента в (7.2) от единицы обусловлено самодействием электронов.*

Обратим внимание на то, что данный экспериментальный эффект объясняется вращением электрона как целого и никак не связан с вращением лучей вокруг их осей, то есть со спином электрона. Следовательно, этот эффект не связан и с собственным магнитным моментом электрона, ибо последний пропорционален спину, поэтому *традиционное название «аномальный магнитный момент электрона», даваемое эффекту отличия числового коэффициента в (7.2) от единицы, не соответствует сути явления.*

Поясним, как появилось это название.

В 1925 г. Дж. Уленбек и С. Гаудсмит предложили следующую гипотезу, призванную объяснить результаты опытов по воздействию на электроны магнитного поля. Моделируя электрон геометрической точкой, они *постулировали*, что электрон обладает собственным кинетическим моментом (спином) $\bar{K}$ и собственным магнитным моментом $\bar{\mu}$, пропорциональными между собой: $\bar{\mu} = \gamma \bar{K}$ (хотя точечное тело заведомо имеет нулевой кинетический момент, так как вращающаяся точка неотличима от невращающейся). Основываясь на законах механики и электродинамики, они заключили, что при действии на электрон магнитного поля $\bar{H}$ возникает ларморовская прецессия спина $\bar{K}$ с частотой

$$\bar{\Omega}_H = -\gamma \bar{H}. \quad (7.16)$$

Дж. Уленбек и С. Гаудсмит предположили, что именно величина $\bar{\Omega}_H$ определяется в опытах по воздействию на электроны магнитного поля.

Однако сравнение формулы (7.16) с зависимостью (7.1), соответствующей результатам опытов Барнетта и Эйнштейна–де Хааза, показывает, что экспериментальное значение коэффициента при $\bar{H}$, равное $\frac{e}{m_e c}$, в два раза превышает величину гиромагнитного отношения γ , диктуемую законами электродинамики: $\gamma = \frac{e}{2m_e c}$. Казалось бы, единственный вывод, который может быть сделан из этого несоответствия, — это признание ошибочности предлагаемой гипотезы. Тем не менее авторы гипотезы, оставив в силе все заимствованные из механики и электродинамики законы, дополнили их представлением о том, что собственные

магнитный и кинетический моменты электрона — $\bar{\mu}$ и $\bar{K}$ — имеют особую природу, не объяснимую с позиции механики и электродинамики, и что вопреки законам электродинамики гиромагнитное отношение γ принимает для электронов значение $\frac{e}{m_{ec}}$. Далее на основе результатов опытов Штерна–Герлаха они постулировали, что магнитный момент электрона равен магнетону Бора: $|\bar{\mu}| = \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_{ec}}$, что вместе с упомянутыми зависимостями $\bar{\mu} = \gamma\bar{K}$ и $\gamma = \frac{e}{m_{ec}}$ дает для спина электрона значение $|\bar{K}| = \frac{\hbar}{2}$. Именно это значение спина электрона является ныне общепринятым.

Поскольку последующие опыты, основанные на методе ЭПР, привели к зависимости (7.2), содержащей отличный от единицы числовой коэффициент, то теперь принято записывать равенство $|\bar{\mu}| = \mu_B$ в виде

$$|\bar{\mu}| = \frac{g}{2} \mu_B, \quad (7.17)$$

где g — так называемый *множитель Ланде* или *g-фактор*. Из (7.2) и (7.16) следует $\gamma \approx 1.00115965 \frac{e}{m_{ec}}$, что вместе с равенствами $\bar{\mu} = \gamma\bar{K}$, $|\bar{K}| = \frac{\hbar}{2}$, $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_{ec}}$ и (7.17) влечет $\frac{g}{2} \approx 1.00115965$, поэтому магнитный момент электрона задается равенством

$$|\bar{\mu}| \approx 1.00115965 \mu_B; \quad (7.18)$$

эта величина и называется *аномальным магнитным моментом электрона*.

Мы изложили историю появления данного названия. В современной квантовой электродинамике наличие у электрона спина вытекает из постулированного П. А. М. Дираком в 1928 г. уравнения для волновой функции электрона. Теория Дирака требует, чтобы фактор $\frac{g}{2}$ был точно равен единице. Для согласования теории с экспериментом принимается гипотеза о существовании неких виртуальных частиц, взаимодействие которых с электроном приводит к отличию магнитного момента электрона от магнетона Бора (см. (7.18)). Нужно отметить, что виртуальные частицы не подчиняются обычному релятивистскому соотношению между энергией, импульсом и массой и являются принципиально ненаблюдаемыми объектами [30]. Понятно, что представление о существовании таких частиц вносит в теорию элемент мистики.

Имеется существенное различие в интерпретации экспериментальных данных при традиционном и нашем описаниях явления.

В методе ЭПР измеряемой величиной является частота вспомогательного, перпендикулярного к $\bar{H}$ слабого периодического магнитного

поля. В рамках традиционного представления о наличии ларморовской прецессии электронных спинов, предполагается, что при совпадении этой частоты с ларморовской наступает резонанс, в результате которого прецессирующие электронные спины «переворачиваются», что и приводит к наблюдаемому макроскопическому эффекту. Между тем, с точки зрения механики такое воздействие может тормозить или ускорять прецессию, но не «переворачивать» спины.

Наша модель предполагает иную интерпретацию. Действующее на электроны однородное магнитное поле приводит к вращению электронов. Вспомогательное слабое магнитное поле, перпендикулярное основному полю, вызывает прецессию и нутацию вращающихся электронов. При периодическом изменении вспомогательного поля с частотой, равной частоте нутации, наступает резонанс, в результате которого происходит рост амплитуды нутации и в итоге «переворачивание» электронных спинов. Поскольку при сферически симметричном теле частота нутации равна частоте вращения тела [31], то регистрируемая в опыте резонансная частота совпадает с частотой вращения электронов.

Итак, в настоящем разделе на основе модели электрона в виде частицы ненулевого радиуса доказано (с учетом результатов разд. 12 главы 4), что *наблюдаемый эффект, выражаемый зависимостью (7.2), заключается во вращении электронов магнитным полем и что отличие в (7.2) числового коэффициента от единицы объясняется самодействием электронов. Этот эффект не связан со спином электрона и его собственным магнитным моментом, а обусловлен только вращением электрона как целого.*

Данный результат базируется на законах механики, электродинамики и специальной теории относительности и не требует использования представлений о мистических ненаблюдаемых виртуальных частицах и о характеристиках электрона, имеющих особую природу, не объяснимую с позиции механики и электродинамики. Отсутствие ларморовской прецессии спина электрона объяснено в разд. 19 главы 3 (с. 244).

В последующем мы исследуем вращение электрона магнитным полем более детально (см. разд. 19, с. 645).

8. Радиус электрона

В связи с невозможностью напрямую измерить радиус электрона, сделаем заключение о радиусе электрона на основании теоретических соображений.

В разд. 7 получена формула (7.14) для радиуса частицы r_* . Приведем вывод этой формулы заново, чтобы ясно видеть, на каких допущениях она базируется.

При моделировании электрона частицей ненулевого радиуса и при выполнении принятого в разд. 5 условия переориентации лучей (с. 444) псевдовектор спина электрона $\bar{K}$ задается формулой (6.1):

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m_e o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \Delta \mathbf{k}, \quad (8.1)$$

где m_e — масса электрона; o — угловая скорость собственного вращения лучей ($o > 0$); n_* — количество винтовых спиралей, из которых состоит луч (согласно (4.3), $n_* = 137$); Δ — единичный псевдоскаляр в собственном физическом пространстве частицы (здесь $\Delta = +1$, так как предполагается, что используемый базис правоориентированный); $\mathbf{k}$ — единичный вектор, входящий в условие переориентации лучей.

Введем собственный магнитный момент электрона $\bar{\mu}$, основываясь на законах электродинамики: $\bar{\mu} = \gamma \bar{K}$; $\gamma = \frac{e}{2m_e c}$ (γ — гиромагнитное отношение). Полагая, как принято в физике, что магнитный момент электрона равен по модулю магнетону Бора: $|\bar{\mu}| = \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c}$, приходим к выводу, что модуль спина электрона $\bar{K}$, также называемый спином электрона, равен постоянной Планка:

$$|\bar{K}| = \hbar. \quad (8.2)$$

Из (8.1) и (8.2) находим:

$$\begin{aligned} o r_*^2 &= \frac{2\hbar}{m_e \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right)}, \\ \text{откуда} \quad r_* &= \frac{2\hbar}{m_e (o r_*) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right)}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

На основании приведенного в разд. 7 довода постулируем, что линейная скорость вращения периферийных точек поперечных сечений

лучей равна скорости света c . Это означает выполнение равенства

$$o(r_* + p_*) = c. \quad (8.4)$$

Из (8.4) и формулы (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$) следует

$$or_* = \frac{c}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (8.5)$$

Зависимости (8.3) и (8.5) влекут

$$r_* = \frac{2\hbar \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}{m_e c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (8.6)$$

С помощью (4.2) и (4.4) ($n_*(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}) = \alpha^{-1}$; $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$) можно преобразовать формулу (8.6) к виду (7.14), полученному в разд. 7:

$$r_* = 2n_* \frac{e^2}{m_e c^2} \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right). \quad (8.7)$$

Пренебрегая в (8.6) величиной $\sin(\pi/n_*)$ в сравнении с единицей (так как $\pi/n_* = \pi/137 \ll 1$), заключаем, что *радиус частицы* r_* , он же *радиус электрона*, имеет следующее приближенное значение:

$$r_* \approx \frac{2\hbar}{m_e c} \approx 2n_* r_e \approx 7.7 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \quad (8.8)$$

где $n_* = 137$ — количество винтовых спиралей в каждом луче частицы; $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ — так называемый классический радиус электрона (это название условное, величина r_e не связывается в атомной физике с реальным размером электрона).

Найденное значение радиуса электрона r_* существенно превосходит значение 10^{-20} см , указанное в [32]. Однако в этой работе данное значение радиуса электрона получено не из эксперимента, а посредством далекой экстраполяции зависимости $|g - 2|$ от R/λ_C , выполняющейся для ядра гелия-3, тритона и протона (g — множитель Ланде, R — радиус частицы, λ_C — комптоновская длина волны частицы) [32] (с. 136). В [32] отмечено (с критическим замечанием), что радиус электрона может быть найден также из зависимости $|g - 2| \approx (R/\lambda_C)^2$; в этом случае, как следует из рис. 7 в [32], радиус электрона $R \approx 10^{-15} \text{ см}$. Кроме того, сказано, что для электрона «верхний предел $R < 10^{-17} \text{ см}$ установлен в экспериментах при высоких энергиях».

Нет смысла обсуждать значение радиуса электрона, вытекающее из гипотезы о существовании единой для элементарных частиц зависимости $|g - 2|$ от R/λ_C , потому что не имеется ни теоретических, ни экспериментальных подтверждений этой гипотезы.

Обсудим опыты по столкновениям частиц. Размер электрона оценивается в этих опытах по косвенным данным, поэтому при анализе результатов опытов важно помнить, что согласно методологии физики «не бывает парадигмально независимых экспериментальных данных» [9]. При постановке опытов по столкновениям электронов, а priori предполагается, что как только минимальное расстояние между электронами достигнет величины, близкой к размеру электрона, так взаимодействие электронов станет отличным от кулоновского. Это отличие и пытаются зарегистрировать в опыте. К настоящему времени установлено, что отличие взаимодействия от кулоновского не наблюдается при сближении электронов вплоть до расстояний порядка 10^{-19} м, на основании чего и делается заключение о том, что размер электрона не превышает этой величины [32]. Однако если электроны являются объектами взаимопроницаемыми, как это имеет место в нашей модели, то данный результат вовсе не устанавливает какого-либо ограничения на размер электрона. Он просто говорит о том, что электроны могут свободно, без искажений проходить сквозь друг друга, взаимодействуя по закону Кулона при любом взаимном расположении.

Тот факт, что модель электрона в виде частицы ненулевого радиуса с высокой точностью описывает опытные данные по воздействию на электроны магнитного поля (см. разд. 7), свидетельствует как о справедливости модели, так и о достоверности значений (8.2) и (8.7) спина и радиуса электрона, использованных при расчетах в разд. 6 и 7.

9. Магнетизм электронов

При вращении электрона его собственное электромагнитное поле получает добавку к обычному максвелловскому полю. В разд. 6 и 7 главы 4 эта добавка рассчитана при помощи модели электрона в виде «точечной» частицы. Для вращающейся «точечной» частицы с неподвижным центром магнитная составляющая $\overline{H}_s$ собственного поля имеет значение (7.3):

$$\overline{H}_s(x) = \Delta \frac{e\Omega_H}{cr} \left(\cos \theta \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (9.1)$$

где x — произвольная точка физического пространства вне центра частицы; Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве (пред-

полагается, что используемый базис правоориентированный, поэтому здесь $\Delta = 1$); e — заряд электрона ($e < 0$); $\Omega_H = |\bar{\Omega}_H|$ ($\Omega_H > 0$); $\bar{\Omega}_H$ — угловая скорость вращения частицы; θ — угол между единичными векторами $\mathbf{r}/r$ и $\mathbf{a}$ ($\theta \in [0, \pi]$); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки x относительно центра частицы (при расположении центра частицы, одномоментном с x); $r = |\mathbf{r}|$; $\mathbf{a}$ — единичный вектор, сонаправленный $\bar{\Omega}_H$ ($\bar{\Omega}_H = \Delta\Omega_H\mathbf{a}$).

В случае частицы ненулевого радиуса можно считать, как отмечено в разд. 7, что ее собственное поле $\bar{H}_s$ имеет вид, показанный на рис. 7.1. При этом среднее значение поля $\bar{H}_s$ по центральному сечению частицы, обозначенное через $\bar{H}_{s*}$, задается, согласно (7.7) и (7.8), выражением

$$\bar{H}_{s*} \approx -\frac{e}{3cr_*} \bar{\Omega}_H; \quad (9.2)$$

здесь и далее мы пренебрегаем величинами p_*/r_* и π/n_* по сравнению с единицей (потому что, по (4.3) и (4.5), $p_*/r_* \approx \pi/n_* \approx 1/44$).

Из (9.2) с учетом (7.9) и (7.14) находим:

$$\bar{H}_{s*} \approx \frac{1}{6n_*}(\bar{H} + \bar{H}_{s*}), \quad \text{поэтому} \quad \bar{H}_{s*} \left(1 - \frac{1}{6n_*}\right) \approx \frac{1}{6n_*} \bar{H},$$

что при пренебрежении величиной $1/(6n_*)$ в сравнении с единицей дает:

$$\bar{H}_{s*} \approx \frac{1}{6n_*} \bar{H} = \frac{1}{822} \bar{H}, \quad (9.3)$$

так как $n_* = 137$. Заметим, что (9.3) не содержит заряд и массу (e и m_e).

На основании (9.3) заключаем, что поле $\bar{H}_{s*}$, обуславливающее самодействие частицы, является малой добавкой к внешнему магнитному полю $\bar{H}$, вызывающему вращение частицы, причем поле $\bar{H}_{s*}$ сонаправлено $\bar{H}$, и поэтому усиливает действие его на частицу.

Теперь рассмотрим поле $\bar{H}_s$ вне центрального сечения частицы, то есть при $r > r_* + p_*$. По аналогии с тем, как это было принято в разд. 7, будем считать, что в случае частицы ненулевого радиуса ее собственное поле вне центрального сечения совпадает с собственным полем «точечной» частицы, вычисленным в главе 4.

Поскольку $\mathbf{r}/r$ и $\mathbf{a}$ — единичные векторы и θ — угол между ними, то

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1; \quad \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos \theta, \quad (9.4)$$

где знаки минус объясняются отрицательной определенностью метрической формы в физическом пространстве.

В связи с тем, что дальнейшее содержание настоящего раздела не зависит от того, вызвано вращение частицы магнитным полем или

какой-либо другой причиной, заменим обозначение угловой скорости частицы $\bar{\Omega}_H$, содержащее символ магнитного поля H , обозначением $\bar{\omega}$, использованным в главе 4.

Из (9.1) и (9.4) (при замене обозначения $\bar{\Omega}_H$ на $\bar{\omega}$) находим:

$$\begin{aligned}\bar{H}_s \cdot \mathbf{r} &= 0; & |\bar{H}_s| &= \sqrt{|\bar{H}_s \cdot \bar{H}_s|} = \frac{|e|\omega}{cr} \sin \theta; \\ -(\bar{H}_s \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} &= -\frac{e}{cr} \sin^2 \theta \bar{\omega},\end{aligned}\quad (9.5)$$

где во втором выражении учтено, что $\sin \theta \geq 0$ (так как $\theta \in [0, \pi]$); в третьем выражении использовано равенство $\Delta \omega \mathbf{a} = \bar{\omega}$. Величина $-(\bar{H}_s \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}$ представляет собой составляющую псевдовектора $\bar{H}_s$ вдоль направления угловой скорости (знак минус связан с отрицательной определенностью метрической формы в физическом пространстве).

Выражения (9.1) и (9.5) позволяют сделать следующий вывод относительно свойств собственного магнитного поля $\bar{H}_s$ вращающейся частицы *вне ее центрального сечения*.

Поле $\bar{H}_s$ убывает с удалением от центра частицы как r^{-1} (рис. 9.1). В каждой точке пространства псевдовектор $\bar{H}_s$ лежит в плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{r}\}$, содержащей ось вращения и эту точку, и направлен перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$, соединяющему центр частицы с этой точкой. Поле $\bar{H}_s$ имеет ось симметрии, совпадающую с осью вращения частицы, так как оно не зависит от угла поворота плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{r}\}$ вокруг вектора $\mathbf{a}$. При каждом фиксированном r поле $\bar{H}_s$ принимает наибольшее по модулю значение при $\theta = \pi/2$, то есть в плоскости, проходящей через центр частицы и ортогональной вектору $\mathbf{a}$. На оси вращения частицы $\bar{H}_s = \bar{0}$.

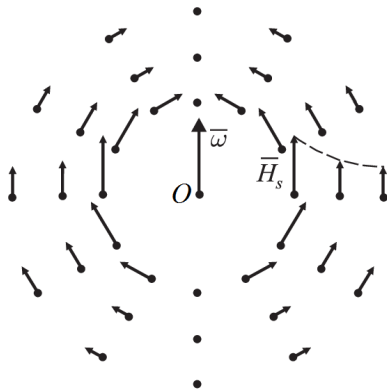


Рис. 9.1. Собственное магнитное поле $\bar{H}_s$ вращающейся частицы вне центрального сечения частицы.

O — центр частицы; $\bar{\omega}$ — угловая скорость частицы; показанное взаимное направление $\bar{\omega}$ и $\bar{H}_s$ соответствует частице с отрицательным электрическим зарядом (при положительном заряде поле $\bar{H}_s$ имеет противоположное направление); изображено сечение поля плоскостью, проходящей через ось вращения частицы.

Рассмотрим магнитные свойства системы частиц.

Допустим, что частицы равномерно распределены по некоторой области пространства. Подействуем на них однородным магнитным полем $\vec{H}$. Тогда все частицы придут во вращение с одной и той же угловой скоростью, сонаправленной псевдовектору $\vec{H}$ (при $e < 0$, см. (7.1)). При этом каждая частица создаст вокруг себя некоторое магнитное поле. В итоге на каждую частицу будут действовать, помимо поля $\vec{H}$, ее собственное магнитное поле (которое в силу (9.3) пренебрежимо мало по сравнению с $\vec{H}$), а также магнитные поля, порождаемые другими частицами. Из третьего выражения в (9.5) и из (7.1) (при учете $e < 0$ и замене обозначения $\vec{\Omega}_H$ на $\vec{\omega}$) вытекает, что составляющие этих полей вдоль направления угловой скорости сонаправлены внешнему полю. Следовательно, эти поля усиливают вращение частиц.

При равномерном распределении частиц по пространству количество частиц, центры которых находятся на расстоянии r от центра произвольной частицы, пропорционально r^2 , а магнитные поля, создаваемые ими в окрестности центра данной частицы, пропорциональны r^{-1} . Поэтому на каждую частицу действует со стороны других частиц поле тем большее, чем больший размер имеет система. Это означает, что можно образовать такую систему частиц, что их суммарное магнитное поле сравняется с внешним полем $\vec{H}$. Такое поле будет обеспечивать вращение частиц и после выключения внешнего поля. В этом случае система частиц будет порождать самоподдерживающееся магнитное поле, иначе говоря, она будет представлять собой постоянный магнит.

Расчеты дают следующие результаты:

– если расстояние между ближайшими центрами частиц составляет 10^{-10} м, то шаровая система частиц диаметром 10^{-8} м, создает в своей середине магнитное поле, равное полю, которое вызвало вращение частиц;

– пусть тело имеет цилиндрическую форму диаметром 1 см; выберем какое-либо поперечное сечение тела и рассмотрим частицы, центры которых равномерно распределены по этому сечению; такая система частиц создает в середине сечения магнитное поле, равное иницирующему внешнему полю, если расстояние между ближайшими центрами частиц составляет $9 \cdot 10^{-9}$ м, и создает на границе сечения такое же поле при расстоянии между центрами частиц $4 \cdot 10^{-9}$ м; поэтому можно ожидать, что система, в которой плотность частиц возрастает определенным образом от центра сечения к его периферии, будет порождать во всем сечении самоподдерживающееся магнитное поле, и, значит, тело в целом будет постоянным магнитом.

Следует отметить, что применительно к электронам приведенные результаты представляют собой лишь очень грубые оценки, так как при расчетах не был учтен ряд факторов, имеющих место в реальных телах. К ним относятся: неоднородность распределения делокализованных электронов (в случае металлического тела), наличие положительных зарядов, которые могут создавать магнитное поле противоположного знака, тепловое движение атомов, приводящее к рассогласованию направлений осей вращения зарядов, наличие у собственного поля электронов неучтенных слагаемых, связанных с их движением, и другие факторы. Поэтому указанные результаты позволяют сделать лишь качественный вывод: *может существовать система электронов, создающая самоподдерживающееся магнитное поле*. Подчеркнем, что это магнитное поле обусловлено *вращением* электронов, а не наличием у них спинов.

Согласно (9.1) и (9.5), собственное поле частицы убывает с расстоянием как r^{-1} . Однако поле постоянного магнита убывает как r^{-2} . Объяснить это различие можно следующим образом. В металлах делокализованные электроны находятся в основном вблизи границы тела. Положительные же заряды (протоны) располагаются в узлах кристаллической решетки, и поэтому распределены по объему тела равномерно. Допустим, что положительный заряд создает магнитное поле такое же, как электрон, но противоположного знака. В таком случае делокализованные электроны создают вне тела на расстоянии r от его поверхности поле $-\frac{A}{r}$, где A — некоторая псевдовекторная величина, а положительные заряды создают поле $\frac{A}{r+\Delta r}$, где Δr — среднее расстояние от границы тела, на котором находятся ближайшие к ней положительные заряды. Тогда суммарное поле вне тела равно $\frac{A}{r+\Delta r} - \frac{A}{r} \approx -\frac{A\Delta r}{r^2}$ (при $\Delta r \ll r$), то есть оно пропорционально r^{-2} , как и должно быть. Верно это объяснение или нет, может быть выяснено после построения модели протона как 4-х мерного объекта в пространстве Минковского.

Магнитное поле электрона (при моделировании его «точечной» частицей) ортогонально электрическому полю при любом движении электрона (см. формулу (7.24) в разд. 7 главы 4, с. 363). В частном случае, когда электрон движется прямолинейно равномерно и не вращается, его магнитное поле ортогонально еще и его скорости (см. (10.13) в разд. 10 главы 4, с. 376).

При вращении электрона вокруг неподвижного центра масс его магнитное поле имеет составляющую вдоль оси вращения (см. рис. 9.1 и третье выражение в (9.5)). Если в этом случае придать электрону движение вдоль оси вращения с небольшой скоростью, то магнитное поле

не изменит существенно своего направления, поэтому оно будет иметь составляющую вдоль направления скорости, то есть параллельную току. Именно такие магнитные поля реализуются в некоторых космических объектах [33].

Электрическое и магнитное поля «точечной» частицы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижного центра, задаются формулами (10.15) главы 4 (с. 377). В конце разд. 18 выведены формулы для дивергенции и ротора полей $\mathbf{E}$ и $\bar{H}$, порождаемых вращающейся частицей ненулевого радиуса (с. 644). Из них вытекают следующие формулы для полей вращающейся «точечной» частицы:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \Delta \frac{2e\omega z}{cr^3} \frac{\mathbf{r}}{r}; \\ \operatorname{div} \bar{H} = \nabla \cdot \bar{H} &= \Delta \frac{2e\omega z}{cr^3}; \quad \operatorname{rot} \bar{H} = \nabla \times \bar{H} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве; e — заряд электрона ($e < 0$); ω — угловая скорость вращения частицы ($\omega \geq 0$); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения относительно центра частицы; $r = |\mathbf{r}|$ ($r \neq 0$); z — координата вектора $\mathbf{r}$ вдоль оси вращения частицы.

10. Винтовая нить

В предыдущих разделах показано, что строящаяся модель электрона согласуется с экспериментальными данными. Тем не менее, построение самой модели еще не завершено. Продолжим её детализацию.

Напомним, что частица ненулевого радиуса при «взгляде» на нее издали выглядит как «точечная» частица, состоящая из времениподобных прямых (см. рис. 1.1, с. 406). При ближайшем рассмотрении эти прямые оказываются протяженными винтообразными объектами с времениподобными осями. Они именуются лучами. Каждый луч состоит из n_* одинаковых «толстых» винтовых линий, называемых спиралями, и вращается вокруг своей оси (см. рис. 1.3, с. 409). Поперечное сечение луча изображено схематично на рис. 2.1 (с. 411). Сравнение с экспериментальными данными привело к заключению, что $n_* = 137$. При таком значении n_* поперечное сечение луча имеет вид, показанный на рис. 4.1 (с. 419). Оси лучей пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. В целом частица ненулевого радиуса представляет собой четырехмерный шар в пространстве Минковского, движущийся

вдоль мировой линии. Вследствие псевдоевклидовости этого пространства, сфера, ограничивающая частицу, является аналогом однополостного гиперболоида в трехмерном собственно евклидовом пространстве (см. рис. 2.2, с. 413).

При построении частицы был введен единичный времениподобный вектор $\mathbf{i}$, направленный в сторону будущего и отложенный от центра частицы O . Он будет играть роль направляющего орта оси симметрии частицы. Трехмерная гиперплоскость L_* , проходящая через центр частицы и ортогональная вектору $\mathbf{i}$, называется собственным физическим пространством частицы. Сечение частицы гиперплоскостью L_* именуется центральным сечением частицы. Оно состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей с единственной общей точкой — центром частицы O .

В настоящем разделе мы будем рассматривать *свободную* частицу, то есть частицу, на которую не воздействуют другие тела. Согласно специальной теории относительности, мировая линия L такой частицы прямолинейна. Будем считать, что указанный выше вектор $\mathbf{i}$ совпадает с направляющим ортом мировой линии L . Примем также, что пространственное вращение частицы отсутствует. В этом случае каждый луч частицы участвует в двух движениях: в поступательном движении вместе с частицей вдоль мировой линии и во вращательном движении вокруг своей оси. С позиции механики представляется целесообразным сделать эти движения взаимозависимыми.

Воспользуемся примером со штопором для открывания винных бутылок. Известна конструкция штопора с неподвижной внешней кольцевой частью, упирающейся в горлышко бутылки. При ввинчивании такого штопора в пробку, она выходит из горлышка бутылки. Таким образом, вращательное движение штопора приводит к поступательному движению пробки.

Зададим, по аналогии с этим примером, вращение лучей частицы так, чтобы оно приводило к движению центра частицы вдоль мировой линии. Обратим внимание на следующее. В приведенном примере по мере выхода пробки из горлышка всё новые участки штопора ввинчиваются в ее верхнюю поверхность. Аналогичным образом в случае частицы для того, чтобы вращение лучей вызывало движение центра частицы вдоль мировой линии, нужно, чтобы с течением времени ввинчивались в собственное физическое пространство частицы всё новые участки лучей. Проиллюстрируем это с помощью рис. 10.1.

На рис. 10.1, *a* остов частицы, состоящий из осей лучей, движется как целое вдоль мировой линии. В этом случае движение центра части-

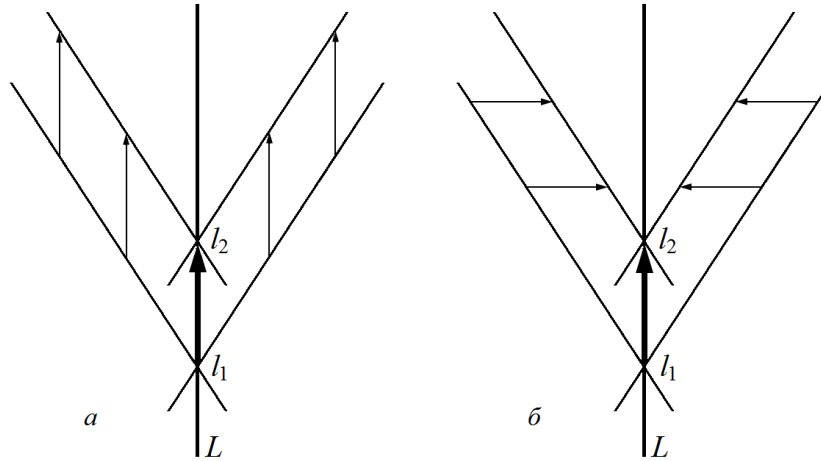


Рис. 10.1. Два варианта движения осей лучей, приводящие к одному и тому же движению остова частицы.

На каждом из рисунков показаны оси двух лучей в моменты l_1 и l_2 собственного времени частицы; толстая стрелка — вектор перемещения частицы; тонкие стрелки — возможные векторы перемещения осей лучей; L — мировая линия частицы.

цы вдоль мировой линии и вращение лучей не зависят друг от друга. На рис. 10.1, б в каждый момент времени разные элементы осей находятся в центре частицы. При таком варианте можно задать вращение винтообразных лучей так, чтобы они, ввинчиваясь в собственное физическое пространство частицы, перемещали его вместе с центром частицы вдоль мировой линии. Отметим, что движение осей лучей различается в этих двух вариантах лишь на некоторое перемещение их вдоль самих себя, что для прямых линий не обнаружимо (ср. со сказанным об аналогичной ситуации с «точечной» частицей в разд. 5 главы 4, с. 330). Поэтому при обоих вариантах, изображенных на рис. 10.1, движение остова частицы фактически является одинаковым. Формализуем данный способ движения частицы. (Резюме — в конце раздела, с. 483.)

Рассмотрим произвольный луч частицы. Считаем, что он находится в непереориентированном состоянии. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси. Этот луч содержится и вращается в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ пространства Минковского M (см. разд. 2).

Напомним, что символ $\text{Lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}\}$ обозначает линейную оболочку векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}$, верхний значок $\perp$ — переход к ортогональному допол-

нению в векторном пространстве, ассоциированном с M . Мы обозначаем аффинное (точечное) пространство и ассоциированное с ним векторное пространство единым символом, поэтому символ $C_{\mathbf{q}_0}$ обозначает как аффинное подпространство, так и ассоциированное с ним векторное пространство, $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ обозначает вместе с одномерным векторным пространством также времениподобную прямую, являющуюся осью луча с направляющим ортом $\mathbf{q}_0$, запись $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (при $\mathbf{q}_0 \nparallel \mathbf{i}$) используется для обозначения как двумерного векторного пространства, так и ортогональной к ортам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ пространственноподобной плоскости, проходящей через центр частицы O . Заметим, что $O = Lin\{\mathbf{q}_0\} \cap Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Поскольку плоскость $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ и трехмерное собственное физическое пространство частицы Γ_* ортогональны вектору $\mathbf{i}$ и проходят через центр частицы O , а пространство M четырехмерное, то $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset \Gamma_*$.

Представим каждую винтовую спираль, входящую в состав луча, в виде совокупности (связки) винтовых линий, оси которых совпадают с осью луча. Назовем эти винтовые линии *нитями* (рис. 10.2). Точки нити будем именовать ее *элементами*, чтобы отличить эти движущиеся в пространстве Минковского M фрагменты модели от неподвижных точек самого пространства M . Будем называть нить, совпадающую с центральной линией спирали, *центральной нитью*.

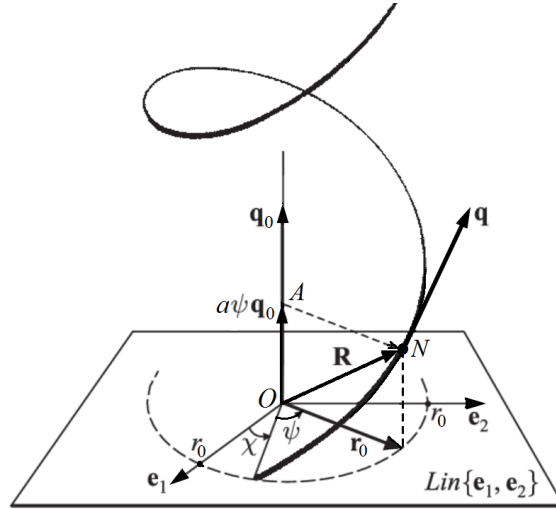


Рис. 10.2. Винтовая нить в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$.

Из $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + a\psi\mathbf{q}_0$ и $\overrightarrow{AN} \perp a\psi\mathbf{q}_0$, в силу произвольности нити, следует, что элементы всех нитей, лежащие в одном поперечном сечении луча, характеризуются одним значением параметра ψ .

Нельзя исключать того, что материальные прообразы спиралей (если они существуют) не состоят из отдельных нитей, а являются истинно сплошными объектами. В таком случае для их описания наиболее адекватным, возможно, был бы математический аппарат обобщенных функций. Представление спирали в виде связки винтовых линий позволяет использовать обычные функции математического анализа.

Введем в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в центре частицы O ($\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1$; $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$). Тогда $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. А так как $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \perp \mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$, то $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ — ортонормированный базис в $C_{\mathbf{q}_0}$, поэтому

$$C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{q}_0\} \oplus Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}. \quad (10.1)$$

Уравнение нити есть обычное уравнение винтовой линии (в трехмерном пространстве $C_{\mathbf{q}_0}$). В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ оно имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 \pm a\psi \mathbf{q}_0 = r_0 \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 \pm a\psi \mathbf{q}_0, \quad (10.2)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор элементов нити относительно центра частицы O (см. рис. 10.2); $\mathbf{r}_0 = r_0 \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2$ — проекция вектора $\mathbf{R}$ на плоскость $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; r_0 — радиус винтовой нити; χ — угол в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ между $\mathbf{e}_1$ и радиусом-вектором точки пересечения винтовой нити с плоскостью $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; ψ — *винтовая переменная* — угол, на который вектор $\mathbf{r}_0$ поворачивается при движении конца $\mathbf{R}$ вдоль нити ($\psi \in (-\infty, +\infty)$; $\psi = 0$ при $\mathbf{R} \in Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$); направление возрастания углов χ и ψ совпадает с направлением кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$; $\pm a\psi$ — натуральный параметр на оси луча, отсчитываемый от центра частицы O в направлении, указываемом вектором $\mathbf{q}_0$ (правило выбора верхнего или нижнего знака перед $a\psi$ приведено ниже; параметр a имеет размерность длины, $a > 0$, далее показано, что параметр a пропорционален шагу винтовой нити).

Ориентации в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити считаются *совпадающими* или *одинаковыми*, если при вращении вектора $\mathbf{r}_0$ в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ проекция конца вектора $\mathbf{R}$ на ось луча движется в направлении, указываемом вектором $\mathbf{q}_0$. Если же эта проекция движется в противоположном направлении, то ориентации базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити считаются *несовпадающими* или *противоположными*.

Правило выбора знака в формулах. В уравнении нити (10.2) и в последующих формулах верхний знак отвечает случаю, когда ориентации в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити совпадают, нижний знак — когда они противоположны. (Рис. 10.2 соответствует первому из этих случаев.)

Винтовые нити, входящие в состав одной и той же спирали, имеют разные значения параметров r_0 и χ . Из рис. 2.1, изображающего поперечное сечение луча (с. 411), можно заключить, что $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, причем центральная нить, то есть нить, совпадающая с центральной линией спирали, имеет радиус $r_0 = r_*$.

Введем безразмерный параметр β_0 с помощью равенства

$$a = \frac{r_0}{\beta_0}; \quad (10.3)$$

отметим, что $\beta_0 > 0$ (так как $a > 0$ и $r_0 > 0$), причем $\beta_0 = 1$ при $a = r_0$.

Обозначим параметр β_0 для центральной нити через β . Тогда равенство (10.3) для центральной нити принимает вид

$$a = \frac{r_*}{\beta}. \quad (10.4)$$

Из (10.3) и (10.4) получаем:

$$\beta_0 = \beta \frac{r_0}{r_*}. \quad (10.5)$$

В дальнейшем зачастую будем использовать вместо параметра a параметры β_0 и β , однозначно выражающиеся через a посредством равенств (10.3) и (10.4).

Найдем шаг винтовой нити.

Шаг винтовой линии есть расстояние между точками соседних витков линии, лежащими на прямой, параллельной оси винтовой линии. В нашей ситуации такие точки нити характеризуются значениями угла ψ , различающимися на 2π (см. рис. 10.2). Расстояние между этими точками равно разности соответствующих им значений натурального параметра $a\psi$ на оси луча, поэтому *шаг нити* P равен $2\pi a$:

$$P = 2\pi a = \frac{2\pi r_0}{\beta_0} = \frac{2\pi r_*}{\beta}, \quad (10.6)$$

где применены равенства (10.3) и (10.4); шаг обозначен буквой P по первой букве английского термина «pitch of screw», означающего «шаг винта». Принимая во внимание, что шаг нити одинаков вдоль всей ее длины и постоянен во времени, заключаем на основании (10.6), что параметры a , β_0 и β не зависят от винтовой переменной ψ и от времени t .

Луч состоит из одинаковых спиралей (см. рис. 1.3, с. 409), поэтому спирали, относящиеся к одному лучу, а также винтовые нити, из которых они состоят, имеют одинаковый шаг. В связи с этим будем называть шаг нити P также *шагом спирали* или, для краткости, *шагом луча*. Отметим, что разные лучи могут иметь разный шаг (см. далее).

Уравнение нити (10.2) не учитывает перемещение нити вместе с частицей вдоль мировой линии L и ее вращение вместе с лучом вокруг его оси. Составим уравнение нити, учитывающее эти движения.

Мы исследуем свободную частицу (имеющую *прямолинейную* мировую линию L) при двух дополнительных условиях: пространственное вращение частицы отсутствует и вектор $\mathbf{i}$, участвующий в построении частицы, служит направляющим ортом мировой линии L . В таком случае собственное физическое пространство частицы Γ_* движется поступательно вдоль L с единичной скоростью $\mathbf{i}$ и ось каждого луча движется поступательно, то есть с сохранением направляющего орта $\mathbf{q}_0$.

Поскольку векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ неизменны и $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, то можно считать, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ также не изменяются. Значит, сохраняется базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ пространства $C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$. При этом пространства $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $C_{\mathbf{q}_0}$ перемещаются поступательно.

Ранее мы обозначили буквой O центр частицы (движущийся вдоль мировой линии L). Далее будем обозначать этой буквой точку линии L , в которой находится центр частицы в определенный момент времени.

Рассмотрим два расположения частицы в пространстве Минковского M : одно, соответствующее нулевому моменту собственного времени частицы, и второе, отвечающее некоторому моменту l . Пусть центр частицы находится в эти моменты в точках O и O' мировой линии L соответственно (точка O' располагается по отношению к точке O при $l > 0$ в будущем, а при $l < 0$ в прошлом). Тогда перемещение центра частицы из первого расположения во второе задается вектором $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{i}l$ (потому что собственное время частицы является натуральным параметром на мировой линии L и $\mathbf{i}$ — направляющий орт линии L).

В связи с тем, что при описываемой ситуации вектор $\mathbf{i}$ и направляющие векторы $\mathbf{q}_0$ всех осей постоянны, каждая ось движется в своей фиксированной плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. А так как при обоих расположениях частицы оси всех лучей проходят через центр частицы, то любые два поступательные перемещения оси различаются лишь на некоторое смещение оси вдоль себя (убедиться в этом можно с помощью рис. 10.1). Поэтому перемещение оси из одного рассматриваемого расположения в другое может быть представлено в виде $\mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l$, где $\mathbf{i}l$ — перемещение вдоль мировой линии L , одинаковое для всех осей, $q\mathbf{q}_0l$ — некоторое перемещение оси вдоль самой себя (q — безразмерный параметр, одинаковый для всех элементов данной оси, но могущий быть разным для разных осей). Будем считать, что параметр q не зависит от l .

Пусть A — элемент оси луча, находящийся в момент 0 в точке O . Согласно изложенному, этот элемент оказывается в момент l в точке A' ,

смещенной относительно O на вектор $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l$. Значит, при расположении частицы, отвечающем моменту l , радиус-вектор $\mathbf{R}$ элементов нити, рассчитанный относительно исходной точки O , может быть представлен в виде суммы вектора $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l$ и радиуса-вектора элементов нити относительно точки A' . Если бы луч не вращался вокруг своей оси, то последний вектор был бы равен радиусу-вектору элементов нити $\mathbf{R}$, описываемому формулой (10.2). Однако луч вращается с угловой скоростью o (внутри $C_{\mathbf{q}_0}$). Учтем вращение прибавлением угла поворота $(o/c)l$ к угловой переменной χ в формуле (10.2) (это означает, что точке пересечения винтовой нити с плоскостью $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ придается вращение вокруг оси луча, см. рис. 10.2).

На основании сказанного и формулы (10.2) заключаем, что при расположении частицы с центром в точке O' (то есть в момент l) радиус-вектор $\mathbf{R}$ элементов нити относительно исходной точки O имеет вид

$$\mathbf{R}(l) = \mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l + r_0 \cos\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_1 + r_0 \sin\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_2 \pm a\psi\mathbf{q}_0, \quad (10.7)$$

где знак угловой скорости o согласован с направлением отсчета углов в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: если при движении частицы в сторону будущего луч вращается в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, то $o > 0$, если в противоположном направлении, то $o < 0$. Формула (10.7) есть искомое *уравнение винтовой нити*, учитывающее движение нити вдоль мировой линии L и ее вращение вокруг оси луча.

Радиус-вектор $\mathbf{R}$ элементов нити при расположении частицы с центром в точке O получается устремлением времени l к нулю в (10.7):

$$\mathbf{R}(0) = r_0 \cos(\chi + \psi)\mathbf{e}_1 + r_0 \sin(\chi + \psi)\mathbf{e}_2 \pm a\psi\mathbf{q}_0; \quad (10.8)$$

эта формула фактически совпадает с (10.2).

Уравнение оси луча (оно же уравнение оси нити) получим, если подставим в уравнение нити (10.7) чисто формальным образом значение радиуса r_0 , равное нулю:

$$\mathbf{R}_{\text{axis}} = \mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l \pm a\psi\mathbf{q}_0, \quad (10.9)$$

где $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ — радиус-вектор элементов оси луча относительно точки O , в которой центр частицы находится в нулевой момент времени.

Найдем единичный касательный к нити вектор $\mathbf{q}$. Для выбора одного из двух противоположных направлений касательного вектора потребуем, чтобы составляющая вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси луча $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ была сонаправлена вектору $\mathbf{q}_0$.

Поскольку каждый элемент нити характеризуется определенным значением винтовой переменной ψ (см. рис. 10.2), то вектор $\mathbf{q}$ может быть вычислен как нормированная производная $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)}$ (дифференцирование проводится по переменной $+\psi$ при совпадении ориентаций базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и нити и по переменной $-\psi$ при несовпадении их ориентаций, это обеспечивает требуемую сонаправленность составляющей вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси луча вектору $\mathbf{q}_0$ при любых взаимных ориентациях базиса и нити).

Дифференцирование обеих частей уравнения (10.7) дает:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} = \mp r_0 \sin\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right) \mathbf{e}_1 \pm r_0 \cos\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right) \mathbf{e}_2 + a \mathbf{q}_0, \quad (10.10)$$

где использована независимость величин $\mathbf{i}, l, q, \mathbf{q}_0, r_0, \chi, o, c, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, a$ от винтовой переменной ψ .

Из (10.10) с учетом ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ имеем:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \right| = \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \right|} = \sqrt{|a^2 - r_0^2|}; \quad (10.11)$$

отсюда вытекает, что при $a = r_0$ вектор $\partial \mathbf{R} / \partial(\pm\psi)$ изотропный.

Касательный к нити единичный вектор $\mathbf{q}$ задается выражением

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \right|;$$

это выражение вместе с (10.10) и (10.11) приводит к формуле

$$\mathbf{q} = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right) \mathbf{e}_1 \pm \cos\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right], \quad (10.12)$$

где применено равенство (10.3); верхние знаки отвечают случаю совпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и нити, нижние знаки отвечают случаю их несовпадения; остальные обозначения те же, что в (10.2) и (10.7). Точкой приложения вектора $\mathbf{q}$ является конец радиуса-вектора $\mathbf{R}$ (см. рис. 10.2). Составляющая вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси луча $Lin\{\mathbf{q}_0\}$, как и требуется, сонаправлена вектору $\mathbf{q}_0$.

Формула (10.12) выполняется при $\beta_0 \neq 1$. Если $\beta_0 > 1$, то нить представляет собой пространственноподобную линию (потому что в этом случае во всех точках нити вектор $\mathbf{q}$, касательный к ней, имеет отрицательный скалярный квадрат: $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = -1 < 0$). Если $0 < \beta_0 < 1$, то нить является времениподобной линией (так как $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1 > 0$).

При $\beta_0 = 1$ (то есть при $a = r_0$, см. (10.3)) нить — изотропная линия. В этом случае в качестве касательного к ней вектора можно использовать тот же вектор $\mathbf{q}$, задаваемый выражением (10.12), но без нормировочного множителя $\beta_0/\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$ (при этом будет $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0$).

Вычислим скорость нити.

Для этого необходимо *индивидуализировать* элементы нити. Каждый элемент нити характеризуется определенным значением винтовой переменной ψ (см. рис. 10.2), поэтому будем считать, что элементы нити, которым в формулах (10.7) и (10.8) отвечают одинаковые значения ψ , являются одним и тем же элементом, переместившимся из одного положения в другое. Элементы оси луча также будем индивидуализировать параметром ψ . Из рис. 10.2 видно, что все элементы луча, принадлежащие одному и тому же его поперечному сечению, характеризуются одним значением параметра ψ .

Скорость нити $\mathbf{j}$ при указанном способе индивидуализации элементов нити определим как частную производную $\partial \mathbf{R}/\partial l$ (при $\psi = \text{const}$). Дифференцируя обе части уравнения (10.7), находим, что нить *свободной* частицы движется относительно пространства M со скоростью

$$\mathbf{j}(l) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial l} = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{\partial}{\partial l} \left[-\sin\left(\chi + \frac{\partial}{\partial l} l + \psi\right) \mathbf{e}_1 + \cos\left(\chi + \frac{\partial}{\partial l} l + \psi\right) \mathbf{e}_2 \right]. \quad (10.13)$$

Поскольку элементы нити являются одновременно элементами луча и частицы, то будем называть скорость нити $\mathbf{j}$ также *скоростью луча* и *скоростью частицы*. Заметим, что $\mathbf{j}$ — безразмерная величина. В тех случаях, когда для описания движения нити нужна характеристика размерности скорости, следует брать вместо $\mathbf{j}$ величину $c\mathbf{j} = \partial \mathbf{R}/\partial t_*$ (c — скорость света; t_* — собственное время частицы, измеряемое в единицах времени, $t_* = l/c$).

Выше было показано, что ось луча перемещается за время l на вектор $\mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l$. Дифференцируя этот вектор по времени, получаем скорость оси луча. Обозначим ее символом $\mathbf{j}_0$. Эту же скорость можно найти путем формальной подстановки в (10.13) нулевого значения радиуса r_0 . Пользуясь любым из этих способов, находим *скорость оси луча* $\mathbf{j}_0$:

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0. \quad (10.14)$$

Отсюда видно, что оси лучей частицы, вследствие различия векторов $\mathbf{q}_0$ для них, движутся с разными скоростями. Только в исключительной ситуации, когда для каких-то осей выполняется $q = 0$, их скорости $\mathbf{j}_0$ оказываются одинаковыми и равными $\mathbf{i}$. Обратим внимание на два частных случая. Если $q = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$, то ось луча движется в ортогональном к себе направлении: $\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 0$. Если же $q = -1/(\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0)$, то

ось луча движется в направлении, ортогональном вектору $\mathbf{i}$: $\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i} = 0$ (здесь учтено, что $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$).

Повторим, что мы рассматриваем свободную частицу (имеющую прямолинейную мировую линию L) при двух дополнительных условиях: пространственное вращение частицы отсутствует и вектор $\mathbf{i}$, участвующий в построении частицы, служит направляющим ортом мировой линии L . При этом собственное физическое пространство частицы Γ_* движется поступательно вдоль L с единичной скоростью $\mathbf{i}$ и ось каждого луча движется поступательно, что означает сохранение ее направляющего орта $\mathbf{q}_0$.

Примем еще одно условие. Оно касается вращения лучей. Будем полагать, что *движение частицы вдоль мировой линии L происходит так, что каждая нить частицы пересекает физическое пространство Γ_* все время в одной и той же его точке*. Пользуясь упомянутым ранее наглядным примером со штопором, можно сказать, что нити как бы ввинчиваются в физическое пространство Γ_* , подобно штопору в пробку, перемещая его поступательно вдоль L . В этом случае движение лучей происходит таким образом, что в целом образуемая ими конструкция, именуемая частицей, повторяет себя во все моменты времени, непрерывно двигаясь вдоль L (как и должно быть согласно определению частицы, см. разд. 2).

Отметим, что в ситуации, изображенной на рис. 10.2, для того, чтобы нить ввинчивалась все время в одну и ту же точку плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \Gamma_*$, она должна вращаться в направлении по ходу часовой стрелки при взгляде с конца вектора $\mathbf{q}_0$, то есть в направлении убывания углов χ и ψ , поэтому в данной ситуации при выполнении принятого условия угловая скорость ω отрицательна.

Принятое условие приводит к определенной зависимости между угловой и линейной скоростями луча. Выведем эту зависимость.

Пусть l и $l + dl$ — два близких момента собственного времени частицы ($dl > 0$); A — элемент нити, находящийся в момент l в точке пересечения нити и физического пространства Γ_* (рис. 10.3). Для выполнения принятого выше условия нужно, чтобы нашелся другой элемент B нити, который, двигаясь со скоростью $\mathbf{j}$, оказался бы в момент $l + dl$ в точке пространства M , отстоящей от исходного местоположения элемента A на вектор $\mathbf{i}dl$ (потому что за время dl точка физического пространства Γ_* , в которой находился в момент l элемент A , смещается именно на вектор $\mathbf{i}dl$). Допустим, что $dl \rightarrow 0$. Тогда будет $B \rightarrow A$, поэтому можно заменить участок AB нити отрезком касательной к ней. В результате получаем следующее векторное равенство (в линейном

приближении по dl):

$$\mathbf{q}dx + \mathbf{j}dl = \mathbf{i}dl, \quad (10.15)$$

где $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити в точке A ; dx — расстояние между элементами нити A и B (см. рис. 10.3).

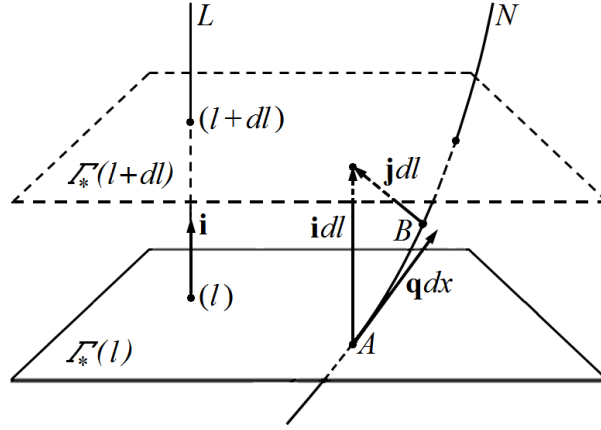


Рис. 10.3. Движение винтовой нити, при котором она пересекает физическое пространство Γ_* все время в одной и той же его точке (N — нить в момент l).

Подставляя в равенство (10.15) значения $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ из (10.12) и (10.13), находим значение dx (которое нам не потребуется, поэтому мы его не выписываем), а также получаем формулы

$$\beta_0 q = \pm \frac{or_0}{c}; \quad \beta q = \pm \frac{or_*}{c}, \quad (10.16)$$

здесь применено равенство (10.5); верхний и нижний знаки отвечают случаям соответственно совпадения и несовпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити.

Рассматривая возможные комбинации ориентаций базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити, можно убедиться в том, что при выполнении сформулированного выше условия о пересечении нитью физического пространства угловая скорость собственного вращения лучей o принимает отрицательное и положительное значения в случаях соответственно совпадения и несовпадения ориентаций базиса и нити. Из этого заключаем, учитывая правило выбора знака (с. 467), что во всех случаях имеет место неравенство

$$\pm o < 0. \quad (10.17)$$

Формулы (10.16) и неравенство (10.17) приводят к зависимостям

$$\beta_0 q = -\frac{|o|r_0}{c}; \quad \beta q = -\frac{|o|r_*}{c}; \quad (10.18)$$

отсюда следует $q < 0$, ибо $\beta_0 > 0$ (см. пояснение к (10.3)).

Таким образом, если соблюдается условие о том, что нить пересекает собственное физическое пространство частицы Γ_* все время в одной и той же его точке, то выполняются зависимости (10.18). Можно доказать, что справедливо и обратное утверждение: если верны зависимости (10.18), то нить пересекает пространство Γ_* все время в одной и той же его точке (при предположениях, что пространство Γ_* движется со скоростью $\mathbf{i}$, винтовая нить движется со скоростью $\mathbf{j}$ вида (10.13) и выполняется неравенство (10.17)).

При изменении собственного времени частицы на dl каждый луч частицы поворачивается вокруг своей оси $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ на угол $(o/c)dl$. Следовательно, при полном обороте лучей, то есть при повороте их на угол 2π , выполняется равенство

$$\frac{|o|}{c}|dl_{2\pi}| = 2\pi, \quad (10.19)$$

где $|dl_{2\pi}|$ — расстояние, на которое центр частицы смещается вдоль мировой линии L при повороте лучей на угол 2π (знаки модуля поставлены, так как величины o и $dl_{2\pi}$ могут быть отрицательными).

Из (10.6), (10.18) и (10.19) находим, что при одном полном обороте лучей центр частицы смещается вдоль мировой линии L на расстояние

$$|dl_{2\pi}| = 2\pi \frac{c}{|o|} = 2\pi \frac{r_*}{\beta|q|} = \frac{P}{|q|} \quad (\text{при } o \neq 0 \text{ и } q \neq 0), \quad (10.20)$$

где P — шаг луча (он же — шаг винтовой нити и шаг спирали).

Итак, условие, касающееся пересечения нитями физического пространства Γ_* , привело к зависимостям (10.18). Эти зависимости устанавливают связь между угловой скоростью вращения луча o , линейной скоростью луча $\mathbf{j}$ (через параметр q , входящий в выражение (10.13) для скорости $\mathbf{j}$) и шагом луча P (через параметры β_0 и β , связанные с шагом P формулой (10.6)). Для дальнейшего удобно трактовать зависимости (10.18) как связь между тремя величинами: параметром β_0 (или β), параметром q и произведением $|o|r_0$ (или $|o|r_*$). Зависимости (10.18) не задают точные значения этих величин, поэтому имеется возможность достаточно произвольного выбора значений двух из них.

Конкретизируем параметр q . Сделаем это путем фиксирования определенного способа движения осей лучей. В связи с отсутствием объективных оснований для выбора одного способа движения из многих возможных, воспользуемся субъективным предпочтением автора.

Примем, что *ось каждого луча движется поступательно в направлении, ортогональном мировой линии*, как изображено на рис. 10.1,б.

Обозначим через φ угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ (он определяется формулой $\text{ch } \varphi = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i}$, потому что $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ — единичные времениподобные векторы, имеющие одинаковую временную ориентацию).

Скорость оси луча $\mathbf{j}_0$ описывается равенством (10.14):

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0. \quad (10.21)$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{i}$. Так как $\mathbf{i} \in L$ и $\mathbf{j}_0 \perp L$ (в силу сделанного допущения), то $\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i} = 0$, поэтому с учетом $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} = \text{ch } \varphi$, можем записать:

$$0 = \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} = 1 + q \text{ch } \varphi.$$

Отсюда находим параметр q :

$$q = -\frac{1}{\text{ch } \varphi}; \quad (10.22)$$

напомним, что параметр q введен нами как безразмерная величина, одинаковая вдоль всей оси и не зависящая от времени (из (10.22) видно, что параметр q может быть разным для разных осей, из-за различия углов φ).

Из (10.18), (10.20) и (10.22) получаем:

$$\beta_0 = \frac{|o|r_0 \text{ch } \varphi}{c}; \quad \beta = \frac{|o|r_* \text{ch } \varphi}{c}; \quad (10.23)$$

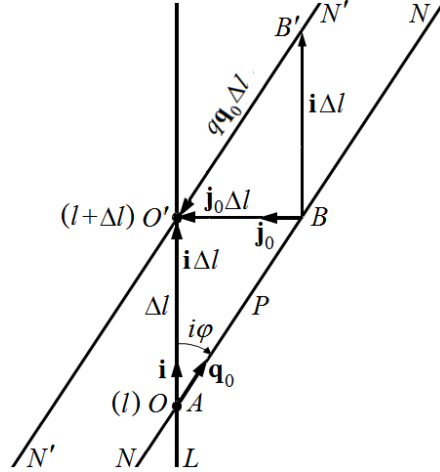
$$P = \frac{2\pi c}{|o| \text{ch } \varphi}. \quad (10.24)$$

Проиллюстрируем указанное движение оси луча рисунком 10.4.

Рассмотрим $\triangle OO'B$ на рис. 10.4. Его вершина O — точка мировой линии L , в которой центр частицы находится в момент l собственного времени частицы. В этот момент ось луча занимает положение NN . Пусть A — элемент оси, находящийся в момент l в точке O , B — элемент оси, отстоящий от A на шаг луча P в сторону будущего. Двигаясь вместе с осью, элемент B оказывается через некоторый промежуток времени Δl в точке O' мировой линии L ($\Delta l > 0$). При этом сама ось

Рис. 10.4. Движение оси луча со скоростью $\mathbf{j}_0$, ортогональной мировой линии L .

Ось находится в положении NN в момент собственного времени частицы l и в положении $N'N'$ в момент $l + \Delta l$. Длина отрезка оси AB равна шагу луча P . Мнимая единица i в обозначении угла указывает на необходимость применения гиперболических функций при оперировании с этим углом.



луча оказывается в положении $N'N'$. Так как $O' \in L$ и прошло время Δl от момента l , то O' — местоположение центра частицы в момент $l + \Delta l$. А поскольку собственное время частицы l (измеряемое в единицах длины) является натуральным параметром на мировой линии L , то расстояние между точками O и O' равно Δl .

Таким образом, в $\triangle OO'B$ выполняются зависимости: $|OO'| = \Delta l$, $|OB| = P$ и $O'B \perp OO'$ (потому что $O'B \parallel \mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}_0 \perp OO'$). Эти зависимости влекут равенство

$$\Delta l = P \operatorname{ch} \varphi, \quad (10.25)$$

где φ — угол при вершине O (он же угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$).

В моменты времени l и $l + \Delta l$ в центре частицы находятся соответственно элементы оси A и B , отстоящие друг от друга на шаг луча P , поэтому элементы нити, ввинчивающиеся в гиперплоскость Γ_* в эти же моменты, тоже отстоят друг от друга на шаг P . Это означает, что за время Δl нить поворачивается вокруг своей оси на один оборот. Так как угол поворота за время Δl равен $\frac{|o|}{c} \Delta l$, то

$$\frac{|o|}{c} \Delta l = 2\pi, \quad (10.26)$$

где o — угловая скорость вращения луча (она заключена под знак модуля, потому что может принимать отрицательные значения). Равенство (10.26) эквивалентно равенству (10.19).

На основании (10.25) и (10.26) снова приходим к формуле (10.24) для шага луча: $P = 2\pi c / (|o| \operatorname{ch} \varphi)$. Эта формула с помощью (10.6) дает полученные выше значения (10.23) параметров β_0 и β .

Теперь взглянем на $\triangle O'B'B$ на рис. 10.4. Его сторона BB' , по построению, параллельна L . Из этого и из $N'N' \parallel NN$ имеем: $|BB'| = |OO'| = \Delta l$. Вектор $\mathbf{j}_0 \Delta l$, направленный вдоль стороны $O'B$ треугольника, есть перемещение оси луча за время Δl со скоростью $\mathbf{j}_0$, ортогональной мировой линии L . Введем векторы, направленные вдоль сторон BB' и $O'B'$ этого треугольника, как показано на рис. 10.4. Тогда получим разложение перемещения $\mathbf{j}_0 \Delta l$ на сумму перемещения $\mathbf{i} \Delta l$ такого же, как у центра частицы (ибо $BB' \parallel \mathbf{i}$ и $|BB'| = |OO'| = \Delta l$), и перемещения $q\mathbf{q}_0 \Delta l$ вдоль самой оси (при некотором параметре q): $\mathbf{j}_0 \Delta l = \mathbf{i} \Delta l + q\mathbf{q}_0 \Delta l$. Сокращение обеих частей равенства на Δl , дает для скорости оси луча $\mathbf{j}_0$ формулу (10.21): $\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0$.

Кроме того, в $\triangle O'B'B$ стороны $O'B$ и BB' взаимно ортогональны и угол при вершине B' равен углу при вершине O в $\triangle OO'B$, то есть равен φ . Следовательно, $|BB'| = |O'B'| \operatorname{ch} \varphi$, откуда $|\mathbf{i} \Delta l| = |q\mathbf{q}_0 \Delta l| \operatorname{ch} \varphi$ и, значит, $\Delta l = |q| \Delta l \operatorname{ch} \varphi$ (с учетом $|\mathbf{i}| = |\mathbf{q}_0| = 1$ и $\Delta l > 0$). Сокращая на Δl , получаем: $|q| \operatorname{ch} \varphi = 1$. Так как вектор $\overrightarrow{B'O'} = q\mathbf{q}_0 \Delta l$ противоположен вектору $\mathbf{q}_0$, то $q < 0$, поэтому из последнего равенства вновь вытекает формула (10.22) для параметра q : $q = -1/\operatorname{ch} \varphi$.

Итак, мы конкретизировали параметр q . Теперь уточним значение произведения $|o|r_*$, входящего, как и q , в (10.18).

Произведение $|o|r_*$ представляет собой линейную скорость центров кругов, образующих поперечное сечение луча, при вращении луча с угловой скоростью o (рис. 10.5).

Принимая во внимание, что центр частицы движется вдоль мировой линии в пространстве M с единичной скоростью (в безразмерных единицах), естественно допустить, что при вращении лучей линейная скорость центров кругов, образующих поперечное сечение луча, тоже является единичной. При использовании обычной размерности для скорости это означает, что обе скорости равны скорости света c . Здесь однако имеется сложность. Дело в том, что разные точки кругов, образующих поперечное сечение луча, находятся на разных расстояниях r_0 от оси вращения и поэтому вращаются с разными линейными скоростями $|o|r_0$. Если принять, что $|o|r_* = c$, то те точки кругов, у которых расстояние от оси вращения r_0 меньше r_* , будут иметь скорость, меньшую c , а точки с $r_0 > r_*$ будут иметь скорость, большую c .

Учитывая, что $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, рассмотрим три варианта вращения лучей, добавив к варианту $|o|r_* = c$ еще два случая, отвечающие предельным значениям параметра r_0 :

$$a) |o|r_{0min} = |o|(r_* - p_*) = c; \quad б) |o|r_* = c; \quad в) |o|r_{0max} = |o|(r_* + p_*) = c. \quad (10.27)$$

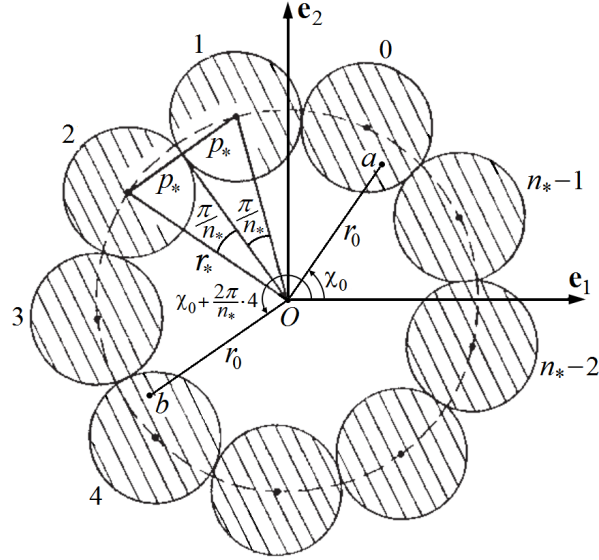


Рис. 10.5. Поперечное сечение луча и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Равенства (10.27) с помощью формулы (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$) приводят к трем значениям произведения $|o|r_*$:

$$a) |o|r_* = \frac{c}{1 - \sin \frac{\pi}{n_*}}; \quad б) |o|r_* = c; \quad в) |o|r_* = \frac{c}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (10.28)$$

Подстановка этих значений произведения $|o|r_*$ во вторую формулу (10.23), дает три значения параметра β :

$$a) \beta = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 - \sin \frac{\pi}{n_*}}; \quad б) \beta = \operatorname{ch} \varphi; \quad в) \beta = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (10.29)$$

Из (10.5) и (10.29) получаем три значения параметра β_0 :

$$a) \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_* \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}; \quad б) \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_*}; \quad в) \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (10.30)$$

Найдем тип винтовых линий при этих вариантах вращения лучей. Ранее было показано, что винтовая нить является времениподобной линией при $0 < \beta_0 < 1$, изотропной линией при $\beta_0 = 1$ и пространственноподобной линией при $\beta_0 > 1$.

Так как случай $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$ исключен из рассмотрения (см. разд. 2), то угол φ между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ не равен нулю, значит, $\text{ch } \varphi > 1$. Кроме того, $\beta_0 > 0$ (см. (10.3)). Учитывая это, а также равенства $r_{0\min} = r_* - p_*$ и $p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$, находим применительно к варианту *a* в (10.30):

$$\beta_0 \geq \frac{r_{0\min} \text{ch } \varphi}{r_* \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} = \frac{(r_* - p_*) \text{ch } \varphi}{r_* \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} = \frac{\left(r_* - r_* \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \text{ch } \varphi}{r_* \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} = \text{ch } \varphi > 1,$$

откуда $\beta_0 > 1$. Следовательно, при варианте *a* все винтовые нити частицы являются пространственноподобными.

В случае варианта *b* нить является времениподобной, изотропной и пространственноподобной при $r_0 \text{ch } \varphi < r_*$, $r_0 \text{ch } \varphi = r_*$ и $r_0 \text{ch } \varphi > r_*$ соответственно. При варианте *в* нить является времениподобной, изотропной и пространственноподобной при $r_0 \text{ch } \varphi < r_* + p_*$, $r_0 \text{ch } \varphi = r_* + p_*$ и $r_0 \text{ch } \varphi > r_* + p_*$ соответственно. Отсюда, в силу $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ и $\text{ch } \varphi \in (1, +\infty)$, вытекает, что при вариантах *b* и *в* частица содержит нити всех трех типов, при этом лучи, образующие с вектором $\mathbf{i}$ большие углы φ , состоят только из пространственноподобных нитей.

Естественно ожидать (если модель адекватна реальности), что все лучи частицы состоят из винтовых нитей одного типа, то есть выполняется вариант *a*, при котором все нити являются пространственноподобными линиями. Тем не менее, не будем исключать возможность реализации и других вариантов. Заметим, что в разд. 7 был принят вариант *в*, при котором $|o|r_{0\max} = |o|(r_* + p_*) = c$. Если же пренебречь величиной p_*/r_* по сравнению с единицей, то все три варианта вращения лучей сводятся к варианту *б*: $|o|r_* = c$.

Мы рассмотрели одну винтовую нить из связки нитей, образующих спираль. Она задается уравнением (10.7). Другие нити, входящие в состав этой же спирали, описываются тем же уравнением (10.7), но с иными значениями параметров r_0 и χ .

Лучи частицы имеют осевую симметрию порядка n_* (где n_* — количество спиралей в луче; см. рис. 1.3, с. 409, и рис. 10.5). Это означает, что луч приходит в совмещение сам с собой при повороте вокруг своей оси (внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$) на любой угол, кратный $2\pi/n_*$.

Будем называть нити разных спиралей луча, преобразующиеся друг в друга при таких поворотах, *соответственными нитями*.

Занумеруем круги, образующие поперечное сечение луча, и проходящие через них спирали целыми числами от 0 до $n_* - 1$, начиная с произвольного круга (и соответствующей спирали) и увеличивая их номера в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ (см. рис. 10.5).

Тогда в уравнении нити (10.7) и в других уравнениях угол χ может быть представлен в виде

$$\chi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi, \quad (10.31)$$

где ξ — номер спирали, которой принадлежит рассматриваемая нить ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); χ_0 — значение угла χ для нити, которая относится к спирали № 0 и для которой рассматриваемая нить является соответственной. На рис. 10.5 буквами a и b обозначены точки, через которые проходят соответственные нити спиралей № 0 и № 4. Эти нити имеют одинаковый радиус r_0 , но их углы χ различаются на $\frac{2\pi}{n_*} \cdot 4$.

Каждая нить, входящая в состав спирали № 0, характеризуется своей парой величин (r_0, χ_0) . Поскольку угол χ_0 зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (см. рис. 10.5), то он фактически играет роль фазового угла. Основные последующие результаты от угла χ_0 не зависят.

Мы исследуем луч, находящийся в непереориентированном состоянии. Для дальнейшего важно, чтобы все лучи имели в исходном непереориентированном состоянии *согласованные ориентации*. Это подразумевает выполнение следующих условий:

а) для каждого луча базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в соответствующей плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ строится так, чтобы для всех лучей базисы $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ имели в пространстве Минковского M одинаковую ориентацию;

б) для всех лучей знак в уравнении нити (10.7) перед последним слагаемым в правой части одинаков;

в) направление вращения каждого луча в соответствующем подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$ (относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$) одинаково.

В разд. 5 доказано, что, вследствие четырехмерности пространства Минковского, луч может поворачиваться вокруг своей оси не только внутри трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$, но и с выходом из него. После такого поворота на угол π луч снова оказывается внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$, при этом он становится *переориентированным*. Это означает, что винтовые спирали, составляющие луч, преобразуются из правозакрученных в левозакрученные (или наоборот, если вначале они были левозакрученными). Одновременно луч меняет направление вращения внутри $C_{\mathbf{q}_0}$ на противоположное. Данное преобразование луча реализуется оператором Π_γ вида (5.16), который поворачивает луч на

угол γ с выходом из $C_{\mathbf{q}_0}$. Внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ результат действия этого оператора при $\gamma = \pi$ эквивалентен зеркальному отражению в плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{q}_0\}$ (см. разд. 5, с. 432). Этот результат можно трактовать как то, что у векторов, лежащих в $C_{\mathbf{q}_0}$, знак составляющей вдоль вектора $\mathbf{e}_2$ меняется на противоположный. Поэтому, изменяя у векторов $\mathbf{R}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ в формулах (10.7), (10.12) и (10.13) знаки составляющих вдоль вектора $\mathbf{e}_2$, получаем аналогичные характеристики *переориентированной нити* (будем помечать их штрихами) — радиус-вектор $\mathbf{R}'$ элементов нити относительно точки O (в которой центр частицы находится в нулевой момент времени), единичный касательный к нити вектор $\mathbf{q}'$ и скорость нити $\mathbf{j}'$:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l + r_0 \cos\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_1 - r_0 \sin\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_2 \pm a\psi\mathbf{q}_0; \quad (10.32)$$

$$\mathbf{q}' = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_1 \mp \cos\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0}\mathbf{q}_0 \right]; \quad (10.33)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \left[-\sin\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_1 - \cos\left(\chi + \frac{o}{c}l + \psi\right)\mathbf{e}_2 \right], \quad (10.34)$$

где $\mathbf{i}$ — направляющий орт мировой линии; l — собственное время частицы, измеряемое в единицах длины; q — безразмерный параметр, одинаковый для всех элементов луча и не зависящий от времени (он может быть разным для разных лучей; при определенном движении оси луча параметр q имеет вид (10.22)); $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча; остальные обозначения приведены в пояснениях к формулам (10.2) и (10.7), см. также (10.3) и правило выбора знака (с. 467). Будем называть скорость нити $\mathbf{j}'$ также *скоростью переориентированного луча*.

В связи с тем, что ось луча не меняет своего положения при переориентации луча, радиус-вектор $\mathbf{R}'_{\text{axis}}$ и скорость $\mathbf{j}'_0$ элементов оси переориентированного луча совпадают с аналогичными характеристиками $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ и $\mathbf{j}_0$ оси непереориентированного луча, задаваемыми формулами (10.9) и (10.14):

$$\mathbf{R}'_{\text{axis}} = \mathbf{R}_{\text{axis}} = \mathbf{i}l + q\mathbf{q}_0l \pm a\psi\mathbf{q}_0; \quad (10.35)$$

$$\mathbf{j}'_0 = \mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0. \quad (10.36)$$

Подчеркнем, что в формулах (10.32) – (10.36) все величины относятся к исходному непереориентированному состоянию луча.

Резюме. Рассмотрено движение *свободной* частицы. Мировая линия такой частицы, согласно теории относительности, прямолинейна. Используются два условия: пространственное вращение частицы отсутствует и вектор $\mathbf{i}$, участвующий в построении частицы, является направляющим ортом мировой линии L . В этом случае ось каждого луча движется поступательно, то есть с сохранением направляющего орта $\mathbf{q}_0$, и собственное физическое пространство частицы Γ_* движется поступательно вдоль L с единичной скоростью $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{j}_{\Gamma_*} = \mathbf{i}, \quad (10.37)$$

где $\mathbf{j}_{\Gamma_*}$ — скорость пространства Γ_* относительно пространства Минковского M . Равенство (10.37) фактически задает индивидуализацию точек пространства Γ_* . А именно, при двух расположениях пространства Γ_* , отвечающих моментам времени l и $l + \Delta l$, точка $A \in \Gamma_*(l)$ и точка $B \in \Gamma_*(l + \Delta l)$, отстоящие друг от друга на вектор $\mathbf{i}\Delta l$, считаются одной и той же точкой, переместившейся из одного положения в другое.

Выведены уравнения, которые задают для непереориентированного и переориентированного состояний луча радиус-вектор элементов винтовой нити, вектор, касательный к нити, и скорость нити (уравнения (10.7), (10.12), (10.13) и (10.32)–(10.34)). Подчеркнем, что эти уравнения не зависят от наличия или отсутствия связи между линейной и вращательной составляющими движения луча.

Добавочное условие, согласно которому *каждая винтовая нить пересекает собственное физическое пространство частицы Γ_* все время в одной и той же его точке*, приводит к зависимостям (10.18), которые связывают между собой угловую скорость луча ω , его линейную скорость $\mathbf{j}$ (через параметр q , входящий в выражение (10.13) для скорости $\mathbf{j}$) и шаг луча P (через параметры β_0 и β , связанные с P формулой (10.6)). При данном условии движение лучей происходит таким образом, что вся конструкция, называемая частицей, повторяет себя во все моменты времени, непрерывно двигаясь вдоль мировой линии.

Еще одно условие, в соответствии с которым *ось каждого луча движется поступательно в направлении, ортогональном мировой линии*, позволяет получить конкретное значение (10.22) параметра q , входящего в уравнения для радиуса-вектора и скорости нити. При этом шаг луча P задается формулой (10.24):

$$P = \frac{2\pi c}{|\omega| \operatorname{ch} \varphi}, \quad (10.38)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$.

Взаимно однозначная зависимость между шагом луча P и углом φ , вытекающая из формулы (10.38), делает объективно выделенным вектор $\mathbf{i}$. Действительно, поскольку $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча, то φ есть угол наклона оси луча по отношению к вектору $\mathbf{i}$. А так как остальные величины в (10.38) являются константами, то лучи частицы, которые имеют один и тот же шаг P , одинаково наклонены по отношению к вектору $\mathbf{i}$, а лучи, имеющие разный шаг P , наклонены по отношению к $\mathbf{i}$ по-разному. С учетом того, что винтообразные лучи с одинаковым шагом геометрически идентичны и оси лучей равномерно распределены по внутренности светового конуса, заключаем из сказанного, что частица симметрична относительно поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$ (с точностью до несущественного фазового угла χ_0 , см. с. 481). Следовательно, *вектор $\mathbf{i}$ представляет собой направляющий орт оси симметрии частицы*, то есть он в самом деле объективно выделен (образно говоря, вектор $\mathbf{i}$ может быть найден по мгновенной фотографии частицы).

Обращено внимание на то, что центр частицы движется вдоль мировой линии в пространстве M с единичной скоростью. По аналогии с этим предположено, что *при вращении лучей линейная скорость $|o|r_*$ центров кругов, образующих поперечное сечение луча, тоже является единичной* (в безразмерных единицах; при использовании для скорости обычной размерности обе скорости равны c). Далее это предположение расширено: рассмотрены три варианта значений скорости $|o|r_*$, при которых вращаются с линейной скоростью c винтовые нити с радиусами r_{0min} , или r_* , или r_{0max} (см. (10.27) и (10.28)).

Исследованный в настоящем разделе способ движения частицы, очевидно, не единственно возможный. Например, оси лучей могут двигаться в ортогональных к себе направлениях ($\mathbf{j}_0 \perp \mathbf{q}_0$), а не в направлениях, ортогональных мировой линии ($\mathbf{j}_0 \perp \mathbf{i}$), как принято нами (заметим, что в таком случае будет $q = -\operatorname{ch} \varphi$ вместо полученного выше значения $q = -1/\operatorname{ch} \varphi$). Возможен также вариант, когда, в противоположность принятому здесь, шаг луча P одинаков для всех лучей, а угловая скорость вращения лучей o , наоборот, различна для разных лучей, и т. п.

В дальнейшем будем считать, что свободная частица, то есть частица, не испытывающая внешнего воздействия, движется именно так, как указано в данном разделе (при принятых дополнительных условиях).

11. Скорость частицы

В предыдущем разделе найдены скорость и другие характеристики свободной частицы при дополнительных условиях: пространственное вращение частицы отсутствует и направляющий орт оси симметрии частицы $\mathbf{i}$ служит направляющим ортом мировой линии L (прямолинейной в случае свободной частицы). Внешнее воздействие на частицу может приводить к пространственному вращению частицы и к ее ускорению, влекущему искривление мировой линии.

Настоящий раздел посвящен определению скорости и других характеристик частицы при произвольном ее движении (в предположении, что мировая линия L гладкая и все функции непрерывно дифференцируемые требуемое число раз). В связи с тем, что в общем случае мировая линия L не прямолинейна, далее $\mathbf{i}$ является единичным вектором, касательным к L в точке нахождения центра частицы.

Напомним, что луч частицы с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$ содержится и вращается в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$ пространства Минковского M , задаваемом формулой $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Напомним также, что *остов частицы* — это совокупность осей лучей. Вследствие постоянства углов между всеми осями и углов между вектором $\mathbf{i}$ и осями, остов частицы движется вдоль мировой линии как недеформируемое тело. При этом остов не зависит от движения осей вдоль самих себя (см. рис. 10.1, с. 465).

В дальнейшем будет построен ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в $C_{\mathbf{q}_0}$, имеющий начало в центре частицы и неподвижный относительно остова частицы. Такой базис свой для каждого луча.

Определение. Пусть луч с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$ вращается внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$ вокруг своей оси. **Угловая скорость луча o** есть производная угла поворота луча по собственному времени частицы t_* , причем угол поворота отсчитывается относительно указанного выше базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$.

Угловая скорость o имеет размерность (время) $^{-1}$; $o > 0$, если при движении частицы в сторону будущего луч вращается в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, и $o < 0$, если луч вращается в противоположном направлении. Мы постулируем, что *угловая скорость o одинакова для всех лучей и не зависит от времени*.

При таком определении угловой скорости o верно следующее утверждение: при изменении собственного времени частицы на Δt_* каждый луч частицы поворачивается в $C_{\mathbf{q}_0}$ вокруг своей оси $\text{Lin}\{\mathbf{q}_0\}$ на угол $o\Delta t_*$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$.

Рассмотрим луч частицы с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$, находящийся в непереориентированном состоянии.

Пусть l_0 — фиксированный и l — произвольный (текущий) моменты собственного времени частицы. Исследуем перемещение луча за промежуток времени $[l_0, l]$ (будем использовать это обозначение промежутка как при $l \geq l_0$, так и при $l < l_0$; l измеряется в единицах длины, $l = ct_*$). Обозначим: $\Delta l = l - l_0$. На рис. 11.1 изображены мировая линия L и ось луча в моменты l_0 и l .

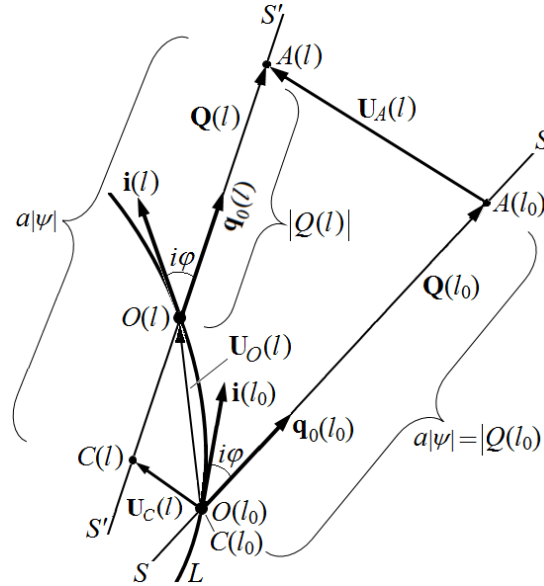


Рис. 11.1. Ось луча частицы в моменты l_0 и l собственного времени частицы (SS и $S'S'$ соответственно).

O — центр частицы, движущийся вдоль мировой линии L ; A — некоторый элемент оси луча; C — элемент оси луча, находящийся в момент l_0 в центре частицы O ; $\mathbf{U}_O$, $\mathbf{U}_A$ и $\mathbf{U}_C$ — векторы перемещения центра частицы O и элементов оси A и C за время Δl ; $a|\psi|$ — расстояние между C и A (оно не меняется при движении оси); $\mathbf{Q} = \overrightarrow{OA} = Q\mathbf{q}_0$ — вектор, соединяющий центр частицы O с элементом A ; $|Q|$ — расстояние между O и A (может меняться при движении оси); угол φ между вектором $\mathbf{i}$ и направляющим ортом оси луча $\mathbf{q}_0$ постоянен; символ i в обозначении угла указывает на необходимость использования гиперболических функций при оперировании с этим углом; линия L может не быть плоской кривой; прямые SS и $S'S'$ могут не лежать в одной плоскости.

Луч участвует в нескольких движениях: в движении вдоль мировой линии L , в движении вдоль своей оси и во вращении вокруг оси. Для строгого описания перемещения луча нам потребуются пять базисов. Основной базис, который построим последним, является неподвижным относительно остова частицы, имеет начало в центре частицы $O(l)$ и движется вместе с остовом вдоль мировой линии L . Его векторы будем обозначать без штрихов. Остальные (вспомогательные) базисы движутся относительно этого базиса и относительно друг друга. Их векторы будем помечать штрихами. Сразу же отметим, чтобы не повторять это каждый раз, что *все вводимые базисы ортонормированные, а индекс i при базисных векторах принимает значения 0, 1, 2, 3*.

Введем базис $\{\mathbf{e}_i'''\} = \{\mathbf{e}_0''' = \mathbf{q}_0; \mathbf{e}_1'''; \mathbf{e}_2'''; \mathbf{e}_3'''\}$, неподвижно скрепленный с лучом и имеющий начало в точке $C(l)$ (см. рис. 11.1; все векторы относятся к моменту l). Нить луча в этом базисе задается уравнением типа (10.2) (с. 467). Это означает, что радиус-вектор $\mathbf{R}_{C(l)}''''$ произвольного элемента N нити относительно точки $C(l)$ имеет в любой момент времени l вид

$$\mathbf{R}_{C(l)}''''(N) = r_0 \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1'''' + r_0 \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2'''' \pm a\psi \mathbf{q}_0, \quad (11.1)$$

где r_0 , χ и a одинаковы для всех элементов нити, ψ относится к элементу N (см. пояснение к (10.2)); $\pm a\psi$ — натуральный параметр на оси луча, отсчитываемый от точки $C(l)$ в направлении, задаваемом вектором $\mathbf{q}_0(l)$ (правило выбора знака перед $a\psi$ приведено на с. 467, указанный в нем базис нужно заменить базисом $\{\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_2''', \mathbf{q}_0\}$).

Введем базис $\{\mathbf{e}_i'''\} = \{\mathbf{e}_0''' = \mathbf{e}_0'''' = \mathbf{q}_0; \mathbf{e}_1'''; \mathbf{e}_2'''; \mathbf{e}_3''' = \mathbf{e}_3''''\}$ с началом в той же точке $C(l)$, что и начало базиса $\{\mathbf{e}_i''''\}$ (его векторы $\mathbf{e}_0'''$ и $\mathbf{e}_3'''$ совпадают с соответствующими векторами базиса $\{\mathbf{e}_i''''\}$).

Пусть базис $\{\mathbf{e}_i''''\}$ вращается вместе с лучом (при переменном l) с постоянной угловой скоростью ω относительно базиса $\{\mathbf{e}_i'''\}$, причем вращение происходит вокруг плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_0''', \mathbf{e}_3'''\} = \text{Lin}\{\mathbf{e}_0'''', \mathbf{e}_3''''\}$ (это означает, что псевдоевклидова плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{e}_0''', \mathbf{e}_3'''\}$ остается неподвижной, а ортогональная к ней пространственноподобная плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_2'''\}$ является инвариантной, то есть преобразуется сама в себя). В таком случае

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'''' = \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \mathbf{e}_1''' + \sin\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \mathbf{e}_2''' \\ \mathbf{e}_2'''' = -\sin\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \mathbf{e}_1''' + \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \mathbf{e}_2''' \end{cases} \quad (11.2)$$

где $\Delta l = l - l_0$; использовано условие $\mathbf{e}_1'''' = \mathbf{e}_1'''$ и $\mathbf{e}_2'''' = \mathbf{e}_2'''$ при $\Delta l = 0$.

Так как базисы $\{\mathbf{e}_i'''\}$ и $\{\mathbf{e}_i''''\}$ имеют общее начало, то радиусы-векторы элементов нити в этих базисах совпадают ($\mathbf{R}_{C(l)}''' = \mathbf{R}_{C(l)}''''$), поэтому, подставляя в (11.1) значения базисных векторов из (11.2) и производя очевидные преобразования, получаем:

$$\mathbf{R}_{C(l)}'''(N) = r_0 \cos\left(\chi + \frac{0}{c}\Delta l + \psi\right)\mathbf{e}_1''' + r_0 \sin\left(\chi + \frac{0}{c}\Delta l + \psi\right)\mathbf{e}_2''' \pm a\psi\mathbf{q}_0. \quad (11.3)$$

Введем базис $\{\mathbf{e}_i''\}$ с началом в центре частицы $O(l)$ и векторами, совпадающими с векторами базиса $\{\mathbf{e}_i'''\}$ (в частности, $\mathbf{e}_0'' = \mathbf{e}_0''' = \mathbf{q}_0$).

Пусть базис $\{\mathbf{e}_i'''\}$ движется вместе с лучом (при переменном l) относительно базиса $\{\mathbf{e}_i''\}$ со скоростью $q\mathbf{e}_0'' = q\mathbf{q}_0$ вдоль оси луча, где q — безразмерный параметр, одинаковый для всех элементов луча и не зависящий от времени (он может быть разным для разных лучей).

Найдем перемещение луча относительно базиса $\{\mathbf{e}_i''\}$ за промежуток времени $[l_0, l]$. В связи с тем, что все элементы луча движутся с одной скоростью, достаточно найти перемещение любого его элемента. Возьмем некоторый элемент A оси луча. Так как луч движется относительно базиса $\{\mathbf{e}_i''\}$ с постоянной скоростью $q\mathbf{e}_0''$, то за промежуток времени $[l_0, l]$ элемент A перемещается относительно этого базиса на вектор $q\mathbf{e}_0''\Delta l$ (где $\Delta l = l - l_0$). В момент l_0 элемент A отстоит от начала базиса O на вектор $\mathbf{Q}(l_0) = Q(l_0)\mathbf{e}_0''$, а в момент l — на вектор $\mathbf{Q}(l) = Q(l)\mathbf{e}_0''$ (см. рис. 11.1 и подпись к нему с учетом $\mathbf{e}_0'' = \mathbf{q}_0$), значит, $Q(l)\mathbf{e}_0'' = Q(l_0)\mathbf{e}_0'' + q\Delta l\mathbf{e}_0''$, откуда

$$q\Delta l = Q(l) - Q(l_0) \quad (\text{где } \Delta l = l - l_0); \quad (11.4)$$

вследствие $q = \text{const}$, это равенство выполняется при любых l и l_0 .

Из (11.4) вытекает

$$q = \frac{dQ}{dl}. \quad (11.5)$$

Параметр ψ , входящий в (11.1) и (11.3), индивидуализирует элемент нити N (см. с. 472). Далее будем считать, что A — элемент оси луча, которому отвечает такое же значение ψ , как элементу нити N . На основании рис. 10.2 (с. 466) можно заключить, что $\overrightarrow{AN} \perp \mathbf{q}_0(l)$ и $|\overrightarrow{AN}| = r_0$.

На рис. 11.2 изображены элемент нити N и элемент оси луча A , характеризующиеся одинаковым значением параметра ψ . Видно, что $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$, где все точки относятся к моменту l , поэтому

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA}. \quad (11.6)$$

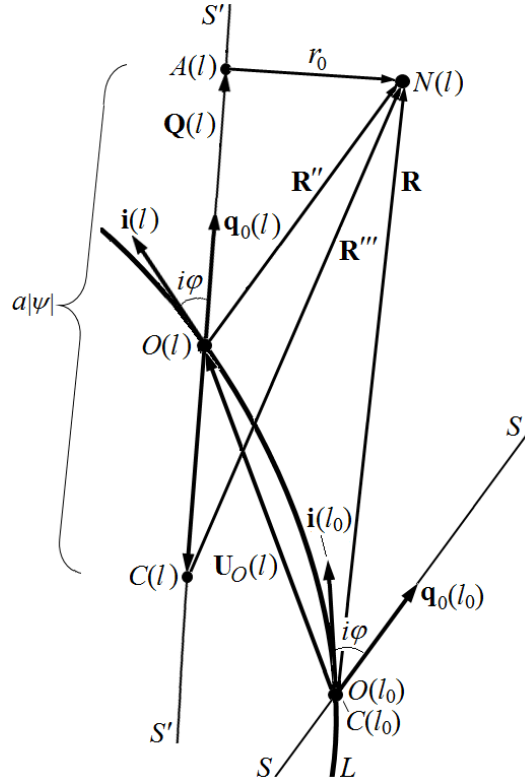


Рис. 11.2. Элемент нити N (в момент l) и его радиусы-векторы относительно разных базисов.

$\mathbf{R}''$, $\mathbf{R}''$ и $\mathbf{R}$ — радиусы-векторы элемента нити N относительно точек $C(l)$, $O(l)$ и $O(l_0)$ соответственно; A — элемент оси луча, которому отвечает такое же значение параметра ψ , как элементу нити N ; C — элемент оси луча, находящийся в момент l_0 в центре частицы O ; остальные обозначения те же, что на рис. 11.1.

С помощью рис. 11.2 находим, что радиус-вектор $\mathbf{R}''_{O(l)}$ элемента нити N относительно точки $O(l)$ можно представить в виде

$$\mathbf{R}''_{O(l)}(N) = \overrightarrow{OC} + \mathbf{R}'''_{C(l)}(N). \quad (11.7)$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{Q} = \overrightarrow{OA} = Q\mathbf{q}_0$ (см. рис. 11.1 и подпись к нему) и что натуральный параметр $\pm a\psi$ на оси луча отсчитывается

от точки C в направлении, задаваемом вектором $\mathbf{q}_0$, можем записать:

$$\overrightarrow{OA} = Q(l)\mathbf{q}_0(l); \quad \overrightarrow{CA} = \pm a\psi\mathbf{q}_0(l), \quad (11.8)$$

где точки O , A и C относятся к моменту времени l ; по условию выбора элемента A , параметр ψ имеет здесь такое же значение, как в (11.3).

Применяя последовательно формулы (11.7), (11.6), (11.8), (11.3) и равенства $\mathbf{e}_1'' = \mathbf{e}_1'''$ и $\mathbf{e}_2'' = \mathbf{e}_2'''$, получаем:

$$\mathbf{R}_{O(l)}''(N) = r_0 \cos\left(\chi + \frac{O}{c}\Delta l + \psi\right)\mathbf{e}_1'' + r_0 \sin\left(\chi + \frac{O}{c}\Delta l + \psi\right)\mathbf{e}_2'' + Q(l)\mathbf{q}_0, \quad (11.9)$$

где $\mathbf{q}_0 = \mathbf{e}_0''$, все векторы относятся к моменту l .

Введем базис $\{\mathbf{e}_i'\} = \{\mathbf{e}_0' = \mathbf{i}; \mathbf{e}_1'; \mathbf{e}_2'; \mathbf{e}_3'\}$ с началом в той же точке $O(l)$, что и начало базиса $\{\mathbf{e}_i''\}$, и с вектором $\mathbf{e}_3' \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \cap \Gamma_*$, где Γ_* — собственное физическое пространство частицы ($\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, $\Gamma_* \ni O$); $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \cap \Gamma_*$ — прямая в Γ_* , которая ортогональна плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, содержащей поперечное сечение луча.

Пусть базис $\{\mathbf{e}_i'\}$ повернут вместе с лучом относительно базиса $\{\mathbf{e}_i''\}$ на угол φ в плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{e}_0', \mathbf{e}_3'\} = \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_3'\} = \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (последнее равенство объясняется тем, что $\mathbf{e}_3' \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$; φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$, угол φ определяется формулой $\text{ch } \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$, он не зависит от времени, но может быть разным для разных лучей; считается, что $\varphi \neq 0$). Детализируем этот поворот.

Согласно теореме 11.1 из разд. 11 главы 3 (с. 190), такой поворот осуществляется тензором (оператором)

$$B = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0' \mathbf{e}_0'^* + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_0' \mathbf{e}_3'^* + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_3' \mathbf{e}_0'^* + \text{ch } \varphi \mathbf{e}_3' \mathbf{e}_3'^* + \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_1'^* + \mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2'^*, \quad (11.10)$$

где тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между ними; $\{\mathbf{e}_i'^*\}$ — базис, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_i'\}$ (см. в разд. 11 главы 3 формулы (11.4)–(11.6) и (11.8), с. 189).

В соответствии со сказанным базисные векторы $\mathbf{e}_i''$ являются результатом действия тензора B на векторы $\mathbf{e}_i'$, поэтому на основании (11.10), учитывая ортонормированность базиса $\{\mathbf{e}_i'\}$, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0'' &= B \cdot \mathbf{e}_0' = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0' + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_3'; \\ \mathbf{e}_1'' &= B \cdot \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1'; \\ \mathbf{e}_2'' &= B \cdot \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2'; \\ \mathbf{e}_3'' &= B \cdot \mathbf{e}_3' = \text{sh } \varphi \mathbf{e}_0' + \text{ch } \varphi \mathbf{e}_3'. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Так как $\mathbf{e}_0'' = \mathbf{q}_0$ и $\mathbf{e}_0' = \mathbf{i}$, то первое выражение в (11.11) может быть записано в форме

$$\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0' + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3' = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3'. \quad (11.12)$$

Из (11.11) видно, что тензор B вида (11.10) действительно осуществляет гиперболический поворот на угол φ в плоскости $\operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_0', \mathbf{e}_3'\} = \operatorname{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (равенство линейных оболочек объясняется тем, что $\mathbf{e}_0' = \mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_3' \in \operatorname{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$).

С помощью (11.11) легко убедиться, что тензор B не меняет скалярные произведения векторов, поэтому он ортогональный. Кроме того, он переходит в единичный тензор I при $\varphi \rightarrow 0$, значит, тензор B принадлежит ограниченной группе Лоренца. Такой тензор не меняет временную ориентацию времениподобных векторов и пространственную ориентацию базисов в пространственноподобных гиперплоскостях. В нашем случае тензор B не меняет временную ориентацию вектора $\mathbf{e}_0'$ и пространственную ориентацию базиса $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ в Γ_* .

В связи с тем, что базисы $\{\mathbf{e}_i'\}$ и $\{\mathbf{e}_i''\}$ имеют общее начало $O(l)$, радиус-векторы элементов нити относительно этих базисов совпадают ($\mathbf{R}'_{O(l)} = \mathbf{R}''_{O(l)}$). Поэтому из (11.9) и (11.11) получаем:

$$\mathbf{R}'_{O(l)}(N) = r_0 \cos\left(\chi + \frac{O}{c} \Delta l + \psi\right) \mathbf{e}_1' + r_0 \sin\left(\chi + \frac{O}{c} \Delta l + \psi\right) \mathbf{e}_2' + Q(l) \mathbf{q}_0, \quad (11.13)$$

где $\mathbf{q}_0$ имеет значение (11.12) (все векторы относятся к моменту времени l).

Введем базис $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_0(l_0) = \mathbf{i}(l_0); \mathbf{e}_1(l_0); \mathbf{e}_2(l_0); \mathbf{e}_3(l_0)\}$ с началом в точке $O(l_0)$ и вектором $\mathbf{e}_3(l_0) \in (\operatorname{Lin}\{\mathbf{i}(l_0), \mathbf{q}_0(l_0)\} \cap \Gamma_*(l_0))$. Временно будем считать этот базис неподвижным (относительно пространства M).

Пусть базис $\{\mathbf{e}_i'\}$ (с началом в $O(l)$) получается из базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ (с началом в $O(l_0)$) с помощью двух операций: перемещения начала O базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ на вектор $\mathbf{U}_O(l)$ из положения $O(l_0)$ в положение $O(l)$ (см. рис. 11.2) и преобразования базисных векторов посредством тензора $D = D(l_0, \Delta l)$, принадлежащего ограниченной группе Лоренца:

$$\mathbf{e}_i'(l) = D \cdot \mathbf{e}_i(l_0) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad \text{в частности, } \mathbf{i}(l) = D \cdot \mathbf{i}(l_0). \quad (11.14)$$

Из рис. 11.2 видно, что радиус-вектор $\mathbf{R}_{O(l_0)}$ элемента нити N относительно точки $O(l_0)$ равен сумме векторов $\mathbf{U}_O(l)$ и $\mathbf{R}''_{O(l)}$. А так как $\mathbf{R}''_{O(l)} = \mathbf{R}'_{O(l)}$, то $\mathbf{R}_{O(l_0)} = \mathbf{U}_O(l) + \mathbf{R}'_{O(l)}$. Отсюда и из (11.13) и (11.14),

учитывая (11.12), находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = & \mathbf{U}_O(l) + r_0 \cos\left(\chi + \frac{o}{c}\Delta l + \psi\right) D \cdot \mathbf{e}_1(l_0) + \\ & + r_0 \sin\left(\chi + \frac{o}{c}\Delta l + \psi\right) D \cdot \mathbf{e}_2(l_0) + Q(l) D \cdot \mathbf{q}_0(l_0), \end{aligned} \quad (11.15)$$

где при элементе нити N поставлен временной аргумент, указывающий в какой момент времени рассматривается нить; отметим, что $\mathbf{U}_O(l_0) = \mathbf{0}$.

Обозначим: $\chi(l) = \chi + (o/c)\Delta l$. Поскольку $\Delta l = l - l_0$, то при $l = l_0$ выполняется $\chi(l_0) = \chi$. Поэтому можем записать:

$$\chi(l) = \chi(l_0) + \frac{o}{c}\Delta l = \chi(l_0) + \frac{o}{c}(l - l_0); \quad (11.16)$$

это равенство выполняется при любых l и l_0 , благодаря $o = \text{const}$.

Из (11.16) вытекает

$$\frac{d\chi}{dl} = \frac{o}{c}. \quad (11.17)$$

Изменим трактовку базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$. Будем считать, что $\{\mathbf{e}_i\}$ — не неподвижный базис и что $\{\mathbf{e}'_i\}$ — это базис $\{\mathbf{e}_i\}$, движущийся вместе с центром частицы. Тогда зависимость (11.14) принимает вид

$$\mathbf{e}_i(l) = D \cdot \mathbf{e}_i(l_0) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (11.18)$$

где тензор $D = D(l_0, \Delta l)$ принадлежит ограниченной группе Лоренца, он не меняет временную ориентацию вектора $\mathbf{e}_0$ и пространственную ориентацию базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в Γ_* , причем $D = I$ при $\Delta l = 0$.

Свойства ортогональных тензоров, которые преобразуют вектор $\mathbf{u}(l)$ в вектор $\mathbf{u}(l + \Delta l)$ и обращаются в единичный тензор I при $\Delta l = 0$, подробно исследованы в разд. 18 главы 3 (с. 235) и в разд. 5 главы 4 (с. 327).

Подставим в (11.15) значения векторов $D \cdot \mathbf{e}_i$ из (11.18). Вследствие (11.16) и равенства $\chi = \chi(l_0)$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = & \mathbf{U}_O(l) + r_0 \cos(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_1(l) + \\ & + r_0 \sin(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_2(l) + Q(l) \mathbf{q}_0(l), \end{aligned} \quad (11.19)$$

где, согласно (11.12), (11.14) и (11.18),

$$\mathbf{q}_0(l) = \text{ch } \varphi \mathbf{e}_0(l) + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_3(l) = \text{ch } \varphi \mathbf{i}(l) + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_3(l). \quad (11.20)$$

При $l = l_0$ формула (11.19) задает радиус-вектор $\mathbf{R}_{O(l_0)}$ элемента нити N относительно точки $O(l_0)$ в момент l_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l_0)) = & r_0 \cos(\chi(l_0) + \psi) \mathbf{e}_1(l_0) + \\ & + r_0 \sin(\chi(l_0) + \psi) \mathbf{e}_2(l_0) + Q(l_0) \mathbf{q}_0(l_0), \end{aligned} \quad (11.21)$$

где учтено равенство $\mathbf{U}_O(l_0) = \mathbf{0}$; вектор $\mathbf{q}_0$ имеет, по (11.20), значение

$$\mathbf{q}_0(l_0) = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_0(l_0) + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3(l_0) = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}(l_0) + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3(l_0). \quad (11.22)$$

Формулы (11.19) и (11.21) представляют собой *уравнение винтовой нити*, записанное для моментов времени l и l_0 соответственно.

Уравнение оси луча (оно же уравнение оси нити) получается формальной подстановкой в (11.19) и (11.21) нулевого значения радиуса нити r_0 :

$$\mathbf{R}_{\text{axis}}(l) = \mathbf{U}_O(l) + Q(l)\mathbf{q}_0(l); \quad \mathbf{R}_{\text{axis}}(l_0) = Q(l_0)\mathbf{q}_0(l_0), \quad (11.23)$$

где $\mathbf{R}_{\text{axis}}$ — радиус-вектор элементов оси луча относительно $O(l_0)$.

Отметим, что при $l = l_0$ все введенные выше базисы имеют общее начало в точке $O(l_0)$, совпадающей с $C(l_0)$ (см. рис. 11.1 и 11.2), а сами базисы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_i\} &= \{\mathbf{i}(l_0), \mathbf{e}_1(l_0), \mathbf{e}_2(l_0), \mathbf{e}_3(l_0)\}; \quad \{\mathbf{e}'_i\} = \{\mathbf{e}_i\}; \\ \{\mathbf{e}''_i\} &= \{\mathbf{q}_0(l_0), \mathbf{e}_1(l_0), \mathbf{e}_2(l_0), \mathbf{e}_3(l_0)\}; \quad \{\mathbf{e}'''_i\} = \{\mathbf{e}''_i\} = \{\mathbf{e}''_i\}, \end{aligned} \quad (11.24)$$

где, в силу (11.11) и (11.22),

$$\mathbf{q}_0(l_0) = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}(l_0) + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3(l_0); \quad \mathbf{e}''_3(l_0) = \operatorname{sh} \varphi \mathbf{i}(l_0) + \operatorname{ch} \varphi \mathbf{e}_3(l_0). \quad (11.25)$$

Элемент нити N и элемент оси луча A , участвующие в проведенных построениях, индивидуализированы параметрами Q и ψ (см. формулы (11.8), (11.19) и рис. 11.1). Установим связь между этими параметрами.

Величины Q и $\pm a\psi$ являются, по определению, натуральными параметрами на оси луча, возрастающими в направлении, задаваемом вектором $\mathbf{q}_0$. При этом параметр Q отсчитывается от центра частицы O , а параметр $\pm a\psi$ — от фиксированного элемента оси луча C . Поскольку в момент времени l_0 элемент оси C совпадает с центром частицы O (см. рис. 11.1 и 11.2), то в этот момент для любого элемента луча отвечающие ему параметры Q и $\pm a\psi$ принимают одно и то же значение:

$$Q(l_0) = \pm a\psi, \quad (11.26)$$

где Q зависит от времени; ψ не зависит от времени; о правиле выбора верхнего или нижнего знака перед $a\psi$ сказано далее.

Из (11.4) и (11.26) находим связь между параметрами Q и ψ :

$$Q(l) = q(l - l_0) \pm a\psi. \quad (11.27)$$

Итак, мы построили для луча с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0 - \frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i}$ (последнее равенство вытекает из (11.20); φ — угол между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$, $\varphi \neq 0$). Базис имеет начало в центре частицы O и движется вместе с частицей вдоль мировой линии L . Винтовая нить задается в нем уравнением (11.19). В этом уравнении разным нитям луча соответствуют разные значения радиуса r_0 и параметра $\chi(l_0)$ (см. (11.16)).

Обратим внимание на то, что при заданных $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ базисные векторы $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_3$ определены однозначно. Это означает, что они неподвижно скреплены с остовом частицы (потому что вектор $\mathbf{q}_0$ скреплен с остовом как направляющий орт оси луча, а вектор $\mathbf{i}$ скреплен с остовом, так как углы между $\mathbf{i}$ и всеми осями лучей постоянны). В то же время векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не определены однозначно. Они ограничены только тем, что должны быть взаимно ортогональными и должны лежать в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (в этой плоскости находится поперечное сечение луча; равенство линейных оболочек вытекает из $\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_3 \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$). При этом векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ могут произвольно вращаться в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ относительно остова частицы. Исключим эту возможность.

Примем, что базис $\{\mathbf{e}_i\}$ скреплен с остовом частицы. Из этого условия следует, в частности, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не могут вращаться относительно остова. В дальнейшем, при рассмотрении конкретного движения частицы, будем задавать векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ с учетом данного условия.

Построенный базис $\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ свой для каждого луча, так как $\mathbf{e}_3$ зависит от направляющего орта оси луча $\mathbf{q}_0$. Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ принадлежат плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, в которой лежит поперечное сечение луча, поэтому базис $\{\mathbf{e}_i\}$ порождает для каждого луча ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в соответствующем подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$. Этот базис, как и базис $\{\mathbf{e}_i\}$, имеет начало в центре частицы и неподвижно скреплен с остовом частицы.

Базис $\{\mathbf{e}_i\}$ связан со вспомогательным базисом $\{\mathbf{e}_i''''\}$ с помощью преобразований, которые сохраняют временную ориентацию вектора $\mathbf{e}_0'''' (= \mathbf{q}_0)$ и пространственные ориентации базисов в гиперплоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{q}_0\}$. Значит, эти преобразования сохраняют также ориентацию базиса $\{\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_2''', \mathbf{q}_0\}$ в $C_{\mathbf{q}_0}$. Поэтому ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в $C_{\mathbf{q}_0}$ совпадает с ориентацией базиса $\{\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_2''', \mathbf{q}_0\}$. Следовательно, в формуле (11.26) и в последующих формулах, содержащих двойные знаки $\pm$ или $\mp$, выбор знака определяется правилом, приведенным на с. 467, с указанными там обозначениями векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$ (без замены их векторами $\mathbf{e}_1''''$, $\mathbf{e}_2''''$ и $\mathbf{q}_0$, как написано в пояснении к (11.1)).

Будем считать, что *все лучи имеют в исходном непереориентированном состоянии согласованные ориентации*. Это означает выполнение условий *a* – *в*, сформулированных в разд. 10 (с. 481). Повторим эти условия с небольшими изменениями:

a) для каждого луча базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ строится так, чтобы для всех лучей базисы $\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ имели в пространстве Минковского M одинаковую ориентацию (такие базисы могут быть преобразованы друг в друга путем поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$); в этом случае, благодаря тому, что вектор $\mathbf{i}$ един для всех лучей, ориентации всех базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в собственном физическом пространстве частицы $\Gamma_* = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ являются одинаковыми;

б) знак в формуле (11.27) перед слагаемым $a\psi$, заданный по правилу выбора знака (с. 467), одинаков для всех лучей;

в) направление и скорость o вращения луча (относительно соответствующего базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$) одинаковы для всех лучей.

Обратим внимание на то, что определение угловой скорости o как скорости вращения луча относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ (см. с. 485) и условие о скрепленности этого базиса с остовом частицы делают *вращение лучей внутренним свойством частицы, не зависящим от ее движения относительно пространства M* .

Теперь найдем скорость и другие характеристики частицы.

Скорость центра частицы O , напомним, определяется как производная вектора перемещения $\mathbf{U}_O$ по времени l и равняется единичному касательному вектору к мировой линии L , ориентированному в сторону будущего (см. разд. 3 главы 3, с. 114). Этим вектором является орт $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{i} = \frac{d\mathbf{U}_O}{dl}. \quad (11.28)$$

Скорость нити $\mathbf{j}$ есть, в соответствии с определением из разд. 10, частная производная $\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}/\partial l$ (при $\psi = \text{const}$). Дифференцируя обе части равенства (11.19) по l и учитывая (11.5), (11.17) и (11.28), найдем, что элемент нити с радиусом-вектором $\mathbf{R}_{O(l_0)}$ движется по отношению к пространству M со скоростью

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(l) = & \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \left[-\sin(\chi + \psi)\mathbf{e}_1 + \cos(\chi + \psi)\mathbf{e}_2 \right] + \\ & + r_0 \left[\cos(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \sin(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right] + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}, \end{aligned} \quad (11.29)$$

где величины, зависящие от времени, относятся к текущему моменту l собственного времени частицы. Далее, как и прежде, будем называть скорость нити $\mathbf{j}$ также *скоростью луча* и *скоростью частицы*.

Скорость $\mathbf{j}$ — величина безразмерная. При необходимости использовать для описания движения частицы характеристику размерности скорости, следует заменить $\mathbf{j}$ величиной $c\mathbf{j} = \partial\mathbf{R}/\partial t_*$, где $t_* = l/c$ — собственное время частицы, измеряемое в единицах времени.

Скорость оси луча $\mathbf{j}_0$ (она же скорость оси нити) может быть получена либо дифференцированием по l радиуса-вектора элементов оси луча $\mathbf{R}_{\text{axis}}$, задаваемого первой формулой (11.23), либо формальной подстановкой в (11.29) значения $r_0 = 0$:

$$\mathbf{j}_0(l) = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}. \quad (11.30)$$

Найдем единичный вектор $\mathbf{q}$, касательный к нити. Вычислим его, как и в разд. 10, как нормированную частную производную радиуса-вектора $\mathbf{R}_{O(l_0)}$ по параметру, индивидуализирующему элемент нити (при постоянном l).

Уравнение нити (11.19) содержит два параметра, индивидуализирующие элемент нити — ψ и Q . Выразим в нем параметр Q через ψ .

Подставим в (11.19) значение (11.27) параметра $Q(l)$. Дифференцируя, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l))}{\partial(\pm\psi)} = \mp r_0 \sin(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_1(l) \pm r_0 \cos(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_2(l) + a\mathbf{q}_0(l), \quad (11.31)$$

где дифференцирование проводится по переменной $+\psi$ при совпадении ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити и по переменной $-\psi$ при несовпадении их ориентаций (это обеспечивает сонаправленность составляющей вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси луча вектору $\mathbf{q}_0$ при любых взаимных ориентациях базиса и нити).

Из (11.20) и (11.31), в силу ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, имеем:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l))}{\partial(\pm\psi)} \right| = \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}}{\partial(\pm\psi)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}}{\partial(\pm\psi)} \right|} = \sqrt{|a^2 - r_0^2|}; \quad (11.32)$$

отсюда следует, что при $a = r_0$ вектор $\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}/\partial(\pm\psi)$ изотропный.

Далее используется безразмерный параметр β_0 , введенный в разд. 10 с помощью равенства (10.3):

$$a = \frac{r_0}{\beta_0}; \quad (11.33)$$

из $a > 0$ и $r_0 > 0$ вытекает $\beta_0 > 0$, причем $\beta_0 = 1$ при $a = r_0$.

Касательный к нити единичный вектор $\mathbf{q}$ определяется формулой

$$\mathbf{q}(l) = \frac{\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l))}{\partial(\pm\psi)} \bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l))}{\partial(\pm\psi)} \right|;$$

эта формула вместе с (11.31) – (11.33) дает:

$$\mathbf{q}(l) = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_1(l) \pm \cos(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_2(l) + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0(l) \right]; \quad (11.34)$$

где верхние знаки отвечают случаю совпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити, нижние знаки отвечают случаю их несовпадения (см. с. 467); точкой приложения вектора $\mathbf{q}$ является рассматриваемый элемент нити N , то есть конец радиуса-вектора $\mathbf{R}_{O(l_0)}$; составляющая вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси луча $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ сонаправлена вектору $\mathbf{q}_0$ (см. рис. 10.2, с. 466).

Формула (11.34) справедлива при $\beta_0 \neq 1$ (напомним, что $\beta_0 > 0$, см. пояснение к (11.33)). При $\beta_0 > 1$ нить — пространственноподобная линия (так как во всех точках нити выполняется $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = -1 < 0$). Если $0 < \beta_0 < 1$, то нить — времениподобная линия ($\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1 > 0$). В случае $\beta_0 = 1$ нить представляет собой изотропную линию. В этом случае в качестве касательного к ней вектора можно использовать тот же вектор $\mathbf{q}$, задаваемый формулой (11.34), но без нормировочного множителя $\beta_0/\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$ (при этом будет $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0$).

С помощью (11.17) и (11.34) находим производную касательного к нити вектора $\mathbf{q}$ по времени l :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dl}(l) = & \mp \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\frac{o}{c} \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 + \frac{o}{c} \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 + \right. \\ & \left. + \sin(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} - \cos(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right] + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Выпишем характеристики *переориентированной нити* (мы помечаем их штрихами). В разд. 10 при выводе формул (10.32) – (10.34) было отмечено (на основе результатов разд. 5), что характеристики переориентированной нити могут быть получены из характеристик непереориентированной нити путем изменения знаков составляющих, направленных вдоль вектора $\mathbf{e}_2$. Сравнение уравнений нити (10.7) и (11.19) (с учетом различия обозначений и с применением формул (11.16), (11.27) и $\mathbf{U}_O(l) = \mathbf{i}\Delta l$ при $\mathbf{i} = \text{const}$) показывает, что в данном случае для

достижения той же цели нужно изменить знаки составляющих, направленных вдоль вектора, который также обозначен через $\mathbf{e}_2$. Меняя в (11.19), (11.29), (11.30), (11.34) и (11.35) знаки этих составляющих, находим для переориентированной нити ее радиус-вектор $\mathbf{R}'_{O(l_0)}$, скорость $\mathbf{j}'$, скорость $\mathbf{j}'_0$ оси нити (которая совпадает со скоростью оси непереориентированной нити, так как переориентация не меняет положение оси), единичный касательный к нити вектор $\mathbf{q}'$ и его производную по времени:

$$\mathbf{R}'_{O(l_0)}(N(l)) = \mathbf{U}_O + r_0 \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 - r_0 \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 + Q \mathbf{q}_0; \quad (11.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}'(l) = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \left[-\sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 - \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 \right] + \\ + r_0 \left[\cos(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} - \sin(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right] + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}; \end{aligned} \quad (11.37)$$

$$\mathbf{j}'_0(l) = \mathbf{j}_0(l) = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_0 + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}; \quad (11.38)$$

$$\mathbf{q}'(l) = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 \mp \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right]; \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}'}{dl}(l) = \mp \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\frac{o}{c} \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 - \frac{o}{c} \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 + \right. \\ \left. + \sin(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \cos(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right] + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}, \end{aligned} \quad (11.40)$$

где векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$ и знаки $\pm$ и $\mp$ относятся к состоянию нити до ее переориентации; все величины, зависящие от времени, вычисляются в текущий момент l собственного времени частицы.

Приведем обозначения, использованные в настоящем разделе.

Считается, что частица движется в пространстве Минковского M вдоль гладкой мировой линии L , касательным вектором к которой в точке нахождения центра частицы служит направляющий орт оси симметрии частицы $\mathbf{i}$.

Фиксируется некоторый момент l_0 собственного времени частицы. Произвольный (текущий) момент времени обозначается через l . В моменты времени l_0 и l центр частицы находится в точках $O(l_0)$ и $O(l)$ мировой линии L соответственно (см. рис. 11.1 и 11.2).

Рассматривается луч частицы с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$. Луч содержится и вращается вокруг своей оси в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0} \subset M$ (движущемся вместе с лучом).

Вводится ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в $O(l)$ и вектором $\mathbf{e}_3$ таким, что во все моменты времени выполняется зависимость (11.20): $\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3$ (где φ — угол между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$). Базис скреплен с остовом частицы и движется вместе с ним. Базисные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в плоскости $\operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, в которой находится поперечное сечение луча, поэтому базис $\{\mathbf{e}_i\}$ порождает в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$. Последний, как и базис $\{\mathbf{e}_i\}$, имеет начало в центре частицы, скреплен с остовом частицы и движется вместе с частицей вдоль мировой линии L .

Винтовая нить описывается в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ уравнением (11.19). Нить вращается вместе с лучом внутри $C_{\mathbf{q}_0}$ вокруг оси луча $\operatorname{Lin}\{\mathbf{q}_0\}$ с постоянной угловой скоростью ω относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ (определение угловой скорости ω дано на с. 485). Разные нити луча характеризуются разными значениями радиуса r_0 и параметра $\chi(l_0)$ (см. (11.16)).

Индивидуализация элементов нити и элементов оси луча задается параметром ψ , именуемым винтовой переменной, причем все элементы луча, принадлежащие одному и тому же его поперечному сечению, характеризуются одним значением параметра ψ (см. в разд. 10 рис. 10.2 на с. 466 и комментарий к формуле (10.2) на с. 467). Параметр ψ отсчитывается на оси луча от элемента C оси, находящегося в момент l_0 в центре частицы O (см. рис. 11.1). Для каждого элемента луча параметр ψ не зависит от времени. Вводится также параметр Q , отсчитываемый от центра частицы и равный по модулю расстоянию между центром частицы и элементом оси луча. Параметр Q зависит от времени. Параметры Q и ψ связаны зависимостью (11.27). Параметр q , входящий в эту зависимость и в формулу (11.29) для скорости нити $\mathbf{j}$, определяет добавку $q\mathbf{q}_0$ к скорости луча, направленную вдоль оси луча. Он одинаков для всех элементов луча, но может быть разным для разных лучей. Принимается, что параметр q не зависит от времени. При $q \neq 0$ элемент оси луча C , совпадающий в момент l_0 с центром частицы O , движется в направлении, отличающемся от направления движения центра частицы O (см. рис. 11.1). Величина χ — угол в плоскости $\operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ между $\mathbf{e}_1$ и радиусом-вектором точки пересечения винтовой нити с плоскостью $\operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (см. рис. 10.2, с. 466). Зависимость χ от времени задается формулой (11.16). Параметр β_0 вводится равенством (11.33); он связан с шагом нити P (см. (10.6), с. 468).

Напомним, что переориентация луча не меняет положение его оси, поэтому нить луча в непереориентированном и в переориентированном состояниях вращается вокруг одной и той же оси.

Теорема 11.1. *Нить луча в непереориентированном и переориентированном состояниях вращается вокруг оси луча в противоположных направлениях.*

Доказательство. Представим, что имеются два вращающихся экземпляра нити — в непереориентированном и в переориентированном состояниях. Найдем их элементы, находящиеся в одной точке пространства M , и сравним скорости этих элементов.

Поскольку эти элементы располагаются в одной точке пространства M , то их радиусы-векторы совпадают. Приравнивая правые части формул (11.19) и (11.36), получаем: $r_0 \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 = -r_0 \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_2$, откуда

$$\sin(\chi + \psi) = 0,$$

поэтому

$$\cos(\chi + \psi) = 1 \quad \text{или} \quad \cos(\chi + \psi) = -1.$$

Подставляя в (11.29) и (11.37) указанное значение синуса и первое значение косинуса, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(l) &= \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \mathbf{e}_2 + r_0 \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}; \\ \mathbf{j}'(l) &= \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 - r_0 \frac{o}{c} \mathbf{e}_2 + r_0 \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}; \end{aligned} \quad (11.41)$$

если взять второе значение косинуса, то получаются такие же формулы, но с противоположными знаками у слагаемых, содержащих r_0 .

В формулах, задающих скорость нити, вращение нити вокруг оси описывается слагаемым, содержащим угловую скорость o . Из (11.41) видно, что это слагаемое имеет для непереориентированного и переориентированного состояний нити разные знаки. Следовательно, в этих состояниях вращательные составляющие скорости нити (в одной и той же точке пространства) направлены в противоположные стороны. А это означает, что направления вращения нити в непереориентированном и переориентированном состояниях действительно противоположны. ■

Формула (11.29) для скорости частицы $\mathbf{j}$ выведена на основе предположения, что при движении частицы ось каждого ее луча проходит через центр частицы во все моменты времени. Так как эта формула содержит направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$, то скорость $\mathbf{j}$ своя для каждого луча, поэтому нужно доказать, что формула (11.29) обеспечивает прохождение всех осей лучей через одну точку пространства M во все моменты времени.

Теорема 11.2. *Движение частицы, задаваемое формулой (11.29), происходит таким образом, что оси всех лучей, пересекаясь в одной точке в некоторый момент времени, продолжают пересекаться в одной точке и в другие моменты; при этом точка пересечения — центр частицы — движется в пространстве Минковского M вдоль мировой линии L , касательным вектором к которой служит орт $\mathbf{i}$, входящий в формулу (11.29).*

Приведем доказательство теоремы для случая, когда мировая линия прямолинейна и частица вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью. Вопрос о справедливости теоремы для общего случая оставляем открытым.

Доказательство. Пусть оси всех лучей частицы пересекаются в некоторый момент времени l_0 в точке $O(l_0)$ пространства M (это означает, что $O(l_0)$ — центр частицы в момент l_0). Нужно доказать, что все оси, двигаясь в соответствии с законом (11.30), вытекающим из (11.29), пересекаются в одной точке в любой момент l .

Ограничимся рассмотрением ситуации, когда вектор $\mathbf{i}$, входящий в формулу (11.30), постоянен ($\mathbf{i} = \text{const}$) и частица вращается вокруг него с постоянной угловой скоростью.

Обозначим: Γ_* — собственное физическое пространство частицы в момент l_0 ($\Gamma_* \perp \mathbf{i}$; $\Gamma_* \ni O(l_0)$). Введем в пространстве M неподвижный ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ с началом в $O(l_0)$, где $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — произвольный ортонормированный базис в Γ_* с началом в $O(l_0)$.

Исследуем пространственное вращение частицы вокруг плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_3\}$, иными словами, вращение с неподвижной псевдоевклидовой плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_3\}$ и инвариантной (преобразующейся сама в себя) пространственноподобной плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

Возьмем произвольный луч частицы. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси. Разложим вектор $\mathbf{q}_0$ по введенному базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\mathbf{q}_0(l) = a_0 \mathbf{i} + a_1(l) \mathbf{a}_1 + a_2(l) \mathbf{a}_2 + a_3 \mathbf{a}_3, \quad (11.42)$$

где a_i — компоненты вектора $\mathbf{q}_0$ в этом базисе (безразмерные, как и $\mathbf{q}_0$); a_0 и a_3 не зависят от времени, вследствие неподвижности $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_3\}$.

Итак, составляющая вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_3\}$, равная $a_0 \mathbf{i} + a_3 \mathbf{a}_3$, постоянна. Составляющая вдоль плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, равная $a_1(l) \mathbf{a}_1 + a_2(l) \mathbf{a}_2$, вращается в этой плоскости (относительно базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$) с постоянной угловой скоростью, поэтому ее можно представить в виде

$$a_1(l) \mathbf{a}_1 + a_2(l) \mathbf{a}_2 = \tilde{a} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l + \eta\right) \mathbf{a}_1 + \tilde{a} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l + \eta\right) \mathbf{a}_2, \quad (11.43)$$

где $\tilde{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \geq 0$ — длина составляющей; $\Omega \geq 0$ — угловая скорость вращения частицы; η — начальный угол ($\tilde{a}$, Ω , η , c — константы).

На основании (11.42) и (11.43) имеем:

$$\mathbf{q}_0(l) = a_0 \mathbf{i} + \tilde{a} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l + \eta\right) \mathbf{a}_1 + \tilde{a} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l + \eta\right) \mathbf{a}_2 + a_3 \mathbf{a}_3, \quad (11.44)$$

где все величины, кроме $\mathbf{q}_0$ и l , не зависят от времени; параметры a_0 , $\tilde{a}$, a_3 и η могут быть разными для разных лучей. Из (11.44) следует:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl}(l) = -\tilde{a} \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l + \eta\right) \mathbf{a}_1 + \tilde{a} \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l + \eta\right) \mathbf{a}_2. \quad (11.45)$$

Согласно принятому в начале доказательства допущению, ось луча проходит в момент l_0 через точку $O(l_0)$. Зафиксируем некоторый момент l_1 собственного времени частицы. Обозначим: $O(l_1)$ — точка пространства M , которая отстоит от точки $O(l_0)$ на вектор $(l_1 - l_0)\mathbf{i}$ (при $\mathbf{i} = \text{const}$). Докажем, что существует элемент оси луча, который в момент l_1 находится в точке $O(l_1)$.

Рассмотрим некоторый элемент A оси луча. Пусть в момент l_0 он отстоит от точки $O(l_0)$ на вектор $\overrightarrow{O(l_0)A} = Q(l_0)\mathbf{q}_0(l_0)$ (см. рис. 11.1).

Перемещение $\mathbf{U}_A$ элемента A за промежуток времени $[l_0, l_1]$ может быть найдено путем интегрирования его скорости $\mathbf{j}_0$ по времени l . С помощью формулы (11.30), задающей скорость $\mathbf{j}_0$, получаем:

$$\mathbf{U}_A = \int_{l_0}^{l_1} \mathbf{j}_0(l) dl = \int_{l_0}^{l_1} \left(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0(l) + Q(l) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}(l) \right) dl, \quad (11.46)$$

где функция $Q(l)$, согласно (11.4), может быть представлена в форме

$$Q(l) = q(l - l_0) + Q(l_0). \quad (11.47)$$

Подставим в (11.46) значения $\mathbf{q}_0(l)$, $d\mathbf{q}_0/dl$ и $Q(l)$ из (11.44), (11.45) и (11.47). Интегрируя с учетом постоянства $\mathbf{i}$ и q , находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_A = & (l_1 - l_0)\mathbf{i} + a_0 q(l_1 - l_0)\mathbf{i} + \\ & + q\tilde{a}(l_1 - l_0) \cos\left(\frac{\Omega}{c} l_1 + \eta\right) \mathbf{a}_1 + q\tilde{a}(l_1 - l_0) \sin\left(\frac{\Omega}{c} l_1 + \eta\right) \mathbf{a}_2 + \\ & + Q(l_0)\tilde{a} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{c} l_1 + \eta\right) - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l_0 + \eta\right) \right] \mathbf{a}_1 + \\ & + Q(l_0)\tilde{a} \left[\sin\left(\frac{\Omega}{c} l_1 + \eta\right) - \sin\left(\frac{\Omega}{c} l_0 + \eta\right) \right] \mathbf{a}_2 + a_3 q(l_1 - l_0) \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Поскольку в момент l_0 элемент оси A отстоит от точки $O(l_0)$ на вектор $Q(l_0)\mathbf{q}_0(l_0)$, то в момент l_1 он отстоит от этой же точки на вектор $Q(l_0)\mathbf{q}_0(l_0) + \mathbf{U}_A$. Найдем условие, при котором элемент A оказывается в момент l_1 в точке $O(l_1)$. Так как точка $O(l_1)$, по ее построению, отстоит от $O(l_0)$ на вектор $(l_1 - l_0)\mathbf{i}$, то искомое условие имеет вид

$$Q(l_0)\mathbf{q}_0(l_0) + \mathbf{U}_A = (l_1 - l_0)\mathbf{i}.$$

Подстановка сюда значений $\mathbf{q}_0(l_0)$ и $\mathbf{U}_A$ из (11.44) и (11.48) дает:

$$\begin{aligned} & a_0(q(l_1 - l_0) + Q(l_0))\mathbf{i} + a_3(q(l_1 - l_0) + Q(l_0))\mathbf{a}_3 + \\ & + \tilde{a}(q(l_1 - l_0) + Q(l_0))\cos\left(\frac{\Omega}{c}l_1 + \eta\right)\mathbf{a}_1 + \\ & + \tilde{a}(q(l_1 - l_0) + Q(l_0))\sin\left(\frac{\Omega}{c}l_1 + \eta\right)\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Участвующие в равенстве (11.49) векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ образуют базис, поэтому они линейно независимые. Значит, равенство (11.49) выполняется в единственном случае, когда все коэффициенты при векторах равны нулю. Отсюда заключаем, что элемент оси A оказывается в момент l_1 в точке $O(l_1)$, если выполняется равенство

$$q(l_1 - l_0) + Q(l_0) = 0. \quad (11.50)$$

Благодаря произвольности рассматриваемого луча и момента l_1 , полученный результат приводит к следующему заключению. Для любого момента времени l_1 у каждого луча найдется элемент его оси, который в этот момент оказывается в точке $O(l_1)$. Это — тот элемент, который в момент l_0 отстоит от точки $O(l_0)$ на вектор $Q(l_0)\mathbf{q}_0(l_0)$ при $Q(l_0)$, удовлетворяющем условию (11.50) (q и $\mathbf{q}_0(l_0)$ свои для каждого луча). Данное заключение означает, что оси всех лучей частицы в каждый момент времени пересекаются в одной точке. Так как, по построению, эти точки, обозначаемые $O(l)$, отстоят от точки $O(l_0)$ на вектор $(l - l_0)\mathbf{i}$, то все они находятся на прямой, которая проходит через $O(l_0)$ и имеет направляющий орт $\mathbf{i}$. Следовательно, эта прямая является мировой линией частицы.

Мы исследовали вращение луча в плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ с постоянной угловой скоростью. Из произвольности базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ в Γ_* (с началом в точке $O(l_0)$) вытекает, что плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ может быть любой плоскостью в Γ_* , проходящей через точку $O(l_0)$. Значит, полученный результат относится к вращению частицы вокруг вектора $\mathbf{i}$ с любой постоянной угловой скоростью.

Итак, для случая, когда вектор $\mathbf{i}$ постоянен и частица вращается вокруг него с постоянной угловой скоростью, теорема доказана. ■

Пояснения. Повторим кратко рассуждения, приведшие к полученным формулам, и сопроводим их пояснениями.

Рассматривается частица ненулевого радиуса в пространстве Минковского M . Частица состоит из винтообразных объектов, называемых лучами (см. рис. 1.3, с. 409). Оси лучей — времениподобные прямые. Они проходят через центр частицы и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в центре частицы. Единичный вектор $\mathbf{i}$, участвующий в построении частицы, и направляющий орт оси произвольного луча $\mathbf{q}_0$ — времениподобные векторы, направленные в сторону будущего; φ — угол между ними ($\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi$; случай $\varphi = 0$ исключается из рассмотрения). Поперечное сечение луча показано на рис. 2.1, 4.1 и 10.5 (с. 411, 419 и 479). Лучи частицы считаются недеформируемыми и взаимопроницаемыми.

Вектор $\mathbf{i}$, участвующий в построении частицы, представляет собой направляющий орт оси симметрии частицы (обоснование см. на с. 484).

Центр частицы движется в пространстве M вдоль времениподобной мировой линии L . Натуральный параметр l на L есть собственное время частицы. Оно измеряется в единицах длины, возрастает в направлении будущего и может отсчитываться от любой точки мировой линии L . Собственным временем частицы называется также параметр t_* , измеряемый в единицах времени и связанный с l равенством $l = ct_*$, где c — переводная константа размерности скорости, называемая скоростью света.

Считается, что при движении частицы вдоль мировой линии L сохраняются углы между всеми осями лучей и углы между вектором $\mathbf{i}$ и всеми осями, поэтому частица представляет собой недеформируемый четырехмерный объект, движущийся в пространстве Минковского M .

Исследуется ситуация, когда направляющий орт оси симметрии частицы $\mathbf{i}$ является вектором, касательным к L в точке нахождения центра частицы.

Луч с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$ содержится и вращается вокруг своей оси в трехмерном подпространстве

$$C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}. \quad (11.51)$$

Для описания характеристик луча вводится ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в центре частицы O и вектором $\mathbf{e}_3$, удовлетворяющим зависимости (11.20): $\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_3$ (φ — угол между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$). Базис скреплен с остовом частицы и движется

вместе с ним. Базисные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, в которой находится поперечное сечение луча, поэтому базис $\{\mathbf{e}_i\}$ порождает в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, который, как и базис $\{\mathbf{e}_i\}$, имеет начало в центре частицы, скреплен с остовом частицы и движется вместе с частицей вдоль мировой линии L .

Считается, что все лучи имеют в исходном непереориентированном состоянии согласованные ориентации. Это означает выполнение условий $a - b$ (с. 495), что в частности, подразумевает, согласованность ориентаций базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ для всех лучей.

Угловая скорость вращения луча o задается как производная угла поворота луча по собственному времени частицы t_* , причем угол поворота отсчитывается относительно указанного выше базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ (см. с. 485). Постулируется, что угловая скорость o одинакова для всех лучей и не зависит от времени.

Тот факт, что угловая скорость o считается константой и определяется по отношению к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, скрепленному с остовом частицы, делает процесс вращения лучей внутренним свойством частицы, не зависящим от ее движения относительно пространства M . По этой причине *спин частицы, определяемый вращением лучей* (см. разд. 5, с. 443), является внутренним свойством частицы.

Найдены характеристики частицы при произвольном ее движении (в предположении, что мировая линия L гладкая и все функции непрерывно дифференцируемые). В частности, скорость луча в непереориентированном и в переориентированном состояниях описывается формулами (11.29) и (11.37). В их правых частях первые два слагаемые — $\dot{\mathbf{i}}$ и $q\mathbf{q}_0$ — одинаковы для всех элементов луча (имеющего направляющий орт оси $\mathbf{q}_0$). Выражение, содержащее множитель $r_0(o/c)$, задает вращение луча вокруг его оси с угловой скоростью o . Остальные слагаемые, содержащие производные векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$ по времени l , описывают составляющую движения луча, обусловленную движением базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$. Закон, определяющий это движение, будет сформулирован позднее. Отметим, что при равенстве указанных производных нулю формулы (11.29) и (11.37) переходят в формулы (10.13) и (10.34), задающие скорость свободной частицы (с учетом того, что, в силу (11.16), величина $\chi + (o/c)l$ из разд. 10 совпадает с величиной $\chi(l)$ из данного раздела).

Из рис. 11.1 видно, что элемент оси луча, который находится в центре частицы, может двигаться иначе, чем движется сам центр частицы. Это связано с тем, что формула для скорости частицы $\mathbf{j}$ содержит

вектор $q\mathbf{q}_0$, направленный вдоль оси луча. Благодаря введению в формулу этого вектора, удалось связать между собой угловую скорость вращения луча o , его линейную скорость $\mathbf{j}$ и шаг нити P (см. в разд. 10 обсуждение рисунка 10.1 и резюме на с. 483). Отметим, что в случае «точечной» частицы добавка $q\mathbf{q}_0$ к ее скорости не влияет на собственное поле частицы (см. в главе 4 комментарий 5 в конце разд. 2, с. 316).

Обратим внимание на то, что формула (11.30) для скорости оси луча $\mathbf{j}_0$ описывает движение *остова* частицы (состоящего из осей лучей). Последний фактически представляет собой «точечную» частицу, рассмотренную в главе 4. В разд. 5 главы 4 подробно исследована скорость луча «точечной» частицы, которая обозначена тем же символом $\mathbf{j}_0$ (ср. формулу (11.30) с формулой (5.2) из главы 4, с. 329). Все результаты, полученные в разд. 5 главы 4, верны и для скорости оси луча, найденной в настоящем разделе.

Таким образом, определены скорость и другие характеристики частицы. Однако полученные формулы не дают полного описания модели. Требуется задать законы, описывающие собственное поле частицы и реакцию частицы на внешнее воздействие. Это будет сделано в следующих разделах.

12. Операторы интегрирования по поперечному сечению луча и по центральному сечению частицы

В дальнейшем нам потребуется интегрировать некоторые характеристики нитей по поперечному сечению луча и по центральному сечению частицы. Введем операторы, реализующие эти процедуры.

Зафиксируем произвольное расположение частицы в пространстве Минковского M . Обозначим центр частицы и точку пространства, в которой он находится, одной буквой O . Рассмотрим какой-либо луч частицы. Луч лежит в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$ ($\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча). Пусть S — одно из поперечных сечений луча; оно ортогонально вектору $\mathbf{q}_0$ и имеет вид фигуры, показанной на рис. 2.1, 4.1 и 10.5 (с. 411, 419 и 479). При интегрировании характеристик нитей по сечению S нужно знать закон, по которому распределены вдоль сечения точки пересечения с ним нитей луча. Зададим этот закон.

Очевидно, вполне можно допустить, что указанные точки пересечения распределены вдоль S равномерно. Между тем, имеется основание

рассмотреть и иной закон распределения этих точек. Действительно, при расчете спина луча в разд. 3 мы использовали допущение о равномерности распределения массы спирали по ее объему. Благодаря такому допущению, получено значение постоянной тонкой структуры α , которое с высокой точностью совпадает с экспериментальным. Воспользуемся этим же допущением для конкретизации интересующего нас закона распределения точек пересечения нитей с сечением S .

Представляется оправданным предположить, что масса спирали пропорциональна длине составляющих ее винтовых нитей. Однако нити, вследствие различия их радиусов r_0 , имеют разные длины. В самом деле, элемент длины нити есть $\sqrt{|d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}|}$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек нити относительно произвольной фиксированной точки пространства M . Пусть начало вектора $\mathbf{R}$ находится в центре частицы O . В таком случае с помощью равенств (11.32), (10.6) и (11.33) заключаем, что длина одного витка нити, то есть длина отрезка нити, соответствующего одному ее шагу P , составляет

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial(\pm\psi)} \right|} d\psi = 2\pi \sqrt{|a^2 - r_0^2|} = 2\pi a \sqrt{\left| 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right|} = P \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}, \quad (12.1)$$

где правило выбора знака перед ψ указано в пояснении к (11.31).

Из (12.1) вытекает, что нити действительно имеют различные длины, так как шаг P всех нитей луча одинаков, а параметр β_0 , по (10.6), пропорционален радиусу винтовой нити r_0 (при $P = \text{const}$). Следовательно, чтобы распределение массы по объему спирали было равномерным, распределение нитей внутри спирали должно быть неравномерным, компенсирующим неодинаковость их длин. При этом распределение точек пересечения нитей с сечением S тоже будет неравномерным.

Результат, выражаемый формулой (12.1), легко проверить с помощью рис. 12.1. Действительно, отрезок AB' на рисунке представляет собой развертку одного витка винтовой нити. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABA'$ этот отрезок является гипотенузой, поэтому, по теореме Пифагора (для псевдоевклидовой плоскости), квадрат его длины равен модулю разности квадратов катетов. Поскольку $|A'B'| = P = 2\pi r_0/\beta_0$ и $|AA'| = 2\pi r_0$, то длина одного витка нити, равная $|AB'|$, имеет значение $|AB'| = \sqrt{|A'B'|^2 - |AA'|^2} = \sqrt{(2\pi r_0/\beta_0)^2 - (2\pi r_0)^2} = P \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$, что совпадает со значением, даваемым формулой (12.1).

Введем *плотность σ точек пересечения нитей с сечением S* , определив ее условием, что число точек пересечения, приходящееся на бесконечно малый элемент dS площади сечения S , равно σdS .

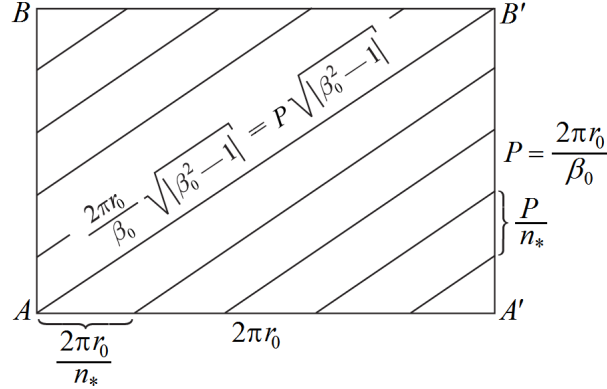


Рис. 12.1. Развертка цилиндрической поверхности, на которой располагаются винтовые нити радиуса r_0 .

Изображены соответственные нити, принадлежащие разным спиральям луча (всего таких нитей n_* штук; показанное их количество — условное; определение соответственных нитей дано в разд. 10, с. 480). Линия AB , по которой произведен разрез цилиндрической поверхности, параллельна направляющему орту оси луча $\mathbf{q}_0$. Линии AA' и BB' лежат в плоскостях, ортогональных вектору $\mathbf{q}_0$. Представлен участок поверхности, соответствующий одному шагу нитей P .

Пусть N_* — количество нитей, содержащихся в одной спирали луча. Напомним, что каждый луч состоит из n_* одинаковых спиралей, занумерованных целыми числами от 0 до $n_* - 1$ (см. текст до и после формулы (10.31), с. 481). Это означает, что всего луч содержит $n_* N_*$ нитей. Таково же общее число точек пересечения нитей с сечением S . Согласно (12.1), длина нити зависит от параметра β_0 , который пропорционален радиусу нити r_0 (при $P = \text{const}$, см. (10.6)). Точка пересечения нити радиуса r_0 с сечением S находится на расстоянии r_0 от центра сечения (см. рис. 10.2, с. 466). Учитывая это, будем считать, что плотность σ принимает одно и то же значение во всех точках сечения S , одинаково удаленных от его центра, но может зависеть от r_0 : $\sigma = \sigma(r_0)$.

Данное допущение влечет одинаковость распределения плотности σ внутри всех спиралей луча, поэтому можем записать:

$$\int_{(S)} \sigma dS = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma dS = n_* \int_{(S_0)} \sigma dS = n_* N_*, \quad (12.2)$$

где $n_* N_*$ — общее число нитей, составляющих луч; S_ξ — сечение спира-

ли № ξ , лежащее в S , в частности, S_0 — сечение спирали № 0 (каждое такое сечение является одним из кругов радиуса p_* на рис. 10.5, с. 479).

Выпишем для плотности σ выражения, отвечающие равномерному и неравномерному распределениям вдоль S рассматриваемых точек пересечения. Будем помечать символ σ индексом 1 в случае равномерного распределения вдоль S точек пересечения и индексом 2 в случае такого распределения этих точек, при котором одинаковым элементам площади сечения S отвечают равные суммарные длины пересекающих их нитей. В тех рассуждениях и формулах, которые относятся к обоим видам плотности, будем пользоваться символом σ без индекса. Принимая во внимание, что сечение S состоит из n_* одинаковых кругов радиуса p_* , нетрудно доказать с учетом выражений (12.1) и (12.2), что

$$\sigma_1 = \frac{N_*}{\pi p_*^2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_*}{J_0} \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}, \quad \text{где } J_0 = \int_{(S_0)} \frac{dS}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}; \quad (12.3)$$

здесь σ_1 является константой на S , а σ_2 зависит от r_0 в силу зависимости от r_0 параметра β_0 . Далее будем считать, что распределение нитей внутри спиралей луча и, значит, плотность σ точек пересечения нитей с поперечным сечением луча не изменяются при движении частицы.

Доказательство. Справедливость выражения для σ_1 очевидна. Согласно определению плотности σ и формуле (12.1), суммарная длина нитей, приходящаяся на один шаг спирали и рассчитанная на единицу площади, равна $\sigma P \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$. В случае плотности σ_2 — это константа. Обозначим ее через k : $k = \sigma_2 P \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$. Отсюда $\sigma_2 = k / (P \sqrt{|\beta_0^2 - 1|})$ (*). Тогда на основании (12.2) имеем: $N_* = \int_{(S_0)} \sigma_2 dS = \int_{(S_0)} k / (P \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}) dS = (k/P) J_0$, откуда $k = N_* P / J_0$. Подставляя это значение k в формулу (*), получаем требуемое значение (12.3) плотности σ_2 . ■

Введем два оператора: $\langle \dots \rangle$ — оператор интегрирования по поперечному сечению луча; $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ — оператор интегрирования по центральному сечению частицы (многоточия заменяют интегрируемые величины).

Первый оператор зададим формулой

$$\langle \dots \rangle = \int_{(S)} \dots \sigma dS, \quad (12.4)$$

где S — какое-либо поперечное сечение луча; dS — элемент его площади; σ — плотность точек пересечения нитей с сечением S .

Зададим второй оператор.

Центральное сечение частицы, по определению, представляет собой сечение частицы ее собственным физическим пространством Γ_* . Оно состоит из поперечных сечений лучей, проходящих через центр частицы

(каждое из них имеет вид фигуры, изображенной на рис. 10.5, с. 479). Это означает, что оператор $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ фактически есть оператор интегрирования по всем таким сечениям лучей. В связи с тем, что каждому лучу частицы соответствует свой направляющий орт оси $\mathbf{q}_0$, интегрирование по всем указанным сечениям лучей может быть произведено путем интегрирования по одному из сечений и последующего интегрирования по всем векторам $\mathbf{q}_0$.

Оси всех лучей частицы, согласно определению, пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно распределены по внутренности светового конуса, имеющего вершиной данную точку. При этом направляющие орты $\mathbf{q}_0$ осей лучей имеют начала в центре частицы. Следовательно, концы векторов $\mathbf{q}_0$ равномерно распределены по единичной псевдосфере с центром в центре частицы, точнее, по той из двух ее пол, которая находится внутри светового конуса будущего. Из этого вытекает, что интегрирование по множеству векторов $\mathbf{q}_0$ может быть сведено к интегрированию по указанной поле единичной псевдосферы. Отсюда, с учетом изложенного выше, заключаем, что оператор $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ может быть представлен в виде суперпозиции оператора $\langle \dots \rangle$ (примененного к лежащему в Γ_* сечению одного из лучей) и оператора интегрирования по упомянутой поле единичной псевдосферы.

Псевдосфера с времениподобными радиусами, как показано в разд. 6 главы 2 (с. 91), задается уравнением

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2,$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек псевдосферы относительно ее центра; R — радиус псевдосферы ($R > 0$). Такая псевдосфера представляет собой аналог двуполостного гиперболоида в трехмерном собственно евклидовом пространстве (см. рис. 6.1 в разд. 6 главы 2, с. 92).

Рассмотрим одну из пол этой псевдосферы (рис. 12.2).

Построим на ней систему угловых координат φ, θ, η , где угол φ отсчитывается от произвольной времениподобной прямой, проходящей через центр псевдосферы O ; θ и η — обычные сферические координаты на двумерной сфере радиуса $R \operatorname{sh} \varphi$, выделяемой на поле псевдосферы условием $\varphi = \text{const}$; $\varphi \in [0, +\infty)$; $\theta \in [0, \pi]$; $\eta \in [0, 2\pi)$ (см. рис. 12.2).

Элемент dS площади сферы радиуса $R \operatorname{sh} \varphi$ равен $(R \operatorname{sh} \varphi)^2 \sin \theta d\theta d\eta$. Элемент dZ (трехмерной) площади полы псевдосферы получается домножением элемента площади сферы dS на элемент длины дуги $R d\varphi$ (так как в точке пересечения дуги и сферы вектор, касательный к дуге, ортогонален векторам, касательным к сфере):

$$dZ = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta. \quad (12.5)$$

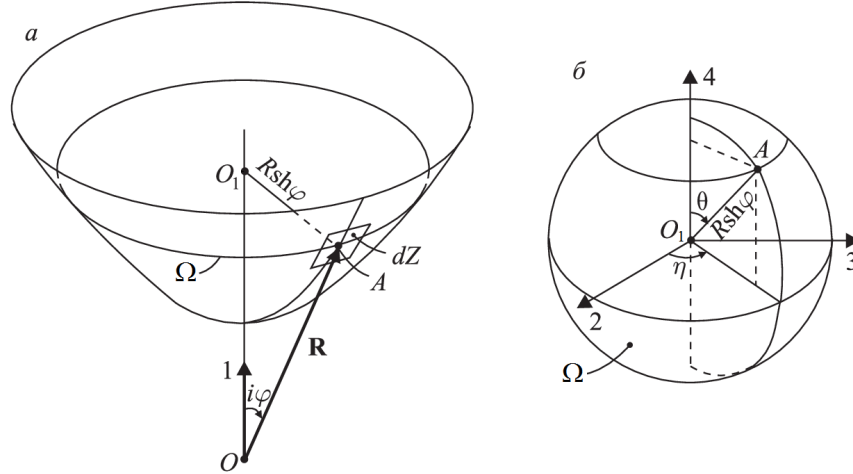


Рис. 12.2. *a* — одна из пол псевдосферы, описываемой уравнением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2$ (с центром в точке O); *б* — сечение этой полу, выделяемое условием постоянства угла φ между некоторой времениподобной прямой, проходящей через O , и радиусом-вектором $\mathbf{R}$ точек полу.

Псевдосфера на рис. *a* изображена с понижением размерности на единицу (поэтому показанная на рис. *б* сфера Ω имеет на рис. *a* вид окружности); R — радиус псевдосферы; $R \operatorname{sh} \varphi$ — радиус сферы Ω ; φ, θ, η — угловые координаты на поле псевдосферы; каждый из символов O_1 и A обозначает на рис. *a* и *б* одну и ту же точку; векторы, занумерованные цифрами от 1 до 4, образуют ортогональный базис пространства Минковского; символ i в обозначении угла указывает на необходимость использования гиперболических функций при оперировании с этим углом.

Площадь полу псевдосферы радиуса R находим интегрированием по всей полу элемента ее площади dZ , задаваемого формулой (12.5):

$$\begin{aligned}
 Z = \int_{(Z)} dZ &= \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\eta = \\
 &= 4\pi R^3 \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi \, d\varphi,
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

где символ Z обозначает как площадь полу псевдосферы, так и саму полу. Предел в правой части выражения, строго говоря, равен беско-

нечности, однако это не препятствует получению в последующем с помощью выражения (12.6) конечных величин.

Нас интересует единичная псевдосфера с центром в центре частицы, точнее, та ее пола, на которой располагаются концы векторов $\mathbf{q}_0$, поэтому далее под Z будем понимать именно эту полу (одновременно Z будет обозначать ее площадь). Поскольку данная пола имеет единичный радиус, следует положить в выписанных формулах $R = 1$.

Пусть общее число лучей, составляющих частицу, равно N . Тогда при равномерном распределении концов векторов $\mathbf{q}_0$ по указанной полу Z единичной псевдосферы на элемент ее площади dZ приходится $(N/Z)dZ$ концов векторов $\mathbf{q}_0$ (где Z — площадь полу).

На основании изложенного зададим *оператор интегрирования по центральному сечению частицы* в виде

$$\begin{aligned} \langle\langle \dots \rangle\rangle &= \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \dots \rangle_* dZ = \\ &= \frac{N}{Z} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{\Phi} \int_{\substack{0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} \left(\int_{(S_*)} \dots \sigma dS \right) \text{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где оператор $\langle \dots \rangle$ определен формулой (12.4); звездочка при символах $\langle \dots \rangle$ и S означает, что интегрирование проводится по поперечному сечению луча, лежащему в собственном физическом пространстве частицы Γ_* ; элемент площади dZ и сама площадь Z рассматриваемой полу псевдосферы описываются выражениями (12.5) и (12.6) при $R = 1$; смысл переменных интегрирования (угловых координат) φ, θ, η ясен из рис. 12.2. Условимся отсчитывать угол φ от оси симметрии частицы (эта ось проходит через центр частицы и направлена вдоль вектора $\mathbf{i}$).

Применим введенные операторы $\langle \dots \rangle$ и $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ к векторам $\mathbf{q}$, касательным к нитям (эти векторы задаются формулой (11.34)).

Сначала подействуем на векторы $\mathbf{q}$ оператором $\langle \dots \rangle$, иначе говоря, проинтегрируем векторы $\mathbf{q}$ по поперечному сечению луча S :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \rangle &= \int_{(S)} \mathbf{q} \sigma dS = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \mathbf{q} \sigma dS = \\ &= \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 \pm \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] dS, \end{aligned} \quad (12.8)$$

здесь первое равенство записано на основании определения (12.4) оператора $\langle \dots \rangle$; второе равенство базируется на представлении сечения луча S в виде объединения непересекающихся сечений S_ξ отдельных спиралей, составляющих луч ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); в третьем равенстве подставлено на место вектора $\mathbf{q}$ его значение (11.34) (при этом убрано указание на зависимость величин от l , так как мы исследуем фиксированное расположение частицы в пространстве M).

Воспользуемся формулой (10.31) (с. 481):

$$\chi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi, \quad (12.9)$$

где ξ — номер спирали, которой принадлежит рассматриваемая нить ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); χ_0 — значение угла χ для нити, которая относится к спирали № 0 и для которой рассматриваемая нить является соответственной. Подставляя это значение угла χ в правую часть цепочки равенств (12.8), имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \rangle &= \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \times \\ &\times \left[\mp \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) \mathbf{e}_1 \pm \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] dS. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Введем в исследуемом поперечном сечении луча S полярные координаты (r_0, χ) с полюсом в центре сечения и полярной осью, направленной вдоль произвольно выбранного вектора $\mathbf{e}_1$ (см. рис. 10.5, с. 479).

Сечение луча S состоит из n_* одинаковых сечений спиралей. При каждом ξ интегрирование в (12.10) проводится только по сечению S_ξ спирали № ξ . Элемент площади сечения S_ξ в полярных координатах (r_0, χ) есть $r_0 d\chi dr_0$. А так как вдоль всего сечения S_ξ величина ξ одинакова, то из (12.9) вытекает, что в сечении S_ξ выполняется $d\chi = d\chi_0$. Поэтому элемент площади сечения S_ξ (при любом ξ) равен $r_0 d\chi_0 dr_0$, где $r_0 \in [r_{0min}, r_{0max}]$ и $\chi_0 \in [\chi_{01}(r_0), \chi_{02}(r_0)]$ (χ_{01} и χ_{02} — минимальное и максимальное значения угла χ_0 , определяемые формой сечения спирали и зависящие от r_0 ; см. рис. 10.5). Следовательно, интеграл по сечению S_ξ может быть представлен в виде

$$\int_{(S_\xi)} \dots dS = \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \dots r_0 d\chi_0 dr_0. \quad (12.11)$$

На основании сказанного перепишем выражение (12.10) в форме

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \rangle = & \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \times \\ & \times \left[\mp \sin\left(\chi_0 + \psi + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_1 \pm \cos\left(\chi_0 + \psi + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] r_0 d\chi_0 dr_0. \end{aligned}$$

Поскольку пределы интегрирования и величины σ , β_0 , r_0 , $d\chi_0$, dr_0 не зависят от номера спирали ξ , то можно внести знак суммирования под знаки интегралов и суммировать только выражение, стоящее в квадратных скобках. Внося далее знак суммирования внутрь квадратных скобок, получаем с учетом независимости $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$ от ξ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \rangle = & \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \mathbf{e}_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \psi + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \pm \right. \\ & \left. \pm \mathbf{e}_2 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \psi + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) + \frac{n_*}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] r_0 d\chi_0 dr_0; \end{aligned} \quad (12.12)$$

отметим, что последнее слагаемое в квадратных скобках при суммировании умножается на n_* .

В математике известны формулы [34]:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha + \sin(\alpha + \delta) + \sin(\alpha + 2\delta) + \dots \\ & \dots + \sin(\alpha + (n-1)\delta) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta\right) \sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}; \end{aligned} \quad (12.13)$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos(\alpha + \delta) + \cos(\alpha + 2\delta) + \dots \\ & \dots + \cos(\alpha + (n-1)\delta) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta\right) \sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Напомним, что винтовая переменная ψ одинакова вдоль всего поперечного сечения луча, поэтому она не зависит от ξ .

В силу независимости χ_0 и ψ от ξ , формулы (12.13) и (12.14) могут быть применены к нашему случаю. Подставим в них: $\alpha = \chi_0 + \psi$, $\delta = 2\pi/n_*$ и $n = n_*$. Тогда в левых частях формул получим суммы

синусов и косинусов такие же, как в (12.12). А правые части будут содержать множитель $\sin \frac{n\delta}{2} = \sin \frac{n_*(2\pi/n_*)}{2} = \sin \pi = 0$, что в итоге дает:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \psi + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) = 0; \quad \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \psi + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) = 0. \quad (12.15)$$

Формулы (12.15) имеют простой смысл: если внутри интервала, равного периоду синуса, взять равноотстоящие точки, то сумма значений синуса в этих точках будет равна нулю. При большом числе точек это почти то же самое как проинтегрировать синус по интервалу, равному его периоду (аналогичное верно для косинуса).

Подставим значения (12.15) сумм синусов и косинусов в (12.12), вынесем за знаки интегралов константу n_* и направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$, общий для всех нитей луча, и применим равенство (12.11) (читаемое справа налево). С учетом (12.4) приходим к такому результату:

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \int_{(S)} \mathbf{q} \sigma dS = \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_0)} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS; \quad (12.16)$$

отметим, что интегрирование в правой части формулы можно проводить по сечению любой спирали; тот факт, что здесь указано сечение S_0 спирали № 0, не умаляет общности, потому что любая спираль может быть выбрана в качестве нулевой.

Из (12.16) видно, что интегрирование векторов $\mathbf{q}$, касательных к нитям, по поперечному сечению луча, дает вектор, коллинеарный направляющему орту оси луча $\mathbf{q}_0$. Это не удивительно, так как луч обладает осевой симметрией, благодаря чему составляющие векторов $\mathbf{q}$, направленные вдоль сечения луча S , дают при интегрировании нулевой вектор, а составляющие вдоль оси луча суммируются.

Формула (12.16) справедлива как в случае непереориентированного луча, так и в случае переориентированного луча, в чем легко убедиться, если в проведенных преобразованиях воспользоваться вместо выражения (11.34) выражением (11.39).

Теперь применим к векторам $\mathbf{q}$ оператор интегрирования по центральному сечению частицы $\langle \langle \dots \rangle \rangle$, введенный формулой (12.7).

Повторим, что мы рассматриваем фиксированное расположение частицы в пространстве M . Центр частицы и точка пространства, в которой он находится, обозначаются одной буквой O . Мы условились отсчитывать угол φ , входящий в оператор (12.7), от оси симметрии частицы, то есть от вектора $\mathbf{i}$. Будем трактовать φ как угол между вектором $\mathbf{i}$ и

направляющим ортом $\mathbf{q}_0$ некоторого луча частицы. Поскольку $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ — единичные векторы, имеющие одинаковую временную ориентацию, то выполняется равенство $\text{ch } \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$.

Рассмотрим какой-либо луч частицы. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси. Введем в пространстве M связанный с этим лучом ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в центре частицы O и вектором $\mathbf{e}_3$, удовлетворяющим зависимости (11.20):

$$\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{e}_3.$$

Из этой зависимости вытекает, что вектор $\mathbf{e}_3$ может быть выражен через векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ (при $\varphi \neq 0$), поэтому $\mathbf{e}_3 \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Отсюда $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_3\} = \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Следовательно, $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_3\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Так как базис $\{\mathbf{e}_i\}$ ортонормированный и $\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}$, то $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_3\}$, значит, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Напомним, что $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ — плоскость, в которой лежит поперечное сечение луча, проходящее через центр частицы O . Поскольку векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ принадлежат этому сечению и вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален им, то $\mathbf{e}_3$ направлен вдоль нормали к поперечному сечению луча, поэтому будем обозначать далее вектор $\mathbf{e}_3$ буквой $\mathbf{n}$, символизирующей нормаль. В таком случае выписанная выше зависимость принимает вид

$$\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}; \quad (12.17)$$

обозначение единичного вектора нормали символом $\mathbf{n}$ уже использовалось в разд. 5 (см. формулу (5.7) и рис. 5.1, с. 425).

Введенный базис $\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ аналогичен базису, построенному в разд. 11. Из его ортонормированности следует, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис в собственном физическом пространстве частицы $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$; он имеет начало, как и $\{\mathbf{e}_i\}$, в центре частицы O .

С помощью зависимостей (12.7), (12.16) и (12.17) находим:

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle &= \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \mathbf{q} \rangle_* dZ = \\ &= \frac{N n_*}{Z} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{\Phi} \int_{\substack{0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} (\text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}) \left(\int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \times \\ &\quad \times \text{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta, \end{aligned} \quad (12.18)$$

где S_{0*} — сечение спирали $\aleph_0$, лежащее в Γ_* . Поскольку зависимости (12.16) и (12.17) выполняются как для непереоориентированного, так и

для переориентированного луча, то выражение (12.18) также относится к обоим типам лучей.

В (12.18) только вектор $\mathbf{n}$ и величины, входящие в элемент площади dZ , зависят от переменных θ и η . Так как $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$ и $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, то из (12.17) вытекает, что вектор $\text{sh } \varphi \mathbf{n}$ является составляющей вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль собственного физического пространства частицы Γ_* , причем $\mathbf{n}$ — направляющий орт этой составляющей. Вследствие равномерности распределения концов векторов $\mathbf{q}_0$ по поле Z единичной псевдосферы, концы векторов $\mathbf{n}$ оказываются равномерно распределенными по единичной сфере в Γ_* . Поэтому интеграл от $\mathbf{n}$ по данной сфере (к которому в (12.18) сводится двойной интеграл от $\mathbf{n}$ по переменным θ и η) равен нулевому вектору. Учитывая это и пользуясь зависимостью (12.6) (при $R = 1$), приводим выражение (12.18) к виду

$$\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = \mathbf{i} N n_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \text{ch } \varphi \text{sh}^2 \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi}, \quad (12.19)$$

где $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ — оператор интегрирования по центральному сечению частицы, определяемый формулой (12.7); $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы; N — количество лучей, составляющих частицу; n_* — количество спиралей в одном луче; S_{0*} — сечение спирали № 0, лежащее в центральном сечении частицы (можно интегрировать по сечению любой спирали, так как нумерация спиралей может быть начата с произвольной из них; при интегрировании можно использовать выражение (12.11)); σ — плотность точек пересечения нитей с поперечным сечением луча (задается формулами (12.3)); β_0 — параметр, который входит в формулу (11.34), описывающую касательный к нити единичный вектор $\mathbf{q}$ (параметр β_0 связан с шагом P и радиусом r_0 винтовой нити равенством (10.6): $P = 2\pi r_0 / \beta_0$); dS — элемент площади сечения S_{0*} ; φ — угол между вектором $\mathbf{i}$ и направляющим ортом оси луча $\mathbf{q}_0$. Выражение (12.19), как и выражение (12.18), справедливо независимо от того, испытали лучи переориентацию или нет.

Обратим внимание на то, что в (12.19) отношение пределов двух функций (при $\Phi \rightarrow +\infty$) заменено пределом отношения этих функций.

Предел функции в знаменателе формулы (12.19) (при $\Phi \rightarrow +\infty$), как отмечалось, равен бесконечности. Вследствие этого, замена отношения пределов функций пределом их отношения не является вполне корректным преобразованием с точки зрения классического математического анализа. Тем

не менее, мы будем полагать это преобразование допустимым. Заметим, что в рамках нестандартного анализа [24] отмеченную некорректность, по-видимому, можно «обойти», если принять, что Φ есть некоторое бесконечно большое гипердействительное число. В этом случае предельные переходы в числителе и знаменателе окажутся ненужными, поэтому производить такое некорректное преобразование просто не потребуется.

Покажем, что выражение (12.19) приводит к конечному значению величины $\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle$, несмотря на наличие в его знаменателе функции, предел которой при $\Phi \rightarrow +\infty$ равен бесконечности.

Для простоты, рассмотрим ситуацию, когда σ принимает значение, описываемое первой формулой в (12.3) ($\sigma = \sigma_1 = N_*/(\pi p_*^2)$), а параметр β_0 задается выражением b в (10.30) ($\beta_0 = r_0 \operatorname{ch} \varphi / r_*$). Кроме того, пренебрежем различием между r_0 и r_* (так как $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ и $p_* \ll r_*$). Вместе с предыдущим это дает $\beta_0 \approx \operatorname{ch} \varphi$. Подставляя указанные значения σ и β_0 в (12.19) и учитывая, что площадь сечения S_{0*} равна πp_*^2 и что $\operatorname{ch} \varphi \approx \operatorname{sh} \varphi$ при больших φ , получаем в числителе тот же интеграл по φ , который стоит в знаменателе. Сокращая эти интегралы, приходим в итоге к равенству

$$\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = N n_* N_* \mathbf{i}, \quad (12.20)$$

где N — количество лучей, составляющих частицу; n_* — количество спиралей в одном луче; N_* — количество нитей, содержащихся в одной спирали; $N n_* N_*$ — общее количество нитей, составляющих частицу; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы. Из (12.20) вытекает, что действительно наличие в выражении (12.19) бесконечно большой функции не препятствует получению с его помощью конечных величин.

Итак, мы ввели посредством формул (12.4) и (12.7) оператор интегрирования по поперечному сечению луча $\langle \dots \rangle$ и оператор интегрирования по центральному сечению частицы $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ и применили их к единичным векторам $\mathbf{q}$, касательным к нитям. Первый оператор дает в этом случае вектор (12.16), коллинеарный направляющему орту оси луча $\mathbf{q}_0$, а второй оператор приводит к вектору (12.19), коллинеарному направляющему орту оси симметрии частицы $\mathbf{i}$.

13. Законы движения частицы

В разд. 11 главы 4 (с. 379) записаны: уравнение движения «точечной» частицы (11.1)

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i} \quad (13.1)$$

и основной закон динамики «точечной» частицы (11.6)

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0, \quad (13.2)$$

где $\mathbf{i}$ и l — 4-скорость и собственное время частицы;

$$a_1 = \frac{e}{m_e c^2}; \quad (13.3)$$

e и m_e — заряд и масса электрона (при трактовке частицы как модели электрона; $e < 0$; $m_e > 0$); c — скорость света; F — результирующее поле, порождаемое другими частицами в месте нахождения центра данной частицы; $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча (луч «точечной» частицы представляет собой времениподобную прямую, проходящую через центр частицы). Повторим сказанное в отношении этих законов в разд. 14 главы 4 (с. 402).

С математической точки зрения уравнение движения (13.1) является частным случаем основного закона динамики (13.2) при $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$. Однако с позиции механики эта ситуация представляется более сложной. Дело в том, что воздействовать друг на друга могут только материальные объекты, поэтому утверждать, что поле F воздействует на какие-то математические конструкции, можно только в том случае, если последние имеют в реальном мире материальные прообразы. Между тем, 4-скорость $\mathbf{i}$, являясь касательным вектором к мировой линии, не имеет материального прообраза, поэтому, строго говоря, нельзя утверждать, что поле F действует на вектор $\mathbf{i}$. Однако можно полагать, что оно действует на лучи частицы, ибо в рамках данной модели лучи считаются математическими образами неких материальных объектов. Таким образом, уравнение движения частицы (13.1) должно вытекать из закона (13.2) как результат действия поля F на лучи частицы, а не выводиться путем формальной подстановки в закон (13.2) вектора $\mathbf{i}$ на место вектора $\mathbf{q}_0$.

Отметим, что поскольку начала всех векторов $\mathbf{q}_0$ находятся в центре частицы, то значение поля F в законе (13.2) одинаково для всех векторов $\mathbf{q}_0$, поэтому не удивительно, что уравнение движения (13.1) может быть формально получено из закона (13.2) простой заменой вектора $\mathbf{q}_0$ вектором $\mathbf{i}$.

Зададим основной закон динамики частицы ненулевого радиуса.

В этой модели элементарными «кирпичиками», составляющими частицу, являются винтовые спирали, из которых состоят лучи частицы (см. рис. 1.3, с. 409), при этом подразумевается, что спирали служат геометрическими образами неких фрагментов материального мира. Для удобства математического описания мы приняли, что каждая спираль представляет собой связку винтовых нитей, поэтому будем считать, что воздействие на частицу проявляется через воздействие на ее винтовые нити. Пользуясь аналогией с основным законом динамики «точечной» частицы (13.2), примем основной закон динамики частицы ненулевого радиуса в следующем предварительном виде:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = a_1 W \cdot \mathbf{q}, \quad (13.4)$$

где все величины относятся к элементу нити, находящемуся в центральном сечении частицы; $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити; l — собственное время частицы (натуральный параметр на мировой линии L частицы, возрастающий в направлении будущего); $d\mathbf{q}/dl$ — субстанциональная производная, то есть производная, вычисляемая для индивидуального элемента нити; a_1 — скалярный параметр, который определяется только свойствами данной частицы, не зависит от l и одинаков для всех нитей; полагая частицу моделью электрона, будем считать, что параметр a_1 имеет вид (13.3); W — двухвалентный тензор, характеризующий воздействие на нить. Закон (13.4) свой для каждой нити.

Тензор W не может быть произвольным. Это объясняется тем, что вектор $\mathbf{q}$, по определению, имеет фиксированную (единичную) длину, поэтому никакое воздействие на частицу не должно приводить к изменению его длины. Так как $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}} = 1$, то $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \pm 1$ (знак плюс, если вектор $\mathbf{q}$ времениподобный; минус, если он пространственноподобный). Дифференцирование обеих частей последнего равенства по l дает: $\mathbf{q} \cdot (d\mathbf{q}/dl) = 0$. Отсюда с учетом (13.4) имеем: $\mathbf{q} \cdot W \cdot \mathbf{q} = 0$. Принимая во внимание, что векторы $\mathbf{q}$, отвечающие разным нитям частицы, имеют разные направления, потребуем, чтобы тензор W удовлетворял аналогичному равенству для любых векторов $\mathbf{x}$ из пространства M : $\mathbf{x} \cdot W \cdot \mathbf{x} = 0$. По теореме 7.1 из разд. 7 главы 2 (с. 99) это требование выполняется тогда и только тогда, когда тензор W является *антисимметричным* ($W^* = -W$, где W^* — тензор, сопряженный к W). Отметим, что при антисимметричном тензоре W закон (13.4) осуществляет лоренцево преобразование пространства M (см. в разд. 18 главы 3 теорему 18.1 на с. 237, следствие к ней и текст, предваряющий теорему).

В рамках рассматриваемой модели можно указать три источника воздействия на частицу.

Во-первых, частица может испытывать воздействие со стороны окружающих ее объектов. Тензорную характеристику этого воздействия обозначим через F .

Во-вторых, источником воздействия может служить сама частица при тех ее расположениях в M , которые отвечают прошлым моментам времени. В самом деле, благодаря времениподобности мировой линии частицы, центр частицы всегда находится в области пространства M , занятой лучами этой же частицы при прошлых ее расположениях в M (см. в разд. 1 главы 4 рис. 1.4, с. 311, этот рисунок относится к «точечной» частице, но, как отмечено в конце разд. 2 настоящей главы, частица ненулевого радиуса при взгляде на нее издали выглядит в точности так, как «точечная» частица). Это означает, что частица непосредственно контактирует со своими же расположениями в M , отвечающими предшествующим моментам времени, поэтому воздействие частицы на себя действительно возможно. Такое воздействие будем называть *самодействием* частицы. Тензорную характеристику самодействия обозначим символом F_s (индекс s от английского self — сам). Отметим, что при «взгляде» из данного местонахождения частицы невозможно различить, находится в другом месте пространства M сама эта частица или иная такая же частица. Следовательно, воздействие частицы на себя должно быть аналогичным воздействию на нее со стороны других частиц, поэтому самодействие частицы может быть описано тем же способом, что и воздействие, оказываемое другими частицами.

Третьим источником воздействия на частицу служит та внутренняя причина, которая поддерживает целостность и недеформируемость частицы. В отношении этой причины поступим аналогично тому, как в подобной ситуации принято поступать в теоретической механике. В этой науке при описании движения абсолютно твердого (недеформируемого) тела принимается, что внутренние силы не оказывают влияния на движение тела, так как по третьему закону Ньютона они в сумме равны нулю. Допустим и мы, что внутреннее воздействие в частице самоуравновешено и поэтому может не учитываться при описании движения частицы.

Введенные тензорные величины F и F_s имеют в общем случае разные значения в разных точках области пространства M , занимаемой частицей, поэтому будем именовать их полями и дадим им следующие названия: F — *внешнее поле*, F_s — *собственное поле частицы*. Будем считать, что эти величины являются двухвалентными антисимметрич-

ными тензорами над M и что их вклады в тензор W суммируются:

$$W = F + F_s.$$

Подставляя это значение тензора W в (13.4) получаем *основной закон динамики частицы ненулевого радиуса* в окончательной форме:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = a_1(F + F_s) \cdot \mathbf{q}, \quad (13.5)$$

где все величины, как и в (13.4), относятся к элементу нити, принадлежащему центральному сечению частицы; смысл тензоров F и F_s указан выше; остальные обозначения те же, что в (13.4). В дальнейшем в роли внешнего поля F будем рассматривать электромагнитное поле, создаваемое окружающими частицу объектами. Собственное поле частицы F_s определим в следующем разделе.

Мы будем исследовать движение частицы, пользуясь не непосредственно уравнением (13.5), а двумя уравнениями, которые выведем на его основе. К первому уравнению придем посредством интегрирования обеих частей уравнения (13.5) по поперечному сечению луча, лежащему в центральном сечении частицы. Второе уравнение получим путем интегрирования обеих частей уравнения (13.5) по всему центральному сечению частицы.

Итак, применим к обеим частям уравнения (13.5) оператор интегрирования по поперечному сечению луча $\langle \dots \rangle$, заданный формулой (12.4). Условимся при использовании этого оператора производить интегрирование для всех моментов времени по одному и тому же сечению луча (поперечное сечение луча индивидуализируется фиксированием значения винтовой переменной ψ в рассматриваемых уравнениях, в этом можно убедиться с помощью рис. 10.2, с. 466). При данном условии оператор $\langle \dots \rangle$ и оператор d/dl взятия субстанциональной производной по l коммутируют. Учитывая это и принимая во внимание линейность оператора $\langle \dots \rangle$, получаем из (13.5):

$$\frac{d}{dl}\langle \mathbf{q} \rangle_* = a_1 \langle F \cdot \mathbf{q} \rangle_* + a_1 \langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle_*, \quad (13.6)$$

где звездочка при символе $\langle \dots \rangle$ означает, что интегрирование проводится по поперечному сечению луча, лежащему в рассматриваемый момент времени l в центральном сечении частицы.

Заметим, что поперечное сечение луча, которое в некоторый момент времени принадлежит центральному сечению частицы, может не принадлежать ему в другие моменты времени. Это объясняется тем, что при движении

частицы поперечные сечения лучей, находящиеся в центральном сечении частицы, движутся в общем случае иначе, чем движется само центральное сечение. А именно, центральное сечение частицы перемещается вдоль мировой линии L , точнее говоря, оно движется со скоростью, поступательная составляющая которой равняется касательному орту $\mathbf{i}$ к линии L . Поперечное же сечение луча (образованное индивидуальными элементами нитей), как видно из (11.29), перемещается таким образом, что поступательная составляющая его скорости при $q \neq 0$ не совпадает с $\mathbf{i}$.

С помощью (12.4) и (12.16) приводим уравнение (13.6) к виду

$$\left(n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \int_{(S_*)} F \cdot \mathbf{q} \sigma dS + a_1 \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS, \quad (13.7)$$

где учтено, что выражение в левой части, заключенное в скобки, не зависит от l ; n_* — количество спиралей в одном луче частицы; S_{0*} — сечение любой из спиралей, лежащих в S_* ; S_* — поперечное сечение луча, принадлежащее центральному сечению частицы (оно имеет вид, показанный на рис. 2.1, 4.1 и 10.5, с. 411, 419 и 479); σ — плотность точек пересечения нитей с поперечным сечением луча, введенная формулами (12.3); β_0 — параметр, который участвует в формуле (11.34), описывающей касательный к нити вектор $\mathbf{q}$ (параметр β_0 связан с шагом P и радиусом r_0 винтовой нити равенством (10.6): $P = 2\pi r_0 / \beta_0$); $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча; F — внешнее поле; F_s — собственное поле частицы (F и F_s — двухвалентные антисимметричные тензоры); другие обозначения те же, что в (13.4).

В связи с тем, что уравнение (13.7) описывает изменение во времени направляющего орта оси луча $\mathbf{q}_0$, назовем это уравнение, а также эквивалентное ему уравнение (13.6), *уравнением движения оси луча*.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Участвующая в уравнении (13.7) производная $d\mathbf{q}_0/dl$ — субстанциональная, то есть она вычисляется для фиксированного (индивидуального) элемента оси луча. Такой элемент, как видно из (11.30), движется иначе, чем центр частицы. Однако, поскольку направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$ имеет одно и то же значение вдоль всей оси, а сама ось всегда проходит через центр частицы, то при рассмотрении производной $d\mathbf{q}_0/dl$ не имеет значения, вычисляется она для фиксированной точки оси луча или для центра частицы. Учитывая это обстоятельство и равенство левых частей уравнений (13.6) и (13.7), будем трактовать производные $d\mathbf{q}_0/dl$ и $d\langle \mathbf{q} \rangle_*/dl$ как вычисляемые для центра частицы.

Теперь подействуем на обе части уравнения (13.5) оператором интегрирования по центральному сечению частицы $\langle \langle \dots \rangle \rangle$. Пользуясь его

определением (12.7), коммутированием операторов $\langle \dots \rangle$ и d/dl , а также независимостью от l общего числа лучей N и площади полы единичной псевдосферы Z , можем записать для левой части уравнения (13.5):

$$\left\langle\left\langle \frac{d\mathbf{q}}{dl} \right\rangle\right\rangle = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \left\langle \frac{d\mathbf{q}}{dl} \right\rangle_* dZ = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \frac{d}{dl} \langle \mathbf{q} \rangle_* dZ = \frac{d}{dl} \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \mathbf{q} \rangle_* dZ = \frac{d}{dl} \langle \langle \mathbf{q} \rangle \rangle, \quad (13.8)$$

где при вынесении оператора d/dl за знак интеграла считается, что производная $d\langle \mathbf{q} \rangle_*/dl$ относится к центру частицы. Из (13.8) вытекает, что операторы $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ и d/dl коммутируют.

На основании (13.5) и (13.8), в силу линейности оператора $\langle \langle \dots \rangle \rangle$, получаем:

$$\frac{d}{dl} \langle \langle \mathbf{q} \rangle \rangle = a_1 \langle \langle F \cdot \mathbf{q} \rangle \rangle + a_1 \langle \langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle \rangle. \quad (13.9)$$

Уравнение (13.9) с помощью (12.4), (12.7) и (12.19) может быть преобразовано к форме

$$\left(n_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} \right) \frac{d\mathbf{i}}{dl} = \\ = a_1 \frac{1}{Z} \int_{(Z)} \int_{(S_*)} F \cdot \mathbf{q} \sigma dS dZ + a_1 \frac{1}{Z} \int_{(Z)} \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS dZ, \quad (13.10)$$

где учтено, что выражение в скобках не зависит от l ; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы, ориентированный в сторону будущего; Z — пола единичной псевдосферы, находящаяся во внутренней области светового конуса будущего с вершиной в центре частицы (ее площадь, тоже обозначаемая буквой Z , определяется формулой (12.6) при $R = 1$); φ — угловая координата на поле Z , отсчитываемая от оси симметрии частицы (эта ось проходит через центр частицы и направлена вдоль вектора $\mathbf{i}$); остальные обозначения те же, что в (13.7).

Уравнение (13.10) описывает изменение со временем направляющего орта оси симметрии частицы $\mathbf{i}$. Напомним, что мы исследуем ситуацию, когда вектор $\mathbf{i}$ касателен к мировой линии частицы L , то есть является 4-скоростью частицы. Поэтому назовем уравнение (13.10), а также равносильное ему уравнение (13.9), *уравнением движения частицы ненулевого радиуса*.

Уравнение движения оси луча (13.7) и уравнение движения частицы (13.10) принимают существенно более простой вид в ситуации, когда величинами порядка p_*/r_* ($= \sin(\pi/n_*)$) можно пренебречь по сравнению с единицей.

При таком приближении выполняется $r_0 \approx r_*$ (ибо $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ и $r_* \mp p_* = r_*(1 \mp p_*/r_*) \approx r_*$) и все три варианта значений параметра β_0 , задаваемых формулами (10.30), сводятся к равенству $\beta_0 \approx \text{ch } \varphi$. В этом случае интеграл по S_{0*} в левых частях уравнений (13.7) и (13.10) оказывается равным $N_*/\text{sh } \varphi$, см. (12.2) (N_* — количество нитей в одной спирали луча). В правых частях уравнений каждый из интегралов по сечению S_* равен сумме n_* интегралов по кругам, образующим сечение S_* . Так как в рассматриваемом приближении $r_0 \approx r_*$, то функции $F \cdot \mathbf{q}$ и $F_s \cdot \mathbf{q}$, стоящие под знаками этих интегралов, могут быть заменены на каждом из кругов их значениями в центре круга и вынесены за знаки интегралов. Остающиеся интегралы от плотности σ , благодаря одинаковому строению спиралей, образующих луч, имеют одно и то же значение, которое, по (12.2), равно N_* . В результате указанных упрощений, дополненных очевидными преобразованиями, уравнения (13.7) и (13.10) переходят в следующие уравнения, которые назовем *приближенным уравнением движения оси луча* и *приближенным уравнением движения частицы ненулевого радиуса* соответственно:

$$\frac{n_*}{\text{sh } \varphi} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} + a_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F_s \cdot \mathbf{q})_{\xi}; \quad (13.11)$$

$$n_* \frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 \frac{1}{Z} \int \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} dZ + a_1 \frac{1}{Z} \int \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F_s \cdot \mathbf{q})_{\xi} dZ, \quad (13.12)$$

где суммирование ведется по всем n_* кругам, образующим сечение S_* ; индекс ξ при функции означает, что берется значение функции в центре круга № ξ ; величины dZ и Z определяются формулами (12.5) и (12.6) при $R = 1$; учтено, что

$$\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\Phi} \text{ch } \varphi \text{ sh } \varphi d\varphi}{\int_0^{\Phi} \text{sh}^2 \varphi d\varphi} = 1.$$

Покажем, что уравнение движения оси луча (13.7) и уравнение движения частицы (13.10) согласованы с аналогичными уравнениями (13.1) и (13.2), относящимися к «точечной» частице.

В модели «точечной» частицы воздействие внешнего поля на лучи осуществляется в центре частицы, поэтому оно одинаково для всех лучей; кроме того, в этой модели не учитывается самодействие частицы.

Рассмотрим частицу ненулевого радиуса в подобных условиях, а именно *допустим, что внешнее поле F однородно в центральном сечении частицы и самодействие отсутствует* ($F_s = \hat{0}$, где $\hat{0}$ — нулевой тензор).

Перепишем уравнение (13.7) с учетом данного допущения и воспользуемся формулой (12.16):

$$\left(n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \int_{(S_*)} \mathbf{q} \sigma dS = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS.$$

Сокращая крайние части этой цепочки равенств на выражение, стоящее слева в скобках, получаем уравнение

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0,$$

которое совпадает с основным законом динамики «точечной» частицы (13.2). Значит, уравнение движения оси луча (13.7) действительно согласовано с аналогичным уравнением для «точечной» частицы.

Теперь рассмотрим уравнение (13.10). Запишем его правую часть с учетом принятого допущения и преобразуем с помощью последовательно (12.16), (12.5) при $R = 1$, (12.17):

$$\begin{aligned} a_1 \frac{1}{Z} F \cdot \int_{(Z)} \int_{(S_*)} \mathbf{q} \sigma dS dZ &= a_1 \frac{1}{Z} F \cdot \int_{(Z)} \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS dZ = \\ &= a_1 \frac{1}{Z} F \cdot \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_{(\varphi)}^{\Phi} \int_{(\theta)}^{\pi} \int_{(\eta)}^{2\pi} \mathbf{q}_0 n_* \left(\int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \text{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta = \\ &= a_1 \frac{1}{Z} F \cdot \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_{(\varphi)}^{\Phi} \int_{(\theta)}^{\pi} \int_{(\eta)}^{2\pi} (\text{ch} \varphi \mathbf{i} + \text{sh} \varphi \mathbf{n}) n_* \left(\int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \times \\ &\quad \times \text{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta. \end{aligned}$$

В последнем выражении этой цепочки равенств только вектор $\mathbf{n}$ и величины, входящие в элемент площади dZ , зависят от переменных θ

и η . Согласно сказанному перед формулой (12.19), двойной интеграл от $\mathbf{n}$ по переменным θ и η равен нулевому вектору. На основании этого и зависимости (12.6) (при $R = 1$), приводим правую часть уравнения (13.10) к виду

$$a_1 F \cdot \mathbf{i} n_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi} \int_0^\Phi \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \text{ch} \varphi \text{sh}^2 \varphi d\varphi.$$

Подставим данное выражение в уравнение (13.10) на место правой части и затем сократим обе части уравнения на величину, заключенную в левой части в скобки. В итоге приходим к уравнению

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения «точечной» частицы (13.1). Следовательно, уравнение (13.10), задающее движение частицы ненулевого радиуса, тоже согласовано с аналогичным уравнением для «точечной» частицы.

Согласованность уравнений, описывающих движение частицы ненулевого радиуса, с уравнениями для «точечной» частицы означает, что *результаты, которые получены для «точечной» частицы на основании уравнений (13.1) и (13.2), верны и для частицы ненулевого радиуса.*

Сделаем несколько замечаний, касающихся приведенных в настоящем разделе уравнений.

1. В соответствии с исходными положениями модели векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ имеют единичные длины, а углы между ними, как и углы между всеми осями лучей частицы, не меняются при движении частицы. Поэтому уравнение движения оси луча (13.7) и уравнение движения частицы (13.10) должны обеспечивать выполнение этих условий. Мы, однако, не будем проверять соблюдение данного требования в общем случае, а сделаем это при рассмотрении частных случаев движения частицы.

2. Из определения (12.7) оператора $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ (с учетом коммутирования оператора d/dl с операторами $\langle \dots \rangle$ и $\langle\langle \dots \rangle\rangle$) вытекает, что уравнение (13.9) является следствием уравнения (13.6). Значит, можно считать уравнение (13.10) следствием уравнения (13.7). Вместе с тем, все эти уравнения представляют собой следствия постулированного закона (13.5). Отметим, что обратный переход от уравнений (13.6), (13.7), (13.9) и (13.10) к закону (13.5) невозможен, из-за применения при прямом переходе процедуры интегрирования.

3. Производные по l в уравнениях (13.6), (13.7), (13.9) и (13.10) вычисляются для центра частицы, а в исходном законе (13.5) — для индивидуального элемента нити.

4. Все выписанные уравнения выполняются независимо от того, испытывали какие-либо лучи частицы переориентацию или нет (так как они базируются на формулах (12.16) и (12.19), верных и для непереориентированных, и для переориентированных лучей).

5. Закон инерции утверждает, что свободная частица, то есть частица, на которую не действуют другие частицы, имеет прямолинейную мировую линию (с. 150). Эффект самодействия частицы вносит коррективы в этот закон. В самом деле, согласно уравнению (13.10), движение частицы зависит не только от внешнего поля F , порождаемого другими частицами, но и от собственного поля частицы F_s , причем в случае ненулевого поля F_s производная $d\mathbf{i}/dl$ может быть отличной от нуля даже при отсутствии внешнего воздействия на частицу. Отличие производной $d\mathbf{i}/dl$ от нуля означает искривление мировой линии частицы. Например, пусть электрический заряд движется ускоренно под действием внешнего электрического поля (при этом его мировая линия криволинейна). Если внезапно отключить внешнее поле, то мировая линия заряда не станет мгновенно прямолинейной, так как собственное поле заряда будет еще некоторое время действовать на него. Таким образом, частица, подчиняющаяся введенным уравнениям, даже будучи свободной от внешнего воздействия, может двигаться по непрямолинейной мировой линии (до тех пор, пока выражение $\langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle_*$ в уравнении (13.6) не обратится в нулевой вектор).

6. В данном разделе мы постулировали основной закон динамики (13.5) и вывели на его основе уравнение движения частицы (13.10). Это напоминает ситуацию в классической механике, где на основании постулируемого второго закона Ньютона выводится уравнение импульсов. Однако в классической механике наряду с уравнением импульсов из этого же закона выводится ещё уравнение моментов. Вопрос о том, возможно ли в нашем случае получить из закона (13.5) в дополнение к уравнению (13.10) ещё какой-либо закон, определяющий движение частицы в целом, не исследован.

Итак, в настоящем разделе постулирован основной закон динамики частицы ненулевого радиуса (13.5) и на его основе выведены уравнение движения оси луча (13.7) и уравнение движения частицы (13.10), которые задают скорости изменения векторов $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{i}$. Для полного описания движения частицы нужно добавить к ним еще два набора формул. Во-первых, формулы, которые получены в разд. 11 и задают ра-

диус-вектор $\mathbf{R}$ элементов нити, скорость нити $\mathbf{j}$, скорость оси нити $\mathbf{j}_0$, единичный касательный к нити вектор $\mathbf{q}$ и его производную по времени $d\mathbf{q}/dl$ (для непереориентированной нити это формулы (11.19), (11.29), (11.30), (11.34) и (11.35), для переориентированной нити — аналогичные формулы (11.36)–(11.40)). Во-вторых, нужно добавить выведенные в разд. 10 зависимости, которые конкретизируют значения произведения $|o|r_*$ и параметров q , β_0 и β . Повторим конспективно, каким образом получены эти зависимости.

Начнем с обозначений: r_0 — радиус винтовой нити (см. рис. 10.2 на с. 466); a — положительный параметр размерности длины, входящий в исходное уравнение нити (10.2) (с. 467); β_0 — безразмерный параметр, вводимый равенством (10.3): $a = \frac{r_0}{\beta_0}$ (параметр β_0 участвует в формуле (11.34) для касательного к нити вектора $\mathbf{q}$; $\beta_0 > 0$, так как $a > 0$ и $r_0 > 0$); q — безразмерный параметр, входящий в формулу (11.29) для скорости элементов нити $\mathbf{j}$ и определяющий скорость движения луча вдоль своей оси; o — угловая скорость вращения лучей (ее определение приведено в начале разд. 11, с. 485); c — скорость света; φ — угол между ортами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ ($\text{ch } \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$; считается, что $\varphi \neq 0$).

Винтовая нить, совпадающая с центральной линией спирали, называется центральной нитью (см. с. 466). Радиус такой нити обозначается символом r_* , а параметр β_0 для нее — символом β . Так как, по (10.3), $a = \frac{r_0}{\beta_0}$, то для центральной нити $a = \frac{r_*}{\beta}$, поэтому выполняется равенство (10.5):

$$\beta_0 = \beta \frac{r_0}{r_*}. \quad (13.13)$$

В разд. 10 свободная частица исследована при двух условиях: пространственное вращение частицы отсутствует и вектор $\mathbf{i}$ служит направляющим ортом мировой линии L (которая в этом случае прямолинейна). Были получены формулы (10.12), (10.13) и (10.14) для вектора, касательного к нити, для скорости частицы и для скорости оси луча.

При дополнительном условии, что каждая нить частицы пересекает собственное физическое пространство Γ_* частицы всё время в одной и той же его точке, были выведены с помощью формул (10.12), (10.13) и (10.5) (она же (13.13)) зависимости (10.16):

$$\beta_0 q = \pm \frac{or_0}{c}; \quad \beta q = \pm \frac{or_*}{c}, \quad (13.14)$$

где верхний и нижний знаки отвечают случаям соответственно совпадения и несовпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ винтовой нити и базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, введенного в разд. 11.

Рассмотрение возможных комбинаций ориентаций винтовой нити и базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, показало, что при принятых условиях и выполнении правила выбора знака (с. 467) во всех случаях имеет место неравенство (10.17):

$$\pm o < 0. \quad (13.15)$$

Формулы (13.14) и (13.15) приводят к равенствам (10.18):

$$\beta_0 q = -\frac{|o|r_0}{c}; \quad \beta q = -\frac{|o|r_*}{c}; \quad (13.16)$$

отсюда следует $q < 0$, ибо $\beta_0 > 0$.

С помощью формулы (10.14) ($\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0$) при условии, что ось каждого луча движется поступательно в направлении, ортогональном мировой линии L , получена зависимость (10.22):

$$q = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}. \quad (13.17)$$

Примем в качестве постулата, что зависимости (13.14)–(13.17) выполняются при произвольном движении частицы. Отличие в этом случае состоит в следующем: во-первых, в силу непрямолинейности мировой линии L вектор $\mathbf{i}$ служит не направляющим вектором линии L , а касательным вектором к L в точке нахождения центра частицы, и, во-вторых, в общем случае (точнее, при $d\mathbf{q}_0/dl \neq \mathbf{0}$) не вся ось луча движется в направлении, ортогональном $\mathbf{i}$, а только тот ее элемент, который находится в данный момент в центре частицы (в справедливости последнего утверждения можно убедиться, если подставить в формулу (11.30) для скорости оси луча $\mathbf{j}_0$ значение параметра q из (13.17) и найти произведение $\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}$ с учетом того, что $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} = \operatorname{ch} \varphi$ и что для указанного элемента оси луча $Q = 0$).

Шаг нити P , именуемый также шагом спирали и шагом луча, задается выражением (10.6):

$$P = 2\pi a = \frac{2\pi r_0}{\beta_0} = \frac{2\pi r_*}{\beta}. \quad (13.18)$$

Формулы (13.16)–(13.18) влекут следующие равенства, имеющие в разд. 10 номера (10.23) и (10.24):

$$\beta_0 = \frac{|o|r_0 \operatorname{ch} \varphi}{c}; \quad \beta = \frac{|o|r_* \operatorname{ch} \varphi}{c}; \quad (13.19)$$

$$P = \frac{2\pi c}{|o| \operatorname{ch} \varphi}. \quad (13.20)$$

Примем также, что выполняются зависимости (10.27)–(10.30), которые описывают три возможных варианта скорости вращения лучей и отвечающие им три варианта значений параметров β_0 и β . Напомним, что в разд. 10 рассмотрены варианты вращения лучей, при которых с линейной скоростью c вращаются точки поперечного сечения луча, находящиеся от центра сечения на расстоянии r_0 , равном r_{0min} , или r_* , или r_{0max} . В силу $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, это дает три зависимости (10.27):

$$a) |o|r_{0min} = |o|(r_* - p_*) = c; \quad б) |o|r_* = c; \quad в) |o|r_{0max} = |o|(r_* + p_*) = c. \quad (13.21)$$

Зависимости (13.21) с помощью формулы (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$) приводят к трем значениям (10.28) произведения $|o|r_*$:

$$a) |o|r_* = \frac{c}{1 - \sin \frac{\pi}{n_*}}; \quad б) |o|r_* = c; \quad в) |o|r_* = \frac{c}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (13.22)$$

Подстановка этих значений произведения $|o|r_*$ во вторую формулу (13.19), дает значения (10.29) параметра β :

$$a) \beta = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 - \sin \frac{\pi}{n_*}}; \quad б) \beta = \operatorname{ch} \varphi; \quad в) \beta = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}. \quad (13.23)$$

Из (13.13) и (13.23) получаем три значения (10.30) параметра β_0 :

$$a) \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_* \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}; \quad б) \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_*}; \quad в) \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (13.24)$$

В разд. 10 показано, что при варианте *a* все винтовые нити частицы являются пространственноподобными, а при вариантах *б* и *в* частица содержит нити всех трех типов — пространственноподобные, времениподобные и изотропные.

Если пренебречь величиной p_*/r_* ($= \sin(\pi/n_*)$) по сравнению с единицей, то $r_0 \approx r_*$ (так как $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ и $r_* \mp p_* = r_*(1 \mp p_*/r_*) \approx r_*$) и все три варианта вращения лучей сводятся к варианту *б*:

$$|o|r_* = c; \quad \beta = \operatorname{ch} \varphi; \quad \beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_*} \approx \operatorname{ch} \varphi. \quad (13.25)$$

Добавим к сказанному, что параметр a_1 имеет вид (13.3), угловая скорость вращения лучей o одинакова для всех лучей и не зависит от времени:

$$o = \operatorname{const}, \quad (13.26)$$

и направляющий орт оси симметрии частицы $\mathbf{i}$ служит единичным касательным вектором $\mathbf{i}_L$ к мировой линии частицы L в точке нахождения центра частицы:

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{i}. \quad (13.27)$$

Мы полагаем, что упомянутые в данном разделе уравнения и зависимости выполняются при любом движении частицы, поэтому все эти уравнения и зависимости могут считаться *законами движения частицы ненулевого радиуса*.

Отметим, что в разд. 10 при описании движения свободной невращающейся частицы мы приняли (с. 473), что собственное физическое пространство частицы Γ_* движется поступательно вдоль мировой линии частицы L с единичной скоростью $\mathbf{i}$, то есть уравнение его движения имеет вид (10.37): $\mathbf{j}_{\Gamma_*} = \mathbf{i}$ (где $\mathbf{j}_{\Gamma_*}$ — скорость гиперплоскости Γ_* относительно пространства Минковского M). Теперь мы не включили это уравнение в число законов движения частицы. Дело в том, что при рассмотрении общих случаев движения частицы бывает удобным в разных ситуациях задавать движение гиперплоскости Γ_* по-разному даже при одном и том же движении самой частицы. Например, при описании вращения частицы вокруг прямолинейной мировой линии L можно с равным основанием принять как то, что физическое пространство Γ_* вращается вместе с частицей, так и то, что оно не вращается, а движется вдоль L поступательно (при этом будет иметь место вращение частицы относительно Γ_*). В разд. 10 мы конкретизировали закон движения гиперплоскости Γ_* с единственной целью — обосновать с его помощью зависимости (10.16) (они же (13.14)). Выше мы постулативно распространили действие этих зависимостей на все случаи движения частицы. А так как эти зависимости не включают в себя характеристик движения гиперплоскости Γ_* , то нет необходимости в фиксировании закона движения Γ_* .

В заключение раздела повторим сказанное в резюме разд. 10. Предложенный способ движения частицы не единственно возможный. Например, можно рассмотреть вариант модели, при котором $q = -\operatorname{ch} \varphi$, а не $q = -1/\operatorname{ch} \varphi$, как принято выше. В этом случае ось каждого луча будет двигаться в ортогональном к себе направлении ($\mathbf{j}_0 \perp \mathbf{q}_0$), а не в направлении, ортогональном мировой линии, как в исследованном случае ($\mathbf{j}_0 \perp \mathbf{i}$ для элемента оси, находящегося в центре частицы). Можно принять также вариант модели, когда в противоположность рассмотренному выше шаг луча P одинаков для всех лучей, а угловая скорость вращения луча o , наоборот, различна для разных лучей. Не исключен вариант движения частицы, при котором направляющий орт оси симметрии частицы не является касательным вектором к мировой линии L ($\mathbf{i} \neq \mathbf{i}_L$). Возможны и иные варианты движения частицы. Далее будем считать, что частица движется так, как изложено в данном разделе.

14. Собственное поле частицы (исходная формула)

Проведенный в разд. 1 главы 4 анализ взаимодействия двух «точечных» частиц позволил конкретизировать внутреннюю структуру «точечной» частицы. Это дало возможность получить для собственного поля «точечной» частицы F_s формулу (1.10) (с. 313):

$$F_s(x) = a \int_{L_-} \varepsilon(\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0) dl, \quad (14.1)$$

где F_s — антисимметричный двухвалентный тензор; x — точка пространства Минковского M , в которой вычисляется поле (точка наблюдения); a — коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин (его значение указано ниже); ε — плотность лучей в окрестности точки x (ее определение дано разд. 3 главы 4, с. 317); $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча, проходящего через точку x ; $\mathbf{j}_0$ — 4-скорость элемента луча, находящегося в точке x (то есть скорость относительно пространства M); произведение векторов $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{j}_0$ тензорное; dl — элемент длины мировой линии L (дифференциал собственного времени частицы l); L_- — участок мировой линии L , содержащийся во внутренности светового конуса прошлого с вершиной в x ; подынтегральная функция вычисляется в точке x ; интегрирование проводится по всем расположениям частицы с центром на L_- ; индекс s при величине F поставлен в соответствии с обозначением собственного поля частицы, принятым в предыдущем разделе. Формула (14.1) относится к случаю, когда L_- — непустое множество. Если для некоторой точки x линия L_- — пустое множество, то $F_s(x)$ — нулевой двухвалентный тензор.

В разд. 7 главы 4 установлено, что формула (14.1) приводит к известным выражениям для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых движущимся точечным телом с электрическим зарядом e , если коэффициент a удовлетворяет равенствам (7.26) из главы 4 (с. 365):

$$aN = 4\pi e \quad (\text{в системе СГС}) \quad \text{или} \quad aN = \frac{e}{\varepsilon_0} \quad (\text{в СИ}), \quad (14.2)$$

где N — количество лучей, составляющих частицу; ε_0 — электрическая постоянная.

Зададим собственное поле частицы ненулевого радиуса способом, подобным тому, каким в разд. 1 главы 4 было введено собственное поле «точечной» частицы, имеющее вид (14.1).

Рассмотрим нить частицы ненулевого радиуса. Поставим в соответствие каждому ее элементу двухвалентный антисимметричный тензор (бивектор)

$$\mathbf{q} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}, \quad (14.3)$$

который аналогичен бивектору $\mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0$, входящему в (14.1); здесь $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити в данном ее элементе; $\mathbf{j}$ — скорость данного элемента нити относительно пространства M ; $\wedge$ — знак внешнего умножения (равенство (14.3) является определением этой операции, если считать, что $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ — произвольные векторы).

Зафиксируем точку x пространства Минковского M , в которой будем вычислять собственное поле частицы F_s . Назовем ее, как и в главе 4, *точкой наблюдения*.

Пользуясь аналогией со случаем «точечной» частицы, естественно задать собственное поле частицы F_s в точке x как сумму бивекторов (14.3) для всех нитей частицы, которые проходят через x . Сразу же сделаем уточнение. Нас будут интересовать значения бивекторов (14.3) в поперечном сечении луча. В случае «точечной» частицы поперечное сечение луча состоит из одной точки и ему соответствует единственный бивектор $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0$. В случае же частицы ненулевого радиуса каждому поперечному сечению луча соответствуют столько бивекторов $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$, сколько нитей пересекают его, то есть $n_* N_*$ штук (n_* — количество спиралей в луче; N_* — количество нитей в спирали). Поэтому, для согласования со случаем «точечной» частицы, введем далее в выражение для поля F_s нормировочный множитель $\frac{1}{n_* N_*}$.

Расчет поля F_s оказывается в данном случае более сложным, чем в случае «точечной» частицы. Дело в том, что лучи «точечной» частицы — это прямые линии, проходящие через центр частицы, поэтому при фиксированном расположении «точечной» частицы в M через любую точку наблюдения x может проходить лишь один луч частицы. В случае же фиксированного расположения в M частицы ненулевого радиуса, вследствие конечной толщины ее лучей, через точку x могут проходить винтовые нити, принадлежащие разным лучам частицы. Далее будет доказана теорема, которая утверждает, что если при некотором расположении частицы через точку x проходит винтовая нить радиуса r_0 какого-либо луча частицы, то имеются и другие лучи, винтовые нити радиуса r_0 которых тоже проходят через x . Проекция осей таких лучей на физическое пространство заполняют некоторую коническую поверхность. Безразмерная величина, задающая их положение на этой

поверхности, будет обозначена через ζ , причем $\zeta \in (-\pi, \pi]$, поэтому введем в выражение для поля F_s нормировочный множитель $\frac{1}{2\pi}$.

Сказанное в двух предыдущих абзацах относится к фиксированному расположению частицы в M . Понятно, что, благодаря движению частицы вдоль мировой линии, через данную точку наблюдения x могут проходить нити от разных расположений частицы (аналогично тому, как это имеет место в случае «точечной» частицы, см. рис. 1.5 из разд. 1 главы 4, с. 312). Все такие нити должны быть учтены.

Обозначим символом L_x часть мировой линии частицы L , удовлетворяющую такому условию: при каждом расположении частицы с центром на L_x имеется по крайней мере одна винтовая нить радиуса r_0 , участок которой, находящийся в будущем по отношению к центральному сечению частицы, проходит через точку наблюдения x , причем при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет (понятно, что L_x зависит от x и r_0).

Собственное поле частицы F_s в точке x зададим как сумму бивекторов (14.3) для всех нитей частицы, проходящих через x (при расположениях частицы с центром на L_x). Кроме того, полагая, что количество лучей, составляющих частицу, велико, заменим операцию суммирования более простой операцией интегрирования. Интеграл возьмем с весом $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$, характеризующим количество нитей радиуса r_0 в окрестности точки x . Итак, введем определение.

Определение. *Собственное поле частицы F_s в точке $x \in M$ есть тройной интеграл от бивектора (14.3) с весом $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$, взятый по всем расположениям частицы с центром на L_x , а также по всем значениям величины ζ и по всем значениям радиусов нитей r_0 :*

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi n_* N_*} \int_{(r_0)} \int_{(L_x)} \int_{(\zeta)} \tilde{\varepsilon}_{r_0} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} d\zeta dl dr_0, \quad (14.4)$$

где a — скалярный коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин, при трактовке частицы как модели электрона коэффициент a имеет вид (14.2); $(2\pi)^{-1}$ и $(n_* N_*)^{-1}$ — нормировочные множители при интегрировании по ζ и по r_0 ; $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ — плотность нитей радиуса r_0 в окрестности точки x (величины $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ и ζ будут конкретизированы в следующих разделах, с. 564, 581); dl — элемент длины мировой линии L (дифференциал собственного времени частицы l); векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ относятся к элементам нитей, находящимся в точке x ; F_s представляет собой двухвалентный антисимметричный тензор.

15. Плотность нитей

Зафиксируем некоторое расположение частицы в пространстве Минковского M и далее в настоящем разделе будем рассматривать только его. Обозначим центр частицы и точку, в которой он находится, буквой O .

Лучи, составляющие частицу, расходятся от ее центра во всех времениподобных направлениях. Поэтому чем дальше от центра частицы (внутри светового конуса) находится точка пространства Минковского, тем меньше нитей частицы проходит вблизи нее. Введем функцию — плотность нитей, — количественно характеризующую этот эффект. Она потребуется при расчете собственного поля частицы F_s .

Нити частицы, напомним, представляют собой винтовые линии радиусов $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, где r_* — радиус частицы, p_* — полутолщина спирали, см. рис. 1.3, 2.1, 10.2 (с. 409, 411, 466). Зафиксируем некоторое значение радиуса нитей r_0 и некоторое приращение радиуса dr_0 , удовлетворяющие условиям

$$[r_0, r_0 + dr_0] \subset [r_* - p_*, r_* + p_*] \quad \text{и} \quad 0 < dr_0 \ll p_*. \quad (15.1)$$

Далее будем вести речь только о нитях с радиусами из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$. Когда потребуется учесть все нити, проинтегрируем результат по всем значениям $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$.

Пусть x — произвольная точка пространства M , не совпадающая с центром частицы O . Возьмем какую-либо область в M объема V , содержащую x . Обозначим через Λ суммарную длину находящихся в этой области участков нитей частицы с радиусами из заданного промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$. Понятно, что Λ является функцией от x , r_0 , dr_0 и V .

Определение. Функция

$$\varepsilon_{r_0} = \varepsilon_{r_0}(x, r_0, dr_0) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Lambda}{V} \quad (15.2)$$

называется *плотностью нитей* или точнее *плотностью нитей радиуса r_0 в окрестности точки $x \in M$* (для краткости, можно говорить «в точке x »; предел вычисляется путем стягивания области в точку).

Плотность нитей ε_{r_0} есть скалярная неотрицательная характеристика частицы, имеющая размерность $(\text{длина})^{-3}$ (так как длина нитей Λ имеет размерность длины, а размерность объема V четырехмерной области в M равна $(\text{длина})^4$). В число аргументов функции ε_{r_0} , наряду с указанными в (15.2), могут входить также параметры частицы —

количество лучей и нитей, величины r_* , p_* и другие. Говоря упрощенно, ε_{r_0} — это суммарная длина рассматриваемых нитей внутри четырехмерной области единичного объема, содержащей точку x .

В приведенном определении следовало бы потребовать, чтобы предел в (15.2) не зависел от выбора области, содержащей x , и от способа стягивания области в точку x . Мы, однако, не будем проверять выполнение этого требования, а ограничимся расчетом функции ε_{r_0} для одного специального вида области.

Повторим, что функция ε_{r_0} определяется только такими нитями, которые относятся к выбранному расположению частицы в M и имеют радиусы из фиксированного промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, удовлетворяющего условиям (15.1). Если вблизи точки x таких нитей нет, то в этой точке $\varepsilon_{r_0} = 0$.

Утверждение 1. При принятых условиях верно неравенство

$$dr_0 \ll r_0. \quad (15.3)$$

Доказательство. Зависимость (4.5) (с. 420) влечет $p_* \ll r_*$, поэтому $2p_* < r_*$ и, значит, $p_* < r_* - p_*$. Отсюда и из неравенств $r_0 \geq r_* - p_*$, $dr_0 \ll p_*$ вытекает $dr_0 \ll p_* < r_* - p_* \leq r_0$, что и дает $dr_0 \ll r_0$. ■

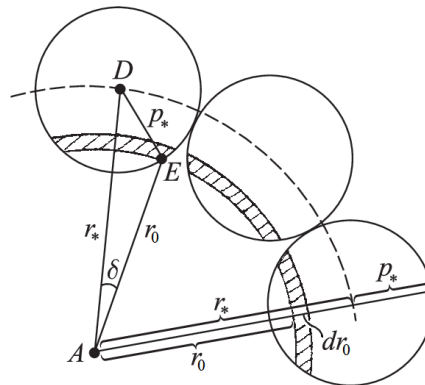
Всё последующее содержание настоящего раздела посвящено расчету плотности нитей ε_{r_0} .

Рассмотрим поперечное сечение луча частицы (рис. 15.1). Обозначим его буквой S (как и в разд. 12). Этой же буквой будем обозначать его площадь. Она равна суммарной площади n_* кругов радиуса p_* , образующих сечение:

$$S = n_* \pi p_*^2. \quad (15.4)$$

Рис. 15.1. Фрагмент поперечного сечения луча.

Поперечное сечение луча состоит из n_* соприкасающихся кругов одинакового радиуса p_* , центры которых располагаются на окружности радиуса r_* с центром в центре сечения A .



Точки пересечения с сечением S нитей, имеющих радиусы из рассматриваемого промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, заполняют в этом сечении n_* одинаковых участков кругового кольца с внутренним радиусом r_0 и шириной dr_0 (на рис. 15.1 эти участки заштрихованы). Обозначим площадь одного участка через dS , а общее количество нитей, пересекающих все такие участки, через N_{r_0} . Поскольку каждая нить пересекает сечение S в одной точке, то выполняется равенство

$$N_{r_0} = n_* \sigma dS, \quad (15.5)$$

где σ — плотность точек пересечения нитей с поперечным сечением луча, введенная в разд. 12 (с. 507); отсутствие в правой части равенства интеграла по указанным участкам кругового кольца объясняется тем, что из $\sigma = \sigma(r_0)$ и $dr_0 \ll r_0$ (см. (15.3)) вытекает, что $\sigma \approx \text{const}$ на всех этих участках.

Воспользуемся обозначениями, примененными на рис. 15.1: A — центр сечения S ; D — центр одного из кругов радиуса p_* , образующих сечение S ; E — точка пересечения границы этого круга с внутренней границей упомянутого кругового кольца; δ — угол между отрезками AD и AE , измеряемый в радианах.

Плоскость, в которой лежит сечение S , наделена отрицательно определенной метрической формой (так как она ортогональна времени-подобной оси луча). Такая плоскость отличается от собственно евклидовой плоскости лишь знаком скалярных произведений векторов, поэтому геометрические свойства фигур в ней удовлетворяют обычным теоремам планиметрии и тригонометрии. На основании теоремы косинусов, примененной к треугольнику ADE , находим:

$$\delta = \arccos \frac{r_*^2 + r_0^2 - p_*^2}{2r_*r_0}. \quad (15.6)$$

Поскольку $dr_0 \ll p_*$ и $dr_0 \ll r_0$ (см. (15.1) и (15.3)), то площадь dS каждого из заштрихованных на рис. 15.1 участков кругового кольца может быть представлена в виде

$$dS = 2\delta r_0 dr_0, \quad (15.7)$$

где угол δ задается формулой (15.6); здесь поставлен знак точного, а не приближенного равенства, так как эта формула используется ниже при интегрировании по r_0 , что подразумевает предельный переход $dr_0 \rightarrow 0$.

Подставляя значение площади dS из (15.7) в (15.5), получаем:

$$N_{r_0} = \tilde{N}_{r_0} dr_0 \quad \text{при} \quad \tilde{N}_{r_0} = 2n_* \sigma \delta r_0, \quad (15.8)$$

где в соответствии с обозначением, принятым перед равенством (15.5), N_{r_0} есть общее количество нитей с радиусами из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$ в каждом луче частицы.

Формулы (15.6) и (15.8) позволяют найти количество нитей N_{r_0} как функцию от r_0 и dr_0 , если известна плотность σ точек пересечения нитей с поперечным сечением луча и известны характеристики частицы n_* , r_* и p_* .

Из (15.8) с учетом (15.7) и (12.2) имеем:

$$\int_{(r_0)} \tilde{N}_{r_0} dr_0 = \int_{(r_0)} 2n_* \sigma \delta r_0 dr_0 = n_* \int_{(S_0)} \sigma dS = n_* N_*, \quad (15.9)$$

здесь первые два интеграла берутся по всем значениям r_0 ; третий интеграл может быть взят по любому из кругов радиуса p_* , образующих поперечное сечение луча S (мы выбрали круг S_0 , чтобы воспользоваться формулой (12.2)); N_* — количество нитей, содержащихся в одной спирали луча; $n_* N_*$ — общее число нитей в каждом луче частицы.

В связи с тем, что N_{r_0} есть количество нитей, пересекающих все заштрихованные на рис. 15.1 участки кругового кольца, и выполняется (15.8), интеграл в левой части (15.9) представляет собой суммарное количество нитей, пересекающих сечение S . А так как это количество совпадает с общим числом нитей в луче частицы, то равенство левой и правой частей выражения (15.9) является очевидным.

Отметим, что величина dS имеет в формулах (12.2) и (15.9) несколько разные смыслы. В (12.2) dS — элемент площади сечения S , здесь же dS — площадь заштрихованного на рис. 15.1 участка кругового кольца. Однако, благодаря сделанному ранее выводу о том, что $\sigma \approx \text{const}$ на всех заштрихованных участках кругового кольца, интеграл $\int \sigma dS$ в (15.9) не изменится, если в нем величине dS придать тот же смысл, что в (12.2).

Для упрощения последующих выкладок пренебрежем зазорами между участками кольца, заштрихованными на рис. 15.1, и допустим, что они образуют сплошное кольцо внутреннего радиуса r_0 и ширины dr_0 . При этом будем считать, что суммарное количество точек пересечения нитей с кольцом остается тем же, что было при наличии зазоров, то есть равным N_{r_0} , и будем считать, что точки пересечения нитей с кольцом распределены по нему равномерно. Данное допущение фактически означает, что мы рассматриваем поперечное сечение луча не как совокупность кругов радиуса p_* , а как сплошную круговую полосу с внутренним радиусом $r_* - p_*$ и внешним радиусом $r_* + p_*$.

Утверждение 2. Рассмотрим кольцо внутреннего радиуса r_0 и ширины dr_0 , лежащее в поперечном сечении луча и имеющее центр в центре сечения. При сделанном выше допущении плотность σ_0 точек пересечения нитей с этим кольцом задается равенством

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} n_* \delta \sigma, \quad (15.10)$$

где n_* — количество кругов радиуса p_* , образующих сечение; δ — угол, определяемый формулой (15.6); σ — плотность точек пересечения нитей с сечением, введенная в разд. 12 (с. 507). При $dr_0 \ll r_0$ плотность σ_0 зависит только от r_0 : $\sigma_0 = \sigma_0(r_0)$.

Доказательство. Согласно сделанному допущению, суммарное количество точек пересечения нитей с кольцом равно N_{r_0} , причем точки пересечения распределены по кольцу равномерно, то есть их плотность σ_0 постоянна вдоль кольца. Поэтому можем записать:

$$N_{r_0} = \sigma_0 dS_0, \quad (15.11)$$

где dS_0 — площадь кольца, равная при $dr_0 \ll r_0$

$$dS_0 = 2\pi r_0 dr_0. \quad (15.12)$$

Из (15.8), (15.11) и (15.12) вытекает формула (15.10) для плотности σ_0 . В этой формуле при $dr_0 \ll r_0$ величины δ и σ зависят только от r_0 (не считая постоянных r_* и p_*), поэтому плотность σ_0 также зависит только от r_0 . ■

Определение. Вектор или прямолинейный отрезок, пересекающий гладкую поверхность, называется *ортогональным поверхности*, если он ортогонален всем векторам, которые касаются поверхности в точке пересечения.

Утверждение 3. Радиус-вектор $\mathbf{R}$ точек псевдосферы, имеющий начало в ее центре, ортогонален псевдосфере.

Доказательство. Псевдосфера задается уравнением

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \pm R^2, \quad (15.13)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек псевдосферы относительно ее центра; R — радиус псевдосферы ($R = |\mathbf{R}| > 0$); верхний и нижний знаки относятся к псевдосферам с времениподобными и пространственноподобными радиусами соответственно (см. разд. 6 главы 2, с. 91).

Найдем дифференциал от обеих частей равенства (15.13). В силу постоянства R получаем: $d(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 2\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 0$, откуда

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = 0. \quad (15.14)$$

Известно, что для любой гладкой поверхности дифференциал радиуса-вектора ее точек касателен к поверхности (в точке конца радиуса-вектора), при этом он может быть направлен вдоль любой касательной к поверхности. С учетом этого факта из (15.14) следует, что радиус-вектор $\mathbf{R}$ ортогонален псевдосфере. ■

Отметим, что поскольку псевдосфера — это сфера (в пространстве M), то и без доказательства очевидно, что всякий вектор, направленный вдоль ее радиуса, ортогонален ей.

Теорема 15.1. *Сечение любого луча частицы гиперплоскостью, ортогональной оси симметрии частицы, является поперечным сечением луча.*

Доказательство. Луч частицы с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$, по определению, лежит в пространстве $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, которое является трехмерным подпространством четырехмерного пространства Минковского M (см. разд. 2, с. 410; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$). Гиперплоскость $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, о которой говорится в теореме, тоже является трехмерным подпространством пространства M . Пространства $C_{\mathbf{q}_0}$ и Γ не параллельны и не совпадают, потому что $\mathbf{q}_0 \in C_{\mathbf{q}_0}$ и $\mathbf{q}_0 \notin \Gamma$ ($\mathbf{q}_0 \notin \Gamma$, ибо $\Gamma \perp \mathbf{i}$, а вектор $\mathbf{q}_0$, будучи времениподобным, не может быть ортогональным времениподобному вектору $\mathbf{i}$). Известно, что в четырехмерном пространстве два трехмерных подпространства, которые не параллельны и не совпадают, пересекаются по двумерной плоскости. В данном случае такой плоскостью является $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, так как $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$ и $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\} = \Gamma$. Следовательно, сечение луча гиперплоскостью Γ лежит в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. А поскольку $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \perp \mathbf{q}_0$, то это сечение действительно является поперечным сечением луча. ■

Следствие. *Всякий прямолинейный отрезок, который лежит в сечении луча частицы гиперплоскостью, ортогональной оси симметрии частицы, ортогонален оси луча.*

Напомним, что собственное физическое пространство частицы Γ_* — это трехмерная пространственноподобная гиперплоскость, проходящая через центр частицы и ортогональная оси симметрии частицы. Сечение частицы гиперплоскостью Γ_* называется *центральной сечением* частицы.

Будем говорить, что точка $x \in M$ находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* , если она принадлежит полупространству, которое примыкает к Γ_* со стороны будущего. Очевидно, что в этом случае ортогональная проекция точки x на ось симметрии частицы находится в будущем по отношению к центру частицы (при этом сама точка x может находиться не только внутри светового конуса будущего с вершиной в центре частицы, но и на самом конусе или снаружи от него).

Повторим определение линии L_x , введенное в разд. 14 (с. 535). Линия L_x , есть часть мировой линии частицы L , удовлетворяющая следующему условию: при каждом расположении частицы с центром на L_x имеется по крайней мере одна винтовая нить радиуса r_0 , участок которой, находящийся в будущем по отношению к центральному сечению частицы, проходит через точку x , причем при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет (L_x зависит от x и r_0).

Зафиксируем точку x такую, чтобы определяемая ею линия L_x содержала центр рассматриваемой частицы. Очевидно, что точка x находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* . Будем называть точку x , как и ранее, *точкой наблюдения*.

Пусть $\mathbf{i}$ и O — направляющий орт оси симметрии частицы и центр частицы при данном ее расположении (вектор $\mathbf{i}$ ориентирован в направлении будущего; буквой O будем обозначать также точку пространства M , в которой находится центр частицы, $O \in L_x$; $\mathbf{i}$ и O фиксированы).

Введем в пространстве M инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, проходящей через точку O , и с координатным физическим пространством Γ , ортогональным оси T . Ось времени T неподвижна относительно пространства M и совпадает с осью симметрии частицы (при данном расположении частицы). Физическое пространство Γ занимает в разные моменты координатного времени разные положения. Все положения гиперплоскости Γ параллельны между собой, ортогональны T и получаются из одного положения путем поступательного перемещения гиперплоскости Γ вдоль оси T .

Зададим координатное время так, чтобы момент l , соответствующий центру частицы O , совпал с моментом l_* собственного времени частицы при данном ее расположении:

$$l = l_*; \quad (15.15)$$

моменты времени l и l_* фиксированы, они измеряются в единицах длины (для перехода к моментам времени t и t_* , измеряемым в единицах времени, нужно воспользоваться формулами $l = ct$ и $l_* = ct_*$, где c — скорость света; ранее буква l обозначала собственное время частицы).

Обозначим: l_x — момент координатного времени, соответствующий точке x ; Γ_l и Γ_{l_x} — положения гиперплоскости Γ в моменты времени l и l_x (гиперплоскость Γ_l проходит через центр частицы O , Γ_{l_x} — через точку наблюдения x); A — точка пересечения с Γ_{l_x} оси луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x , а также элемент оси, находящийся в точке пересечения (рис. 15.2).

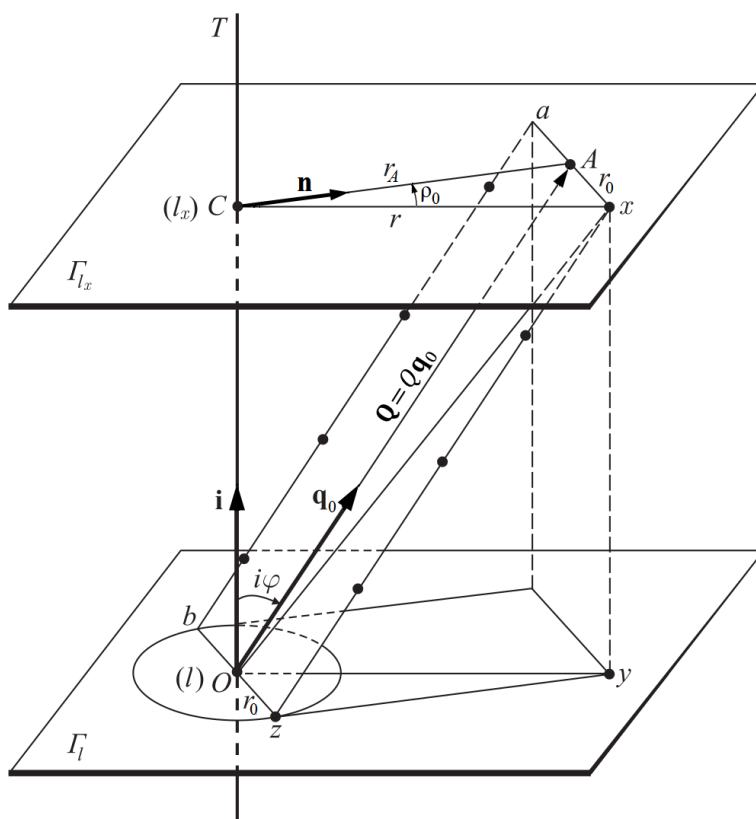


Рис.15.2. Два положения координатного физического пространства Γ в пространстве Минковского M .

Гиперплоскости l_i , l_{ix} и цилиндрическая поверхность, на которой расположена нить, изображены с понижением размерности на единицу, поэтому цилиндрическая поверхность имеет вид двух прямых xz и ab ; темные кружки на xz и ab — элементы нити; символ i при угле φ означает, что при оперировании с этим углом необходимо применять гиперболические функции.

Из $O \in \Gamma_l$, $\Gamma_l \perp T$, $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ и $\Gamma_* \ni O$ следует $\Gamma_l = \Gamma_*$. Центр частицы O совпадает с точкой $\Gamma_l \cap T$. Так как $x \in \Gamma_{l_x}$ и $\Gamma_{l_x} \perp T$, то точка $C = \Gamma_{l_x} \cap T$ совпадает с ортогональной проекцией точки x на ось симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\} = T$. Точки O и C имеют временные координаты l и l_x соответственно. Поскольку $\Gamma_l = \Gamma_*$ и точка x находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* , то

$$l_x > l. \quad (15.16)$$

Согласно теореме 15.1, сечение любого луча гиперплоскостью, ортогональной оси симметрии частицы, является поперечным сечением луча. Следовательно, на рис. 15.2 отрезок Ax , лежащий в сечении луча гиперплоскостью Γ_{l_x} , ортогонален оси луча OA . Отсюда и из того, что A есть элемент оси луча и точка x лежит на винтовой нити, вытекает, что длина отрезка Ax равна радиусу r_0 нити. Таким образом, $Ax \perp OA$ и $|Ax| = r_0$. Кроме того, $Ax \perp OC$ (ибо $Ax \in \Gamma_{l_x}$, $OC \in T$ и $\Gamma_{l_x} \perp T$). Ортогональность отрезка Ax прямым OA и OC влечет ортогональность его всей плоскости, содержащей эти прямые. Значит, $Ax \perp CA$. Из этого заключаем, что треугольник CAx , лежащий в Γ_{l_x} , прямоугольный. Поскольку гиперплоскость Γ_{l_x} пространственноподобная, то в ней выполняется теорема Пифагора. Обозначим: $r_A = |CA|$; $r = |Cx|$; ρ_0 — угол между CA и Cx (см. рис. 15.2; $\rho_0 \in (0, \pi/2)$; $r > r_A > 0$; $r > r_0 > 0$). Применяя теорему Пифагора к $\triangle CAx$, имеем:

$$r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2}; \quad \cos \rho_0 = \frac{r_A}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r}. \quad (15.17)$$

Наша цель — рассчитать плотность нитей ε_{r_0} , определяемую формулой (15.2). Благодаря симметрии частицы относительно любых поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$, удобно использовать при расчете угловые координаты на псевдосфере, имеющей центр в центре частицы (потому что она тоже симметрична относительно таких поворотов).

Построим псевдосферу с центром в центре частицы O , проходящую через рассматриваемый элемент оси луча A (рис. 15.3).

В левой части рисунка изображена пола псевдосферы, содержащая элемент A . Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор элемента A относительно центра псевдосферы O . Тогда $R = |\mathbf{R}|$ — радиус псевдосферы. Отметим, что на рис. 15.2 вектор $\mathbf{R}$ обозначен символом $\mathbf{Q}$, поэтому $\mathbf{R} = \mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$ ($\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча), значит,

$$R = Q. \quad (15.18)$$

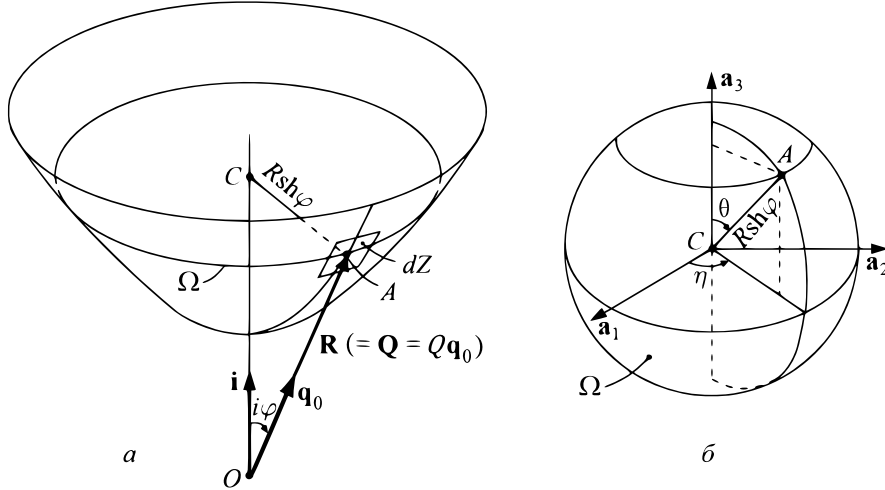


Рис. 15.3. *a* — пола псевдосферы с центром в центре частицы O , находящаяся в будущем относительно O и содержащая элемент A оси луча; *b* — сечение этой полы, выделяемое условием постоянства угла φ между осью симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ и радиусами-векторами точек полы.

Псевдосфера на рис. *a* изображена с понижением размерности на единицу (поэтому показанная на рис. *b* сфера Ω имеет на рис. *a* вид окружности); $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы; A — элемент оси луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку наблюдения x (точка x не показана на рисунке); φ, θ, η — угловые координаты на псевдосфере; $R = |\mathbf{R}|$ — радиус псевдосферы; $R \operatorname{sh} \varphi$ — радиус сферы Ω (при φ , равном углу между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{R}$); каждая из букв A и C обозначает на рис. 15.2, 15.3, *a* и 15.3, *b* одну и ту же точку, поэтому отрезок CA ортогонален отрезку OC ($\vec{CA} \cdot \vec{OC} = 0$); $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — ортонормированный базис пространства M ; символ i в обозначении угла указывает на необходимость использования гиперболических функций.

Элемент площади dZ трехмерной псевдосферы задается выражением (12.5):

$$dZ = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta \quad (d\varphi > 0, d\theta > 0, d\eta > 0), \quad (15.19)$$

где R — радиус псевдосферы; φ, θ, η — угловые координаты на псевдосфере; угол φ отсчитывается от оси симметрии частицы (эта ось имеет направляющий орт $\mathbf{i}$); θ и η — обычные сферические координаты

на двумерной сфере радиуса $R \operatorname{sh} \varphi$, выделяемой на поле псевдосферы условием $\varphi = \text{const}$; $\varphi \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\eta \in [0, 2\pi)$ (см. рис. 15.3).

Зададим малую область пространства M , примыкающую к элементу оси A . Ее объем выразим через дифференциалы угловых координат на псевдосфере и дифференциал радиуса псевдосферы.

Рассмотрим трехмерную площадку на псевдосфере, окружающую элемент оси A и имеющую площадь dZ вида (15.19). Согласно утверждению 3, вектор $\mathbf{R}$ ($= \vec{OA}$), являясь одним из радиусов-векторов точек псевдосферы, ортогонален псевдосфере. Учитывая это, построим примыкающую к площадке четырехмерную область, размер которой в направлении, ортогональном площадке, равен элементу dR длины вектора $\mathbf{R}$ (он же — дифференциал радиуса псевдосферы; $dR > 0$). Обозначим объем этой области через $d\widetilde{V}_A$. Понятно, что объем равен произведению площади площадки dZ и элемента dR длины вектора $\mathbf{R}$:

$$d\widetilde{V}_A = dZ dR = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta dR d\varphi d\theta d\eta. \quad (15.20)$$

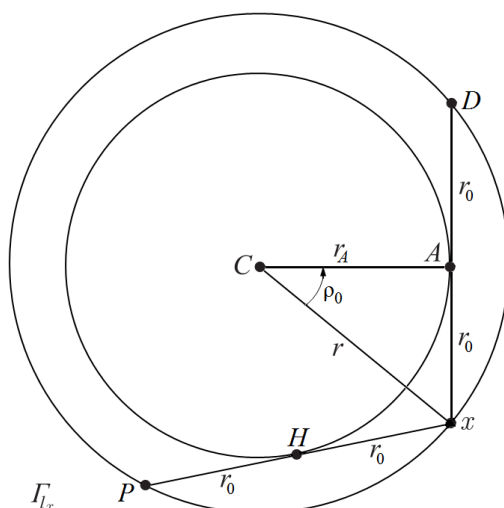
Отметим, что данная область имеет линейные размеры dR , $R d\varphi$, $R \operatorname{sh} \varphi d\theta$ и $R \operatorname{sh} \varphi \sin \theta d\eta$. Будем считать, что эти величины, а также $d\eta_0$, имеют один порядок малости (упрощая, можно сказать, что все они малы и примерно одинаковы).

Использование угловых переменных, входящих в (15.20), удобно тем, что с их помощью легко проводить интегрирование по лучам частицы, так как оси лучей равномерно распределены внутри светового конуса по всем направлениям, исходящим из центра частицы.

Если бы нашей целью было нахождение плотности осей лучей (определяемой как суммарная длина отрезков осей, заключенных в единичном объеме пространства), то это легко было бы сделать. Действительно, общее количество лучей, образующих частицу, равно N , и их оси, как сказано выше, равномерно распределены внутри светового конуса по всем направлениям, исходящим из центра частицы. Поэтому любая площадка псевдосферы, имеющая единичную площадь, пересекается N/Z осями лучей (Z — площадь псевдосферы). Значит, рассматриваемая площадка площади dZ пересекается $(N/Z)dZ$ осями лучей. Так как отрезки осей, содержащиеся в построенной области, имеют одинаковые длины dR , то суммарная длина отрезков осей, заключенных в этой области, равна $dR(N/Z)dZ$. Деля эту величину на объем области $d\widetilde{V}_A$ и учитывая (15.20), находим плотность осей лучей $\varepsilon_{r.a.}$ (*r.a.* означает «ray axis» — ось луча):

$$\varepsilon_{r.a.} = \frac{dR N dZ}{Z d\widetilde{V}_A} = \frac{N}{Z}. \quad (15.21)$$

К сожалению, мы не можем применить для вычисления интересующей нас плотности нитей ε_{r_0} найденное значение объема $d\widetilde{V}_A$. Этому есть две причины. Во-первых, нити находятся не в ближайшей окрестности элемента A , а на расстоянии r_0 от него. Во-вторых, через точку x проходят наряду с нитью, принадлежащей лучу с осью OA , также нити других лучей, оси которых не примыкают к оси OA . Таким лучом является, например, луч, ось которого пересекает гиперплоскость Γ_{lx} в точке H (рис. 15.4).



A и H — точки пересечения с Γ_{ix} осей лучей, винтовые нити которых радиуса r_0 проходят через точку наблюдения x ; $|Ax| = |Hx| = r_0$.

Поскольку $\Gamma_x \perp \mathbf{i}$, то гиперплоскость Γ_x тоже симметрична относительно таких поворотов. Следовательно, оси лучей, которые одинаково

наклонены по отношению к вектору $\mathbf{i}$, пересекают Γ_{l_x} в точках, находящихся на одном и том же расстоянии от точки $C = \Gamma_{l_x} \cap \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, то есть они пересекают Γ_{l_x} в точках сферы с центром в C . В частности, оси лучей, которые образуют с вектором $\mathbf{i}$ угол φ такой же, как показанная на рис. 15.2 и 15.3 ось OA , пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферы радиуса $r_A = |CA| = R \operatorname{sh} \varphi$ с центром в C . На рис. 15.3 это сфера Ω . На рис. 15.4 внутренняя окружность — сечение этой сферы плоскостью, проходящей через точки C , A и x .

Теорема 15.2. *Рассмотрим лучи, оси которых наклонены относительно вектора $\mathbf{i}$ на тот же угол φ , что и ось OA . Винтовые нити радиуса r_0 всех таких лучей пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферы, которая имеет центр в точке $C = \Gamma_{l_x} \cap \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и радиус*

$$r = |Cx| = \sqrt{r_A^2 + r_0^2}, \quad \text{где } r_A = |CA|. \quad (15.22)$$

На рис. 15.4 внешняя окружность — сечение этой сферы.

Доказательство. По теореме 15.1, сечение луча гиперплоскостью Γ_{l_x} является поперечным сечением луча (потому что гиперплоскость Γ_{l_x} ортогональна оси симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$). А так как поперечное сечение луча лежит в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (см. разд. 2, с. 410), то оно ортогонально как оси луча, так и вектору $\mathbf{i}$. Поэтому в случае луча с осью OA его сечение гиперплоскостью Γ_{l_x} ортогонально прямым OA и OC (см. рис. 15.2). Из этого следует, что оно ортогонально всей плоскости, содержащей эти прямые, в том числе ортогонально отрезку $CA \subset \Gamma_{l_x}$. Значит, точки пересечения с Γ_{l_x} нитей радиуса r_0 данного луча лежат в Γ_{l_x} на окружности, плоскость которой ортогональна отрезку CA , радиус равен r_0 и центр находится в точке A (ибо A — центр этого поперечного сечения луча). Все точки данной окружности отстоят от C на расстоянии $r = |Cx|$ (где $|Cx| = \sqrt{r_A^2 + r_0^2}$, см. рис. 15.4). Это означает, что все точки пересечения с Γ_{l_x} нитей радиуса r_0 рассматриваемого луча лежат в Γ_{l_x} на сфере радиуса r с центром в C (в частности, это точки D и x на рис. 15.4). Из симметрии частицы относительно произвольных поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$ вытекает, что сечение частицы гиперплоскостью Γ_{l_x} симметрично относительно произвольных поворотов в Γ_{l_x} вокруг точки C . Следовательно, винтовые нити радиуса r_0 всех других лучей с осями, наклоненными относительно $\mathbf{i}$ на тот же угол φ , что и ось OA , тоже пересекают Γ_{l_x} в точках этой сферы (имеющей центр в C и радиус $r = |Cx| = \sqrt{r_A^2 + r_0^2}$). ■

Возьмем луч, ось которого лежит в плоскости, проходящей через точки O , C и A (см. рис. 15.2), и наклонена по отношению к вектору $\mathbf{i}$ на угол $\varphi + d\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{i}$ и осью OA , $0 < d\varphi \ll \varphi$. Обозна-

чим точку пересечения оси этого луча с гиперплоскостью Γ_{l_x} буквой B , а саму ось символом OB . Поскольку ось OB лежит в одной плоскости с прямыми OC и OA и эта плоскость пересекается гиперплоскостью Γ_{l_x} вдоль прямой CA , то точка B располагается на этой прямой. Очевидно, что при $d\varphi > 0$ точка B находится от точки C дальше, чем точка A . Напомним, что $|CA| = r_A$, поэтому обозначим: $|AB| = dr_A$ ($dr_A > 0$). Тогда будет $|CB| = r_A + dr_A$ (рис. 15.5).

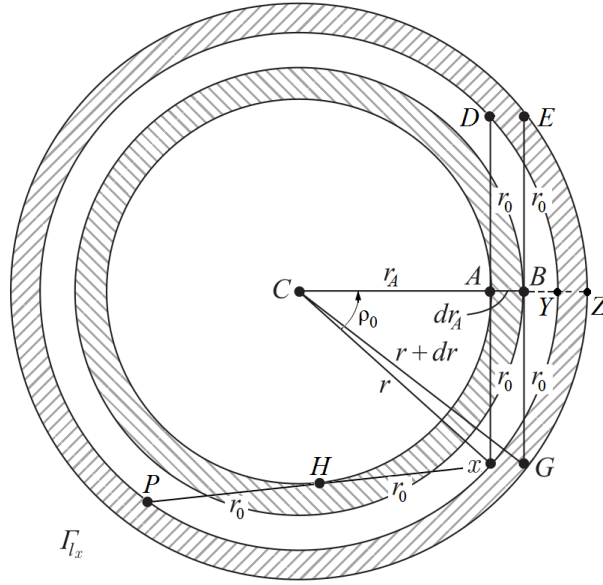


Рис. 15.5. Сферические слои в гиперплоскости Γ_{l_x} : внутренний образован точками пересечения гиперплоскости Γ_{l_x} с осями лучей, наклоненными по отношению к оси симметрии частицы на углы от φ до $\varphi + d\varphi$; внешний слой состоит из точек пересечения Γ_{l_x} с винтовыми нитями этих лучей, имеющими радиус r_0 .

Показано сечение сферических слоев плоскостью, которая проходит через точки C , A и x ; C — точка пересечения оси симметрии частицы с гиперплоскостью Γ_{l_x} ; A — точка пересечения с Γ_{l_x} оси луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x (буквы C и A обозначают те же элементы модели, что и на рис. 15.2, 15.3 и 15.4; окружности, проходящие через точки A и x , те же, что на рис. 15.4); ρ_0 — угол между Cx и CA , $\rho_0 \in (0, \pi/2)$.

Построим в гиперплоскости Γ_x сферу радиуса $r_A + dr_A$ с центром в C . На рис. 15.5 окружность, которая проходит через точку B , — сечение этой сферы.

Найдем связь между dr_A и $d\varphi$. На основании свойств треугольников OCA и CAx (см. рис. 15.2 и 15.5) получаем с учетом (15.16)–(15.18):

$$r_A = (l_x - l) \operatorname{th} \varphi; \quad r_A = R \operatorname{sh} \varphi; \quad r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2}; \quad r_A = r \cos \rho_0. \quad (15.23)$$

Так как точка B находится на продолжении отрезка CA и ось OB проходит через центр частицы O , то ось OB лежит в плоскости, содержащей точки O , C и A . Поэтому для луча с осью OB верно равенство, аналогичное первому равенству в (15.23), выполняющемуся для оси OA :

$$r_A + dr_A = (l_x - l) \operatorname{th}(\varphi + d\varphi). \quad (15.24)$$

Воспользуемся формулой Тейлора для функции $\operatorname{th}(\varphi + d\varphi)$. С точностью до членов, линейных по $d\varphi$, имеем:

$$\operatorname{th}(\varphi + d\varphi) \approx \operatorname{th} \varphi + \frac{d \operatorname{th} \varphi}{d\varphi} d\varphi = \operatorname{th} \varphi + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi} d\varphi.$$

Подставляя это значение функции $\operatorname{th}(\varphi + d\varphi)$ в (15.24) и применяя формулы (15.23), находим искомую связь между dr_A и $d\varphi$ в линейном приближении по $d\varphi$:

$$dr_A \Big|_{\substack{l_x - l \\ r \\ r_0}} \approx \frac{l_x - l}{\operatorname{ch}^2 \varphi} d\varphi = \frac{R}{\operatorname{ch} \varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi = \frac{r \cos \rho_0}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi, \quad (15.25)$$

здесь справа от вертикальной черты указаны величины $l_x - l$, r и r_0 , которые при выводе формул (15.24) и (15.25) считаются постоянными (это будет учтено в дальнейшем при использовании формулы (14.4), содержащей интегрирование по l и r_0).

Из симметрии частицы относительно произвольных поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$ следует, что оси лучей, которые образуют с $\mathbf{i}$ угол $\varphi + d\varphi$ такой же, как ось OB , пересекают гиперплоскость Γ_x в точках сферы радиуса $r_A + dr_A$ с центром в точке C (на рис. 15.5 окружность, проходящая через точку B , — сечение этой сферы).

Отсюда и из сказанного перед теоремой 15.2 заключаем, что оси лучей, наклоненные относительно $\mathbf{i}$ на углы из интервала $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, пересекают гиперплоскость Γ_x в точках сферического слоя, имеющего центр в точке C , внутренний радиус r_A и внешний радиус $r_A + dr_A$ (на рис. 15.5 внутреннее заштрихованное кольцо — сечение этого слоя).

Применяя теорему 15.2 к лучам, оси которых наклонены по отношению к вектору $\mathbf{i}$ на угол $\varphi + d\varphi$, равный углу наклона оси OB , заключаем, что винтовые нити радиуса r_0 этих лучей пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферы с центром в C , имеющей радиус

$$r + dr = \sqrt{(r_A + dr_A)^2 + r_0^2}, \quad (15.26)$$

где dr — некоторая положительная величина (на рис. 15.5 окружность, проходящая через точки E и G , — сечение этой сферы).

На основании данного результата и теоремы 15.2, учитывая симметрию частицы относительно поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$, делаем вывод, что у лучей, оси которых наклонены относительно $\mathbf{i}$ на углы из интервала $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, их винтовые нити радиуса r_0 пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя, имеющего центр в точке C , внутренний радиус r и внешний радиус $r + dr$ (на рис. 15.5 внешнее заштрихованное кольцо — сечение этого слоя).

Найдем связь dr с dr_A и $d\varphi$. Из (15.22) и (15.26) вытекают равенства

$$r^2 = r_A^2 + r_0^2; \quad (r + dr)^2 = (r_A + dr_A)^2 + r_0^2.$$

Отсюда получаем:

$$r^2 + 2rdr + (dr)^2 = r_A^2 + 2r_A dr_A + (dr_A)^2 + r_0^2 = r^2 + 2r_A dr_A + (dr_A)^2,$$

что дает в линейном приближении по dr и dr_A :

$$rdr \approx r_A dr_A. \quad (15.27)$$

Из этой зависимости и из четвертого равенства в (15.23) находим:

$$dr \approx \frac{r_A}{r} dr_A = \cos \rho_0 dr_A. \quad (15.28)$$

Подстановка в (15.28) последнего из значений dr_A в (15.25) приводит к формуле

$$dr \Big|_{\substack{l_x - l \\ r \\ r_0}} \approx \frac{r \cos^2 \rho_0}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi; \quad (15.29)$$

равенство выполняется в линейном приближении по $d\varphi$; справа от вертикальной черты указаны величины, считающиеся постоянными.

Формулы (15.28) и (15.29) задают искомую связь величины dr , введенной формулой (15.26), с величинами dr_A и $d\varphi$.

Отметим, что первое значение dr_A в (15.25) может быть получено также с помощью первого равенства в (15.23) путем вычисления дифференциала dr_A при постоянной разности $l_x - l$. А формула (15.29) может быть выведена из равенства (15.22) ($r = \sqrt{r_A^2 + r_0^2}$) посредством вычисления дифференциала dr (при постоянном r_0) и использования последних выражений в (15.23) и (15.25).

При введении величины $d\varphi$ было принято условие $0 < d\varphi \ll \varphi$. На основании этого условия, последних выражений в (15.23) и (15.25), а также неравенств $\operatorname{sh} \varphi > \varphi$, $\operatorname{ch} \varphi > 1$ (при $\varphi > 0$) можем записать:

$$dr_A \approx \frac{r \cos \rho_0}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi = \frac{r_A}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi \ll \frac{r_A}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} \varphi < r_A,$$

откуда $0 < dr_A \ll r_A$ (с учетом положительности dr_A). Отсюда, из (15.28) и зависимостей $0 < \cos \rho_0 < 1$ (в силу $\rho_0 \in (0, \pi/2)$) и $r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2} < r$ имеем:

$$dr \approx \cos \rho_0 dr_A < dr_A \ll r_A < r,$$

поэтому $0 < dr \ll r$ (с учетом положительности dr).

Итак, из условия $0 < d\varphi \ll \varphi$ следует

$$0 < dr_A \ll r_A \quad \text{и} \quad 0 < dr \ll r. \quad (15.30)$$

Рассмотрим сферический слой в Γ_x с центром в точке C , который имеет внутренний радиус r и толщину dr (на рис. 15.5 внешнее заштрихованное кольцо — его сечение). Так как $0 < dr \ll r$, то его объем dv примерно равен произведению площади внутренней поверхности слоя $4\pi r^2$ на его толщину dr (в линейном приближении по dr):

$$dv \approx 4\pi r^2 dr \quad (15.31)$$

(точное значение объема dv может быть вычислено как разность объемов шаров радиусов $r + dr$ и r , что в линейном приближении по dr дает это же значение объема).

Объем dv_A сферического слоя внутреннего радиуса r_A и толщины dr_A (внутреннее заштрихованное кольцо на рис. 15.5) равен

$$dv_A \approx 4\pi r_A^2 dr_A. \quad (15.32)$$

Из (15.32) при помощи (15.27), (15.31) и четвертого равенства в (15.23) получаем:

$$dv_A \approx 4\pi r_A^2 dr_A = 4\pi r_A r dr = 4\pi r^2 dr \frac{r_A}{r} = \frac{r_A}{r} dv = \cos \rho_0 dv.$$

Отсюда и из (15.28) вытекает:

$$dr \approx \cos \rho_0 dr_A; \quad dv \approx \frac{1}{\cos \rho_0} dv_A. \quad (15.33)$$

Согласно (15.17), $\cos \rho_0 \in (0, 1)$, поэтому из (15.33) следует, что толщина dr внешнего сферического слоя (см. рис. 15.5) меньше толщины dr_A внутреннего сферического слоя, при этом объем dv внешнего слоя превосходит объем dv_A внутреннего слоя (за счет большего радиуса).

Заметим, что геометрическая характеристика, которую по отношению к трехмерному сферическому слою мы называем объемом, ранее, по отношению к трехмерной псевдосфере, мы называли площадью.

Мы нашли характеристики, относящиеся к винтовым нитям радиуса r_0 . Однако нас интересуют, как сказано в начале раздела, нити с радиусами из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$.

Рассмотрим нити радиуса $r_0 + dr_0$ (r_0 и dr_0 — константы; $0 < dr_0 \ll r_0$, см. (15.1) и (15.3)). Проведем для этих нитей краткий анализ, подобный проведенному для нитей радиуса r_0 .

Напомним, что мы исследуем ситуацию, когда точка наблюдения x и частица занимают фиксированные положения в пространстве M . При этом фиксированными являются: центр частицы O , направляющий орт оси симметрии частицы $\mathbf{i}$, моменты времени l и l_x , гиперплоскости Γ_l и Γ_{l_x} , точка $C = \Gamma_{l_x} \cap Lin\{\mathbf{i}\}$ и расстояние $r = |Cx|$ (см. рис. 15.2, с. 543).

Будем обозначать величины, которые аналогичны использованным ранее, но принимают в данном случае другие значения, прежними символами с волной (тильдой) над ними. К ним относятся точка $\tilde{A}$ пересечения гиперплоскости Γ_{l_x} с осью луча, винтовая нить которого радиуса $r_0 + dr_0$ проходит через точку x , расстояние $\tilde{r}_A = |C\tilde{A}|$, угол $\tilde{\varphi}$ и другие.

Продолжим отрезок $C\tilde{A}$ на величину $d\tilde{r}_A$, равную рассмотренному ранее приращению dr_A ($d\tilde{r}_A = dr_A$). Обозначим конец этого удлиненного отрезка через $\tilde{B}$ (точка $\tilde{B}$ является также точкой пересечения с Γ_{l_x} оси некоторого луча). Таким образом, выполняются равенства

$$|C\tilde{A}| = \tilde{r}_A; \quad |\tilde{A}\tilde{B}| = d\tilde{r}_A = dr_A; \quad |C\tilde{B}| = \tilde{r}_A + d\tilde{r}_A = \tilde{r}_A + dr_A. \quad (15.34)$$

По аналогии с третьим равенством в (15.23) можем записать, принимая во внимание, что расстояние r фиксировано:

$$\tilde{r}_A = \sqrt{r^2 - (r_0 + dr_0)^2}. \quad (15.35)$$

Построим сферический слой с центром в точке C , имеющий внутренний радиус $\tilde{r}_A$ и толщину $d\tilde{r}_A$. Его объем $d\tilde{v}_A$ может быть представлен

в линейном приближении по $d\tilde{r}_A$ (с учетом $d\tilde{r}_A = dr_A$) в виде

$$d\tilde{v}_A \approx 4\pi(\tilde{r}_A)^2 d\tilde{r}_A = 4\pi(\tilde{r}_A)^2 dr_A. \quad (15.36)$$

Преобразуем эту формулу, пренебрегая слагаемыми, квадратичными по dr_A и dr_0 , и применяя последовательно формулы (15.35), (15.23) и (15.32):

$$\begin{aligned} d\tilde{v}_A &\approx 4\pi(\tilde{r}_A)^2 dr_A = 4\pi(r^2 - (r_0 + dr_0)^2) dr_A \approx \\ &\approx 4\pi(r^2 - r_0^2 - 2r_0 dr_0) dr_A = 4\pi(r_A^2 - 2r_0 dr_0) dr_A \approx 4\pi r_A^2 dr_A \approx dv_A. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d\tilde{v}_A \approx dv_A. \quad (15.37)$$

Обозначим: $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi} + d\tilde{\varphi}$ — углы, между вектором $\mathbf{i}$ и осями $O\tilde{A}$ и $O\tilde{B}$. Сферический слой, объем $d\tilde{v}_A$ которого мы нашли, содержит точки пересечения с Γ_{l_x} осей лучей, которые наклонены по отношению к $\mathbf{i}$ на углы, содержащиеся в промежутке $[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} + d\tilde{\varphi}]$. Винтовые нити этих лучей, имеющие радиусы $r_0 + dr_0$, пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя внутреннего радиуса $\tilde{r}$, равного r (так как расстояние $r = |Cx|$ фиксировано), и внешнего радиуса $\tilde{r} + d\tilde{r}$, который, по аналогии с (15.26), равен

$$\tilde{r} + d\tilde{r} = r + d\tilde{r} = \sqrt{(\tilde{r}_A + d\tilde{r}_A)^2 + (r_0 + dr_0)^2}.$$

Преобразуем это выражение с точностью до линейных членов по $d\tilde{r}$, $d\tilde{r}_A$ и dr_0 , применяя второе равенство в (15.34) ($d\tilde{r}_A = dr_A$) и равенство (15.35):

$$\begin{aligned} (r + d\tilde{r})^2 &= (\tilde{r}_A + dr_A)^2 + (r_0 + dr_0)^2; \\ r^2 + 2r d\tilde{r} &\approx (\tilde{r}_A)^2 + 2\tilde{r}_A dr_A + r_0^2 + 2r_0 dr_0; \\ r^2 + 2r d\tilde{r} &\approx r^2 - (r_0 + dr_0)^2 + 2\tilde{r}_A dr_A + r_0^2 + 2r_0 dr_0; \\ r^2 + 2r d\tilde{r} &\approx r^2 - r_0^2 - 2r_0 dr_0 + 2\tilde{r}_A dr_A + r_0^2 + 2r_0 dr_0, \end{aligned}$$

откуда

$$r d\tilde{r} \approx \tilde{r}_A dr_A; \quad (15.38)$$

это равенство аналогично равенству (15.27) (так как $r = \tilde{r}$ и $dr_A = d\tilde{r}_A$).

Утверждение 4. В линейном приближении по $d\tilde{r}$, dr_A и dr_0 выполняется приближенное равенство

$$d\tilde{r} \approx dr. \quad (15.39)$$

Доказательство. Из (15.35) с помощью третьего выражения в (15.23) ($r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2}$) находим в линейном приближении по dr_0 :

$$\begin{aligned}\tilde{r}_A &= \sqrt{r^2 - (r_0 + dr_0)^2} \approx \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0 dr_0} = \sqrt{r_A^2 - 2r_0 dr_0} = \\ &= r_A \sqrt{1 - \frac{2r_0 dr_0}{r_A^2}} \approx r_A \left(1 - \frac{r_0 dr_0}{r_A^2}\right) = r_A - \frac{r_0}{r_A} dr_0.\end{aligned}$$

Отсюда, применяя равенство $r_0/r_A = \operatorname{tg} \rho_0$ (см. рис. 15.4), получаем:

$$\tilde{r}_A \approx r_A - \operatorname{tg} \rho_0 dr_0.$$

Подстановка этого значения $\tilde{r}_A$ в (15.38) дает в линейном приближении по dr_0 и dr_A :

$$r d\tilde{r} \approx \tilde{r}_A dr_A \approx (r_A - \operatorname{tg} \rho_0 dr_0) dr_A \approx r_A dr_A.$$

Из этой зависимости, в силу (15.27), вытекает $r d\tilde{r} \approx r dr$, значит, выполняется требуемое равенство $d\tilde{r} \approx dr$. Оно справедливо в линейном приближении по $d\tilde{r}$, dr_A и dr_0 , так как при его выводе использовано равенство (15.38), верное в этом приближении. ■

Равенство $\tilde{r} = r$, являющееся следствием фиксированности расстояния r , и приближенное равенство (15.39) означают, что сферический слой внутреннего радиуса $\tilde{r}$ и внешнего радиуса $\tilde{r} + d\tilde{r}$ практически совпадает со сферическим слоем внутреннего радиуса r и внешнего радиуса $r + dr$, поэтому их объемы $d\tilde{v}$ и dv равны (в линейном приближении по указанным выше малым величинам):

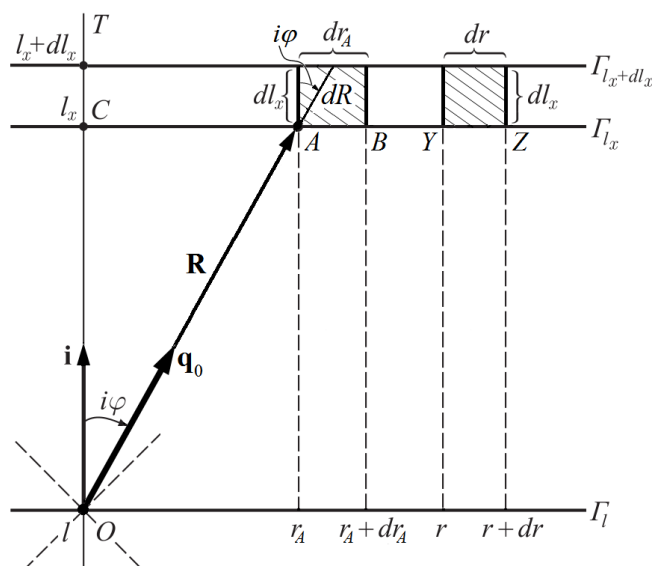
$$d\tilde{v} \approx dv, \quad (15.40)$$

где dv имеет вид (15.31).

Поскольку наша цель — найти плотность нитей ε_{r_0} , а она определяется через объем, то равенства (15.37), (15.40) и сказанное ранее позволяют сформулировать следующий вывод.

Пусть имеется луч, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку наблюдения x и ось которого наклонена по отношению к вектору $\mathbf{i}$ на угол φ . Тогда точка A пересечения оси этого луча с гиперплоскостью Γ_{l_x} и точки пересечения с Γ_{l_x} осей лучей, наклоненных по отношению к $\mathbf{i}$ на углы из промежутка $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, содержатся в Γ_{l_x} в сферическом слое внутреннего радиуса r_A и внешнего радиуса $r_A + dr_A$ (внутреннее заштрихованное кольцо на рис. 15.5). Винтовые нити таких лучей, имеющие радиусы из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, пересекают

Придадим моменту времени l_x малое приращение dl_x ($0 < dl_x \ll l_x$) и построим в дополнение к Γ_l и Γ_x гиперплоскость $\Gamma_{l_x+dl_x}$, отвечающую моменту времени $l_x + dl_x$ (рис. 15.6).



$\mathbf{R}$ — радиус-вектор элемента A относительно центра частицы O ; dR — приращение длины вектора $\mathbf{R}$ между гиперплоскостями Γ_x и Γ_{x+dlx} ; прямая $CABYZ$ — та же, что на рис. 15.5; штриховые прямые, пересекающиеся в точке O , — сечение светового конуса; символ i в обозначении угла указывает на то, что при оперировании с этим углом нужно применять гиперболические функции.

Построим два четырехмерных цилиндрических слоя высоты dl_x , основаниями которых служат упомянутые выше трехмерные сферические слои, лежащие в гиперплоскости Γ_x (один цилиндрический слой имеет внутренний радиус r_A и внешний радиус $r_A + dr_A$, другой имеет внутренний радиус r и внешний радиус $r + dr$). На рис. 15.6 сечения этих цилиндрических слоев заштрихованы.

В связи с тем, что высота dl_x цилиндрических слоев отсчитывается вдоль направления вектора $\mathbf{i}$, ортогонального сферическим слоям (ибо последние лежат в Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x} \perp \mathbf{i}$), объем dV_A внутреннего цилиндрического слоя и объем dV внешнего цилиндрического слоя равны произведениям объемов их оснований на высоту dl_x . С учетом (15.31) и (15.32) получаем:

$$dV_A = dv_A dl_x \approx 4\pi r_A^2 dr_A dl_x; \quad (15.41)$$

$$dV = dv dl_x \approx 4\pi r^2 dr dl_x. \quad (15.42)$$

Рассмотрим лучи, оси которых пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя внутреннего радиуса r_A и внешнего радиуса $r_A + dr_A$ (внутреннее заштрихованное кольцо на рис. 15.5). Обозначим: dK_A — количество таких лучей, оно же — количество осей этих лучей. Поскольку r_A и dr_A связаны формулами (15.23) и (15.25) с углами φ и $d\varphi$, то выразим количество лучей dK_A через величины, определяемые этими углами, аналогично тому, как это сделано при выводе формулы (15.21):

$$dK_A = \frac{N}{Z} dZ_{d\varphi}, \quad (15.43)$$

где N — количество лучей, образующих частицу; Z — площадь полу псевдосферы радиуса R (оси лучей пересекают эту полу равномерно по всей ее площади, см. рис. 15.3, а на с. 545); $dZ_{d\varphi}$ — площадь той части полу псевдосферы, которую пересекают оси лучей, наклоненные по отношению к вектору $\mathbf{i}$ на углы из промежутка $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ (где $d\varphi \ll \varphi$).

Элемент dZ площади псевдосферы радиуса R имеет вид (15.19):

$$dZ = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta \quad (d\varphi > 0, d\theta > 0, d\eta > 0), \quad (15.44)$$

где φ, θ, η — угловые координаты на поле псевдосферы; $\varphi \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\eta \in [0, 2\pi)$ (см. рис. 15.3).

На основании (15.44) находим площадь Z полу псевдосферы и площадь $dZ_{d\varphi}$ указанной выше ее части:

$$Z = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta = 4\pi R^3 \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi; \quad (15.45)$$

$$dZ_{d\varphi} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\theta d\eta = 4\pi R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi. \quad (15.46)$$

Обозначим:

$$Z(1) = 4\pi \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^{\Phi} \text{sh}^2 \varphi d\varphi \quad (15.47)$$

площадь полы псевдосферы единичного радиуса (выраженная в безразмерных единицах).

Площадь Z полы псевдосферы может быть представлена, согласно (15.45) и (15.47), в форме

$$Z = R^3 Z(1). \quad (15.48)$$

Подстановка значений $dZ_{d\varphi}$ и Z из (15.46) и (15.48) в (15.43) дает:

$$dK_A = \frac{N}{Z} dZ_{d\varphi} = \frac{4\pi N \text{sh}^2 \varphi d\varphi}{Z(1)}. \quad (15.49)$$

Вектор $\mathbf{R}$ ($= \overrightarrow{OA}$) наклонен по отношению к вектору $\mathbf{i}$ на угол φ (см. рис. 15.6), поэтому приращение его длины dR между Γ_x и Γ_{x+dl_x} связано с величиной dl_x зависимостью

$$dR = \frac{dl_x}{\text{ch} \varphi}. \quad (15.50)$$

Напомним, что мы рассматриваем лучи, оси которых пересекают гиперплоскость Γ_x в точках сферического слоя внутреннего радиуса r_A и внешнего радиуса $r_A + dr_A$.

На рис. 15.7 показаны оси этих лучей, которые пересекают принадлежащий сферическому слою отрезок AB .

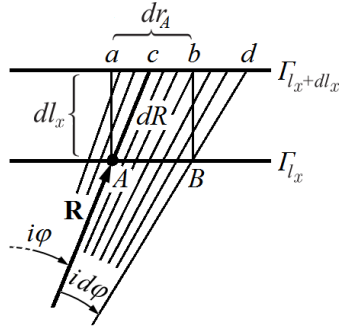


Рис. 15.7. Оси лучей, пересекающие гиперплоскость Γ_x в точках отрезка AB и вблизи него.

$AabB$ — прямоугольник, который на рис. 15.6 имеет основание AB ; $0 < d\varphi \ll \varphi$.

При малом угле $d\varphi$ можно считать, что участки указанных осей, заключенные между гиперплоскостями Γ_x и Γ_{x+dl_x} , практически параллельны между собой и поэтому все они имеют примерно одинаковую длину, равную длине dR такого же участка оси OA .

Нас интересуют те участки осей, пересекающих отрезок AB , которые находятся внутри прямоугольника $AabB$. Из рис. 15.7 видно, что у осей, примыкающих слева к точке B , их участки, заключенные между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, не попадают целиком внутрь этого прямоугольника. Однако имеются оси, которые, наоборот, пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} вне отрезка AB (слева от точки A), но определенные их участки попадают внутрь прямоугольника $AabB$. Вследствие малого различия наклонов рассматриваемых осей, треугольники Aac и Bbd на рис. 15.7 приблизительно одинаковы, поэтому суммарная длина тех участков рассматриваемых осей, которые не попадают внутрь прямоугольника $AabB$, примерно равна суммарной длине участков, которые попадают внутрь прямоугольника, хотя оси, которым они принадлежат, пересекают Γ_{l_x} вне отрезка AB .

Сказанное приводит к следующему выводу. При расчете суммарной длины участков осей, которые находятся внутри прямоугольника $AabB$, можно принять, что у всех осей, пересекающих отрезок AB , их участки, заключенные между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, находятся целиком внутри прямоугольника $AabB$ (причем длины этих участков примерно равны dR), а все оси, не пересекающие отрезок AB , не имеют участков, содержащихся в этом прямоугольнике.

Благодаря симметрии частицы относительно любых поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$, аналогичный вывод верен для всех осей, пересекающих гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя внутреннего радиуса r_A и внешнего радиуса $r_A + dr_A$. А именно, можно считать, что участки этих осей, заключенные между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, находятся целиком внутри цилиндрического слоя внутреннего радиуса r_A и внешнего радиуса $r_A + dr_A$ (причем их длины примерно равны dR), при этом другие оси не имеют участков, содержащихся в цилиндрическом слое.

Отсюда заключаем, что суммарная длина $d\Lambda_A$ тех участков осей, которые находятся внутри цилиндрического слоя внутреннего радиуса r_A , внешнего радиуса $r_A + dr_A$ и высоты dl_x , примерно равна произведению количества рассматриваемых осей dK_A на длину участков dR :

$$d\Lambda_A \approx dK_A dR = \frac{4\pi N \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi dl_x}{\operatorname{ch} \varphi Z(1)}, \quad (15.51)$$

где применены равенства (15.49) и (15.50).

Ранее была введена плотность осей лучей $\varepsilon_{r.a.}$ (см. текст перед формулой (15.21), с. 546). В нестрогой формулировке она представляет собой суммарную длину участков осей, заключенных в единичном объеме пространства. Из симметрии частицы относительно любых поворотов

вокруг вектора $\mathbf{i}$, следует, что цилиндрический слой, о котором идет речь, тоже симметричен относительно таких поворотов. Учитывая это, а также малость высоты и толщины слоя (dl_x и dr_A), можно принять в роли плотности осей лучей в окрестности точки A отношение суммарной длины $d\Lambda_A$ участков осей, содержащихся в данном цилиндрическом слое, к объему слоя dV_A . Используя формулы (15.41) и (15.51), находим:

$$\varepsilon_{r.a.} = \frac{d\Lambda_A}{dV_A} \approx \frac{4\pi N \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi dl_x}{4\pi \operatorname{ch} \varphi Z(1) r_A^2 dr_A dl_x}.$$

Подстановка в это выражение вторых значений величин r_A и dr_A из формул (15.23), (15.25) и применение формулы (15.48) дают:

$$\varepsilon_{r.a.} \approx \frac{N}{R^3 Z(1)} = \frac{N}{Z}. \quad (15.52)$$

Полученное приближенное значение плотности осей лучей $\varepsilon_{r.a.}$ совпадает с точным значением (15.21). Это свидетельствует о правомерности принятых упрощений. Повторим сказанное после формулы (15.21), что данное значение величины $\varepsilon_{r.a.}$ совпадает со значением плотности лучей ε в модели «точечной» частицы (см. формулы (3.5) и (3.6) в главе 4, с. 319). Так и должно быть, потому что совокупность осей лучей частицы ненулевого радиуса, называемая остовом частицы, фактически представляет собой «точечную» частицу.

Теперь перейдем непосредственно к расчету плотности нитей ε_{r_0} в окрестности точки x .

Согласно определению этой величины (с. 536), для ее вычисления нужно стянуть некоторую область, содержащую x , в точку. Однако мы поступим по-другому.

Рассмотрим цилиндрический слой, имеющий внутренний радиус r , внешний радиус $r + dr$ и высоту dl_x (на рис. 15.6 правый заштрихованный прямоугольник — его сечение). Точка x принадлежит внутренней границе его нижнего основания (см. рис. 15.5). Пользуясь аналогией с методом вычисления плотности осей лучей $\varepsilon_{r.a.}$, найдем отношение суммарной длины $d\Lambda$ участков нитей, содержащихся в этом цилиндрическом слое, к объему слоя dV . Вследствие симметрии частицы относительно поворотов вокруг вектора $\mathbf{i}$ и малости высоты и толщины слоя (dl_x и dr) можно принять, что полученная таким способом величина представляет собой плотность нитей ε_{r_0} в окрестности точки x :

$$\varepsilon_{r_0}(x, r_0, dr_0) = \frac{d\Lambda}{dV}, \quad (15.53)$$

где $d\Lambda$ — суммарная длина участков винтовых нитей, которые имеют радиусы из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$ и содержатся в цилиндрическом слое внутреннего радиуса r , внешнего радиуса $r + dr$ и высоты dl_x ; dV — объем этого слоя, задаваемый формулой (15.42).

Найдем суммарную длину участков нитей $d\Lambda$.

Возьмем какой-либо луч частицы. Согласно теореме 15.1, гиперплоскости Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$ пересекают луч по его поперечным сечениям. А так как все поперечные сечения луча параллельны, то расстояние между поперечными сечениями луча, лежащими в Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, одинаково при измерении его вдоль любой прямой, ортогональной сечениям. Рассмотрим цилиндрическую поверхность, на которой находится винтовая нить (ось этой поверхности и ось нити совпадают с осью луча). Из сказанного следует, что участок любой образующей этой поверхности, заключенный между гиперплоскостями Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, имеет такую же длину dR , как и заключенный между ними участок оси луча.

Если бы нити луча были параллельны оси луча, то длины их участков между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$ тоже были бы равны dR . Однако нити наклонены по отношению к оси луча, поэтому длины этих участков нитей отличны от dR . Вследствие осесимметричности луча, его винтовые нити, имеющие одинаковый радиус, одинаково наклонены по отношению к оси луча, поэтому длины их участков, заключенных между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, одинаковы. С учетом $dr_0 \ll r_0$ будем считать, что для всех нитей с радиусами из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$ эти участки нитей имеют одинаковую длину $d\lambda$. Вычислим ее.

Ранее на основании теоремы 15.2 был сделан вывод (с. 551) о том, что у лучей, оси которых наклонены относительно вектора $\mathbf{i}$ на углы из интервала $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, их винтовые нити радиуса r_0 пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя, имеющего центр в точке C , внутренний радиус r и внешний радиус $r + dr$ (на рис. 15.5 внешнее заштрихованное кольцо — сечение этого слоя). Кроме того, на с. 555 сделано заключение, что винтовые нити радиуса $r_0 + dr_0$, удовлетворяющие равенствам (15.34), пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя, который практически совпадает с указанным сферическим слоем. Таким образом, можно считать, что все интересующие нас нити пересекают Γ_{l_x} в точках данного сферического слоя.

Вместе с тем, у некоторых из этих нитей их участки, находящиеся между гиперплоскостями Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, могут не попадать целиком в цилиндрический слой, нижним основанием которого служит упомянутый сферический слой, подобно тому, как это имеет место с осями лучей (см. рис. 15.7 и его обсуждение).

Выше было показано, что при расчете суммарной длины участков осей можно принять, что все оси, которые пересекают нижнее основание цилиндрического слоя, имеющего внутренний радиус r_A и внешний радиус $r_A + dr_A$, обладают тем свойством, что их участки, заключенные между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, находятся целиком внутри этого цилиндрического слоя, причем другие оси не имеют участков, находящихся внутри этого слоя. Теперь примем аналогичное допущение в отношении нитей таких лучей. Будем считать, что нити этих лучей, имеющие радиусы из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, обладают тем свойством, что их участки, заключенные между Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$, находятся целиком внутри цилиндрического слоя внутреннего радиуса r , внешнего радиуса $r + dr$ и высоты dl_x , причем другие лучи не имеют нитей тех же радиусов, участки которых содержались бы в этом слое.

Длина $d\lambda$ указанных участков нитей может быть вычислена наиболее просто с помощью рис. 12.1 (с. 508). На нем показана развертка цилиндрической поверхности, содержащей винтовые нити радиуса r_0 . Из рисунка видно, что отрезку оси луча, имеющему длину, равную шагу нити P , соответствует участок нити длины $P\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$. Значит, отрезку оси луча, который имеет длину dR , соответствует участок нити, имеющий длину

$$d\lambda = \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} dR \quad (dR > 0), \quad (15.54)$$

где β_0 — параметр, связанный с шагом нити P и радиусом нити r_0 зависимостью (13.18): $P = \frac{2\pi r_0}{\beta_0}$.

Известно, что рисунок не может служить доказательством. Строгий расчет величины $d\lambda$ можно выполнить по формуле

$$d\lambda = \sqrt{|d\mathbf{R}_f \cdot d\mathbf{R}_f|} = \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \left(\frac{r_0 \psi}{\beta_0} \right)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \left(\frac{r_0 \psi}{\beta_0} \right)} \right|} d \left(\frac{r_0 \psi}{\beta_0} \right), \quad (15.55)$$

где $\mathbf{R}_f$ — радиус-вектор элементов нити относительно центра частицы, задаваемый уравнением нити (11.21) (мы пометили его индексом f , чтобы отличить от вектора $\mathbf{R}$, показанного на рис. 15.3, 15.6 и 15.7; индекс f от *fiber* — нить, хотя ИИ рекомендует использовать *thread*); $d\mathbf{R}_f$ — приращение радиуса-вектора $\mathbf{R}_f$ (разность значений $\mathbf{R}_f$ для элементов нити, которые принадлежат поперечным сечениям луча, отстоящим друг от друга на величину dR); $\frac{r_0 \psi}{\beta_0}$ — натуральный параметр на оси луча (см. рис. 10.2 на с. 466 с учетом (10.3) и пояснения к формуле (10.2), считается, что $d\psi > 0$); отсутствие в (15.55) операции интегрирования по длине нити объясняется малостью величины $d\lambda$.

При вычислении длины $d\lambda$ по формуле (15.55) нужно применить наряду с уравнением нити (11.21) (с. 492) также равенства (11.26), (11.33) и учесть, что $d\left(\frac{r_0\psi}{\beta_0}\right) = dR$ (так как $\frac{r_0\psi}{\beta_0}$ и R — два натуральных параметра на оси луча).

Расчет по формуле (15.55) дает значение длины $d\lambda$, которое совпадает со значением (15.54).

Из приведенной выше формулы $P = \frac{2\pi r_0}{\beta_0}$ следует $\beta_0 > 0$. В разд. 10 и 11 показано, что в случаях $0 < \beta_0 < 1$ и $\beta_0 > 1$ нить является соответственно времениподобной и пространственноподобной линией. Если же $\beta_0 = 1$, то нить представляет собой изотропную линию. В таком случае, по (15.54), $d\lambda = 0$ (это объясняется тем, что длина любого участка изотропной линии равна нулю). Поэтому выводимая далее формула для плотности нитей ε_{r_0} может быть применена только в случае, когда количество изотропных нитей пренебрежимо мало по сравнению с количеством времениподобных и пространственноподобных нитей.

Итак, мы рассматриваем лучи, оси которых пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя внутреннего радиуса r_A и внешнего радиуса $r_A + dr_A$ (внутреннее заштрихованное кольцо на рис. 15.5). Количество таких лучей dK_A задается формулами (15.43) и (15.49) (оно же — количество осей этих лучей). Винтовые нити этих лучей, имеющие радиусы из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферического слоя внутреннего радиуса r и внешнего радиуса $r + dr$ (внешнее заштрихованное кольцо на рис. 15.5). Количество таких нитей в каждом луче частицы, по (15.8), равно $N_{r_0} = \tilde{N}_{r_0} dr_0$, поэтому всего интересующих нас нитей имеется $\tilde{N}_{r_0} dr_0 dK_A$ штук. Мы приняли допущение, что участки этих нитей, которые заключены между гиперплоскостями Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x + dl_x}$ и имеют длину $d\lambda$, содержатся целиком внутри цилиндрического слоя внутреннего радиуса r и внешнего радиуса $r + dr$. В таком случае суммарная длина $d\Lambda$ этих участков нитей составляет

$$d\Lambda = \tilde{N}_{r_0} dr_0 dK_A d\lambda. \quad (15.56)$$

С помощью (15.53) и (15.56) находим плотность нитей:

$$\varepsilon_{r_0} = \frac{d\Lambda}{dV} = \frac{\tilde{N}_{r_0} dr_0 dK_A d\lambda}{dV}.$$

Подставляя сюда значения dV , dK_A и $d\lambda$ из (15.42), (15.49) и (15.54), получаем:

$$\varepsilon_{r_0} \approx \frac{\tilde{N}_{r_0} dr_0 4\pi N \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} dR}{4\pi r^2 dr dl_x Z(1)}.$$

Сокращаем дробь на 4π и вносим в нее значения dr и dR из (15.29) и (15.50):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r_0} &\approx \frac{\tilde{N}_{r_0} dr_0 N \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} dl_x \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi}{r^2 dl_x Z(1) \operatorname{ch} \varphi r \cos^2 \rho_0 d\varphi} = \\ &= \frac{N \tilde{N}_{r_0} dr_0 \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} \operatorname{sh}^3 \varphi \cos \rho_0}{r^3 \cos^3 \rho_0 Z(1)},\end{aligned}$$

в последней дроби числитель и знаменатель умножены на $\cos \rho_0$.

Из второго и четвертого равенств (15.23) имеем:

$$r^3 \cos^3 \rho_0 = R^3 \operatorname{sh}^3 \varphi.$$

Подставим это значение произведения $r^3 \cos^3 \rho_0$ в знаменатель последней дроби и сократим дробь на $\operatorname{sh}^3 \varphi$. В итоге находим *плотность нитей радиуса r_0 в окрестности точки $x \in M$:*

$$\varepsilon_{r_0} = \tilde{\varepsilon}_{r_0} dr_0 \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon}_{r_0} = \tilde{\varepsilon}_{r_0}(R, r_0) = \frac{N \tilde{N}_{r_0} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} \cos \rho_0}{R^3 Z(1)}; \quad (15.57)$$

величину $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ будем называть, как и ε_{r_0} , *плотностью нитей*; здесь в качестве аргумента при $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ поставлен символ R вместо x , потому что $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ зависит не непосредственно от точки x , а от расстояния R между центром частицы и точкой A оси того луча, нить которого радиуса r_0 проходит через точку x (точка A лежит в том же поперечном сечении луча, что и точка x ; из дальнейшего будет видно, что такой луч не единственный, но для всех подобных лучей расстояние R одинаково).

Отметим, что мы поставили знак точного равенства вместо приближенного, потому что плотность нитей ε_{r_0} будет применена в дальнейшем в процессе интегрирования, что предполагает устремление к нулю использованных при ее выводе малых величин (dr_0 и других).

Напомним обозначения, использованные в формуле (15.57): β_0 — параметр, входящий в уравнение нити (11.19) (с учетом (11.27) и (11.33)), параметр β_0 связан с шагом нити P и радиусом нити r_0 равенством $P = \frac{2\pi r_0}{\beta_0}$ (см. (13.18)), он удовлетворяет также зависимостям (13.24); ρ_0 — угол между Cx и CA (см. рис. 15.2 и 15.4 на с. 543 и 547), из (15.17) следует

$$\cos \rho_0 = \frac{r_A}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r}, \quad \rho_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad (15.58)$$

R — расстояние между центром частицы и точкой A (см. пояснение к (15.57)); $Z(1)$ — площадь полы псевдосферы единичного радиуса, определяемая формулой (15.47) (эта формула содержит предел $\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi$, равный бесконечности, однако именно это обстоятельство позволяет получить в дальнейшем конечное значение собственного поля частицы); N — количество лучей, образующих частицу; $\tilde{N}_{r_0} dr_0$ — количество нитей с радиусами из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$ в каждом луче частицы; $\tilde{N}_{r_0}$ удовлетворяет следующим зависимостям, вытекающим из формул (15.8)–(15.10):

$$\tilde{N}_{r_0} = 2n_*\sigma\delta r_0 = 2\pi\sigma_0 r_0; \quad \int_{(r_0)} \tilde{N}_{r_0} dr_0 = n_* N_*, \quad (15.59)$$

где n_* — количество кругов радиуса p_* , образующих поперечное сечение луча (см. рис. 15.1, с. 537); σ — плотность точек пересечения нитей с поперечным сечением луча, введенная в разд. 12 (с. 507); δ и σ_0 задаются формулами (15.6) и (15.10); N_* — количество нитей в одной спирали луча; $n_* N_*$ — общее число нитей в каждом луче частицы; величины $\tilde{N}_{r_0}$, ε_{r_0} и $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ имеют размерности м^{-1} , м^{-3} и м^{-4} соответственно.

Формула (15.57) выполняется независимо от того, испытали какие-либо лучи частицы переориентацию или нет (так как при ее выводе не использовался вектор $\mathbf{e}_2$, знаком которого только и различаются уравнения нитей переориентированного и непереориентированного лучей).

Формула (15.57) может быть применена только при условии, что количество изотропных нитей пренебрежимо мало по сравнению с количеством времениподобных и пространственноподобных нитей (ибо для изотропных нитей $\beta_0 = 1$, что влечет для них $\tilde{\varepsilon}_{r_0} = 0$).

Напомним, что частица ограничена «с боков» псевдосферой радиуса $r_* + p_*$, поэтому если точка x находится вне этой псевдосферы, то через нее не проходят нити, связанные с данным расположением частицы. Нет таких нитей также внутри четырехмерного цилиндра радиуса $r_* - p_*$ с осью, совпадающей с осью симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ (так как нити располагаются по периметру лучей, а внутри них на расстояниях до $r_* - p_*$ от оси луча нитей нет, см. рис. 1.3 и 15.1, с. 409 и 537). Тем не менее, практически всегда можно найти столь удаленное в прошлое расположение частицы, при котором имеются нити, проходящие через x .

16. Вспомогательные формулы

Повторим два определения, приведенные в разд. 15.

Точка $x \in M$ находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* , если она принадлежит полупространству, которое примыкает к Γ_* со стороны будущего. Очевидно, что в этом случае ортогональная проекция точки x на ось симметрии частицы находится в будущем относительно центра частицы (при этом сама точка x может находиться не только внутри светового конуса будущего с вершиной в центре частицы, но и на самом конусе или снаружи от него).

Линия L_x есть часть мировой линии частицы L , удовлетворяющая следующему условию: при каждом расположении частицы с центром на L_x имеется по крайней мере одна винтовая нить радиуса r_0 , участок которой, находящийся в будущем по отношению к центральному сечению частицы, проходит через точку x , причем при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет (L_x зависит от x и r_0).

Зафиксируем точку наблюдения x и какое-либо расположение частицы с центром на линии L_x , как в разд. 15. В таком случае существует луч частицы, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x . Будем обозначать буквой O центр частицы, а также точку мировой линии L , в которой он находится.

Напомним, что $Lin\{\mathbf{i}\}$ — ось симметрии частицы ($\mathbf{i}$ — ее направляющий орт, ориентированный в сторону будущего).

Воспользуемся введенной в разд. 15 инерциальной системой отсчета $\{T, \Gamma\}$, где $T = Lin\{\mathbf{i}\}$ — ось времени, она проходит через центр частицы O и неподвижна относительно пространства M ; Γ — координатное физическое пространство, оно ортогонально оси T и занимает в разные моменты времени разные положения, при этом все его положения параллельны между собой и получаются из одного положения путем поступательного перемещения гиперплоскости Γ вдоль оси T .

Координатное время задано в этой системе отсчета так, что момент l , соответствующий центру частицы O , совпадает с моментом l_* собственного времени частицы при данном ее расположении (оба измеряются в единицах длины, см. (15.15), с. 542):

$$l = l_*. \quad (16.1)$$

Обозначим: l_x — момент координатного времени, отвечающий точке x ; Γ_l и Γ_{l_x} — положения гиперплоскости Γ в моменты времени l и l_x

(гиперплоскость Γ_l проходит через центр частицы O , Γ_x — через точку наблюдения x); C — точка пересечения гиперплоскости Γ_x и оси времени T ($C = \Gamma_x \cap T$); A — точка пересечения с Γ_x оси луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x . Будем обозначать буквой A также элемент оси, находящийся в точке пересечения. Точки O и C имеют временные координаты l и l_x соответственно (рис. 16.1).

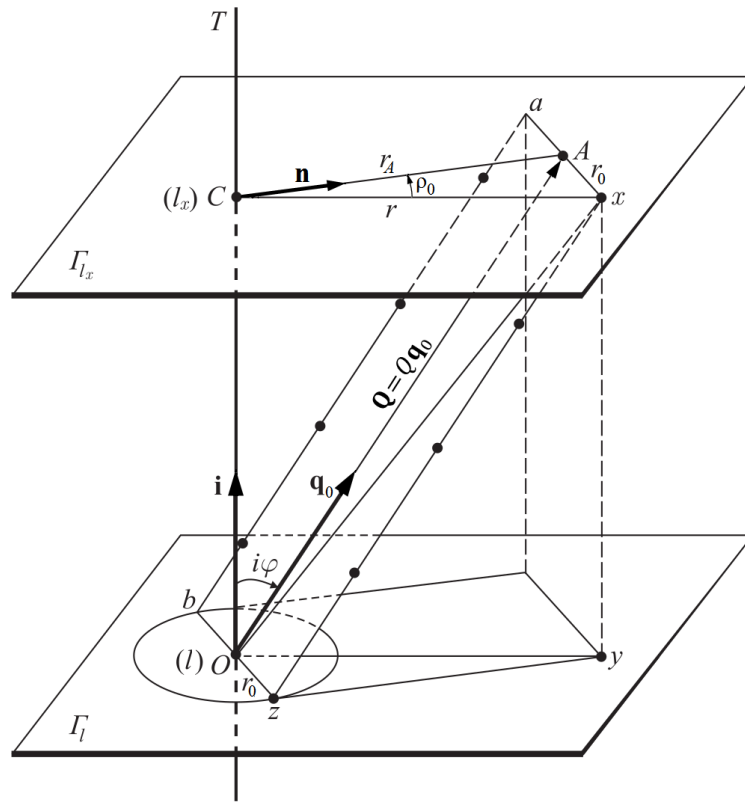


Рис. 16.1. Два положения координатного физического пространства Γ в пространстве M (повторение рис. 15.2).

OA — ось луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x ($O \in \Gamma_l$; $A \in \Gamma_x$); гиперплоскости Γ_l , Γ_x и цилиндрическая поверхность, на которой расположена нить, изображены с понижением размерности на единицу, поэтому цилиндрическая поверхность имеет вид двух прямых xz и ab ; темные кружки на xz и ab — элементы нити.

При рассматриваемом взаимном расположении частицы и точки наблюдения x выполняется неравенство (15.16):

$$l_x > l. \quad (16.2)$$

Примем допущение, которое при вычислении характеристик частицы позволяет заменить операцию суммирования более простой операцией интегрирования.

Допущение о непрерывности множества осей лучей и множества нитей. Будем считать, что совокупность осей лучей и совокупность нитей, из которых состоит луч, являются непрерывными множествами. А именно, допустим, что:

а) оси лучей частицы непрерывно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в центре частицы (в этом случае каждая времениподобная прямая, проходящая через центр частицы, является осью некоторого луча; напомним, что, согласно сделанному в начале построения модели допущению, оси лучей распределены по внутренности светового конуса равномерно);

б) винтовые нити каждого луча частицы, имеющие один и тот же радиус, непрерывно заполняют цилиндрическую поверхность того же радиуса, ось которой совпадает с осью луча (эта поверхность принадлежит соответствующему подпространству C_{q_0} ; данное допущение фактически означает, что поперечное сечение луча рассматривается как сплошная круговая полоса с внутренним радиусом r_* — p_* и внешним радиусом $r_* + p_*$).

Допущение а фактически уже применялось раньше, когда речь шла о симметрии частицы и когда производилось интегрирование по всем направляющим ортам осей лучей, допущение б использовано в разд. 15.

Теорема 16.1. Если при некотором расположении частицы в пространстве M через точку $x \in M$, находящуюся в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* , проходит винтовая нить радиуса r_0 какого-либо луча частицы, то через эту точку проходят нити радиуса r_0 и других лучей частицы. Оси всех таких лучей образуют коническую поверхность с вершиной в центре частицы. При этом оси наклонены по отношению к оси симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ на один и тот же угол φ , удовлетворяющий зависимости

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{l_x - l}, \quad (16.3)$$

где $r = |Cx|$; $r > r_0 > 0$; $l_x > l$; $\varphi > 0$ (значения символов C , l_x , l и Γ_x объяснены выше; см. рис. 16.1). Для всех указанных осей расстояние $|Q|$

между центром частицы и точкой пересечения оси с гиперплоскостью Γ_{l_x} одинаково. Направляющие орты $\mathbf{a}_0$ всех указанных осей имеют одинаковые составляющие вдоль оси симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$. Составляющие этих ортов вдоль гиперплоскости Γ_{l_x} имеют началом точку C и располагаются в Γ_{l_x} вдоль всех образующих круговой конической поверхности с вершиной в C , осью Cx и углом полураствора

$$\rho_0 = \arcsin \frac{r_0}{r} \quad \left(\rho_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (16.4)$$

Доказательство. Пусть частица и точка x расположены так, как указано в условии теоремы, то есть точка x находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* и имеется луч, у которого винтовая нить радиуса r_0 проходит через x . Обозначим: O — точка пространства M , в которой находится центр частицы; A — точка пересечения оси данного луча с гиперплоскостью Γ_{l_x} , проходящей через точку x и ортогональной оси симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ (см. рис. 16.1).

Согласно теореме 15.1 (с. 541), сечение любого луча гиперплоскостью, ортогональной оси симметрии частицы, является поперечным сечением луча. Следовательно, отрезок Ax , лежащий в сечении луча гиперплоскостью Γ_{l_x} , ортогонален оси луча OA , и поэтому его длина равна радиусу r_0 винтовой нити, проходящей через x , то есть $Ax \perp OA$ и $|Ax| = r_0$. Кроме того, $Ax \perp OC$ (ибо $Ax \in \Gamma_{l_x}$, $OC \in T$ и $\Gamma_{l_x} \perp T$). Из ортогональности отрезка Ax прямым OA и OC вытекает ортогональность его всей плоскости, содержащей эти прямые. Значит, $Ax \perp CA$. Отсюда заключаем, что треугольник CAx , лежащий в Γ_{l_x} , — прямоугольный. Так как гиперплоскость Γ_{l_x} пространственноподобная, то в ней выполняется теорема Пифагора. Применяя ее к треугольнику CAx , получаем:

$$r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2}, \quad (16.5)$$

где $r_A = |CA|$; $r = |Cx|$; учтено, что $|Ax| = r_0$.

Поскольку данный результат относится к любому лучу, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x , то для каждого такого луча треугольник с вершинами в точках C , x и в точке пересечения оси луча с Γ_{l_x} обладает теми же свойствами. А именно, он является прямоугольным, его гипотенуза Cx имеет длину r и катеты имеют длины r_0 и r_A . Из этого следует, что все такие треугольники равны. А так как эти треугольники имеют общую гипотенузу Cx , то их вершины, противоположные гипотенузе, лежат на окружности, которую «замечет» вершина A треугольника CAx , если его вращать внутри Γ_{l_x} вокруг

гипотенузы Cx . Покажем, что каждая точка этой окружности служит точкой пересечения с Γ_x оси луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через x .

Рассмотрим для произвольной точки P данной окружности треугольник OSP (одним из них является треугольник OCA на рис. 16.1). Все эти треугольники имеют общую сторону OC , и для всех них выполняются зависимости $CP \perp OC$ (так как $CP \in \Gamma_x$, $OC \in T$ и $\Gamma_x \perp T$) и $|CP| = |CA|$ (потому что окружность получена вращением треугольника CAx вокруг его стороны Cx). Отсюда вытекает, что все треугольники OSP одинаковы. Один из них — треугольник OCA — имеет времениподобную сторону OA (так как она лежит на оси луча), значит, в каждом треугольнике OSP соответствующая сторона OP является времениподобной. В силу допущения о непрерывности множества осей лучей, заключаем из этого, что для любой точки P прямая, направленная вдоль стороны OP треугольника OSP , представляет собой ось некоторого луча, причем эта ось пересекает гиперплоскость Γ_x в точке P . Для всех таких лучей выполняется $|Px| = |Ax| = r_0$ (по построению окружности) и $Px \perp OP$ (по следствию к теореме 15.1, с. 541, ибо $Px \subset \Gamma_x$). Это означает, что для каждого такого луча точка x лежит на цилиндрической поверхности радиуса r_0 , ось которой совпадает с осью луча. Отсюда и из допущения о непрерывности множества нитей вытекает, что у каждого такого луча найдется нить радиуса r_0 , которая проходит через точку x .

Итак, мы доказали следующее. Если имеется один луч, нить которого радиуса r_0 проходит через точку x , то имеются и другие такие же лучи. Оси всех этих лучей пересекают гиперплоскость Γ_x в точках упомянутой выше окружности, причем через каждую точку окружности проходит ось какого-то из таких лучей.

На основании данного результата заключаем, что оси указанных лучей образуют в совокупности, как и утверждается в теореме, коническую поверхность с вершиной в центре частицы (ибо все они пересекаются в центре частицы). При этом каждая из осей направлена вдоль стороны OP соответствующего треугольника OSP , а ось симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ направлена вдоль общей стороны OC этих треугольников. Выше было доказано, что все треугольники OSP одинаковы. Поэтому их углы при вершине O равны. Следовательно, все рассматриваемые оси наклонены по отношению к оси симметрии частицы на один и тот же угол φ . Из свойств треугольника OCA , являющегося одним из треугольников OSP , вытекает (благодаря $CA \perp OC$), что $\operatorname{th} \varphi = |CA|/|OC| = r_A/(l_x - l)$. Отсюда с учетом (16.5) получаем тре-

буемую зависимость (16.3): $\text{th } \varphi = \sqrt{r^2 - r_0^2} / (l_x - l)$ (здесь $r > r_0 > 0$, поскольку r и r_0 — длины соответственно гипотенузы Cx и катета Ax треугольника CAx ; $l_x > l$ по (16.2); из $r > r_0$, $l_x > l$ и (16.3) следует $\varphi > 0$). Равенство всех треугольников OCP влечет для всех лучей равенство расстояний между центром частицы O и точкой P пересечения оси луча с гиперплоскостью Γ_x (на рис. 16.1 это расстояние равно $|Q|$, в разд. 15 оно обозначалось также буквой R , см. (15.18), с. 544).

В связи с тем, что оси всех рассматриваемых лучей наклонены по отношению к оси симметрии частицы на один и тот же угол, направляющие орты $\mathbf{q}_0$ этих осей имеют одинаковые составляющие вдоль оси симметрии. Составляющие ортов $\mathbf{q}_0$ вдоль гиперплоскости Γ_x лежат на сторонах CP треугольников OCP (потому что $\mathbf{q}_0 \in OP$ и CP есть ортогональная проекция отрезка OP на Γ_x). Добавим к этому, что все орты $\mathbf{q}_0$ имеют начало в центре частицы, что точка P «пробегает» всю упомянутую выше окружность и что плоскость залегания этой окружности ортогональна прямой Cx (так как окружность образована вращением вершины A треугольника CAx вокруг его стороны Cx). Отсюда заключаем, что составляющие векторов $\mathbf{q}_0$ вдоль гиперплоскости Γ_x имеют начало в точке C и располагаются в Γ_x вдоль всех образующих круговой конической поверхности с вершиной в точке C и осью Cx . Образующими этой конической поверхности служат отрезки CP , а направляющей — упомянутая окружность. Из свойств треугольников CPx , одинаковых для всех P и равных треугольнику CAx , следует, что угол полураствора ρ_0 данной конической поверхности совпадает с углом ACx (см. рис. 16.1). А так как треугольник CAx — прямоугольный и в нем $|Ax| = r_0$ и $|Cx| = r$, то угол ACx и вместе с ним угол ρ_0 равны $\arcsin(r_0/r)$, причем из $r > r_0 > 0$ вытекает $\rho_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Значит, верна зависимость (16.4). Этим доказательство завершается. ■

Выше речь шла о фиксированном положении частицы в пространстве M . Теперь рассмотрим движущуюся частицу. Ограничимся исследованием случая, когда частица движется вдоль прямолинейной мировой линии L , совпадающей с осью симметрии частицы, и одновременно вращается вокруг L с постоянной угловой скоростью. Уточним характеристики этого движения частицы.

Прямолинейность мировой линии L и совпадение ее с осью симметрии частицы означают выполнение условия

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{i} = \text{const}, \quad (16.6)$$

где $\mathbf{i}_L$ и $\mathbf{i}$ — направляющие орты соответственно мировой линии L и оси симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$.

Вращение частицы с постоянной угловой скоростью подразумевает наличие неподвижной псевдоевклидовой плоскости и ортогональной к ней инвариантной пространственноподобной плоскости (в первой плоскости векторы не меняются, а во второй плоскости векторы остаются в ней). Можно сказать, что вращение происходит *вокруг* неподвижной плоскости. Зададим эти плоскости.

Зафиксируем некоторый мнимоединичный вектор $\mathbf{a}$, ортогональный вектору $\mathbf{i}$ и имеющий начало в центре частицы:

$$\mathbf{a} = \text{const}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (16.7)$$

При условиях (16.6) и (16.7) псевдоевклидова плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ является неподвижной. Будем считать, что вращение частицы происходит вокруг нее. При этом инвариантной пространственноподобной плоскостью служит $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$.

Воспользуемся введенной в начале раздела инерциальной системой отсчета $\{T, G\}$ с осью времени $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и ортогональным оси T координатным физическим пространством $G = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$. Поскольку мы рассматриваем случай $L = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, то ось времени и мировая линия совпадают: $T = L$.

Так как $\mathbf{a} \perp \mathbf{i}$ и $G = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, то $\mathbf{a} \in G$. Поэтому изнутри физического пространства G указанное движение частицы воспринимается как вращение вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр частицы и направлена вдоль вектора $\mathbf{a}$. Назовем ее *осью вращения* частицы. Вектор $\mathbf{a}$ — ее направляющий орт. *Угловая скорость* такого вращения частицы есть псевдовектор

$$\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a} \quad (\bar{\Omega} \in G), \quad (16.8)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в G ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах, и $\Delta = -1$ в левоориентированных базисах); $\Omega = |\bar{\Omega}|$ — скалярная величина, тоже называемая угловой скоростью вращения частицы (она имеет размерность угловой скорости $(\text{время})^{-1}$; $\Omega \geq 0$). Угловая скорость $\bar{\Omega}$ рассчитывается в инерциальной системе отсчета $\{T, G\}$.

Постоянство угловой скорости означает выполнение условия

$$\bar{\Omega} = \text{const} \quad (\text{отсюда } \Omega = \text{const}). \quad (16.9)$$

Из совпадения оси времени и мировой линии ($T = L$) следует, что собственное время частицы и координатное время могут различаться лишь на постоянную величину. Примем, что они совпадают и обозначим их единым символом l (при измерении времени в единицах длины)

или символом t (при измерении времени в единицах времени). Величины l и t связаны равенством

$$l = ct. \quad (16.10)$$

Подчеркнем, что символ l означает здесь текущее значение временной координаты (в отличие от принимавшегося ранее условия, что l — фиксированный момент времени). При движении частицы вдоль мировой линии L движутся вместе с ней ее собственное физическое пространство Γ_* и совпадающее с ним координатное физическое пространство Γ (оба ортогональны L и проходят через центр частицы).

Расположение гиперплоскости Γ , соответствующее конкретному моменту времени l , будем помечать индексом l : Γ_l .

Далее считается, что точка наблюдения x фиксирована и $x \notin T$. В силу фиксированности точки x и оси T , фиксированы временная координата l_x точки x и гиперплоскость Γ_{l_x} , содержащая x (см. рис. 16.1).

Инерциальность системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ означает, что все положения координатного физического пространства Γ не просто параллельны между собой, но являются результатом *поступательного* перемещения Γ вдоль оси времени T . Из этого следует, что векторное пространство, ассоциированное с Γ , представляет собой при любом положении Γ одно и то же подпространство векторного пространства, ассоциированного с M . Поэтому все векторы, заданные в Γ при каком-либо одном его положении, фактически принадлежат и любому другому его положению. Можно сказать, что векторы переносятся вместе с Γ параллельным сдвигом вдоль оси T (в частности, $\mathbf{a} \in \Gamma_l$ при всех l , в том числе $\mathbf{a} \in \Gamma_{l_x}$). В последующем, пользуясь этим свойством системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, мы будем неоднократно переносить векторы из одного положения Γ в другое (не всегда ссылаясь на данное свойство).

Обозначим: $C = \Gamma_{l_x} \cap T$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$ ($\mathbf{r} \in \Gamma_{l_x}$), $r = |\mathbf{r}|$ (см. рис. 16.1).

Угол γ между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ задается любым из равенств

$$\cos \gamma = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r} \quad \text{или} \quad \gamma = \arccos\left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r}\right), \quad (16.11)$$

где учтено, что $\mathbf{a} \in \Gamma_{l_x}$ и что $|\mathbf{a}| = 1$ в силу (16.7); знак минус обусловлен отрицательной определенностью метрической формы в Γ (см. формулу (3.3) в главе 2, с. 38). Будем считать, без ущерба для дальнейшего, что точка x не лежит на оси вращения частицы. Тогда $\mathbf{r} \nparallel \mathbf{a}$ и $\gamma \in (0, \pi)$. Фиксированность точки наблюдения x , оси времени T и гиперплоскости Γ_{l_x} означает фиксированность точки C , что влечет $\mathbf{r} = \text{const}$ и $r = \text{const}$. Отсюда и из постоянства $\mathbf{a}$ вытекает $\gamma = \text{const}$.

Для того, чтобы вычислить собственное поле частицы F_s в точке наблюдения x , построим в пространстве Минковского M неподвижный базис и разложим по этому базису векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$, определяющие поле F_s (см. формулу (14.4), с. 535).

В связи с тем, что при рассматриваемом движении частицы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$ остаются неизменными, зададим орты базиса с помощью этих векторов. Это упростит последующие расчеты.

Начнем с того, что введем в гиперплоскости Γ_x , проходящей через точку x , ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ с началом в точке C и ортами

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \mathbf{a}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}, \quad (16.12)$$

где $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения частицы ($\mathbf{a} \in \Gamma_x$); $\times$ — знак векторного умножения в Γ_x (предполагается, что эта операция определена по правилу правого винта; вследствие этого, $\mathbf{a}_2$ — вектор, а не псевдовектор); $\sin \gamma \neq 0$, так как $\gamma \in (0, \pi)$. Легко убедиться в том, что $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \subset \Gamma_x$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = -1$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$). Значит, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — действительно ортонормированный правоориентированный базис в Γ_x . Отметим, что, благодаря постоянству величин $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}$, r и γ , векторы $\mathbf{a}_i$ не зависят от движения частицы. Отсюда и из фиксированности точки C , являющейся началом базиса, следует, что базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ неподвижный (рис. 16.2).

Из (16.12) вытекает равенство

$$\mathbf{r} = r(\sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3). \quad (16.13)$$

Векторы $\mathbf{a}_i$ специально выбраны такими, чтобы выполнялось равенство (16.13). Напомним, что $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$ и $r = |\mathbf{r}|$ (см. рис. 16.1).

Введем в пространстве M неподвижный ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ с началом в точке C , где $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы; $\mathbf{a}_i$ — векторы, определяемые зависимостями (16.12). Назовем этот базис *абсолютным*. Именно через его орты будем выражать все векторные и тензорные величины.

Нам потребуются два вспомогательных базиса.

Один из них — ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ с началом в точке C , вращающийся, как и частица, с угловой скоростью Ω вокруг плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$. Его мнимое единичные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \cos(\Omega t) \mathbf{a}_1 + \sin(\Omega t) \mathbf{a}_2; \\ \mathbf{b}_2 &= -\sin(\Omega t) \mathbf{a}_1 + \cos(\Omega t) \mathbf{a}_2; \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (16.14)$$

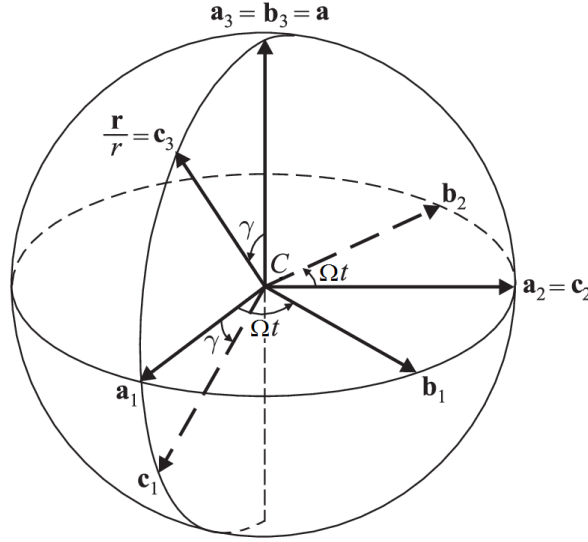


Рис. 16.2. Ортонормированные базисы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ и $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ в физическом пространстве Γ_{l_x} .

где $t = l/c$ — временная координата центра частицы, она совпадает с собственным временем частицы t_* (см. сказанное перед (16.10)). Здесь в качестве аргумента при синусе и косинусе взято произведение Ωt , а не Ωl , так как мы приняли ранее, что величина Ω имеет обычную размерность угловой скорости. Очевидно, что $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ — ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} (см. рис. 16.2).

Вторым вспомогательным базисом служит неподвижный (относительно M) ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ с началом в точке C и мнимоединичными векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \cos \gamma \mathbf{a}_1 - \sin \gamma \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{a}_2; \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3, \end{aligned} \tag{16.15}$$

где использовано равенство (16.13); γ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$, задаваемый равенствами (16.11). Легко проверить, что $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ — тоже ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} . Он повернут относительно базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ вокруг вектора $\mathbf{a}_2$ на угол γ (см. рис. 16.2).

Выведем формулы, которые помогут разложить по абсолютному базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$, определяющие собственное поле частицы F_s . В разд. 11 эти векторы выражены через единичные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$. Применяя равенство (11.20):

$$\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}, \quad (16.16)$$

можно выразить векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ через векторы ортонормированного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ (φ — угол между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$). Поэтому для разложения векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ по абсолютному базису нужно разложить по этому базису векторы $\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$. А так как вектор $\mathbf{i}$ является одним из векторов абсолютного базиса и он ортогонален векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$, то фактически требуется разложить в Γ_x векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$ по базису $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

Отметим, что мы заменили в равенстве (16.16) символ $\mathbf{e}_3$, фигурирующий в (11.20), символом $\mathbf{n}$. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть, что обозначаемый этим символом вектор направлен в Γ_* по нормали к поперечному сечению луча. Символ $\mathbf{n}$ неоднократно был использован ранее в этом равенстве — см. в разд. 5 формулы (5.7), (5.29) и рис. 5.1, 5.5 (с. 425, 437) и в разд. 12 формулу (12.17) (с. 516).

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$ введены в разд. 11 на основе следующих *условий*: α) их начала находятся в центре частицы; β) векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют ортонормированный базис в плоскости $\operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, в которой лежит поперечное сечение луча; γ) вектор $\mathbf{n}$ обеспечивает выполнение равенства (16.16); δ) базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ скреплен с остовом частицы (см. с. 494 и 504). Напомним, что для всех лучей базисы $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ должны иметь одинаковую ориентацию (см. в разд. 11 условие a , с. 495).

Выше упомянуто, что $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ является ортонормированным базисом и что вектор $\mathbf{n}$ направлен по нормали к поперечному сечению луча. Докажем, что эти свойства векторов вытекают из условий β и γ .

Доказательство. Из условия γ , то есть из равенства (16.16), находим:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\operatorname{sh} \varphi} \mathbf{q}_0 - \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\operatorname{sh} \varphi} \mathbf{i} \quad (\operatorname{sh} \varphi \neq 0, \text{ так как } \varphi \neq 0).$$

Отсюда с учетом $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и $\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi$ получаем:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

значит, вектор $\mathbf{n}$ мнимоединичный и лежит в собственном физическом пространстве частицы $\Gamma_* = \operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ ($\mathbf{n} \in \Gamma_*$).

Наличие линейной зависимости (16.16) между векторами $\mathbf{i}, \mathbf{q}_0$ и $\mathbf{n}$ означает, что $\mathbf{n} \in \operatorname{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Отсюда и из $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ заключаем, что $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_2$. Эти свойства вектора $\mathbf{n}$ вместе с $|\mathbf{n}| = 1, \mathbf{n} \in \Gamma_*$

и условием β приводят к выводу, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ — ортонормированный базис в физическом пространстве Γ_* и что вектор $\mathbf{n}$ направлен по нормали к поперечному сечению луча (потому что $\mathbf{n} \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, а поперечное сечение луча лежит в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = \text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$). Добавление к векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$ ортогонального к ним вектора $\mathbf{i}$ дает ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$. ■

Таким образом, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$, от которых зависят $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$, должны удовлетворять условиям α – δ и должны образовывать ортонормированный базис в физическом пространстве частицы Γ_* . При этом векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$ могут быть разными для разных лучей частицы. Построим такие векторы. Принимая во внимание, что при рассматриваемом движении частицы имеет место равенство $\Gamma_* = \Gamma$ и что векторное пространство, ассоциированное с Γ , одинаково для всех положений Γ , будем строить эти векторы в гиперплоскости Γ_x , проходящей через точку наблюдения x . Начала векторов поместим, в соответствии с условием α , в точке $C = \Gamma_x \cap T$, в которой центр частицы находится в момент t_x .

Сначала зададим вектор $\mathbf{n}$. Из (16.16) и $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$ вытекает, что $\text{sh } \varphi \mathbf{n}$ является составляющей вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль физического пространства $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ (можно считать, что вдоль Γ_x), причем, вследствие $\varphi > 0$, вектор $\mathbf{n}$ служит направляющим ортом этой составляющей. Согласно исходным положениям модели, оси лучей частицы проходят через центр частицы и равномерно распределены по внутренности светового конуса с вершиной в центре частицы. Поэтому начала направляющих ортов осей $\mathbf{q}_0$ находятся в центре частицы, а их концы равномерно распределены по единичной псевдосфере с центром в центре частицы (точнее, по той ее доле, которая принадлежит внутренности светового конуса будущего). Отсюда и из того, что вектор $\mathbf{n}$ является направляющим ортом составляющей вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль Γ_x , заключаем, что начала векторов $\mathbf{n}$ для всех лучей частицы находятся в точке C , а их концы равномерно распределены в Γ_x по единичной сфере с центром в C . Значит, вектор $\mathbf{n}$ может быть задан как радиус-вектор точек этой сферы.

Воспользуемся вращающимся базисом $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ с началом в точке C (рис. 16.3). Пусть θ и η — угловые координаты вектора $\mathbf{n}$ в этом базисе, а именно θ — угол между $\mathbf{b}_3$ и $\mathbf{n}$; η — угол между $\mathbf{b}_1$ и проекцией $\mathbf{n}$ на плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, отсчитываемый от $\mathbf{b}_1$ в направлении к $\mathbf{b}_2$; $\theta \in [0, \pi]$; $\eta \in [0, 2\pi)$. В таком случае имеем следующее представление вектора $\mathbf{n}$ в базисе $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \eta \mathbf{b}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{b}_2 + \cos \theta \mathbf{b}_3; \quad (16.17)$$

эта формула позволяет задать любое положение вектора $\mathbf{n}$ в Γ_x .

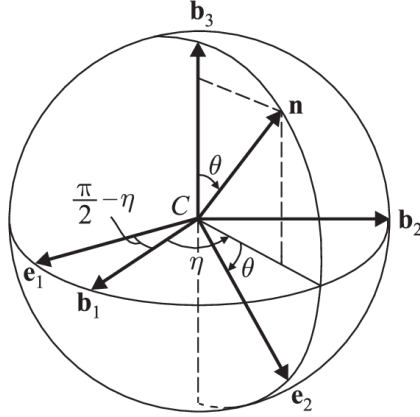


Рис. 16.3. Векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в базисе $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Теперь зададим векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие вместе с вектором $\mathbf{n}$ ортонормированный базис в Γ_{l_x} .

В соответствии с условиями $\alpha - \delta$ (с. 576), в качестве векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ могут быть приняты любые два единичных взаимно ортогональных вектора в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, имеющие начала в центре частицы и скрепленные с остовом частицы. Чтобы удовлетворить этим условиям, выразим векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, как и вектор $\mathbf{n}$, через векторы базиса $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, вращающегося вместе с частицей. Для удобства, зададим их так, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ был правоориентированным.

Итак, примем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \sin \eta \mathbf{b}_1 - \cos \eta \mathbf{b}_2; \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \theta \cos \eta \mathbf{b}_1 + \cos \theta \sin \eta \mathbf{b}_2 - \sin \theta \mathbf{b}_3; \end{aligned} \quad (16.18)$$

нетрудно убедиться при помощи (16.17), (16.18) и рис. 16.3 в том, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ — ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} .

Формулы (16.17) и (16.18) служат разложениями векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не только по базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, но и по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ (с нулевыми составляющими вдоль направления вектора $\mathbf{i}$).

Поскольку базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ вращается относительно пространства M точно так же, как рассматриваемая частица, то движение частицы представляет собой по отношению к этому базису поступательное перемещение вдоль прямой $L = T = Lin\{\mathbf{i}\}$. Следовательно, в данном базисе угловые координаты θ и η вектора $\mathbf{n}$ не зависят от движения частицы. Это означает, что в правых частях формул (16.17) и (16.18) от времени t зависят только векторы самого базиса.

Подставим в формулы (16.17) и (16.18) значения векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ из (16.14). После очевидных преобразований получаем разложение векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ по абсолютному базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \sin \theta \sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2 + \cos \theta \mathbf{a}_3; \quad (16.19)$$

$$\mathbf{e}_1 = \sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 - \cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2; \quad (16.20)$$

$$\mathbf{e}_2 = \cos \theta \cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \cos \theta \sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2 - \sin \theta \mathbf{a}_3; \quad (16.21)$$

эти векторы имеют нулевые компоненты вдоль направления вектора $\mathbf{i}$.

На основании равенств (16.16) и (16.19) находим разложение вектора $\mathbf{q}_0$ по этому же базису:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 = & \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \\ & + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2 + \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (16.22)$$

В разд. 11 выведено уравнение винтовой нити. Для непереориентированной нити это уравнение (11.19). Для переориентированной нити — уравнение (11.36). В дальнейшем нам потребуются оба уравнения. Они различаются только знаком составляющей радиуса-вектора $\mathbf{R}$, направленной вдоль вектора $\mathbf{e}_2$. Чтобы учесть оба случая, но не выписывать дважды похожие уравнения, поступим следующим образом. Приведем уравнение для непереориентированной нити, а над тем знаком в уравнении, который в случае переориентированной нити должен быть изменен на противоположный, поставим символ $\bullet$.

Уравнение нити (11.19) задает радиус-вектор $\mathbf{R}$ элемента нити N в момент времени l относительно точки $O(l_0)$, в которой центр частицы находился в некоторый начальный момент времени l_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = & \mathbf{U}_O(l) + r_0 \cos(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_1(l) + \\ & + r_0 \sin(\chi(l) + \psi) \mathbf{e}_2(l) + Q(l) \mathbf{q}_0(l); \end{aligned} \quad (16.23)$$

здесь и в последующих формулах символ $\bullet$ означает, что для перехода к случаю переориентированной нити нужно изменить знаки, над которыми он стоит, на противоположные (+ на −, ± на ∓ и наоборот).

Перечислим обозначения, использованные в (16.23): $\mathbf{U}_O(l)$ — вектор перемещения центра частицы за промежуток времени $l - l_0$ (см. рис. 11.1 и 11.2, с. 486 и 489); r_0 — радиус винтовой нити; χ — угловая переменная, она характеризует вращение луча вокруг его оси с постоянной угловой скоростью ω и описывается формулой (11.16):

$$\chi(l) = \chi(l_0) + \frac{\omega}{c}(l - l_0); \quad (16.24)$$

$\chi(l_0)$ — начальное значение угла χ (оно не влияет на последующие результаты); ψ — винтовая переменная, индивидуализирующая элемент нити (см. рис. 10.2 на с. 466 и пояснение к формуле (10.2) на с. 467); $Q\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q} = \overrightarrow{OA}$ — вектор, соединяющий центр частицы $O(l)$ с элементом оси луча A , находящемся в том же поперечном сечении луча, что и рассматриваемый элемент нити; $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча; согласно (11.27) и (11.33),

$$Q(l) = q(l - l_0) \pm \frac{r_0 \psi}{\beta_0}; \quad (16.25)$$

q — параметр, характеризующий движение луча вдоль своей оси; знак перед последним слагаемым в (16.25) определяется правилом выбора знака (см. разд. 10, с. 467); β_0 — параметр, связанный с шагом нити P и радиусом нити r_0 зависимостью (13.18): $P = \frac{2\pi r_0}{\beta_0}$; $|Q(l)|$ — расстояние между центром частицы O и элементом оси луча A в момент времени l .

Мы рассматриваем ситуацию, когда центр частицы движется вдоль прямолинейной мировой линии L с направляющим вектором $\mathbf{i}$. В этом случае перемещение $\mathbf{U}_O(l)$ центра частицы за время $l - l_0$ равно $(l - l_0)\mathbf{i}$. Подстановка этого значения $\mathbf{U}_O(l)$ в (16.23) дает:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = (l - l_0)\mathbf{i} + r_0 \cos(\chi(l) + \psi)\mathbf{e}_1(l) + \\ + r_0 \sin(\chi(l) + \psi)\mathbf{e}_2(l) + Q(l)\mathbf{q}_0(l). \end{aligned} \quad (16.26)$$

Здесь первое и последнее слагаемые лежат в плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, а второе и третье — в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Эти плоскости взаимно ортогональны (так как $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$), поэтому сумма второго и третьего слагаемых является составляющей радиуса-вектора $\mathbf{R}$ вдоль плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Обозначим эту составляющую символом $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{r}_0(l) = r_0 [\cos \nu(l) \mathbf{e}_1(l) + \sin \nu(l) \mathbf{e}_2(l)], \quad (16.27)$$

где

$$\nu(l) = \chi(l) + \psi. \quad (16.28)$$

Из (16.20), (16.21) и (16.27) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 = r_0 \{ [\cos \nu \sin(\Omega t + \eta) + \sin \nu \cos \theta \cos(\Omega t + \eta)] \mathbf{a}_1 + \\ + [-\cos \nu \cos(\Omega t + \eta) + \sin \nu \cos \theta \sin(\Omega t + \eta)] \mathbf{a}_2 - \\ - \sin \nu \sin \theta \mathbf{a}_3 \}. \end{aligned} \quad (16.29)$$

Вычислим производные векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$ по времени l . При построении модели было принято, что угол φ между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ не меняется при движении частицы, то есть он не зависит от l . Величины θ и η , в соответствии со сказанным выше, тоже не зависят от l . Не меняются с изменением l также угловая скорость Ω и абсолютный базис. Поэтому из (16.20) – (16.22) с учетом $t = l/c$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dl} = \frac{\Omega}{c} [\cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2]; \quad (16.30)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dl} = \frac{\Omega}{c} \cos \theta [-\sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2]; \quad (16.31)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta [-\sin(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \cos(\Omega t + \eta) \mathbf{a}_2]. \quad (16.32)$$

Формулы (16.19) – (16.32) выполняются для всех лучей частицы.

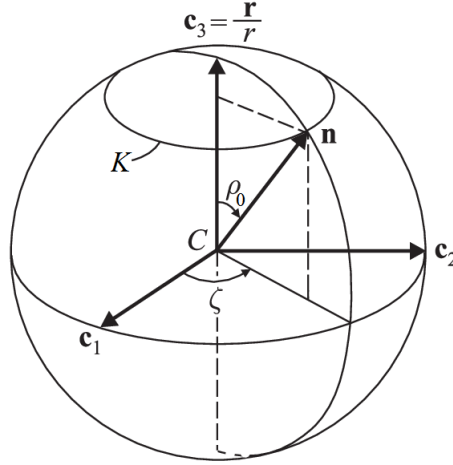
Далее нас будут интересовать те лучи, нити которых проходят через точку наблюдения x . Согласно теореме 16.1, направляющие векторы $\mathbf{q}_0$ осей таких лучей обладают следующим свойством. Их составляющие вдоль гиперплоскости Γ_x имеют начала в точке C и располагаются вдоль образующих круговой конической поверхности с вершиной в точке C , осью Cx и углом полураствора ρ_0 вида (16.4). Направляющими ортами этих составляющих, как отмечено выше, служат векторы $\mathbf{n}$. Следовательно, у интересующих нас лучей векторы $\mathbf{n}$ направлены вдоль образующих этой конической поверхности. Воспользуемся для описания данного свойства векторов $\mathbf{n}$ базисом $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, введенным равенствами (16.15).

Пусть вектор $\mathbf{n}$ имеет в базисе $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ угловые координаты ρ и ζ (рис. 16.4): ρ — угол между $\mathbf{c}_3$ и $\mathbf{n}$ ($\rho \in [0, \pi]$), ζ — угол между $\mathbf{c}_1$ и проекцией $\mathbf{n}$ на плоскость $\operatorname{Lin}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, отсчитываемый от $\mathbf{c}_1$ в направлении к $\mathbf{c}_2$; обычно в такой ситуации принимается, что $\zeta \in [0, 2\pi)$, но нам будет удобнее считать, что $\zeta \in (-\pi, \pi]$.

Угловая координата ζ есть та самая величина, которая фигурирует в выражении (14.4) для собственного поля частицы F_s (с. 535).

Из сказанного ранее следует, что: $\mathbf{c}_3 = \mathbf{r}/r$, вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$ лежит на оси упомянутой выше конической поверхности и векторы $\mathbf{n}$ рассматриваемых лучей направлены вдоль образующих этой конической поверхности. Отсюда заключаем, что все такие векторы $\mathbf{n}$ наклонены по отношению к вектору $\mathbf{c}_3$ на угол ρ , равный углу ρ_0 полураствора конической поверхности ($\rho = \rho_0$), см. рис. 16.4. Поэтому можем записать:

$$\mathbf{n} = \sin \rho_0 \cos \zeta \mathbf{c}_1 + \sin \rho_0 \sin \zeta \mathbf{c}_2 + \cos \rho_0 \mathbf{c}_3. \quad (16.33)$$

Рис. 16.4. Вектор $\mathbf{n}$ в базисе $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

При фиксированной угловой координате $\rho = \rho_0$ и координате ζ , меняющейся от $-\pi$ до π , конец вектора $\mathbf{n}$ «пробегает» окружность K .

Подставляя в (16.33) значения векторов $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$ из (16.15), получаем еще одно разложение вектора $\mathbf{n}$ по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = & (\sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma) \mathbf{a}_1 + \sin \rho_0 \sin \zeta \mathbf{a}_2 + \\ & + (-\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \cos \gamma) \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (16.34)$$

Выражения (16.19) и (16.34), благодаря единственности разложения вектора по базису, приводят к зависимостям

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \cos \gamma; \\ \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \rho_0 \sin^2 \gamma \cos^2 \zeta + \\ &+ 2 \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma; \end{aligned} \quad (16.35)$$

$$\sin \theta \sin(\Omega t + \eta) = \sin \rho_0 \sin \zeta;$$

$$\sin \theta \cos(\Omega t + \eta) = \sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma,$$

где углы ρ_0 и γ задаются формулами (16.4) и (16.11); $\zeta \in (-\pi, \pi]$.

Рассмотрим частицу в некоторый момент l_* ее собственного времени (это означает, что центр частицы находится в точке мировой линии с временной координатой l_*). Поскольку мы исследуем движение

частицы вдоль прямолинейной мировой линии L , совпадающей с осью времени T , то мы приняли, что собственное время частицы и ее координатное время совпадают: $l_* = l$ (см. текст перед (16.10)). Пусть при этом расположении частицы имеется луч, нить которого проходит через точку наблюдения x . Обозначим: N — элемент нити, находящийся в этот момент в точке x ; $\mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l))$ — радиус-вектор элемента N относительно точки $O(l_0)$, в которой центр частицы находился в начальный момент времени l_0 ; $\mathbf{R}_{O(l)}(N(l))$ — радиус-вектор этого же элемента N относительно точки $O(l)$, в которой центр частицы находится в момент времени l . Так как центр частицы движется вдоль мировой линии $L = T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и l — натуральный параметр на T , то

$$\mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = (l - l_0)\mathbf{i} + \mathbf{R}_{O(l)}(N(l)).$$

Вновь обратимся к рис. 16.1 (с. 567). На нем радиусу-вектору $\mathbf{R}_{O(l)}$ соответствует вектор $\overrightarrow{Ox}$, поэтому

$$\mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = (l - l_0)\mathbf{i} + \overrightarrow{Ox}.$$

Из рисунка видно, что $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Ax} = Q\mathbf{q}_0 + \overrightarrow{Ax}$, значит,

$$\mathbf{R}_{O(l_0)}(N(l)) = (l - l_0)\mathbf{i} + \overrightarrow{Ax} + Q\mathbf{q}_0. \quad (16.36)$$

Сравнение равенств (16.26) и (16.36) при учете (16.27) дает:

$$\overrightarrow{Ax} = \mathbf{r}_0. \quad (16.37)$$

На рис. 16.1 $\mathbf{q}_0 \in OA$. А так как $OC \perp l_x$, то составляющая вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль l_x лежит на CA . Направляющим ортом этой составляющей, как указывалось, является вектор $\mathbf{n}$, следовательно, $\mathbf{n} \in CA$, причем $\mathbf{n}$ имеет начало в точке C и направлен от C к A . Поэтому $\overrightarrow{CA} = r_A\mathbf{n}$, где $r_A = |CA|$. Согласно (16.5), $r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2}$. Отсюда и из очевидной зависимости $\overrightarrow{Ax} = \overrightarrow{Cx} - \overrightarrow{CA}$, учитывая равенства $\overrightarrow{CA} = r_A\mathbf{n}$ и (16.37), а также принятое ранее обозначение $\overrightarrow{Cx} = \mathbf{r}$, имеем

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \sqrt{r^2 - r_0^2} \mathbf{n} = \mathbf{r} - r \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \mathbf{n}. \quad (16.38)$$

Из (16.4) вытекают равенства

$$\sin \rho_0 = \frac{r_0}{r}; \quad \cos \rho_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}; \quad r_0 = r \sin \rho_0. \quad (16.39)$$

Подстановка в (16.38) значений векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ из (16.13) и (16.34) при учете (16.39) дает разложение вектора $\mathbf{r}_0$ по абсолютному базису:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 = r \{ & [\sin \gamma - \sin \rho_0 \cos \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \sin \gamma] \mathbf{a}_1 - \\ & - \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \zeta \mathbf{a}_2 + \\ & + [\cos \gamma + \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \cos \gamma] \mathbf{a}_3 \}. \end{aligned} \quad (16.40)$$

Докажем, что, приравнявая разложения (16.29) и (16.40) вектора $\mathbf{r}_0$ и пользуясь формулами (16.35) и (16.39), можно получить следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \dot{+} \sin \theta \sin \nu &= -\cos \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \sin \rho_0 \cos \gamma; \\ \sin \theta \cos \nu &= \sin \gamma \sin \zeta. \end{aligned} \quad (16.41)$$

Формулы (16.35) и (16.41) позволяют выразить угловые переменные θ , $\Omega t + \eta$ и ν через углы ρ_0 и γ , имеющие значения (16.4) и (16.11), и угол $\zeta \in (-\pi, \pi]$.

Доказательство формул (16.41). Приравняем соответственные компоненты вектора $\mathbf{r}_0$ в разложениях (16.29) и (16.40). Заменяя величину r_0 ее значением из (16.39), получаем равенства

$$\begin{aligned} \sin \gamma - \sin \rho_0 \cos \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \sin \gamma &= \\ = \sin \rho_0 \cos \nu \sin(\Omega t + \eta) + \sin \rho_0 \sin \nu \cos \theta \cos(\Omega t + \eta); \end{aligned} \quad (16.42)$$

$$\begin{aligned} -\sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \zeta &= \\ = -\sin \rho_0 \cos \nu \cos(\Omega t + \eta) + \sin \rho_0 \sin \nu \cos \theta \sin(\Omega t + \eta); \end{aligned} \quad (16.43)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma + \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \cos \gamma &= \\ = -\sin \rho_0 \sin \nu \sin \theta. \end{aligned} \quad (16.44)$$

Подстановка в (16.44) на место $\cos^2 \rho_0$ разности $1 - \sin^2 \rho_0$ позволяет избавиться от слагаемого $\cos \gamma$. Последующее сокращение обеих частей равенства на $\sin \rho_0$ дает:

$$\dot{+} \sin \theta \sin \nu = -\cos \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \sin \rho_0 \cos \gamma; \quad (16.45)$$

это выражение доказывает справедливость первой формулы (16.41).

Подобное преобразование выражения (16.42) приводит к равенству

$$\begin{aligned} -\cos \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \sin \rho_0 \sin \gamma &= \\ &= \cos \nu \sin(\Omega t + \eta) + \sin \nu \cos \theta \cos(\Omega t + \eta). \end{aligned} \quad (16.46)$$

Умножим обе части этого равенства на $\sin^2 \theta$:

$$\begin{aligned} -\cos \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta [\sin^2 \theta] + \sin \rho_0 \sin \gamma [\sin^2 \theta] &= \\ &= (\sin \theta \cos \nu) [\sin \theta \sin(\Omega t + \eta)] + \\ &+ [\sin \theta \sin \nu] [\cos \theta] [\sin \theta \cos(\Omega t + \eta)]. \end{aligned} \quad (16.47)$$

Заменим в (16.47) величины, стоящие в квадратных скобках, их значениями из (16.35) и (16.45). Произведя затем бесхитростные, но громоздкие преобразования с применением несколько раз формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получаем:

$$\sin \theta \cos \nu = \sin \gamma \sin \zeta, \quad (16.48)$$

что подтверждает вторую формулу в (16.41).

Теперь рассмотрим равенство (16.43). Сократим обе его части на $\sin \rho_0$ и преобразуем аналогично тому, как было преобразовано равенство (16.46), то есть умножим на $\sin^2 \theta$ и воспользуемся формулами (16.35) и (16.45). После преобразований имеем:

$$(\sin \theta \cos \nu - \sin \gamma \sin \zeta)(\sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma) = 0.$$

Заменим выражение во второй скобке его значением, вытекающим из последней формулы (16.35):

$$(\sin \theta \cos \nu - \sin \gamma \sin \zeta) \sin \theta \cos(\Omega t + \eta) = 0.$$

Так как в общем случае $\sin \theta$ и $\cos(\Omega t + \eta)$ не равны нулю, то, следовательно, равно нулю выражение в скобках, что снова означает выполнение второй формулы в (16.41).

Итак, из (16.44) вытекает первая формула в (16.41), а из (16.42) и (16.43) — вторая. ■

Преобразуем бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{q} \mathbf{j} - \mathbf{j} \mathbf{q}$ с помощью найденных формул ($\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити; $\mathbf{j}$ — скорость нити).

В дальнейшем потребуются значения этого бивектора как для непероориентированной, так и для пероориентированной нити. Поскольку

в этих случаях значения бивектора различаются только знаками некоторых слагаемых, то будем ставить, как и ранее, символ $\bullet$ над теми знаками, которые нужно изменить на противоположные для перехода к случаю переориентированной нити (+ на -, $\pm$ на $\mp$ и наоборот). А чтобы подчеркнуть, что формула верна в обоих случаях, поставим в левой части формулы символ $\bullet$ над знаком $\wedge$; здесь он будет обозначать, что в случае переориентированной нити в левой части формулы должен стоять бивектор $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}' = \mathbf{q}' \mathbf{j}' - \mathbf{j}' \mathbf{q}'$ (штрихом помечаются характеристики переориентированной нити).

Отметим, что при умножении двух слагаемых, над знаками которых стоит символ $\bullet$, получается результат, знак которого одинаков для непереориентированной и переориентированной нити, поэтому над знаком результата символ $\bullet$ ставить не надо.

С помощью формул (11.29), (11.34) для непереориентированной нити (с. 495, 497) и формул (11.37), (11.39) для переориентированной нити (с. 498), применяя обозначение (16.28), находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \dot{\pm} \cos \nu \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] \wedge \\ &\wedge \left[\mathbf{i} + q \mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \left(-\sin \nu \mathbf{e}_1 \dot{+} \cos \nu \mathbf{e}_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_0 \left(\cos \nu \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \dot{+} \sin \nu \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right) + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right]. \end{aligned}$$

Произведя умножение, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{i} \mp q \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{q}_0 \pm r_0 \frac{o}{c} \sin^2 \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \dot{\mp} \right. \\ &\quad \dot{\mp} r_0 \frac{o}{c} \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \mp r_0 \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \dot{\mp} r_0 \sin^2 \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \mp \\ &\quad \mp Q \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \dot{\pm} \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{i} \dot{\pm} q \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{q}_0 \dot{\mp} \\ &\quad \dot{\mp} r_0 \frac{o}{c} \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \pm r_0 \frac{o}{c} \cos^2 \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \dot{\pm} r_0 \cos^2 \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \pm \\ &\quad \pm r_0 \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \dot{\pm} Q \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + \\ &\quad + \frac{q}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{q}_0 - \frac{r_0 o}{\beta_0 c} \sin \nu \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \dot{+} \frac{r_0 o}{\beta_0 c} \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{e}_2 + \\ &\quad \left. + \frac{r_0}{\beta_0} \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \dot{+} \frac{r_0}{\beta_0} \sin \nu \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} + \frac{1}{\beta_0} Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right]. \end{aligned}$$

В этом выражении 3-е, 11-е и 16-е слагаемые являются нулевыми тензорами, так как $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = \hat{0}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ ($\hat{0}$ — нулевой тензор). Слагаемые 4-е и 10-е дают в сумме нулевой тензор, потому что $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Сумма 2-го и 17-го слагаемых и сумма 9-го и 18-го слагаемых равны соответственно

$$\left(\mp q + \frac{r_0 o}{\beta_0 c}\right) \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{q}_0 \quad \text{и} \quad \left(\dot{\mp} q + \frac{r_0 o}{\beta_0 c}\right) \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{e}_2. \quad (16.49)$$

Из первой формулы (13.14) ($\beta_0 q = \pm \frac{o r_0}{c}$) вытекает, что в (16.49) выражения в скобках равны нулю, поэтому указанные четыре слагаемых также обращаются в сумме в нулевой тензор.

В итоге в полученном выражении для $\mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j}$ из 21 слагаемого остаются 12. Перепишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j} = & \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \dot{\mathbf{i}} \pm \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \dot{\mathbf{i}} \mp \right. \\ & \dot{\mp} r_0 \sin^2 \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \pm r_0 \cos^2 \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \mp \\ & \mp r_0 \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \pm r_0 \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \mp \\ & \left. \mp Q \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \pm Q \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mathbf{q}_0 \wedge \dot{\mathbf{i}} + r_0 \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + r_0 \sin \nu \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} + \right. \\ & \left. + Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right]. \end{aligned}$$

Внесем сюда значения векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{q}_0$ и их производных из формул (16.20)–(16.22) и (16.30)–(16.32). Применяя обозначение

$$\lambda = \Omega t + \eta, \quad (16.50)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j} = & \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu (\sin \lambda \mathbf{a}_1 - \cos \lambda \mathbf{a}_2) \wedge \dot{\mathbf{i}} \pm \right. \\ & \pm \cos \nu (\cos \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 - \sin \theta \mathbf{a}_3) \wedge \dot{\mathbf{i}} \mp \\ & \left. \mp r_0 \sin^2 \nu (\sin \lambda \mathbf{a}_1 - \cos \lambda \mathbf{a}_2) \wedge \frac{\Omega}{c} \cos \theta (-\sin \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \lambda \mathbf{a}_2) \pm \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm r_0 \cos^2 \nu (\cos \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 - \sin \theta \mathbf{a}_3) \wedge \frac{\Omega}{c} (\cos \lambda \mathbf{a}_1 + \sin \lambda \mathbf{a}_2) \mp \\
& \mp r_0 \sin \nu \cos \nu (\sin \lambda \mathbf{a}_1 - \cos \lambda \mathbf{a}_2) \wedge \frac{\Omega}{c} (\cos \lambda \mathbf{a}_1 + \sin \lambda \mathbf{a}_2) \pm \\
& \pm r_0 \sin \nu \cos \nu (\cos \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 - \sin \theta \mathbf{a}_3) \wedge \\
& \quad \wedge \frac{\Omega}{c} \cos \theta (-\sin \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \lambda \mathbf{a}_2) \mp \\
& \mp Q \sin \nu (\sin \lambda \mathbf{a}_1 - \cos \lambda \mathbf{a}_2) \wedge \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta (-\sin \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \lambda \mathbf{a}_2) \pm \\
& \pm Q \cos \nu (\cos \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 - \sin \theta \mathbf{a}_3) \wedge \\
& \quad \wedge \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta (-\sin \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \lambda \mathbf{a}_2) \Big] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \Big[(\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 + \\
& \quad + \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \mathbf{a}_3) \wedge \mathbf{i} + \\
& + r_0 \cos \nu (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 + \\
& \quad + \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \mathbf{a}_3) \wedge \frac{\Omega}{c} (\cos \lambda \mathbf{a}_1 + \sin \lambda \mathbf{a}_2) + \\
& + r_0 \sin \nu (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 + \\
& \quad + \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \mathbf{a}_3) \wedge \frac{\Omega}{c} \cos \theta (-\sin \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \lambda \mathbf{a}_2) + \\
& + Q (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \cos \lambda \mathbf{a}_1 + \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \sin \lambda \mathbf{a}_2 + \\
& \quad + \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \mathbf{a}_3) \wedge \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta (-\sin \lambda \mathbf{a}_1 + \cos \lambda \mathbf{a}_2) \Big].
\end{aligned}$$

Произведем умножение и приведем подобные члены. С учетом формул $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = \hat{0}$, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ и $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ находим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \wedge \dot{\mathbf{j}} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \Big\{ \pm \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_1 (\sin \nu \sin \lambda \dot{} - \cos \nu \cos \theta \cos \lambda) \mp \\
& \mp \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 (\sin \nu \cos \lambda \dot{} + \cos \nu \cos \theta \sin \lambda) \pm \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 (\cos \nu \sin \theta) \mp \\
& \mp \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \sin \nu \cos \nu \sin^2 \theta \dot{} - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \cos \nu \sin \theta \cos \theta \right] \mp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mp \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} (\dot{+} \cos^2 \nu \sin \theta \cos \lambda - \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta \sin \lambda) \dot{-} \right. \\
& \quad \left. \dot{-} Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \cos \nu \sin^2 \theta \sin \lambda \right] \pm \\
& \pm \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} (\dot{+} \cos^2 \nu \sin \theta \sin \lambda + \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta \cos \lambda) \dot{+} \right. \\
& \quad \left. \dot{+} Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \cos \nu \sin^2 \theta \cos \lambda \right] \Big\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left\{ \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_1 \left[-\operatorname{sh} \varphi \sin \theta \cos \lambda + r_0 \frac{\Omega}{c} \cos \nu \operatorname{ch} \varphi \cos \lambda \dot{-} \right. \right. \\
& \quad \left. \dot{-} r_0 \frac{\Omega}{c} \sin \nu \cos \theta \operatorname{ch} \varphi \sin \lambda - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \operatorname{ch} \varphi \sin \lambda \right] + \\
& + \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \left[-\operatorname{sh} \varphi \sin \theta \sin \lambda + r_0 \frac{\Omega}{c} \cos \nu \operatorname{ch} \varphi \sin \lambda \dot{+} \right. \\
& \quad \left. \dot{+} r_0 \frac{\Omega}{c} \sin \nu \cos \theta \operatorname{ch} \varphi \cos \lambda + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \operatorname{ch} \varphi \cos \lambda \right] - \\
& - \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 (\operatorname{sh} \varphi \cos \theta) + \\
& + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \left[\dot{+} r_0 \frac{\Omega}{c} \sin \nu \cos \theta \operatorname{sh} \varphi \sin \theta + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi \sin^2 \theta \right] + \\
& + \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \cos \nu \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \cos \lambda \dot{-} r_0 \frac{\Omega}{c} \sin \nu \cos^2 \theta \operatorname{sh} \varphi \sin \lambda - \right. \\
& \quad \left. - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \sin \lambda \right] - \\
& - \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \cos \nu \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \sin \lambda \dot{+} r_0 \frac{\Omega}{c} \sin \nu \cos^2 \theta \operatorname{sh} \varphi \cos \lambda + \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \cos \lambda \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Выведенные ранее формулы (16.35) и (16.41) позволяют выразить $\cos \theta$ и произведения $\sin \theta \sin \lambda$, $\sin \theta \cos \lambda$, $\sin \theta \sin \nu$ и $\sin \theta \cos \nu$ через тригонометрические функции углов ρ_0 , γ и ζ . Чтобы воспользоваться этими формулами, умножим и разделим на $\sin^2 \theta$ некоторые слагаемые в выражениях при $\mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_1$, $\mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j} = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left\{ \pm \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_1 \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[(\sin \theta \sin \nu)(\sin \theta \sin \lambda) \dot{-} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(\sin \theta \cos \nu)(\cos \theta)(\sin \theta \cos \lambda) \Big] \mp \\
& \mp \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[(\sin \theta \sin \nu)(\sin \theta \cos \lambda) \overset{\bullet}{+} (\sin \theta \cos \nu)(\cos \theta)(\sin \theta \sin \lambda) \right] \overset{\bullet}{\pm} \\
& \overset{\bullet}{\pm} \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 (\sin \theta \cos \nu) \mp \\
& \mp \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} (\sin \theta \sin \nu)(\sin \theta \cos \nu) \overset{\bullet}{-} Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \theta \cos \nu)(\cos \theta) \right] \mp \\
& \mp \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\overset{\bullet}{+} (\sin \theta \cos \nu)^2 (\sin \theta \cos \lambda) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\sin \theta \sin \nu)(\sin \theta \cos \nu)(\cos \theta)(\sin \theta \sin \lambda) \right) \overset{\bullet}{-} \right. \\
& \quad \left. - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \theta \cos \nu)(\sin \theta \sin \lambda) \right] \pm \\
& \pm \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\overset{\bullet}{+} (\sin \theta \cos \nu)^2 (\sin \theta \sin \lambda) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\sin \theta \sin \nu)(\sin \theta \cos \nu)(\cos \theta)(\sin \theta \cos \lambda) \right) \overset{\bullet}{+} \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \theta \cos \nu)(\sin \theta \cos \lambda) \right] \Big\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left\{ \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_1 \left[-\operatorname{sh} \varphi (\sin \theta \cos \lambda) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r_0 \frac{\Omega}{c} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sin^2 \theta} \left((\sin \theta \cos \nu)(\sin \theta \cos \lambda) \overset{\bullet}{-} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\sin \theta \sin \nu)(\cos \theta)(\sin \theta \sin \lambda) \right) \overset{\bullet}{-} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi (\sin \theta \sin \lambda) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \left[-\operatorname{sh} \varphi (\sin \theta \sin \lambda) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r_0 \frac{\Omega}{c} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sin^2 \theta} \left((\sin \theta \cos \nu)(\sin \theta \sin \lambda) \overset{\bullet}{+} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (\sin \theta \sin \nu)(\cos \theta)(\sin \theta \cos \lambda) \right) \overset{\bullet}{+} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi (\sin \theta \cos \lambda) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 \operatorname{sh} \varphi (\cos \theta) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \left[\dot{+} r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \theta \sin \nu) (\cos \theta) + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi (\sin^2 \theta) \right] + \\
& + \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\sin^2 \theta} \left((\sin \theta \cos \nu) (\cos \theta) (\sin \theta \cos \lambda) \dot{-} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \dot{-} (\sin \theta \sin \nu) (\cos \theta)^2 (\sin \theta \sin \lambda) \right) - \right. \\
& \quad \left. - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi (\sin \theta \sin \lambda) (\cos \theta) \right] - \\
& - \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\sin^2 \theta} \left((\sin \theta \cos \nu) (\cos \theta) (\sin \theta \sin \lambda) \dot{+} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \dot{+} (\sin \theta \sin \nu) (\cos \theta)^2 (\sin \theta \cos \lambda) \right) + \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi (\sin \theta \cos \lambda) (\cos \theta) \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Подставим на место величин, заключенных в круглые скобки, их значения из формул (16.35) и (16.41). После многостраничных преобразований получаем, что все величины, содержащие в знаменателе $\sin^2 \theta$, умножаются на выражение, которое, по (16.35), равно $\sin^2 \theta$. Эти синусы в числителе и знаменателе сокращаются.

В итоге приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \dot{\wedge} \mathbf{j} = & \pm \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left\{ \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{i} \cos \gamma \sin \zeta + \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \cos \zeta + \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 \sin \gamma \sin \zeta + \right. \\
& + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \sin \gamma \sin \zeta \left[r_0 \frac{\Omega}{c} (\cos \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta + \sin \rho_0 \cos \gamma) - \right. \\
& \quad \left. - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \cos \rho_0 \cos \gamma) \right] + \\
& + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \sin \gamma \sin^2 \zeta \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \cos \rho_0 - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \rho_0 \right] + \\
& + \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \sin \gamma \sin \zeta \left[r_0 \frac{\Omega}{c} (\sin \rho_0 \sin \gamma - \cos \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta) + \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma) \right] \Bigg\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left\{ \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{i} \left[\operatorname{sh} \varphi (\sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{ch} \varphi \cos \rho_0 \sin \zeta + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi \sin \rho_0 \sin \zeta \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \left[-\operatorname{sh} \varphi \sin \rho_0 \sin \zeta + r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{ch} \varphi (\sin \rho_0 \sin \gamma - \cos \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta) + \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi (\sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma) \right] + \\
& + \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 \left[\operatorname{sh} \varphi (\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \cos \rho_0 \cos \gamma) \right] + \\
& + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (\sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin^2 \gamma \cos^2 \zeta - \cos^2 \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos \zeta + \right. \\
& \quad \left. + \sin^2 \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos \zeta - \sin \rho_0 \cos \rho_0 \cos^2 \gamma) + \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi (1 - \sin^2 \rho_0 \sin^2 \gamma \cos^2 \zeta + \right. \\
& \quad \left. + 2 \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma) \right] + \\
& + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \zeta (\sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \cos \gamma) - \right. \\
& \quad \left. - Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \rho_0 \sin \zeta (\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta - \cos \rho_0 \cos \gamma) \right] + \\
& + \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \left[r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi (-\sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos^2 \zeta + \sin^2 \rho_0 \sin^2 \gamma \cos \zeta + \right. \\
& \quad \left. + \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma \cos \zeta - \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma) + \right. \\
& \quad \left. + Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi (\sin^2 \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos^2 \zeta - \sin \rho_0 \cos \rho_0 \cos^2 \gamma \cos \zeta + \right. \\
& \quad \left. + \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin^2 \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma) \right] \Bigg\}, \\
& \hspace{15cm} (16.51)
\end{aligned}$$

где символ $\bullet$ слева от знака равенства означает, что в случае переориентированной нити на этом месте должен стоять бивектор $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$ (штрихом помечаются характеристики переориентированной нити), а справа от знака равенства этот символ означает, что в случае переориентированной нити стоящий под ним двойной знак $\pm$ должен быть заменен на $\mp$.

Формула (16.51) относится к случаю, когда *мировая линия частицы* L *совпадает с осью симметрии частицы и частица, двигаясь вдоль L , вращается вокруг L с постоянной угловой скоростью $\bar{\Omega}$* (точнее, вращается вокруг плоскости $\operatorname{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$, см. формулы (16.7)–(16.9) и их обоснование, с. 572).

Формула (16.51) выражает бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}$ через векторы абсолютного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ (задаваемого равенствами (16.12)) и угловые величины φ , ρ_0 , γ и ζ (первые три из них описываются за-

висимостями (16.3), (16.4) и (16.11); величина ζ определена на с. 581, $\zeta \in (-\pi, \pi]$. В эту формулу входят также: r_0 — радиус винтовой нити; β_0 — параметр, имеющий значения (13.24) (с. 531); Ω — модуль угловой скорости вращения частицы; Q — величина, задаваемая равенством (16.25); c — скорость света. Выбор верхнего или нижнего знака в начале формулы определяется правилом выбора знака (с. 467).

Причина, по которой символ $\bullet$ стоит над знаком $\pm$, заключается в следующем. Переход к переориентированной нити эквивалентен изменению знака вектора $\mathbf{e}_2$, поэтому он влечет изменение ориентации базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$. При этом изменяется взаимная ориентация базиса и нити, что влияет на выбор знака (согласно упомянутому правилу).

Отметим, что угловая скорость вращения луча o не входит в формулу (16.51). Этому есть две причины. Во-первых, угол ι , зависящий от o (см. (16.24) и (16.28)), выражен с помощью (16.41) через углы, не зависящие от o . Во-вторых, при выводе формулы применено (на с. 587) первое из равенств (13.14). Оно основано на допущении, что при движении частицы каждая нить пересекает физическое пространство Γ_* всё время в одной и той же его точке. Если отказаться от этого допущения, то в формулу (16.51) войдут дополнительные слагаемые (16.49), зависящие от o .

Формула (16.51) будет применена при расчете собственного поля F_s вращающейся частицы. Выражение (14.4), задающее поле F_s , содержит интеграл по собственному времени частицы l (см. с. 535). Покажем, как можно перейти в (14.4) от интегрирования по l к интегрированию по φ .

При фиксированной точке наблюдения x через нее проходят винтовые нити разных лучей при разных расположениях частицы на мировой линии. Так как каждый луч характеризуется определенным углом наклона φ по отношению к оси симметрии частицы, то возникает зависимость между углами φ (относящимися к разным лучам) и моментами времени l . Эта зависимость выражается формулой (16.3) (с. 568).

Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в случае «точечной» частицы — см. рис. 1.5 в главе 4 (с. 312), на котором показано, что через фиксированную точку наблюдения x проходят разные лучи «точечной» частицы при различных расположениях частицы на мировой линии.

Перепишем формулу (16.3) в виде

$$l - l_x = -\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{th} \varphi} \quad (\text{при } r > r_0; \varphi > 0; l_x > l); \quad (16.52)$$

убедиться в верности этой формулы можно с помощью рис. 16.1 (с. 567).

В выражении (14.4) интеграл по l является внутренним, а интеграл по r_0 — внешним, поэтому при интегрировании по l нужно считать ве-

личину r_0 постоянной. Величины l_x и r — тоже постоянные (вследствие фиксированности точки наблюдения x). На основании (16.52) находим дифференциал переменной l при постоянных l_x , r и r_0 :

$$dl \Big|_{\substack{l_x \\ r \\ r_0}} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{sh}^2 \varphi} d\varphi, \quad (16.53)$$

где справа от вертикальной черты указаны неизменяющиеся величины.

Из (16.52), с учетом $\operatorname{th} \varphi \in (0, 1)$ при $\varphi > 0$, получаем следующее ограничение на взаимное расположение частицы и точки наблюдения x (при неограниченно продолжающейся в прошлое мировой линии L):

$$l \in \left(-\infty, l_x - \sqrt{r^2 - r_0^2}\right). \quad (16.54)$$

При нахождении центра частицы в точке мировой линии с координатой l , удовлетворяющей этому ограничению, имеется по крайней мере одна, а в силу теоремы 16.1 большее количество винтовых нитей радиуса r_0 , проходящих через точку наблюдения x . Совокупность всех таких точек мировой линии L образует ее участок, обозначаемый L_x . Именно по этому участку проводится интегрирование в (14.4).

Из (16.52) следует, что при фиксированных l_x , r и r_0 существует взаимно однозначное соответствие между множеством значений l , удовлетворяющих ограничению (16.54) (то есть отвечающих точкам участка L_x), и множеством значений φ из интервала $(0, +\infty)$. Значит, при замене в (14.4) переменной интегрирования l на переменную φ интегрирование по φ должно проводиться по интервалу $(0, +\infty)$.

Отметим, что при $l \rightarrow (l_x - \sqrt{r^2 - r_0^2})$ (или, что то же самое, при $\varphi \rightarrow +\infty$) оси лучей, винтовые нити которых проходят через точку x , образуют последовательность, пределом которой служит изотропная образующая светового конуса (хотя они не достигают её). Действительно, применяя теорему Пифагора для псевоевклидовой плоскости (с. 80) к треугольнику OCA на рис. 16.1 (с. 567), получаем: $|OA| = \sqrt{|OC|^2 - |CA|^2} = \sqrt{(l_x - l)^2 - r_A^2} = \sqrt{|(l_x - l)^2 - (r^2 - r_0^2)|} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow (l_x - \sqrt{r^2 - r_0^2})$, где использовано (16.5). Тот факт, что длина гипотенузы OA треугольника OCA стремится к нулю при не стремящихся к нулю катетах, означает, что гипотенуза приближается к изотропной прямой. Этот же результат вытекает из формулы (16.25): $Q = q(l - l_0) \pm \frac{r_0 \psi}{\beta_0}$, так как, благодаря $Q = |OA|$, $q = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}$ и $\beta_0 \approx \operatorname{ch} \varphi$ (см. (13.17) и (13.25)), выполняется: $Q = |OA| \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow +\infty$.

Итак, для перехода в выражении (14.4), задающем поле F_s , от интегрирования по временной координате l к интегрированию по угловой переменной φ нужно подставить в (14.4) значение dl из (16.53) и провести интегрирование по φ в пределах от 0 до $+\infty$.

17. Собственное поле частицы вдали от её центра

Целью данного раздела является не вычисление точного значения собственного поля частицы F_s , а демонстрация согласованности формулы (14.4) (с. 535), определяющей собственное поле частицы ненулевого радиуса, с формулой (1.10) из главы 4 (с. 313), которая задает собственное поле «точечной» частицы, и, как было показано, верно описывает максвелловское электромагнитное поле заряда.

Будем говорить, что точка x пространства Минковского M находится *вдали от центра частицы*, если при всех расположениях частицы в пространстве M расстояние r от точки x до оси симметрии частицы существенно превышает радиус частицы r_* ($r \gg r_*$).

Это определение оправдано тем, что в случае прямолинейной мировой линии, совпадающей с осью симметрии частицы, r есть расстояние между x и центром частицы при расположении частицы в M , одномоментном с x (одномоментном по собственному времени частицы).

Найдем значение собственного поля частицы F_s в *точках пространства M , находящихся вдали от центра частицы* (для краткости будем говорить просто о поле F_s вдали от центра частицы). Мы намереваемся сравнить это поле с электромагнитным полем заряда, измеряемым в макроскопических опытах. В таких опытах определяются не локальные значения поля в точках пространства, а средние значения поля по некоторым малым областям пространства. Однако эти области, хотя и малы, но имеют размеры, которые заведомо превышают размер электрона. Принимая во внимание данный факт, заменим в формуле (14.4) локальное значение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ в точке x его средним значением по поперечному сечению луча, содержащему x (это существенно упростит выражение для F_s).

Таким образом, в *настоящем разделе* под собственным полем частицы вдали от ее центра, то есть при $r \gg r_*$, понимается тензор

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi n_* N_*} \int \int_{(r_0)(L_x)(\zeta)} \tilde{\varepsilon}_{r_0} \frac{1}{n_* N_*} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle_x d\zeta dl dr_0, \quad (17.1)$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор интегрирования по поперечному сечению луча, введенный в разд. 12; согласно (12.2) и (12.4), $\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle / (n_* N_*)$ есть среднее значение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ по поперечному сечению луча; индекс x при символе $\langle \dots \rangle$ означает, что интегрирование проводится по сечению луча, содержащему точку x ; остальные обозначения те же, что

в (14.4), в частности, L_x — часть мировой линии L , удовлетворяющая такому условию: при каждом расположении частицы с центром на L_x имеется по крайней мере одна винтовая нить радиуса r_0 , проходящая через точку x , причем при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет (L_x зависит от x и r_0).

Интеграл от бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ по произвольному поперечному сечению луча S найдем способом, аналогичным тому, каким в разд. 12 найдена величина $\langle \mathbf{q} \rangle$ (с. 512–515). Некоторые из последующих выкладок повторяют выкладки из разд. 16 (с. 586–587).

Поддействуем на бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ оператором $\langle \dots \rangle$, иначе говоря, проинтегрируем этот бивектор по поперечному сечению луча S :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle &= \int_{(S)} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \sigma dS = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \sigma dS = \\ &= \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 \pm \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] \wedge \\ &\wedge \left[\mathbf{i} + q \mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \left(-\sin(\chi + \psi) \mathbf{e}_1 + \cos(\chi + \psi) \mathbf{e}_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_0 \left(\cos(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \sin(\chi + \psi) \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right) + Q \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right] dS; \end{aligned}$$

здесь первое равенство основано на определении (12.4) оператора $\langle \dots \rangle$; во втором равенстве использовано представление сечения S в виде объединения непересекающихся сечений S_ξ отдельных спиралей, образующих луч (ξ — номер спирали, $\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); в третьем равенстве на место векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$ подставлены их значения (11.29) и (11.34).

Производя умножение и применяя обозначение $\nu = \chi + \psi$, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle &= \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{i} \mp q \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{q}_0 \pm \right. \\ &\pm r_0 \frac{o}{c} \sin^2 \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \mp r_0 \frac{o}{c} \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \mp r_0 \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \mp \\ &\mp r_0 \sin^2 \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \mp Q \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \pm \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{i} \pm q \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{q}_0 \mp \\ &\mp r_0 \frac{o}{c} \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \pm r_0 \frac{o}{c} \cos^2 \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \pm r_0 \cos^2 \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm r_0 \sin \nu \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \pm Q \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + \\
& + \frac{q}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{q}_0 - \frac{r_0 o}{\beta_0 c} \sin \nu \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{e}_1 + \frac{r_0 o}{\beta_0 c} \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{e}_2 + \\
& + \frac{r_0}{\beta_0} \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \frac{r_0}{\beta_0} \sin \nu \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} + \frac{1}{\beta_0} Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \Big] dS.
\end{aligned}$$

В этом выражении 3-е, 11-е и 16-е слагаемые в квадратных скобках являются нулевыми тензорами, так как $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = \hat{0}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ ($\hat{0}$ — нулевой тензор). Слагаемые 4-е и 10-е дают в сумме нулевой тензор, потому что $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Сумма 2-го и 17-го слагаемых и сумма 9-го и 18-го слагаемых равны соответственно

$$\left(\mp q + \frac{r_0 o}{\beta_0 c} \right) \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{q}_0 \quad \text{и} \quad \left(\mp q + \frac{r_0 o}{\beta_0 c} \right) \cos \nu \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{e}_2.$$

Из первой формулы (13.14) ($\beta_0 q = \pm \frac{or_0}{c}$) вытекает, что выражение в скобках равно нулю, поэтому указанные четыре слагаемых также обращаются в сумме в нулевой тензор.

В итоге в приведенном выражении для $\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle$ из 21 слагаемого остаются 12. Перепишем это выражение в виде

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle = & \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \Big[\mp \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{i} \pm \\
& \pm \cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{i} \mp r_0 \sin^2 \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \pm \\
& \pm r_0 \cos^2 \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \mp \\
& \mp r_0 \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \pm \\
& \pm r_0 \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \mp \\
& \mp Q \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \pm Q \cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} + \\
& + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + \frac{r_0}{\beta_0} \cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \\
& + \frac{r_0}{\beta_0} \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} + \frac{1}{\beta_0} Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \Big] dS; \tag{17.2}
\end{aligned}$$

здесь мы вернулись к исходному обозначению $\chi + \psi$ вместо ν и применили формулу (10.31) (с. 481), с учетом которой

$$\nu = \chi + \psi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi, \quad (17.3)$$

где ξ — номер спирали, которой принадлежит рассматриваемая нить ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); χ_0 — значение угла χ для нити, которая относится к спирали № 0 и для которой рассматриваемая нить является соответственной.

Введем в исследуемом поперечном сечении луча S полярные координаты (r_0, χ) с полюсом в центре сечения и полярной осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{e}_1$ (см. рис. 10.5, с. 479).

Сечение луча S состоит из n_* одинаковых сечений спиралей. При каждом ξ интегрирование в (17.2) проводится только по сечению S_ξ спирали № ξ . Элемент площади сечения S_ξ в полярных координатах (r_0, χ) есть $r_0 d\chi dr_0$. А так как вдоль всего сечения S_ξ величины ξ и ψ одинаковы, то из (17.3) вытекает, что в сечении S_ξ выполняется $d\chi = d\chi_0$. Поэтому элемент площади сечения S_ξ (при любом ξ) равен $r_0 d\chi_0 dr_0$, где $r_0 \in [r_{0min}, r_{0max}]$ и $\chi_0 \in [\chi_{01}(r_0), \chi_{02}(r_0)]$ (χ_{01} и χ_{02} — минимальное и максимальное значения угла χ_0 , определяемые формой сечения спирали и зависящие от r_0 ; см. рис. 10.5). Следовательно, интеграл по сечению S_ξ может быть представлен в виде

$$\int_{(S_\xi)} \dots dS = \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \dots r_0 d\chi_0 dr_0. \quad (17.4)$$

На основании сказанного перепишем выражение (17.2) в форме

$$\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} [\dots] r_0 d\chi_0 dr_0,$$

где многоточие обозначает выражение, стоящее в (17.2) в квадратных скобках.

Поскольку пределы интегрирования и величины σ , β_0 , r_0 , $d\chi_0$, dr_0 не зависят от номера спирали ξ , то можно внести знак суммирования под знаки интегралов и суммировать только выражение, стоящее в квадратных скобках. Внося далее знак суммирования внутрь квадратных

скобок, получаем с учетом независимости $\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{q}_0$ и Q от ξ :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle = & \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{i} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \pm \right. \\
 & \pm \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{i} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \mp r_0 \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin^2\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \pm \\
 & \pm r_0 \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos^2\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \mp \\
 & \mp r_0 \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \pm \\
 & \pm r_0 \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \mp \\
 & \mp Q \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) \pm \\
 & \pm Q \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) + \\
 & + \frac{n_*}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + \frac{r_0}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) + \\
 & \left. + \frac{r_0}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi\right) + \frac{n_*}{\beta_0} Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right] r_0 d\chi_0 dr_0; \tag{17.5}
 \end{aligned}$$

отметим, что слагаемые, содержащие бивекторы $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}$, умножаются при суммировании на n_* .

В математике известны формулы [34]:

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha + \sin(\alpha + \delta) + \sin(\alpha + 2\delta) + \dots \\
 & \dots + \sin(\alpha + (n-1)\delta) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta\right) \sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}; \tag{17.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos(\alpha + \delta) + \cos(\alpha + 2\delta) + \dots \\ & \dots + \cos(\alpha + (n-1)\delta) = \frac{\cos(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta) \sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Напомним, что винтовая переменная ψ одинакова вдоль всего поперечного сечения луча, поэтому она, как и χ_0 , не зависит от ξ .

Вследствие независимости ψ и χ_0 от ξ , формулы (17.6) и (17.7) могут быть применены к нашему случаю. Подставим в них: $\alpha = \chi_0 + \psi$, $\delta = 2\pi/n_*$ и $n = n_*$. Тогда в левых частях формул получим суммы синусов и косинусов такие же, как в (17.5). А правые части будут содержать множитель $\sin \frac{n\delta}{2} = \sin \frac{n_*(2\pi/n_*)}{2} = \sin \pi = 0$, что в итоге дает:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) = 0; \quad \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) = 0. \quad (17.8)$$

Повторим сказанное в разд. 12, что эти формулы имеют простой смысл: если внутри интервала, равного периоду синуса, взять равноотстоящие точки, то сумма значений синуса в этих точках будет равна нулю. При большом числе точек это почти то же самое, как проинтегрировать синус по интервалу, равному его периоду (аналогичное верно для косинуса).

Выведем формулы для суммы квадратов синусов, суммы квадратов косинусов и суммы произведений синусов и косинусов.

Обозначим для сокращения записи:

$$\nu_\xi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi. \quad (17.9)$$

Запишем следующую цепочку равенств, пользуясь известной формулой для синуса половинного угла:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin^2 \nu_\xi &= \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \frac{1 - \cos(2\nu_\xi)}{2} = \frac{n_*}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos(2\nu_\xi) = \\ &= \frac{n_*}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(2\chi_0 + \frac{4\pi}{n_*}\xi + 2\psi\right). \end{aligned} \quad (17.10)$$

Сумму косинусов найдем с помощью формулы (17.7). Подставляя в нее значения $\alpha = 2\chi_0 + 2\psi$, $\delta = 4\pi/n_*$ и $n = n_*$, приходим к выражению, содержащему множитель $\sin \frac{n\delta}{2} = \sin \frac{n_*(4\pi/n_*)}{2} = \sin 2\pi = 0$, значит,

эта сумма равна нулю. В результате получаем (с учетом (17.9)):

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin^2\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) = \frac{n_*}{2}. \quad (17.11)$$

Формула для суммы квадратов косинусов может быть выведена либо с помощью цепочки равенств, аналогичной (17.10) (с заменой знаков минус на плюс), либо посредством использования (17.11) и формулы $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Оба варианта дают:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos^2\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) = \frac{n_*}{2}. \quad (17.12)$$

Сумма произведений синусов и косинусов вычисляется так:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin \nu_\xi \cos \nu_\xi = \frac{1}{2} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin(2\nu_\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(2\chi_0 + \frac{4\pi}{n_*}\xi + 2\psi\right);$$

применяя далее формулу (17.6) при $\alpha = 2\chi_0 + 2\psi$, $\delta = 4\pi/n_*$ и $n = n_*$, находим, что эта сумма равна нулю:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi + \psi\right) = 0. \quad (17.13)$$

Подставим в выражение (17.5) значения сумм из (17.8) и (17.11) – (17.13), вынесем за знаки интегралов константу n_* и используем равенство (17.4) (читаемое справа налево). Тогда получим:

$$\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle = n_* \int_{(S_0)} \sigma \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + \frac{1}{\beta_0} Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \mp \frac{r_0}{2} \frac{d}{dl} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right] dS; \quad (17.14)$$

заметим, что интегрирование в правой части формулы можно проводить по сечению любой спирали; тот факт, что здесь указано сечение S_0 спирали № 0, не умаляет общности, потому что любая спираль может быть выбрана в качестве нулевой.

Из формулы (13.13) ($\beta_0 = \beta \frac{r_0}{r_*}$) следует $\frac{\beta_0}{r_0} = \frac{\beta}{r_*}$. Преобразуем с учетом этого равенства формулу (16.25) для функции Q :

$$Q(l) = q(l - l_0) \pm \frac{r_0 \psi}{\beta_0} = q(l - l_0) \pm \frac{r_* \psi}{\beta}, \quad (17.15)$$

здесь q — параметр, характеризующий движение луча вдоль своей оси (он одинаков для всех элементов луча, но может быть разным для разных лучей); l и l_0 — текущий и начальный моменты собственного времени частицы; r_* — радиус центральной нити (мы называем его радиусом частицы); β — параметр β_0 для центральной нити; ψ — винтовая переменная (она одинакова вдоль всего поперечного сечения луча); знак $\pm$ определяется правилом выбора знака (см. разд. 10, с. 467).

В разд. 4 показано, что $p_* \ll r_*$. Отсюда и из $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*] = [r_*(1 - \frac{p_*}{r_*}), r_*(1 + \frac{p_*}{r_*})]$ вытекает $r_0 \approx r_*$. Учитывая это, заменим в (17.14) r_0 на r_* , а также, в силу $\beta_0 = \beta \frac{r_0}{r_*}$, заменим β_0 на β . Кроме того, внесем в (17.14) значение функции Q из (17.15). После этих преобразований все величины в (17.14), кроме σ , оказываются одинаковыми вдоль всего поперечного сечения луча. Вынесем их за знак интеграла. Оставшийся интеграл $\int_{(S_0)} \sigma dS$, согласно (12.2), равен N_* . В итоге имеем:

$$\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle \approx \frac{n_* N_* \beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[\frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + \frac{1}{\beta} \left(q(l - l_0) \pm \frac{r_* \psi}{\beta} \right) \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \mp \frac{r_*}{2} \frac{d}{dl} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right]. \quad (17.16)$$

Отметим, что в случае переориентированного луча следует использовать для векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$ формулы (11.37) и (11.39) вместо (11.29) и (11.34). В этом случае в правой части (17.16) изменится только знак последнего слагаемого, а именно вместо двойного знака $\mp$ будет стоять знак $\pm$ (потому что формулы (11.37) и (11.39) отличаются от (11.29) и (11.34) лишь знаком составляющей, направленной вдоль вектора $\mathbf{e}_2$).

Утверждение. В правой части выражения (17.16) можно пренебречь последним слагаемым.

Доказательство. Напомним, что мировая линия частицы L является гладкой линией и выполняется закон движения (13.27): $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$, где $\mathbf{i}_L$ — единичный вектор, касательный к L в точке нахождения центра частицы, $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы.

Вследствие $\mathbf{i} = \mathbf{i}_L$, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ являются функциями натурального параметра l на линии L . Гладкость мировой линии L подразумевает, что движение частицы описывается дифференцируемыми функциями от l , поэтому можем записать для функции $(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(l)$ формулу Тейлора (при малом $r_*/2$):

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(l + (r_*/2)) \approx (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(l) + \frac{r_*}{2} \frac{d(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)}{dl}(l).$$

Отсюда вытекает, что тензор $(r_*/2)d(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)/dl$ приблизительно равен приращению бивектора $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ за промежуток времени $r_*/(2c)$ (ибо

$l = ct_*$, где l и t_* — собственное время частицы, l имеет размерность длины, t_* — размерность времени; c — скорость света). Опыты по измерению электромагнитных полей движущихся зарядов обычно проводятся в условиях, при которых за время, равное $\frac{\text{размер электрона}}{c}$, заряды не успевают заметно изменить свои скорости. В связи с этим в рамках нашей модели при описании таких опытов можно считать, что любой участок мировой линии L длины $r_*/2$ близок к прямолинейному. Следовательно, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, движущиеся вдоль L , и образуемый ими бивектор $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ пренебрежимо мало изменяются за время $r_*/(2c)$. Значит, приращение $(r_*/2)d(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)/dl$ бивектора $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ существенно меньше (по норме) самого бивектора:

$$\left\| \frac{r_*}{2} \frac{d}{dl} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right\| \ll \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|. \quad (17.17)$$

Отметим, что норма тензора определяется для произвольного двухвалентного тензора X равенством

$$\|X\| = \sqrt{|X \cdot X^*|}, \quad (17.18)$$

где X^* — тензор, транспонированный (сопряженный) к тензору X (см. разд. 2 главы 2, с. 23); двоеточие — знак бискалярного умножения тензоров, эта операция выполняется по правилу, иллюстрируемому примером (2.6) из главы 2 (с. 22) и примером (4.3) из главы 4 (с. 321).

Пусть $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ — рассматривавшийся ранее ортонормированный базис в M . Вектор $\mathbf{q}_0$ имеет в этом базисе вид (16.16):

$$\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}. \quad (17.19)$$

Нетрудно убедиться, пользуясь определением (17.18) и ортонормированностью базиса, что

$$\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\| = \sqrt{2}. \quad (17.20)$$

Возьмем первое слагаемое в квадратных скобках в (17.16) и подставим в него значение β из (13.23) ($\beta = \operatorname{ch} \varphi$) и значение $\mathbf{q}_0$ из (17.19). Учитывая, что $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \hat{0}$, имеем:

$$\frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}) \wedge \mathbf{i} = \operatorname{th} \varphi \mathbf{n} \wedge \mathbf{i},$$

поэтому $\|(1/\beta)\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i}\| = \operatorname{th} \varphi \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\|$ (с учетом $\varphi > 0$). Основной вклад в поле F_s , как будет показано далее, вносят лучи, характеризующиеся

большими значениями угла φ . Поскольку $\text{th } \varphi \approx 1$ при больших φ , то для таких лучей выполняется $\|(1/\beta)\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i}\| \approx \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\|$. На основании этого приближенного равенства и формул (17.17) и (17.20) получаем:

$$\left\| \frac{r_*}{2} \frac{d}{dl} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right\| \ll \left\| \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} \right\|;$$

это означает, что в (17.16) последнее слагаемое в правой части существенно меньше по норме, чем первое слагаемое, поэтому действительно им можно пренебречь. ■

Опуская в (17.16) последнее слагаемое и учитывая формулу (17.15) для функции Q , формулу (11.30) для скорости оси луча $\mathbf{j}_0$ и равенство $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{q}_0 = \hat{0}$, находим среднее значение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ по поперечному сечению луча:

$$\frac{1}{n_* N_*} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left(\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} + Q \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right) = \frac{1}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0. \quad (17.21)$$

Данное выражение выполняется как для непереориентированного, так и для переориентированного луча, потому что в (17.16) от переориентации луча зависит только знак исключенного нами слагаемого.

С помощью формул (15.57), (17.1) и (17.21) можем записать:

$$F_s(x) \approx \frac{a}{2\pi n_* N_*} \int \int \int_{(r_0)(L_x)(\zeta)} \frac{N \tilde{N}_{r_0} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} \cos \rho_0}{R^3 Z(1) \sqrt{|\beta^2 - 1|}} (\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0)_x d\zeta dl dr_0, \quad (17.22)$$

где индекс x при бивекторе $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0$ означает, что бивектор относится к элементу оси луча, находящемуся в том же поперечном сечении луча, что и точка наблюдения x (для оси луча, изображенной на рис. 16.1, это элемент A , с. 567).

В соответствии с принятым приближением заменим β_0 на β , сократим радикалы и вынесем постоянные величины за знаки интегралов:

$$F_s(x) \approx \frac{aN}{2\pi n_* N_* Z(1)} \int \int \int_{(r_0)(L_x)(\zeta)} \frac{\tilde{N}_{r_0} \cos \rho_0}{R^3} (\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0)_x d\zeta dl dr_0. \quad (17.23)$$

Теперь воспользуемся принятым в начале раздела условием, что точка наблюдения x находится вдали от центра частицы. Согласно этому условию, расстояние r от точки x до оси симметрии частицы

существенно превышает радиус частицы r_* , то есть $r \gg r_*$. Отсюда с учетом $r_0 \approx r_*$ имеем:

$$r_0 \ll r. \quad (17.24)$$

Переменная ζ , входящая в формулу (17.23), задает положение вектора $\mathbf{n}$ на круговой конической поверхности, которая обладает следующими свойствами: ее вершина находится в точке C , являющейся проекцией точки наблюдения x на ось симметрии частицы, ее осью служит прямая Cx и угол полураствора ρ_0 задается формулой (16.4):

$$\rho_0 = \arcsin \frac{r_0}{r}, \quad (17.25)$$

см. рис. 16.1 и 16.4 на с. 567, 582.

Вследствие (17.24) и (17.25), угол ρ_0 может считаться равным нулю. В таком случае коническая поверхность вырождается в прямую, совпадающую с ее осью Cx . При этом элемент оси луча A , который находится на этой конической поверхности и к которому относится бивектор $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0$ в (17.23), оказывается лежащим на Cx . Докажем, что в этом случае элемент A совпадает с точкой наблюдения x .

Доказательство. Из (16.5) и (17.25) находим:

$$r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2} = r \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \rightarrow r \text{ при } \rho_0 \rightarrow 0,$$

где r_A — расстояние между точками C и A ; r — расстояние между C и x . Так как $A \in Cx$ и $r_A \rightarrow r$, то действительно $A \rightarrow x$ при $\rho_0 \rightarrow 0$. ■

На самом деле, элемент A отстоит от точки x на расстоянии $r_0 \approx r_*$ (см. рис. 16.1). Допущение о том, что элемент A совпадает с x , приводит к неточности его локализации порядка радиуса частицы r_* . В ситуации, рассматриваемой в данном разделе, такая неточность допустима, потому что нашей целью является сравнение поля F_s с электромагнитным полем заряда, измеряемым в макроскопических опытах, где определяются лишь средние значения поля по областям пространства, заведомо превосходящим размер электрона.

На основании сказанного выше можно полагать, что оси всех учитываемых в (17.23) лучей проходят через точку x . При таком допущении подынтегральная функция в (17.23) не зависит от ζ . Вынесем эту функцию за знак интеграла по ζ . Поскольку $\zeta \in (-\pi, \pi]$, то оставшийся интеграл $\int d\zeta$ при умножении его на нормировочный множитель $(2\pi)^{-1}$ дает единицу. Кроме того, $\cos \rho_0 \rightarrow 1$ при $\rho_0 \rightarrow 0$. Поэтому формула (17.23) принимает вид

$$F_s(x) \approx \frac{aN}{n_* N_* Z(1)} \int_{(r_0)(L_x)} \int \frac{\tilde{N}_{r_0}}{R^3} (\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0)_x dl dr_0. \quad (17.26)$$

В рамках принятого приближения мы пренебрегаем различиями радиусов r_0 винтовых нитей, полагая все их примерно равными радиусу частицы r_* . Вследствие этого, можно считать, что в (17.26) линия L_x и все функции, за исключением $\tilde{N}_{r_0}$, не зависят от r_0 (относительно $\tilde{N}_{r_0}$ так считать нельзя, потому что $\tilde{N}_{r_0}$ изменяется для разных r_0 от нуля до некоторого максимального значения, см. (15.6), (15.8) и рис. 15.1, с. 537–538). Учитывая это, поменяем порядок интегрирования по r_0 и по L_x и затем вынесем из-под знака интеграла по r_0 все величины, кроме $\tilde{N}_{r_0}$. Оставшийся интеграл $\int \tilde{N}_{r_0} dr_0$ равен, согласно (15.9), общему количеству нитей луча $n_* N_*$, поэтому формула (17.26) упрощается:

$$F_s(x) \approx \frac{aN}{Z(1)} \int_{L_x} \frac{1}{R^3} (\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0) dl, \quad (17.27)$$

где для удобства сравнения полученного результата с результатом главы 4 сделаны следующие изменения в записи формулы: $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0$ заменено на $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$ (по определению внешнего умножения векторов), убран индекс x при бивекторе $\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{j}_0$ (согласно пояснению к (17.22) он указывал на то, что бивектор относится к элементу оси луча A , находящемуся в одном поперечном сечении луча с точкой x , теперь же, в силу совпадения A с x , подынтегральная функция берется в той же точке x , что и F_s), убраны скобки под знаком интеграла (они не являются обязательными). Отметим, что найденное значение поля F_s не зависит от переориентации лучей частицы. Это и понятно, потому что оно фактически определяется характеристиками остова частицы (состоящего из осей лучей), который не зависит от переориентации лучей.

В разд. 1 главы 4 приведена формула (1.10), описывающая собственное поле «точечной» частицы (с. 313):

$$F(x) = \frac{aN}{Z(1)} \int_{L_-} \frac{1}{R^3} (\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0) dl, \quad (17.28)$$

где на место плотности лучей ε подставлено ее значение $\frac{N}{R^3 Z(1)}$, задаваемое формулой (3.6) из разд. 3 главы 4 (с. 319).

Сравним формулу (17.27) с формулой (17.28). Начнем с различий.

Индекс s при символе поля F указывает на то, что это поле создается самой рассматриваемой частицей (от английского *self* — сам, себя). В данном случае его можно не ставить, так как исследуется одно только это поле. (Индекс нужен в том случае, когда изучается совместное действие на частицу внешнего поля и ее собственного поля.)

Знак приближенного равенства в формуле (17.27) обусловлен упрощениями, которые были сделаны при ее выводе: заменой в выражении (14.4), задающем поле F_s , локального значения бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ в точке x его средним значением по поперечному сечению луча, содержащему x , а также использованием приближенного равенства $r_0 \approx r_*$ и неравенства $r_0 \ll r$.

Область интегрирования L_x есть часть мировой линии L такая, что при расположениях частицы с центром на L_x имеются винтовые нити, проходящие через точку наблюдения x , а при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет. Поскольку в рамках рассматриваемого приближения элемент оси луча A совпадает с точкой x , то оси всех учитываемых в (17.27) лучей проходят через x . Оси лучей — это всевозможные времениподобные прямые, проходящие через центр частицы. Так как центр частицы движется вдоль мировой линии L , то область интегрирования должна содержать все точки линии L , которые могут быть соединены с x времениподобными прямыми. Значит, в данном случае область интегрирования L_x представляет собой участок мировой линии L , содержащийся внутри светового конуса прошлого с вершиной в x . Такой участок мировой линии L обозначен ранее символом L_- . Поэтому область интегрирования в (17.27) совпадает с областью интегрирования в (17.28).

Символ R обозначает в формуле (17.27) расстояние между центром частицы O и элементом оси луча A , а формуле (17.28) он обозначает расстояние между центром частицы O и точкой наблюдения x . Поскольку в нашей ситуации элемент оси луча A совпадает с точкой x , то фактически символ R обозначает в (17.27) и (17.28) одну и ту же величину.

В формуле (17.27) символы $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{j}_0$ являются характеристиками оси луча. В (17.28) эти же символы представляют собой характеристики луча, моделируемого в случае «точечной» частицы времениподобной прямой. В связи с тем, что остов частицы, состоящий из осей лучей, фактически представляет собой «точечную» частицу, можно считать, что символы $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{j}_0$ имеют в (17.27) и (17.28) одинаковый смысл.

Величины N и a имеют в (17.27) и (17.28) один и тот же смысл (N — общее количество лучей, составляющих частицу; a — числовой коэффициент, зависящий от характеристик частицы и используемых единиц измерения физических величин).

Из сказанного следует, что правые части формул (17.27) и (17.28) одинаковы. Значит, формула (14.4) (с. 535), приведшая к (17.27) и определяющая собственное поле частицы ненулевого радиуса, согласована

с формулой (1.10) из главы 4 (с. 313), которая тождественна (17.28) и задает собственное поле «точечной» частицы.

В главе 4 доказано, что при

$$aN = 4\pi e \quad (\text{в системе СГС}) \quad (17.29)$$

собственное поле «точечной» частицы, вычисленное на основе формулы (1.10), совпадает с электромагнитным полем движущегося заряда e , рассчитанным по законам электродинамики (при отсутствии пространственного вращения частицы; см. в разд. 7 главы 4 формулу (7.26) и пояснение к ней, с. 365).

Если «точечная» частица вращается, то выражение для ее поля содержит дополнительные слагаемые, пропорциональные угловой скорости.

Согласно результатам главы 4, основной вклад в собственное поле «точечной» частицы вносят лучи, которые непосредственно примыкают к ограничивающему частицу световому конусу, то есть лучи, которые характеризуются большими значениями угловой переменной φ (см. разд. 9 главы 4, с. 368). Согласованность формул (17.27) и (17.28) означает, что и в случае частицы ненулевого радиуса основной вклад в поле вносят такие же лучи. Этот результат был использован в процессе вывода формулы (17.27).

Итак, частица ненулевого радиуса порождает вдали от своего центра поле такое же, какое порождает «точечная» частица, и это поле совпадает (при отсутствии пространственного вращения частицы) с электромагнитным полем заряда, рассчитываемым в классической электродинамике и измеряемым в макроскопических опытах.

Внимание! При выводе формулы (17.27) произведено усреднение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ по поперечному сечению луча (см. формулу (17.1) и предваряющий ее текст). Использование процедуры усреднения оправдано, когда ставится цель сравнить теоретическое значение поля с экспериментальным значением, измеряемым в макроскопических опытах, потому что в опытах находятся средние значения поля по некоторым малым областям пространства. Однако нужно иметь в виду, что *реальные заряды взаимодействуют локально, поэтому при их взаимодействии могут проявляться эффекты, не учитываемые найденным усредненным значением поля.*

В следующем разделе вычисляется точное значение поля F_s для случая вращающейся частицы.

18. Собственное поле вращающейся частицы

Рассчитаем собственное поле частицы F_s для случая, когда мировая линия L совпадает с осью симметрии частицы, и частица при движении вдоль L вращается вокруг L с постоянной угловой скоростью.

Уточним характеристики этого движения частицы.

Начнем с повторения сказанного в разд. 16 в начале вывода формулы (16.51) (с. 571–574), так как эта формула будет применена далее при расчете поля F_s .

Прямолинейность мировой линии L и совпадение ее с осью симметрии частицы означают выполнение условия

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{i} = \text{const}, \quad (18.1)$$

где $\mathbf{i}_L$ и $\mathbf{i}$ — направляющие орты соответственно мировой линии L и оси симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$.

Напомним, что вращение осуществляется: в двумерной плоскости вокруг точки, в трехмерном пространстве вокруг точки или прямой, в четырехмерном пространстве вокруг точки, прямой или плоскости.

Вращение в пространстве Минковского M с постоянной угловой скоростью подразумевает наличие неподвижной псевдоевклидовой плоскости и ортогональной к ней инвариантной пространственноподобной плоскости (в первой плоскости векторы не меняются, во второй плоскости векторы остаются в ней). Можно сказать, что вращение происходит вокруг неподвижной псевдоевклидовой плоскости. Зададим эти плоскости.

Зафиксируем некоторый мнимоединичный вектор $\mathbf{a}$, ортогональный вектору $\mathbf{i}$ и имеющий начало в центре частицы:

$$\mathbf{a} = \text{const}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (18.2)$$

Условия (18.1) и (18.2) означают неподвижность псевдоевклидовой плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ (при действии на нее линейного оператора). Будем считать, что вращение частицы происходит вокруг нее. При этом инвариантной пространственноподобной плоскостью является $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$.

Введем в пространстве M инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени $T = Lin\{\mathbf{i}\}$ и ортогональным оси T координатным физическим пространством $\Gamma = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$. Поскольку мы рассматриваем случай $L = Lin\{\mathbf{i}\}$, то ось времени и мировая линия совпадают: $T = L$.

Так как $\mathbf{a} \perp \mathbf{i}$ и $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, то $\mathbf{a} \in \Gamma$. Поэтому изнутри физического пространства Γ указанное движение частицы воспринимается как вращение вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр частицы и направлена вдоль вектора $\mathbf{a}$. Назовем ее *осью вращения* частицы. Вектор $\mathbf{a}$ — ее направляющий орт. *Угловая скорость* такого вращения частицы есть псевдовектор

$$\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a} \quad (\bar{\Omega} \in \Gamma), \quad (18.3)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах, и $\Delta = -1$ в левоориентированных базисах); $\Omega = |\bar{\Omega}|$ — скалярная величина, тоже называемая угловой скоростью вращения частицы; $\bar{\Omega}$ и Ω имеют размерность угловой скорости (*время*⁻¹), $\Omega \geq 0$. Угловая скорость $\bar{\Omega}$ рассчитывается в инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$.

Постоянство угловой скорости означает выполнение условия

$$\bar{\Omega} = \text{const} \quad (\text{отсюда } \Omega = \text{const}). \quad (18.4)$$

Из совпадения оси времени и мировой линии ($T = L$) следует, что собственное время частицы и координатное время могут различаться лишь на постоянную величину. Примем, что они совпадают и обозначим их единым символом l (при измерении времени в единицах длины) или символом t (при измерении времени в единицах времени). Величины l и t связаны равенством

$$l = ct. \quad (18.5)$$

При движении частицы вдоль мировой линии L движутся вместе с ней ее собственное физическое пространство Γ_* и совпадающее с ним координатное физическое пространство Γ (оба ортогональны L и проходят через центр частицы).

Расположение гиперплоскости Γ , соответствующее конкретному моменту времени l , будем помечать индексом l : Γ_l .

Далее считается, что точка наблюдения x фиксирована и $x \notin T$. В силу фиксированности точки x и оси T , фиксированы временная координата l_x точки x и гиперплоскость Γ_{l_x} , содержащая x .

Инерциальность системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ означает, что все положения координатного физического пространства Γ не просто параллельны между собой, но являются результатом *поступательного* перемещения Γ вдоль оси времени T . Из этого следует, что векторное пространство, ассоциированное с Γ , представляет собой при любом положении Γ одно и то же подпространство векторного пространства, ассоциированного с M . Поэтому все векторы, заданные в Γ при каком-либо

одном его положении, фактически принадлежат и любому другому его положению. Можно сказать, что векторы переносятся вместе с Γ параллельным сдвигом вдоль оси T (в частности, $\mathbf{a} \in \Gamma_l$ при всех l , в том числе $\mathbf{a} \in \Gamma_x$). В последующем, пользуясь этим свойством системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, мы будем неоднократно переносить векторы из одного положения Γ в другое (не всегда ссылаясь на данное свойство).

Обозначим: $C = \Gamma_x \cap T$; $\mathbf{r} = \vec{Cx}$ ($\mathbf{r} \in \Gamma_x$); $r = |\mathbf{r}|$ (см. рис. 16.1, с. 567).

Угол γ между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ задается любым из равенств

$$\cos \gamma = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r} \quad \text{или} \quad \gamma = \arccos\left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r}\right), \quad (18.6)$$

где учтено, что $\mathbf{a} \in \Gamma_x$ и что $|\mathbf{a}| = 1$ в силу (18.2); знак минус обусловлен отрицательной определенностью метрической формы в Γ (см. формулу (3.3) в главе 2, с. 38). Будем считать, без ущерба для дальнейшего, что точка x не лежит на оси вращения частицы. Тогда $\mathbf{r} \nparallel \mathbf{a}$ и $\gamma \in (0, \pi)$. При фиксированных точке наблюдения x , оси времени T и гиперплоскости Γ_x точка C также фиксирована, что влечет $\mathbf{r} = \text{const}$ и $r = \text{const}$. Отсюда и из постоянства $\mathbf{a}$ вытекает $\gamma = \text{const}$.

Зададим в пространстве M неподвижный ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ с началом в точке C , который будем называть *абсолютным*. В нем: $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы;

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \mathbf{a}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}, \quad (18.7)$$

где γ , $\mathbf{r}$ и r определены выше ($\sin \gamma \neq 0$, так как $\gamma \in (0, \pi)$); $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения частицы ($\mathbf{a} \in \Gamma_x$); $\times$ — знак векторного умножения в Γ_x (предполагается, что эта операция определена по правилу правого винта; вследствие этого, $\mathbf{a}_2$ — вектор, а не псевдовектор). Легко убедиться в том, что $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \subset \Gamma_x$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = -1$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$). Значит, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — ортонормированный правоориентированный базис в Γ_x . Благодаря постоянству величин $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}$, r и γ , векторы $\mathbf{a}_i$ не зависят от движения частицы. Отсюда и из фиксированности вектора $\mathbf{i}$ и точки C , являющейся началом базиса, следует, что базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ действительно неподвижный. Он ортонормированный, ибо $|\mathbf{i}| = 1$, $\mathbf{i} \perp \Gamma_x$ и $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — ортонормированный базис в Γ_x .

Из (18.7) вытекает равенство

$$\mathbf{r} = r(\sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3); \quad (18.8)$$

векторы $\mathbf{a}_i$ специально выбраны такими, чтобы выполнялось (18.8).

Выражение (14.4) (с. 535), задающее собственное поле частицы F_s , содержит интеграл по участку мировой линии L_x , определяемому следующим условием: при каждом расположении частицы с центром на L_x имеется по крайней мере одна винтовая нить радиуса r_0 , участок которой, находящийся в будущем по отношению к центральному сечению частицы, проходит через точку наблюдения x , причем при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет. Переменная l , по которой ведется интегрирование в (14.4), является координатой центра частицы на мировой линии L . В рассматриваемом нами случае, когда $L = T$, переменная l совпадает с координатным временем центра частицы, поэтому в данном случае можно трактовать переменную l как координатное время (измеряемое в единицах длины, см. (18.5)).

Рассчитаем собственное поле F_s для трех возможных состояний частицы (причем будем полагать, что эти состояния не меняются при движении частицы):

- а) ни один из лучей частицы не переориентирован;
- б) все лучи являются переориентированными;
- в) переориентирована половина лучей в соответствии с условием, принятым в разд. 5 (с. 444; это условие повторено ниже).

В первых двух случаях поле F_s может быть рассчитано непосредственно с помощью формулы (14.4). В третьем случае эта формула требует уточнения, так как бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ может иметь в данном случае разный вид при разных значениях переменной ζ .

Напомним условие переориентации лучей, принятое в разд. 5.

Условие переориентации лучей. Пусть частица находится в исходном состоянии, когда она симметрична относительно любых пространственных поворотов, сохраняющих вектор $\mathbf{i}$. Зафиксируем в собственном физическом пространстве частицы G_* произвольный единичный вектор $\mathbf{k}$ с началом в центре частицы O . Лучи частицы, псевдовекторы спинов которых образуют с $\mathbf{k}$ углы, лежащие в промежутке $(\pi/2, \pi]$, подвергаются переориентации, а лучи, спины которых образуют с $\mathbf{k}$ углы из промежутка $[0, \pi/2)$, остаются без изменения. Назовем вектор $\mathbf{k}$ вектором переориентации.

Лучи, спины которых образуют с вектором $\mathbf{k}$ угол $\pi/2$, не влияют на спин частицы, поэтому не имеет значения, переориентированы они или нет. Без учета этих лучей количество переориентированных лучей совпадает с количеством непереориентированных лучей, вследствие сферической симметрии центрального сечения частицы (в исходном ее состоянии).

Поскольку в рассматриваемом случае $G_* = G$, то можно считать, что вектор переориентации $\mathbf{k}$ лежит в G_{l_x} и имеет начало в точке C .

Упростим ситуацию. Допустим, что вектор $\mathbf{k}$ не меняется при движении частицы и совпадает с направляющим ортом оси вращения частицы $\mathbf{a}$, введенном зависимостями (18.2). В этом случае с учетом определения вектора $\mathbf{k}$ имеем:

$$\mathbf{k} = \text{const}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0; \quad \mathbf{k} = \mathbf{a}. \quad (18.9)$$

Заметим, что если частица не вращается, то не имеется объективно выделенного вектора $\mathbf{a}$. Тогда в качестве вектора $\mathbf{k}$ может быть принят произвольный мнимоединичный вектор из L_{i_x} . В таком случае удобно строить абсолютный базис, пользуясь формулами (18.6) и (18.7) с заменой в них вектора $\mathbf{a}$ на $\mathbf{k}$ (при этом будет, в частности, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}$ и γ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}$).

Обратимся к формулам (3.6) и (5.28) из разд. 3 и 5, задающим спин луча в непереориентированном и переориентированном состояниях луча (с. 417, 435). Согласно этим формулам, если угловая скорость вращения лучей ω положительна и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — правоориентированный базис в L_* , то спин луча в непереориентированном и переориентированном состояниях луча сонаправлен и противоположен вектору $\mathbf{e}_3$ соответственно (векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в поперечном сечении луча, вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален поперечному сечению луча). Вектор $\mathbf{e}_3$ обозначается также символом $\mathbf{n}$.

Здесь необходимо сделать уточнение. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, построенный в разд. 16, является правоориентированным (см. комментарий к формуле (16.18) с учетом $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$, с. 578). Однако угловая скорость ω может иметь разные знаки в разных ситуациях. Дело в следующем.

Рассмотрим луч частицы с позиции системы отсчета, скрепленной с остовом частицы. В ней направляющий орт оси симметрии частицы $\mathbf{i}$, направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$ и угол φ между ними являются фиксированными величинами. По принятым в разд. 16 условиям (с. 576), вектор $\mathbf{n}$ ($= \mathbf{e}_3$) обеспечивает выполнение равенства (16.16): $\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}$. Из этого равенства следует $\mathbf{n} = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0 - \frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i}$, поэтому фиксированность $\mathbf{i}$, $\mathbf{q}_0$ и φ влечет фиксированность вектора $\mathbf{n}$. Данный факт вместе со свойством правоориентированности базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ задает ориентацию базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Последнее означает, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ расположены в этой плоскости так, что при взгляде на них с конца вектора $\mathbf{n}$ кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ осуществляется в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки.

Фиксированность ориентации базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ и фиксированность вектора $\mathbf{q}_0$ определяют ориентацию базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, содержащем луч.

Утверждение. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ имеет ту же ориентацию, что и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, то есть он правоориентированный.

Именно такая ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ показана на рис. 10.2, с. 466.

Доказательство. Введем векторы

$$\mathbf{i}^* = \mathbf{i}; \quad \mathbf{e}_1^* = -\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{n}^* = -\mathbf{n}.$$

Пользуясь определением взаимного базиса (с. 29) и ортонормированностью базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, легко убедиться в том, что четверка векторов $\{\mathbf{i}^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{n}^*\}$ образует базис, взаимный к $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$.

Построим тензор (оператор)

$$A = \mathbf{i}\mathbf{i}^* + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* + \text{ch } \varphi \mathbf{i}\mathbf{n}^* + \text{sh } \varphi \mathbf{n}\mathbf{n}^*.$$

Действуя тензором A на векторы базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, получаем:

$$A \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i}; \quad A \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1; \quad A \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2; \quad A \cdot \mathbf{n} = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n} = \mathbf{q}_0.$$

Отсюда видно, что тензор A переводит векторы базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ в векторы базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ (этот базис не ортогональный, так как $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} = \text{ch } \varphi \neq 0$).

Напомним, что определителем тензора называется определитель матрицы его компонент в смешанном диадном базисе (см. с. 32). На основании выписанной выше формулы для тензора A имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \text{ch } \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sh } \varphi \end{vmatrix} = \text{sh } \varphi > 0 \quad (\text{ибо } \varphi > 0).$$

Поскольку преобразование базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ в базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ осуществляется тензором A , имеющим положительный определитель, то ориентации обоих базисов одинаковы. А так как вектор $\mathbf{i}$ входит в оба базиса, то одинаковы ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ в Γ_* и ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в $C_{\mathbf{q}_0}$. Поэтому базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, как и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, правоориентированный. ■

Ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ может оказаться как совпадающей, так и не совпадающей с ориентацией винтовых нитей луча (определение совпадения этих ориентаций приведено в разд. 10, с. 467). Угловая скорость вращения луча o рассчитывается, по определению, относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ (см. разд. 11, с. 485). В разд. 10 было принято условие, согласно которому каждая нить частицы пересекает собственное физическое пространство частицы Γ_* все время в одной и той же

его точке. При этом условие угловая скорость o отрицательна в случае совпадения ориентаций базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и нитей и положительна при несовпадении их ориентаций (см. в разд. 10 неравенство (10.17) на с. 474 с учетом правила выбора знака, с. 467).

На основании сказанного заключаем, что псевдовекторы спина луча в непереориентированном и переориентированном состояниях, задаваемые формулами (3.6) и (5.28), могут быть записаны в следующем виде:

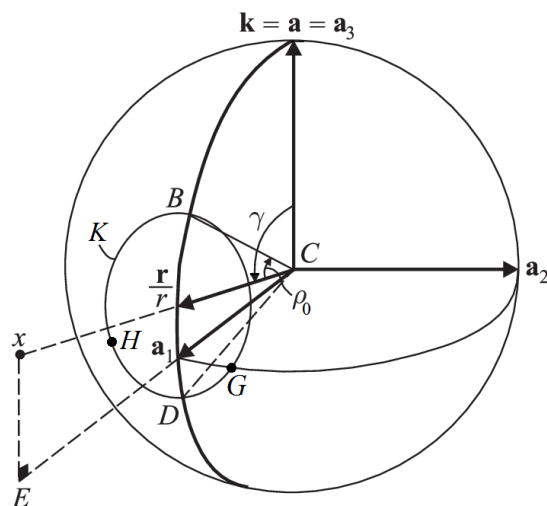
$$\bar{K}_* = \mp n_* m_* |o| r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \Delta \mathbf{e}_3; \quad \bar{K}'_* = \pm n_* m_* |o| r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \Delta \mathbf{e}_3, \quad (18.10)$$

где угловая скорость o заключена под знак модуля, а для учета двух возможных ее знаков поставлены двойные знаки $\mp$ и $\pm$; верхние знаки отвечают случаю, когда ориентации базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовых нитей совпадают, нижние знаки — когда они не совпадают (см. правило выбора знака, с. 467); все буквенные обозначения имеют здесь тот же смысл, что в формулах (3.6) и (5.28) (с. 417, 435). Аналогичные преобразования должны быть произведены и при представлении спина луча в форме антисимметричного тензора (см. (3.6) и (5.28)). Отметим, что в (18.10) псевдоскаляр Δ равен единице, так как базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный, однако изъять его из равенств нельзя, потому что псевдовектор не может равняться вектору.

Дальнейшие рассуждения будем вести *для случая, когда в равенствах (18.10) стоят верхние знаки*. В случае нижних знаков нужно в последующих утверждениях поменять местами прилагательные «переориентированный» и «непереориентированный», относящиеся к лучам.

Если условие переориентации лучей (с. 612) выполняется, то лучи, для которых вектор $\mathbf{e}_3 (= \mathbf{n})$ образует с $\mathbf{k}$ угол из промежутка $(\pi/2, \pi]$, имеют исходную ориентацию, а лучи, для которых этот угол принадлежит промежутку $[0, \pi/2)$, являются переориентированными. Это означает, что концы векторов $\mathbf{n}$ переориентированных и непереориентированных лучей находятся на противоположных полусферах единичной сферы (лежащей в физическом пространстве Γ_* и имеющей центр в центре частицы). При $\mathbf{k} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}_3$ границей раздела этих полусфер служит плоскость $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\} = \text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, где $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — введенный выше абсолютный базис (см. (18.7)).

Исследуем вариант взаимного расположения вектора переориентации $\mathbf{k}$ и точки наблюдения x , при котором среди лучей, порождающих поле F_s в точке x , имеются как непереориентированные, так и переориентированные лучи (рис. 18.1).



Точка наблюдения x находится на прямой, содержащей вектор $\mathbf{r}/r$ (так как $\vec{Cx} = \mathbf{r}$); K — окружность на единичной сфере, на которой находятся концы векторов $\mathbf{n}$ лучей, порождающих поле F_s в точке x (плоскость залегания окружности ортогональна прямой Cx , центр окружности находится на этой прямой; ср. с рис. 16.4, с. 582); B и D — точки пересечения окружности K с плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$; считается, что $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения частицы. Ситуация, когда среди лучей, порождающих поле F_s в точке x , имеются и непереориентированные, и переориентированные лучи, реализуется в том и только том случае, если точки B и D принадлежат разным полусферам, разделенным плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, то есть если одновременно выполняются неравенства $\gamma > \pi/2 - \rho_0$ и $\gamma < \pi/2 + \rho_0$ (что эквивалентно условию (18.11)). Расстояние между точкой наблюдения x и плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ есть $|xE| = r |\sin(\pi/2 - \gamma)|$, где xE — нормаль к $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $r = |Cx|$.

Лучи, порождающие собственное поле частицы F_s в точке x , характеризуются тем, что их векторы $\mathbf{n}$ наклонены по отношению к вектору $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$ на угол ρ_0 (см. рис. 16.1 и 16.4, с. 567, 582). Поскольку вектор $\mathbf{r}$, в свою очередь, наклонен относительно вектора $\mathbf{a}$ на угол γ , то,

как видно из рис. 18.1, при выполнении условия

$$\frac{\pi}{2} - \rho_0 < \gamma < \frac{\pi}{2} + \rho_0 \quad (18.11)$$

концы векторов $\mathbf{n}$ разных лучей принадлежат разным полусферам, разделенным плоскостью $Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. Это означает, что при выполнении (18.11) среди лучей, которые порождают поле F_s в точке x , некоторая часть оказывается переориентированной, тогда как другая часть остается непереориентированной. Если же $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2} - \rho_0)$, то все лучи, создающие поле F_s в точке x , являются переориентированными. А при $\gamma \in (\frac{\pi}{2} + \rho_0, \pi)$, наоборот, все такие лучи — непереориентированные (здесь $\rho_0 \in (0, \pi/2)$, см. (16.4), с. 569).

Мы исследуем случай, когда в (18.10) стоят верхние знаки и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$. В таком случае, по условию переориентации лучей (с. 612), те лучи, для которых выполняется неравенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$, являются переориентированными, а лучи, для которых $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$, оказываются непереориентированными (здесь знаки неравенств учитывают отрицательную определенность метрической формы в Γ_x ; в первом случае вектор $\mathbf{n}$ направлен в сторону той полусферы, которой принадлежит конец вектора $\mathbf{k}$, во втором случае — в сторону противоположной полусферы). Из выражения (16.34) (с. 582) и зависимостей $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = -1$, $\rho_0 \in (0, \pi/2)$ и $\gamma \in (0, \pi)$ вытекает, что неравенства $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ эквивалентны соответственно неравенствам

$$\cos \zeta < \operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma \quad \text{и} \quad \cos \zeta > \operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma. \quad (18.12)$$

Найдем интервал изменения величины, стоящей справа в неравенствах (18.12). Для этого запишем двойное неравенство (18.11) в форме

$$-\rho_0 < \frac{\pi}{2} - \gamma < \rho_0; \quad (18.13)$$

отметим, что эта зависимость эквивалентна $(\frac{\pi}{2} - \gamma) \in (-\rho_0, \rho_0)$, откуда с учетом $\rho_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ следует $(\frac{\pi}{2} - \gamma) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Выразим в интересующей нас величине один из котангенсов через тангенс дополнительного угла: $\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma)$. Учитывая (18.13), положительность $\operatorname{ctg} \rho_0$ при $\rho_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и возрастание тангенса на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, можем записать:

$$\operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \in \left(\operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{tg}(-\rho_0), \operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{tg} \rho_0\right) = (-1, 1),$$

значит, $\operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma \in (-1, 1)$. Это позволяет ввести величину

$$\zeta_0 = \arccos(\operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma), \quad \zeta_0 \in (0, \pi). \quad (18.14)$$

Запишем с ее помощью неравенства (18.12) в виде

$$\cos \zeta < \cos \zeta_0 \quad \text{и} \quad \cos \zeta > \cos \zeta_0, \quad (18.15)$$

здесь первое неравенство относится к переориентированным лучам, а второе — к непереориентированным лучам.

Поясним неравенства (18.15). Переменная ζ является одной из угловых координат вектора $\mathbf{n}$ в базисе $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, она отсчитывается от вектора $\mathbf{c}_1$ в направлении к $\mathbf{c}_2$ и принимает значения в интервале $(-\pi, \pi]$ (см. с. 581 и рис. 16.4 на с. 582).

Из (16.33) и рис. 16.4 можно заключить, что при $\zeta = 0$ конец вектора $\mathbf{n}$ совпадает с точкой окружности K , которая принадлежит плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\}$ и находится между концами векторов $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_3$ (так как $\rho_0 \in (0, \pi/2)$). Векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_3$, по определению (16.15) (с. 575), представляют собой линейные функции векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$, поэтому $\text{Lin}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\} = \text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$. Значит, на рис. 18.1 конец вектора $\mathbf{n}$ находится при $\zeta = 0$ в точке окружности K , которая принадлежит плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$. А так как конец вектора $\mathbf{n}$ находится между концами векторов $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_3$, то из сравнения рис. 16.2 (с. 575) с рис. 18.1 (с учетом $\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{c}_3$) следует, что конец вектора $\mathbf{n}$ располагается «южнее» конца вектора $\frac{\mathbf{r}}{r}$. Это — точка D . При возрастании ζ от 0 до π конец вектора $\mathbf{n}$ перемещается от точки D по полуокружности DGB до точки B . Убедиться в том, что он движется именно по этой полуокружности, можно путем сравнения рис. 18.1 с рис. 16.4 (с. 582), если учесть, что $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \text{Lin}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\}$ и $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_2$ (см. (16.15), с. 575). При уменьшении ζ от 0 до $-\pi$ конец вектора $\mathbf{n}$ движется от точки D до точки B по полуокружности DHB .

На рис. 18.1 буквами G и H отмечены точки пересечения окружности K с плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. Эти точки симметричны друг другу относительно плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$. Из ранее сказанного вытекает, что на дуге HDG находятся концы векторов $\mathbf{n}$ непереориентированных лучей, а на дуге GBH концы векторов $\mathbf{n}$ переориентированных лучей. В точках G и H , разделяющих эти два множества лучей, выполняется, согласно (18.15), равенство $\cos \zeta = \cos \zeta_0$. В силу $\zeta \in (-\pi, \pi]$ и $\zeta_0 \in (0, \pi)$, это равенство влечет $\zeta = \pm \zeta_0$. Так как угол ζ принимает в точке H отрицательное значение, а в точке G положительное значение, то приходим к выводу, что $\zeta = -\zeta_0$ в точке H и $\zeta = \zeta_0$ в точке G .

Итак, если выполняются условие (18.11) и условие переориентации лучей (при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$), то лучи, создающие поле F_s в точке x , являются при $\zeta \in (-\pi, -\zeta_0) \cup (\zeta_0, \pi]$ переориентированными, а при $\zeta \in (-\zeta_0, \zeta_0)$ непереориентированными.

Теорема 18.1. Если выполняется условие (18.11), то точка наблюдения x находится в Γ_{l_x} внутри плоского слоя, который имеет полутолщину $r_* + p_*$ и срединную плоскость $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, проходящую через точку $C = \Gamma_{l_x} \cap T$.

Доказательство. Расстояние между точкой x и содержащейся в Γ_{l_x} плоскостью $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\} = Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\} = Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, проходящей через C , равняется $r|\sin(\pi/2 - \gamma)|$ (в этом можно убедиться с помощью рис. 18.1, если принять во внимание, что $\vec{Cx} = \mathbf{r}$, $|Cx| = r$ и $xE \perp CE$). Поскольку условие (18.11) влечет (18.13), то при его выполнении указанное расстояние принимает значение в промежутке $[0, r \sin \rho_0]$. А так как $\sin \rho_0 = r_0/r$ (в силу (16.4), с. 569) и $\sup r_0 = r_* + p_*$, то это расстояние меньше, чем $r_* + p_*$. Следовательно, при выполнении условия (18.11) точка x обязательно находится на расстоянии от плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, меньшем $r_* + p_*$, значит, она действительно находится внутри плоского слоя, принадлежащего Γ_{l_x} , имеющего срединную плоскость $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ и полутолщину $r_* + p_*$. ■

Преобразуем выражение (14.4) (с. 535), задающее собственное поле частицы F_s , применительно к случаю, когда выполняются условие переориентации лучей (при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$) и условие (18.11). В этом случае определена величина $\zeta_0 \in (0, \pi)$ (см. (18.14)) и, согласно сделанному выше выводу, лучи, создающие поле F_s в точке x , являются переориентированными при $\zeta \in (-\pi, -\zeta_0) \cup (\zeta_0, \pi]$ и непереориентированными при $\zeta \in (-\zeta_0, \zeta_0)$. На основании данного вывода и указанного в конце разд. 16 (с. 594) способа перехода от интегрирования по l к интегрированию по φ (включая формулу (16.53) и условие $\varphi \in (0, +\infty)$) приводим выражение (14.4) к виду

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi n_* N_*} \int_{(r_0)} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \tilde{\varepsilon}_{r_0} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\text{sh}^2 \varphi} \left[\int_{-\pi}^{-\zeta_0} \mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}' d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\pi} \mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}' d\zeta \right] d\varphi dr_0, \quad (18.16)$$

где несобственный интеграл по φ представлен, по определению, как предел интеграла, взятого по конечному промежутку; использована независимость $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$, r_0 , r и φ от ζ ; штрихами помечены величины, относящиеся к переориентированным лучам.

Формула (18.16) получена для случая, когда соблюдаются условие переориентации лучей (при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$) и условие (18.11). Первое из них

разбивает множество лучей на переориентированные и непереориентированные. Второе условие значительно сужает область возможного нахождения точки x относительно частицы (см. теорему 18.1).

Вместе с тем формула (18.16) может быть применена также в некоторых случаях, когда эти условия нарушаются. Во-первых, она сохраняет силу, если ни один из лучей частицы не переориентирован. В таком случае следует положить в ней чисто формально $\zeta_0 = \pi$, что вернет ее к виду (14.4) (с точностью до замены переменной интегрирования l на φ). Во-вторых, данная формула остается верной, если все лучи частицы являются переориентированными. Этот случай она описывает при формальной подстановке в нее значения $\zeta_0 = 0$. При таком значении ζ_0 она вновь приобретает вид (14.4), но с заменой бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ бивектором $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$, относящемся к переориентированному лучу. В обоих случаях точка наблюдения x может находиться в произвольном месте пространства M (удовлетворяющем только принятым ограничениям $x \notin T$ и $\mathbf{r} \nparallel \mathbf{a}$). В-третьих, формула (18.16) остается в силе в случае, когда условие переориентации лучей выполняется, а условие (18.11) не выполняется. Последнее означает, что точка x расположена таким образом, что соблюдается либо $\gamma \in (0, \pi/2 - \rho_0)$, либо $\gamma \in (\pi/2 + \rho_0, \pi)$. В первой из этих ситуаций все лучи, создающие поле F_s в точке x , являются переориентированными, поэтому следует положить $\zeta_0 = 0$ в (18.16). При второй ситуации все такие лучи являются непереориентированными, поэтому нужно принять, что $\zeta_0 = \pi$.

Таким образом, формула (18.16) может быть использована для расчета поля F_s при всех трех интересующих нас состояниях частицы: когда ни один из лучей частицы не переориентирован, когда все лучи переориентированы и когда переориентирована половина лучей в соответствии со сформулированным выше условием (при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$).

Внимание! Формула (18.16) выведена для случая, когда в равенствах (18.10) стоят верхние знаки. В случае нижних знаков нужно поменять местами в (18.16) бивекторы $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ и $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$ и поменять местами в обсуждении формулы (18.16) прилагательные «переориентированный» и «непереориентированный», относящиеся к лучам.

Вычислим собственное поле частицы F_s .

Напомним, что бивектор $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$, относящийся к переориентированному лучу, получается из $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ заменой в формуле (16.51) знака $\pm$ знаком $\mp$ (см. пояснение к (16.51), с. 592). Внесем в формулу для бивектора $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$ знак минус в первые фигурные скобки. Тогда перед этими скобками будет стоять в случае $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$ тот же множитель $\pm \beta_0 / \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$, что и в случае $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$.

Подставим в формулу (18.16) значение (16.51) бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ и значение бивектора $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$, полученное из (16.51) указанным способом. Вычислим сначала три интеграла по переменной ζ , заключенные в (18.16) в квадратные скобки. Так как в (16.51) все бивекторы и скалярные величины (за исключением ζ), не зависят от ζ , то вынесем их из-под знаков интегралов. Тогда под знаками интегралов останутся только функции переменной ζ . Во втором из этих интегралов промежуток интегрирования $[-\zeta_0, \zeta_0]$ и объединение промежутков интегрирования первого и третьего интегралов $[-\pi, -\zeta_0] \cup [\zeta_0, \pi]$ симметричны относительно точки $\zeta = 0$, поэтому интегралы по этим промежуткам от нечетных функций $\sin \zeta$ и $\sin \zeta \cos \zeta$ равны нулю. Это существенно упрощает выражение для поля F_s .

Отметим, что в (16.51) во вторых фигурных скобках стоит выражение, которое не зависит от переориентации лучей, поэтому сумма трех интегралов по ζ от этого выражения равняется одному интегралу, взятому по промежутку $[-\pi, \pi]$. Такой интеграл от функций $\sin \zeta$, $\cos \zeta$ и $\sin \zeta \cos \zeta$ равен нулю, что также упрощает выражение для F_s .

После интегрирования по ζ , подстановки значения (15.57) плотности нитей $\tilde{\varepsilon}_{r_0}$ (с. 564) и очевидных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
 F_s(x) = & \frac{a}{2\pi n_* N_*} \int_{(r_0)} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \frac{N \tilde{N}_{r_0} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} \cos \rho_0}{R^3 Z(1)} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\text{sh}^2 \varphi} \times \\
 & \times \left\{ \pm \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[4 \sin \zeta_0 \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 + \right. \right. \\
 & + \left(r_0 \frac{\Omega}{c} \cos \rho_0 \sin \gamma - Q \frac{\Omega}{c} \text{sh} \varphi \sin \rho_0 \sin \gamma \right) (2\zeta_0 - \pi - \sin(2\zeta_0)) \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \Big] + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[2\pi \text{sh} \varphi \cos \rho_0 \sin \gamma \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{i} + \right. \\
 & + 2\pi \left(r_0 \frac{\Omega}{c} \text{ch} \varphi \sin \rho_0 \sin \gamma + Q \frac{\Omega}{c} \text{sh} \varphi \text{ch} \varphi \cos \rho_0 \sin \gamma \right) \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 - \\
 & - 2\pi \text{sh} \varphi \cos \rho_0 \cos \gamma \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 + \\
 & + \left(\pi r_0 \frac{\Omega}{c} \text{sh} \varphi \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin^2 \gamma - \pi Q \frac{\Omega}{c} \text{sh}^2 \varphi \sin^2 \rho_0 \sin^2 \gamma - \right. \\
 & \left. \left. - 2\pi r_0 \frac{\Omega}{c} \text{sh} \varphi \sin \rho_0 \cos \rho_0 \cos^2 \gamma + 2\pi Q \frac{\Omega}{c} \text{sh}^2 \varphi (1 - \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma) \right) \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\pi r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma - \pi Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi \sin^2 \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma + \right. \\
& \quad + 2\pi r_0 \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma + \\
& \quad \left. + 2\pi Q \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh}^2 \varphi \cos^2 \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \right) \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \Big] \Big\} d\varphi dr_0. \quad (18.17)
\end{aligned}$$

Из теоремы 16.1 (с. 568) следует, что для каждого расположения частицы в пространстве M все лучи, нити которых радиуса r_0 проходят через точку наблюдения x , характеризуются тем, что расстояние $|Q|$ между центром частицы и точкой пересечения оси луча с гиперплоскостью Γ_{l_x} одинаково. Мы рассматриваем ситуацию, когда точка x находится в будущем относительно центра частицы, поэтому ее временная координата l_x превышает временную координату l центра частицы ($l_x > l$). В таком случае вектор $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$ сонаправлен вектору $\mathbf{q}_0$, значит, $Q > 0$ (см. рис. 16.1, с. 567). Следовательно, $|Q| = Q$.

В формуле (15.57), примененной в (18.17), расстояние $|Q|$, о котором идет речь, обозначено буквой R , поэтому $R = |Q| = Q$. Из рис. 16.1 и формулы (16.5) (с. 569) находим:

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{r_A}{Q} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{Q}.$$

Отсюда и из равенства $R = Q$ имеем:

$$R = Q = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{sh} \varphi}. \quad (18.18)$$

Подставим в формулу (18.17) значение (18.18) величин R и Q , сократим дроби на $\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$, $\sqrt{r^2 - r_0^2}$, $\operatorname{sh}^2 \varphi$ и вынесем за знаки интегралов те величины, которые не зависят от переменных интегрирования. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
F_s(x) = & \frac{aN}{2\pi n_* N_* Z(1)} \int_{(r_0)}^{\tilde{N}_{r_0} \cos \rho_0} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh} \varphi \times \\
& \times \left\{ \pm 4\beta_0 \sin \zeta_0 \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \pm \right. \\
& \left. \pm \beta_0 \frac{\Omega}{c} \sin \gamma \left(r_0 \cos \rho_0 - \sqrt{r^2 - r_0^2} \sin \rho_0 \right) \left(2\zeta_0 - \pi - \sin(2\zeta_0) \right) \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\pi \operatorname{sh} \varphi \cos \rho_0 \sin \gamma \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{i} + \\
& + 2\pi \frac{\Omega}{c} \operatorname{ch} \varphi \sin \gamma \left(r_0 \sin \rho_0 + \sqrt{r^2 - r_0^2} \cos \rho_0 \right) \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 - \\
& - 2\pi \operatorname{sh} \varphi \cos \rho_0 \cos \gamma \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_3 + \\
& + \pi \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \left[r_0 \sin \rho_0 \cos \rho_0 (\sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{r^2 - r_0^2} (-\sin^2 \rho_0 \sin^2 \gamma + 2 - 2 \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma) \right] \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 - \\
& - \pi \frac{\Omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \gamma \cos \gamma \left[3r_0 \sin \rho_0 \cos \rho_0 + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{r^2 - r_0^2} (2 \cos^2 \rho_0 - \sin^2 \rho_0) \right] \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \Big\} d\varphi dr_0. \quad (18.19)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (16.4) (с. 569):

$$\rho_0 = \arcsin \frac{r_0}{r}, \quad \text{где } \rho_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad r > r_0 > 0. \quad (18.20)$$

Из (18.20) находим:

$$\sin \rho_0 = \frac{r_0}{r}; \quad \cos \rho_0 = +\sqrt{1 - \sin^2 \rho_0} = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r},$$

откуда

$$\sin \rho_0 = \frac{r_0}{r}; \quad \cos \rho_0 = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r}. \quad (18.21)$$

Преобразуем с помощью (18.21) некоторые слагаемые в (18.19). Начнем с одного из множителей при бивекторе $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3$:

$$r_0 \cos \rho_0 - \sqrt{r^2 - r_0^2} \sin \rho_0 = r_0 \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} - \sqrt{r^2 - r_0^2} \frac{r_0}{r} = 0,$$

поэтому

$$(\text{слагаемое, содержащее } \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3) = \hat{0}. \quad (18.22)$$

В (18.19) имеются два слагаемых, включающих бивектор $\mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2$. Множитель при втором из них, заключенный в скобки, может быть преобразован так:

$$r_0 \sin \rho_0 + \sqrt{r^2 - r_0^2} \cos \rho_0 = \frac{r_0^2}{r} + \frac{r^2 - r_0^2}{r} = r,$$

следовательно,

$$(\text{второе из слагаемых, содержащих } \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2) = 2\pi r \frac{\Omega}{c} \operatorname{ch} \varphi \sin \gamma \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2. \quad (18.23)$$

Теперь преобразуем множитель в квадратных скобках при $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$. Применяя равенство $\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$ и формулы (18.21), имеем:

$$\begin{aligned} & r_0 \sin \rho_0 \cos \rho_0 (1 - 3 \cos^2 \gamma) + \\ & + \sqrt{r^2 - r_0^2} (-\sin^2 \rho_0 + \sin^2 \rho_0 \cos^2 \gamma + 2 - 2 \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma) = \\ = & \frac{r_0^2 \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \gamma) + \\ & + \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r^2} [-r_0^2 + (r_0^2 - 2r^2 + 2r_0^2) \cos^2 \gamma + 2r^2] = 2 \sin^2 \gamma \sqrt{r^2 - r_0^2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$(\text{слагаемое, содержащее } \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = 2\pi \frac{\Omega}{c} \sin^2 \gamma \sqrt{r^2 - r_0^2} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2. \quad (18.24)$$

Для множителя в квадратных скобках при $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3$ находим:

$$\begin{aligned} & 3r_0 \sin \rho_0 \cos \rho_0 + \sqrt{r^2 - r_0^2} (2 \cos^2 \rho_0 - \sin^2 \rho_0) = \\ = & 3 \frac{r_0^2 \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r^2} + \sqrt{r^2 - r_0^2} \left(2 \frac{r^2 - r_0^2}{r^2} - \frac{r_0^2}{r^2} \right) = 2 \sqrt{r^2 - r_0^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & (\text{слагаемое, содержащее } \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) = \\ = & -2\pi \frac{\Omega}{c} \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{r^2 - r_0^2} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Подставим в (18.19) найденные значения слагаемых (18.22) – (18.25) и значение $\cos \rho_0$ из (18.21):

$$\begin{aligned} F_s(x) = & \frac{aN}{2\pi n_* N_* r Z(1)} \int_{(r_0)}^{\tilde{N}_{r_0}} \frac{\tilde{N}_{r_0}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh} \varphi \times \\ & \times \left\{ \pm 4\beta_0 \sin \zeta_0 \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 + \right. \\ & + 2\pi \operatorname{sh} \varphi \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} (\sin \gamma \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{i} + \cos \gamma \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{i}) + \\ & + 2\pi r \frac{\Omega}{c} \operatorname{ch} \varphi \sin \gamma \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 + 2\pi \frac{\Omega}{c} \sin^2 \gamma \sqrt{r^2 - r_0^2} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 - \\ & \left. - 2\pi \frac{\Omega}{c} \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{r^2 - r_0^2} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \right\} d\varphi dr_0. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Интегрирование в (18.26) проводится по переменным r_0 и φ . От них зависят β_0 (см. (13.24), с. 531) и ζ_0 , причем ζ_0 зависит лишь от r_0 (опосредованно через ρ_0 , см. (18.14) и (18.20)). Учитывая это и то, что из (18.8) следует $\mathbf{r}/r = \sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3$, приведем формулу (18.26) к виду

$$\begin{aligned}
 F_s(x) = & \pm \frac{2aN}{\pi n_* N_* r Z(1)} \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \int_{(r_0)} \frac{\tilde{N}_{r_0} \sin \zeta_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left[\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \beta_0 \operatorname{sh} \varphi d\varphi \right] dr_0 + \\
 & + \frac{aN}{n_* N_* r Z(1)} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \frac{1}{r} \int_{(r_0)} \tilde{N}_{r_0} dr_0 \left[\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi \right] + \right. \\
 & + r \frac{\Omega}{c} \sin \gamma \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \int_{(r_0)} \frac{\tilde{N}_{r_0}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \left[\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi \right] + \\
 & \left. + \frac{\Omega}{c} \sin \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{a}_2 \int_{(r_0)} \tilde{N}_{r_0} dr_0 \left[\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi \right] \right\}. \quad (18.27)
 \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования проведем с помощью формул, полученных ранее.

В разд. 10 были рассмотрены три варианта угловой скорости вращения лучей и найдены отвечающие им три варианта значений параметра β_0 . Формулы (10.30), задающие β_0 , повторены в разд. 13 под номером (13.24) (с. 531). Запишем их в виде одной формулы, в которой $\diamond$ — числовой коэффициент, имеющий три возможных значения:

$$\beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*} \right)} \quad (\text{где } \diamond = -1, 0, 1). \quad (18.28)$$

Подстановка в первое слагаемое в (18.27) параметра β_0 из (18.28) позволяет записать это слагаемое в форме

$$\frac{\pm 2aN}{\pi n_* N_* r Z(1) r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*} \right)} \mathbf{i} \wedge \mathbf{a}_2 \int_{(r_0)} \frac{r_0 \tilde{N}_{r_0} \sin \zeta_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \left[\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi \right]. \quad (18.29)$$

Величина $Z(1)$, входящая в (18.27), задается формулой (15.47):

$$Z(1) = 4\pi \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi. \quad (18.30)$$

Из (18.27), (18.29) и (18.30) вытекает, что каждое слагаемое в (18.27) содержит отношение пределов двух функций при $\Phi \rightarrow +\infty$. Заменим отношение пределов функций пределом их отношения. Тогда каждое слагаемое будет содержать один из двух пределов:

$$\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi}{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} \quad \text{или} \quad \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi}{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi}. \quad (18.31)$$

Теорема 18.2. *Пределы (18.31) равны единице.*

Доказательство. Дробь, стоящая под знаком первого предела, равна единице, поэтому и сам предел равен единице.

Согласно свойствам гиперболических функций (см. с. 186), выполняются равенства

$$\int \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \operatorname{ch}(2\varphi) + C; \quad \int \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\varphi) - \frac{1}{2} \varphi + C,$$

где $\varphi \in (-\infty, +\infty)$; C — произвольная постоянная. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi}{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} &= \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4} \operatorname{ch}(2\Phi) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\Phi) - \frac{1}{2} \Phi} = \\ &= \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(2\Phi) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(2\Phi)}\right)}{\operatorname{sh}(2\Phi) \left(1 - \frac{2\Phi}{\operatorname{sh}(2\Phi)}\right)} = \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \operatorname{th}^{-1}(2\Phi) = 1, \end{aligned}$$

где применены известные значения пределов: $\operatorname{ch} \varphi \rightarrow +\infty$, $\frac{\varphi}{\operatorname{sh} \varphi} \rightarrow 0$, $\operatorname{th} \varphi \rightarrow 1$ при $\varphi \rightarrow +\infty$. Таким образом, второй предел в (18.31) тоже равен единице. ■

Повторим сказанное в конце разд. 6 главы 4 (с. 355) и в конце разд. 12 настоящей главы (с. 517). Замена отношения пределов функций пределом

их отношения, осуществленная выше, не является вполне корректной процедурой с точки зрения классического математического анализа, из-за бесконечного значения пределов. Однако будем считать эту замену допустимой. Возможно, что указанную некорректность можно «обойти» в рамках нестандартного анализа [24], если принять, что величина Φ в (18.27) есть бесконечно большое гипердействительное число. В этом случае предельные переходы в числителе и знаменателе этой формулы окажутся ненужными, поэтому производить такое некорректное преобразование не потребуется.

Из (18.7) и (18.9) находим:

$$\mathbf{a}_2 = \Delta \mathbf{a} \times \mathbf{a}_1 = \Delta \frac{1}{\sin \gamma} \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = \Delta \frac{1}{\sin \gamma} \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (18.32)$$

где $\times$ — знак векторного умножения в физическом пространстве L_x ; Δ — единичный псевдоскаляр ($\Delta = 1$, если операция векторного умножения определена по правилу правого винта, и $\Delta = -1$, если эта операция определена по правилу левого винта); в формуле (18.7) псевдоскаляр Δ отсутствует, так как в пояснении к ней оговорено, что операция векторного умножения определена по правилу правого винта.

Произведение aN имеет значение (14.2) (с. 533):

$$aN = 4\pi e \quad (\text{в системе СГС}). \quad (18.33)$$

Преобразуем выражение (18.27) с помощью формул (18.29), (18.30), (18.32), (18.33) и теоремы 18.2, кроме того, переставим местами первое и второе слагаемые и третье и четвертое слагаемые:

$$\begin{aligned} F_s(x) = & \frac{e}{n_* N_* r^2} \int_{(r_0)} \tilde{N}_{r_0} dr_0 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \\ & \pm \frac{\Delta 2e}{\pi n_* N_* r r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \sin \gamma} \int_{(r_0)} \frac{r_0 \tilde{N}_{r_0} \sin \zeta_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\ & + \frac{\Delta e \Omega}{n_* N_* r c} \int_{(r_0)} \tilde{N}_{r_0} dr_0 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\ & + \frac{\Delta e \Omega}{n_* N_* c} \int_{(r_0)} \frac{\tilde{N}_{r_0}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad (\text{в системе СГС}). \end{aligned} \quad (18.34)$$

Обратим внимание на то, что вектор $\mathbf{a}_2$ заменен во втором слагаемом его значением, выраженным через вектор переориентации $\mathbf{k}$, а

в третьем и четвертом слагаемых значением, выраженным через направляющий орт оси вращения $\mathbf{a}$ (см. (18.32)). Это объясняется тем, что в формуле (16.51), примененной при выводе (18.17), от переориентации лучей зависит только выражение в первых фигурных скобках, перед которым стоит знак $\pm$. При последующих выкладках это выражение преобразовалось во второе слагаемое в (18.34). Данное слагаемое не зависит от вращения частицы, потому что оно не содержит угловой скорости Ω . Вместе с тем третье и четвертое слагаемые зависят от вращения частицы, так как содержат угловую скорость Ω , причем они не зависят от переориентации лучей. По этой причине мы и использовали во втором слагаемом значение вектора $\mathbf{a}_2$, выраженное через вектор переориентации $\mathbf{k}$, а в третьем и четвертом слагаемых его значение, выраженное через направляющий орт оси вращения $\mathbf{a}$.

Отметим, что множитель 4π , входящий в формулы (18.30) и (18.33), попадает из первой формулы в знаменатель выражения (18.34), а из второй формулы в числитель, поэтому он сокращается.

Формула (14.4), по которой рассчитывается собственное поле частицы F_s , и последующие основанные на ней формулы содержат интегралы по радиусу винтовой нити r_0 . Пределы интегрирования в них должны удовлетворять условию $r_0 < r$ (см. теорему 16.1, с. 568). Между тем мы намереваемся применить ниже формулу (15.9), в которой интегрирование проводится по всем значениям $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$. Поэтому ограничимся рассмотрением ситуации, когда *расстояние r от точки наблюдения x до мировой линии L превышает $r_{0\max} = r_* + p_*$* . Будем говорить об этой ситуации как о нахождении точки x *вне центрального сечения частицы* (потому что при расположении частицы, одномоментном с x , точка x оказывается в этом случае на удалении от центра частицы, большем радиуса центрального сечения $r_* + p_*$). Преобразуем (18.34) с помощью формулы (15.9) ($\int \tilde{N}_{r_0} dr_0 = n_* N_*$).

Тогда *собственное поле частицы* F_s примет вид (при $r > r_* + p_*$):

$$\begin{aligned}
 F_s(x) = & \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \\
 & \pm \frac{2\Delta e}{\pi n_* N_* r r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \sin \gamma} \int_{(r_0)} \frac{r_0 \tilde{N}_{r_0} \sin \zeta_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\
 & + \frac{\Delta e \Omega}{cr} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\
 & + \frac{\Delta e \Omega}{n_* N_* c} \int_{(r_0)} \frac{\tilde{N}_{r_0}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad (\text{в системе СГС}). \quad (18.35)
 \end{aligned}$$

Обозначения, примененные в (18.35) и в последующих формулах, и пояснения к формулам, приведены далее (с. 632).

Найдем поле F_s для случая, когда точка наблюдения x находится вдали от центрального сечения частицы ($r \gg r_*$), и для случая, когда точка x находится на внешней границе центрального сечения частицы (точнее, найдем F_s при $r \rightarrow r_* + p_*$, $r > r_* + p_*$). В обоих случаях интегралы в (18.35) легко вычисляются. Первое значение поля F_s может быть использовано при описании воздействия данной частицы на другие частицы, второе значение — при анализе самодействия частицы.

1. Пусть точка наблюдения x находится вдали от центрального сечения частицы, то есть $r \gg r_*$. Напомним, что $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ и $p_* \ll r_*$ (см. (4.5), с. 420), поэтому $r_0 \approx r_*$ и $r_0 \ll r$ (при $r \gg r_*$). Кроме того, вследствие (2.2) (с. 412), выполняется $\sin \frac{\pi}{n_*} = \frac{p_*}{r_*} \ll 1$.

На основании этих зависимостей пренебрежем в четвертом слагаемом в (18.35) величиной r_0^2 в сравнении с r^2 , вынесем r за знак интеграла и применим формулу (15.9) ($\int \tilde{N}_{r_0} dr_0 = n_* N_*$). Тогда после сокращения на $n_* N_*$ четвертое слагаемое станет равным $\frac{\Delta e \Omega}{cr} \mathbf{i} \wedge (\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r})$.

Второе слагаемое в (18.35) зависит от переориентации лучей частицы. Необходимым условием отличия его от нуля является выполнение ограничения (18.11): $\frac{\pi}{2} - \rho_0 < \gamma < \frac{\pi}{2} + \rho_0$. Поэтому, согласно теореме 18.1, оно сосредоточено внутри плоского слоя со срединной плоскостью $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ и полутолщиной $r_* + p_*$. При нахождении точки x внутри этого слоя и при выполнении условия $r_0 \ll r$, вследствие (18.11) и (16.4) ($\rho_0 = \arcsin \frac{r_0}{r}$), будет $\gamma \approx \pi/2$ (здесь, благодаря $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, можно понимать под углом γ угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}$). Ограничимся расчетом второго слагаемого для случая, когда точка x лежит в срединной плоскости слоя ($x \in Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$). Так как $C \in Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, то в этом случае $\overrightarrow{Cx} \in Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ ($\overrightarrow{Cx} = \mathbf{r}$, $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\} = Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, см. рис. 18.1, с. 616). Значит, $\gamma = \pi/2$, откуда $\sin \gamma = 1$ и $\text{ctg } \gamma = 0$. Из $\text{ctg } \gamma = 0$, в силу (18.14), вытекает $\zeta_0 = \pi/2$, поэтому $\sin \zeta_0 = 1$. Пренебрежем во втором слагаемом, как и в четвертом, величиной r_0^2 в сравнении с r^2 . Тогда в нем интеграл по r_0 , с учетом $r_0 \approx r_*$, $\sin \zeta_0 = 1$ и (15.9), будет равен $r_* n_* N_*/r$. Поскольку $\sin \gamma = 1$ и $\sin \frac{\pi}{n_*} \ll 1$ (см. выше), то второе слагаемое оказывается равным $\pm \frac{2\Delta e}{\pi r^2} \mathbf{i} \wedge (\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r})$.

Итак, поле F_s (при $r > r_* + p_*$) задается следующим выражением (в нем второе и четвертое слагаемые верны при $r \gg r_*$):

$$F_s(x) = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \frac{2\Delta e}{\pi r^2} \mathbf{i} \wedge (\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) + \\ + \frac{\Delta e \Omega}{cr} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge (\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) + \frac{\Delta e \Omega}{cr} \mathbf{i} \wedge (\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) \quad (\text{в системе СГС}). \quad (18.36)$$

2. Пусть точка наблюдения x находится на внешней границе центрального сечения частицы, точнее, $r \rightarrow r_* + p_*$ при $r > r_* + p_*$. Нам потребуется следующая известная теорема.

Теорема 18.3. Обобщенная теорема о среднем значении. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$ и функция $g(x)$ не меняет знака на $[a, b]$. Тогда существует такое число $\tilde{x} \in (a, b)$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\tilde{x}) \int_a^b g(x)dx.$$

Воспользуемся теоремой 18.3 для нахождения приближенных значений интегралов, входящих в (18.35).

Начнем с интеграла в четвертом слагаемом в (18.35). Обозначим: $g(r_0) = \tilde{N}_{r_0}$, $f(r_0) = \frac{1}{\sqrt{(r_*(1+\alpha)p_*^2 - r_0^2)}}$, где $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, $0 < \alpha \ll 1$ (мы придали величине r значение, немного превосходящее $r_* + p_*$, чтобы функция $f(r_0)$ не обращалась в бесконечность при $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$). Функции $f(r_0)$ и $g(r_0)$ удовлетворяют условиям теоремы 18.3, поэтому на основании теоремы и формулы (15.9) ($\int \tilde{N}_{r_0} dr_0 = n_* N_*$) заключаем, что рассматриваемый интеграл равен $f(\tilde{r}_0) n_* N_*$, где $\tilde{r}_0 \in (r_* - p_*, r_* + p_*)$, причем, благодаря монотонному возрастанию функции $f(r_0)$, выполняется $f(r_* - p_*) < f(\tilde{r}_0) < f(r_* + p_*)$. Учитывая это двойное неравенство, а также неравенство $p_* \ll r_*$ и тот факт, что наибольшее количество винтовых нитей имеет радиус, равный r_* (см. рис. 15.1, с. 537), примем, допуская нестрогость, что $\tilde{r}_0 = r_*$. Отсюда $f(\tilde{r}_0) = f(r_*)$. Будем считать, что это равенство выполняется в том числе при $\alpha = 0$. В таком случае в четвертом слагаемом в (18.35) скалярный множитель при бивекторе принимает значение $\frac{\Delta e \Omega}{c} f(r_*)$ (при $r = r_* + p_*$, $\alpha = 0$). Преобразуем его:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta e \Omega}{c} f(r_*) &= \frac{\Delta e \Omega}{c \sqrt{(r_* + p_*)^2 - r_*^2}} = \frac{\Delta e \Omega}{c \sqrt{2p_* r_* + p_*^2}} = \\ &= \frac{\Delta e \Omega}{c \sqrt{2p_* r_*} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{p_*}{r_*}}} = \frac{\Delta e \Omega}{\sqrt{2} c r_* \sqrt{\sin \frac{\pi}{n_*} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n_*}}}}, \end{aligned}$$

где использовано равенство (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$, с. 412); напомним, что, согласно (4.3) (с. 418), $n_* = 137$.

Интеграл во втором слагаемом в (18.35) рассчитаем, по аналогии с пунктом 1, для случая, когда точка x находится в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$. В этом случае, как показано в п. 1, $\gamma = \pi/2$, $\sin \gamma = 1$ и $\sin \zeta_0 = 1$.

Обозначим: $f_1(r_0) = \frac{r_0}{\sqrt{(r_0 + (1+\alpha)p_*)^2 - r_0^2}}$, $g(r_0) = \tilde{N}_{r_0}$, где $0 < \alpha \ll 1$, $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ (мы снова придали величине r значение, немного большее $r_* + p_*$). Функции $f_1(r_0)$ и $g(r_0)$ удовлетворяют условиям теоремы 18.3, поэтому с учетом равенства $\sin \zeta_0 = 1$ и формулы (15.9) ($\int \tilde{N}_{r_0} dr_0 = n_* N_*$) получаем, что интеграл равен $f_1(\tilde{r}_0) n_* N_*$, где $\tilde{r}_0 \in (r_* - p_*, r_* + p_*)$. Вследствие монотонного возрастания функции $f_1(r_0)$, выполняется $f_1(r_* - p_*) < f_1(\tilde{r}_0) < f_1(r_* + p_*)$. Принимая во внимание это двойное неравенство, а также неравенство $p_* \ll r_*$ и тот факт, что наибольшее количество винтовых нитей имеет радиус r_* , примем, вновь допуская нестрогость, что $\tilde{r}_0 = r_*$. Отсюда $f_1(\tilde{r}_0) = f_1(r_*)$, причем будем считать, что это равенство выполняется и при $\alpha = 0$. Тогда во втором слагаемом в (18.35) скалярный множитель при бивекторе оказывается равным (при $r = r_* + p_*$, $\alpha = 0$ и с учетом $\sin \gamma = 1$):

$$\begin{aligned} \pm \frac{2\Delta e}{\pi r r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} f_1(r_*) &= \pm \frac{2\Delta e}{\pi r r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \frac{r_*}{\sqrt{(r_* + p_*)^2 - r_*^2}} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}\Delta e}{\pi r_*^2 \sqrt{\sin \frac{\pi}{n_*} \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n_*}}}}, \end{aligned}$$

где произведены преобразования, аналогичные проведенным над четвертым слагаемым, и применено равенство $p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$.

Подставляя в (18.35) найденные значения слагаемых, заключаем с учетом $r = r_* + p_* = r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)$, что *собственное поле частицы F_s принимает на внешней границе центрального сечения частицы следующий вид* (второе и четвертое слагаемые приближенные):

$$\begin{aligned} F_s(x) \Big|_{r=r_*+p_*} &= \frac{e}{r_*^2 \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{2}\Delta e}{\pi r_*^2 \sqrt{\sin \frac{\pi}{n_*} \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n_*}}}} \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\ &+ \frac{\Delta e \Omega}{c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\ &+ \frac{\Delta e \Omega}{\sqrt{2} c r_* \sqrt{\sin \frac{\pi}{n_*} \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n_*}}}} \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad (\text{в системе СГС}). \quad (18.37) \end{aligned}$$

В формулах (18.35) — (18.37) обозначено: F_s — собственное электромагнитное поле частицы (при трактовке частицы, как модели электрона); x — точка наблюдения — точка пространства Минковского M , в которой вычисляется поле F_s ; e — электрический заряд электрона ($e < 0$); $\mathbf{r}$ — вектор, который имеет конец в точке x и начало в точке мировой линии частицы L , одномоментной с точкой x ($\mathbf{r} \perp L$); $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от точки x до мировой линии L ; $\wedge$ — знак внешнего умножения векторов ($\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{xy} - \mathbf{yx}$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между сомножителями); $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы, в данном случае он же — направляющий орт прямолинейной мировой линии L ; Δ — единичный псевдоскаляр в трехмерном физическом пространстве Γ ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах, и $\Delta = -1$ в левоориентированных базисах); n_* — количество «толстых» винтовых линий, именуемых спиралями, из которых состоит каждый луч частицы (см. рис. 1.3, с. 409), оно же — количество кругов радиуса p_* , образующих поперечное сечение луча (см. рис. 15.1, с. 537), $n_* = 137$ (см. (4.3), с. 418); N_* — количество винтовых нитей в одной спирали луча; $n_* N_*$ — общее число нитей в каждом луче частицы; r_* — радиус центральных нитей спиралей, он назван радиусом частицы, потому что действительный радиус частицы $r_* + p_*$ примерно равен r_* (ибо $p_* \ll r_*$); $\diamond$ — числовой коэффициент, имеющий три возможных значения: $\diamond = -1, 0, 1$ (см. сказанное перед (18.28), с. 625); γ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$, задаваемый выражением (18.6), с. 611 (в данном случае, благодаря $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, можно понимать под γ угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}$); r_0 — радиус винтовых нитей; $\tilde{N}_{r_0}$ и ζ_0 задаются формулами (15.8) и (18.14) (с. 538 и 617); $\mathbf{k}$ — вектор переориентации ($\mathbf{k} = \text{const}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{i}$, $|\mathbf{k}| = 1$; см. условие переориентации лучей, с. 612); $\times$ — символ векторного умножения в физическом пространстве Γ ; Ω и $\bar{\Omega}$ называются угловой скоростью вращения частицы и имеют размерность *время*⁻¹, $\bar{\Omega} \in \Gamma$, $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a} = \text{const}$, $\Omega = |\bar{\Omega}| \geq 0$ (см. (18.3) и (18.4), с. 610); $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения частицы ($\mathbf{a} = \text{const}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{i}$, $|\mathbf{a}| = 1$; см. (18.2), с. 609); c — скорость света.

Пояснения к формулам (18.35) — (18.37).

1. Формулы (18.35) — (18.37) задают собственное поле частицы F_s для случая, когда мировая линия частицы L прямолинейна и совпадает с осью симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, и частица, двигаясь вдоль L , вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$. Лучи частицы могут быть либо все непереориентированными, либо все переориентированными, либо переориентированными в соответствии с условием переориентации (с. 612) при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$.

Угловая скорость Ω рассчитывается относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, в которой ось времени T совпадает с мировой линией L ($T = L = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$). Изнутри трехмерного физического пространства Γ такое движение частицы воспринимается как вращение с угловой скоростью $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{a}$ вокруг неподвижной оси, проходящей через центр частицы и направленной вдоль вектора $\mathbf{a}$ ($\bar{\Omega} \in \Gamma$).

Отметим, что формулы (18.35)–(18.37) не содержат векторы $\mathbf{a}_i$ абсолютного базиса. Они исключены с помощью равенств $\mathbf{a}_2 = \sin^{-1}\gamma \mathbf{a} \times \mathbf{r}/r$ и $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a} = \mathbf{k}$ (первое равенство вытекает из (18.7), с. 611). Кроме того, ограничение $\mathbf{r} \nparallel \mathbf{a}$, примененное при выводе формул с целью выполнения условия $\sin\gamma \neq 0$, может быть исключено, потому что при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$ первое из выписанных равенств приобретает вид $\sin^{-1}\gamma \mathbf{k} \times \mathbf{r}/r = \mathbf{a}_2$, в связи с чем в формуле (18.35) устремление к нулю функции $\sin\gamma$, стоящей в знаменателе, не приводит к сингулярности, благодаря наличию множителя $\mathbf{k} \times \mathbf{r}/r$.

2. Формулы (18.35) и (18.36) задают поле F_s вне центрального сечения частицы ($r > r_* + p_*$). Формула (18.37) задает поле F_s на внешней границе центрального сечения частицы ($r = r_* + p_*$). Рассмотрим по отдельности каждое из четырех слагаемых в этих формулах.

3. Первое слагаемое в формулах (18.35) и (18.36) представляет собой закон Кулона. Действительно, в используемой инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, согласно теореме 4.1 из главы 4 и пояснению к ней (с. 324), имеет вид $\mathbf{E} = F_s \cdot \mathbf{i}$. Так как первое слагаемое равно $\frac{e}{r^2}(\frac{\mathbf{r}}{r}\mathbf{i} - \mathbf{i}\frac{\mathbf{r}}{r})$ и верны равенства $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и $\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = 0$, то вклад первого слагаемого в $\mathbf{E}$, который обозначим $\mathbf{E}_1$, есть

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Эта формула представляет собой обычную запись закона Кулона для неподвижного точечного заряда. Обратим внимание на то, что первое слагаемое не зависит от геометрических характеристик частицы. Не зависит оно также от вращения частицы и переориентации ее лучей. Это слагаемое имеет вид такой же, какой в рамках классической электродинамики имело бы электромагнитное поле точечного заряда, движущегося вдоль той же самой мировой линии L (то есть неподвижного относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, где $T = L$). В формуле (18.37) первое слагаемое выражает этот же закон при $r = r_* + p_*$.

Отметим, что если бы мы воспользовались системой отсчета с направляющим ортом оси времени $\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{i}$, то в соответствии с формулами (4.9) и (4.10) из главы 4 (с. 324) получили бы в такой системе отсчета наряду с электрической еще и магнитную составляющую поля (потому что относительно такой системы отсчета частица движется).

4. Второе слагаемое в формуле (18.35) связано с переориентацией лучей частицы. В представленном виде оно относится к случаю, когда выполняются условие переориентации лучей (с. 612) и условие (18.11): $\frac{\pi}{2} - \rho_0 < \gamma < \frac{\pi}{2} + \rho_0$. Согласно теореме 18.1 (с. 619), это слагаемое сосредоточено в физическом пространстве Γ внутри плоского слоя, имеющего полутолщину $r_* + p_*$ и срединную плоскость, ортогональную вектору переориентации $\mathbf{k}$. На «нижней» и «верхней» границах слоя это слагаемое обращается в нулевой тензор, из-за наличия в (18.35) множителя $\sin \zeta_0$, который на границах слоя равняется нулю. Вне этого слоя второе слагаемое также обращается в нулевой тензор, из-за невыполнения вне слоя условия (18.11). Оно обращается в нулевой тензор во всем пространстве при отсутствии переориентации лучей и при переориентации всех лучей частицы. Подчеркнем, что второе слагаемое рассчитано в (18.35) для случая, когда переориентация лучей частицы произведена в соответствии с принятым условием переориентации (с. 612). Если переориентировать лучи иным способом, то это слагаемое, вообще говоря, будет иметь другой вид.

В формуле (18.35) второе слагаемое является точным (в рамках рассматриваемой модели; при $r > r_* + p_*$). В (18.36) и (18.37) это слагаемое рассчитано для случая, когда точка наблюдения x лежит в срединной плоскости упомянутого слоя. В формуле (18.36) второе слагаемое верно при $r \gg r_*$, причем при его вычислении мы пренебрегли величиной $\sin \frac{\pi}{n_*}$ по сравнению с единицей. В (18.37) второе слагаемое рассчитано для случая $r = r_* + p_*$. При расчете была допущена математическая нестрогость, поэтому второе слагаемое в (18.37) может быть использовано при вычислении поля F_s только для получения грубой оценки поля. Нужно помнить также, что, как сказано выше, на границе упомянутого слоя и вне его второе слагаемое обращается в нулевой тензор.

Знак перед вторым слагаемым в (18.35) — (18.37) определяется правилом выбора знака (см. разд. 10, с. 467). Согласно этому правилу, знак определяется тем, совпадают или не совпадают ориентации используемого базиса и винтовой нити. Поскольку нет возможности определить в опыте ориентацию винтовых нитей, то нужно просто иметь в виду, что возможны две ситуации, различающиеся знаком второго слагаемого.

5. Третье слагаемое в (18.35) — (18.37) одинаково. В (18.35) и (18.36) оно верно при $r > r_* + p_*$. В (18.37) оно записано для случая $r = r_* + p_*$.

6. Четвертое слагаемое в формуле (18.35) является точным (при $r > r_* + p_*$). В (18.36) оно выполняется при $r \gg r_*$. В (18.37) это слагаемое рассчитано для случая $r = r_* + p_*$, причем при расчете была допущена математическая нестрогость такая же, как в случае второго

слагаемого, поэтому четвертое слагаемое в (18.37) может быть использовано только для грубой оценки поля F_s .

7. Первое, второе и четвертое слагаемые в формулах (18.35) — (18.37) дают вклад только в электрическую составляющую поля F_s , а третье слагаемое дает вклад только в магнитную составляющую поля (в системе отсчета $\{T, G\}$). В этом легко убедиться с помощью формул (4.9) и (4.10) главы 4 и пояснения к теореме 4.1 той же главы (с. 324).

8. Второе слагаемое в формулах (18.35) — (18.37) связано с переориентацией лучей частицы (см. выше п. 4). Третье и четвертое слагаемые обусловлены вращением частицы; при отсутствии вращения, то есть при $\Omega = 0$, они становятся нулевыми тензорами. Отметим, что поскольку рассматривается случай $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, то второе и четвертое слагаемые представляют собой пропорциональные бивекторы.

9. В формуле (18.36) первое и второе слагаемые обратно пропорциональны квадрату расстояния r между мировой линией L и точкой наблюдения x , тогда как третье и четвертое слагаемые обратно пропорциональны первой степени r . Это объясняется тем, что, согласно обычным правилам механики, движение частицы может быть представлено в виде комбинации поступательного движения и вращения. При поступательном движении скорости всех элементов частицы одинаковы, а при вращательном движении они пропорциональны удалению элемента от центра вращения. Поэтому поле F_s , пропорциональное скорости частицы $\mathbf{j}$ (см. (14.4), с. 535), содержит слагаемые двух видов, различающиеся на одну степень расстояния r .

10. Вектор $\mathbf{r}$, присутствующий в формулах (18.35) — (18.37), имеет конец в точке наблюдения x и начало в точке C мировой линии L , в которой находится центр частицы при ее расположении, одномоментном с x . Это создает иллюзию того, что источником поля F_s является именно данное расположение частицы. В реальности, конечно, это не так. Из выражения (14.4), определяющего поле F_s (с. 535), и из рис. 16.1 (с. 567) видно, что поле порождается расположениями частицы, которые находятся в прошлом относительно x . Несостоятельность отмеченной иллюзии можно продемонстрировать на примере первого слагаемого в (18.35) — (18.37), выражающего закон Кулона. В нем бивектор $\mathbf{r} \wedge \mathbf{i}$ не изменится, если вектор $\mathbf{r}$, соединяющий точку C с точкой x , заменить вектором $\mathbf{r}'$, соединяющим любую другую точку мировой линии L с точкой x (такой вектор, в силу $L = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, имеет вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + k\mathbf{i}$, где k — число, поэтому $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{i} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{i}$, ибо $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0$). Из этого следует, что здесь играет роль не прямая, соединяющая точку x с одномоментной с ней точкой мировой линии L , а вся плоскость, содержащая x и L .

11. Найденное значение поля F_s не зависит от угловой скорости ω собственного вращения лучей. Объясняется это тем, что выражение (16.51), на котором базируются формулы (18.35) — (18.37), выведено с использованием первого равенства (13.14): $\beta_0 q = \pm \frac{\sigma_0}{c}$. Если не применять это равенство, то выражение (16.51) и вместе с ним формулы (18.35) — (18.37) будут содержать дополнительные слагаемые (16.49), которые зависят от ω (см. разд. 16, с. 587). При выводе формул (18.35) — (18.37) использовано равенство $\mathbf{k} = \mathbf{a}$. При $\mathbf{k} \neq \mathbf{a}$ в эти формулы войдет добавочный бивектор, пропорциональный $(\mathbf{k} \times \mathbf{r}/r) \wedge (\mathbf{a} \times \mathbf{r}/r)$.

12. В разд. 17 доказано, что частица ненулевого радиуса порождает вдали от себя поле, которое совпадает (при отсутствии пространственного вращения) с электромагнитным полем, определяемым в электродинамике. В настоящем разделе классическое электромагнитное поле, задаваемое первым слагаемым в (18.35) — (18.37), оказалось дополненным еще тремя слагаемыми. Отсутствие в формулах разд. 17 выражений, соответствующих этим трем слагаемым, связано с двумя причинами. Первая состоит в том, что пространственная локализация элементов частицы задавалась там лишь с точностью до расстояний порядка r_* , сопоставимых с поперечным размером слоя-носителя второго слагаемого. Поэтому это слагаемое осталось просто «незамеченным». Вторая причина заключается в использовании допущения об отсутствии пространственного вращения частицы, а именно такое вращение и обеспечивает наличие третьего и четвертого слагаемых в формулах.

13. Поскольку мы трактуем поле F_s как электромагнитное, то *наличие у поля F_s трех составляющих, дополнительных к классическому (максвелловскому) полю, может быть проверено в эксперименте обычными методами.*

В отношении второго слагаемого в (18.35) — (18.37) нужно иметь в виду, что оно относится к случаю, когда выполняется принятое условие переориентации лучей. Из результатов разд. 5 вытекает, что в этом случае частица обладает ненулевым спином. Следовательно, для обнаружения составляющей поля, описываемой вторым слагаемым, требуется, чтобы спины электронов в исследуемом теле были ориентированы таким образом, чтобы их среднее значение было отличным от нуля. Такая ситуация реализуется, в частности, в ферромагнетиках, поэтому можно предположить, что второе слагаемое имеет отношение к так называемому молекулярному полю Вейсса.

14. Поле F_s вида (18.36), без учета второго слагаемого, связанного с переориентацией лучей, совпадает с полем вращающейся «точечной» частицы, задаваемым первой формулой (10.15) из главы 4 (с. 377).

Вычислим электрическую и магнитную составляющие собственного поля частицы F_s .

Согласно теореме 4.1 из главы 4 (с. 324), если задана инерциальная система отсчета $\{T, \Gamma\}$, то

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \bar{H} \cdot \varkappa; \quad (18.38)$$

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}; \quad \bar{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa, \quad (18.39)$$

где F — тензор электромагнитного поля; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\bar{H}$ — псевдовектор напряженности магнитного поля ($\mathbf{E}, \bar{H} \in \Gamma$); $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T , ориентированный в сторону будущего; $\varkappa$ — трехвалентный псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством Γ , задаваемый равенством (4.2) из главы 4 (с. 320); тензорное произведение обозначено без символа умножения между сомножителями; двоеточие — знак бискалярного умножения, выполняемого по правилу (4.3) из главы 4 (с. 321).

С помощью (18.36) и (18.39) находим *электрическую $\mathbf{E}_s$ и магнитную $\bar{H}_s$ составляющие собственного поля вращающейся частицы F_s в точке x , находящейся вне центрального сечения частицы ($r > r_* + p_*$; второе и третье слагаемые в выражении для $\mathbf{E}_s$ верны при $r \gg r_*$):*

$$\mathbf{E}_s(x) = F_s \cdot \mathbf{i} = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \mp \frac{2\Delta e}{\pi r^2} \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\Delta e \Omega}{cr} \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (18.40)$$

$$\bar{H}_s(x) = \frac{1}{2} F_s \cdot \cdot \varkappa = \frac{1}{2} \frac{\Delta e \Omega}{cr} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \cdot \cdot \varkappa; \quad (18.41)$$

здесь считается, что центр частицы неподвижен относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ (поэтому мировая линия частицы L прямолинейна и $L = T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$); применены равенства $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и учтено, что $\mathbf{i} \perp \Gamma$, откуда $\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = 0$, $(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) \cdot \mathbf{i} = 0$, $(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) \cdot \mathbf{i} = 0$ и $\mathbf{i} \cdot \varkappa = \hat{0}$; использована система физических единиц СГС; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы; e — заряд электрона ($e < 0$); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки x относительно центра частицы O , находящегося в точке мировой линии L , одномоментной с x ($\mathbf{r} \in \Gamma$); $r = |\mathbf{r}|$; Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ; $\mathbf{k}$ — вектор переориентации ($\mathbf{k} = \text{const}$, $|\mathbf{k}| = 1$, $\mathbf{k} \in \Gamma$, см. условие переориентации лучей на с. 612, рассматривается случай $\mathbf{k} = \mathbf{a}$); $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения частицы — единичный вектор в Γ , имеющий начало в O ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1$; $|\mathbf{a}| = 1$); $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a}$ — угловая скорость вращения частицы ($\bar{\Omega} \in \Gamma$, $\Omega > 0$); c — скорость света; $\times$ — операция векторного умножения в Γ ; $\wedge$ — операция внешнего умножения векторов ($\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$).

Исключим псевдотензор $\varkappa$ из формулы для магнитного поля.

Теорема 18.4.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \cdot \cdot \varkappa = -\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = - \left[\mathbf{a} + \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}, \quad (18.42)$$

где γ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$, определяемый формулой (3.3) из главы 2 (с. 38):

$$\cos \gamma = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r}, \quad (18.43)$$

здесь знак минус обусловлен отрицательной определенностью метрической формы в Γ ; учтена единичность вектора $\mathbf{a}$; остальные обозначения указаны выше.

Доказательство. Запишем цепочку равенств, применяя последовательно определение внешнего умножения векторов, формулу (4.5) из главы 4 (с. 322), связывающую векторное произведение векторов с псевдотензором Леви-Чивита $\varkappa$, антисимметрию операции векторного умножения, формулу (4.7) из главы 4 (с. 324) для двойного векторного произведения векторов, равенство $\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -1$ и формулу (18.43):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \cdot \cdot \varkappa = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \cdot \varkappa - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \cdot \varkappa \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[-\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] = \\ & = -\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = - \left[-\mathbf{a} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{a} \right) \right] = \\ & = - \left[\mathbf{a} + \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств присутствуют все четыре выражения, входящие в формулу (18.42), значит, формула верна. ■

Из (18.41) и (18.42) вытекает, что *магнитная составляющая собственного поля вращающейся частицы* имеет следующее значение (вне центрального сечения частицы, то есть при $r > r_* + p_*$):

$$\overline{H}_s(x) = \frac{1}{2} F_s \cdot \cdot \varkappa = \frac{\Delta e \Omega}{c r} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right). \quad (18.44)$$

Формула (18.44) совпадает с формулой (10.20) из главы 4 (с. 378) (с точностью до несущественного отличия в обозначениях). Это означает, что магнитные поля вращающейся «точечной» частицы и вращающейся частицы ненулевого радиуса совпадают (вне центрального сечения частицы). Сравнение формулы (18.40) со второй формулой

в (10.15) главы 4 (с. 377) показывает, что электрическое поле вращающейся частицы ненулевого радиуса отличается от электрического поля вращающейся «точечной» частицы наличием дополнительного слагаемого, связанного с переориентацией лучей частицы. Отсутствие этого слагаемого у «точечной» частицы объясняется тем, что лучи «точечной» частицы имеют нулевую толщину, поэтому понятие переориентации к ним не применимо.

Рассмотрим дифференциальные свойства полей $\mathbf{E}_s$ и $\overline{H}_s$ (как функций переменной точки $x \in \Gamma$).

Зададим в физическом пространстве Γ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в центре частицы O и базисным вектором $\mathbf{e}_3$, совпадающим с направляющим ортом оси вращения $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}. \quad (18.45)$$

Введем также базис $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$, взаимный (сопряженный) к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Он задается условием (2.24) из главы 2 (с. 29):

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (18.46)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (18.47)$$

Ортонормированность базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ означает, что $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\delta_{ij}$. Отсюда и из (18.46) следует

$$\mathbf{e}_1^* = -\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3^* = -\mathbf{e}_3. \quad (18.48)$$

Обозначим: $\{x_1, x_2, x_3\}$ — координаты точки x в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, они же — координаты радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки x :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3; \\ r = |\mathbf{r}| &= \sqrt{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}|} = \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned} \quad (18.49)$$

Оператор

$$\nabla = \text{grad} = \mathbf{e}_1^* \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2^* \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3^* \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (18.50)$$

называется *набла* или *градиент*. Он действует в физическом пространстве Γ и представляет собой вектор с операторами дифференцирования $\partial/\partial x_i$ в роли его компонент в базисе $\{\mathbf{e}_i^*\}$.

Результат действия оператора ∇ на функцию $f(x)$ называется *градиентом* функции f :

$$\nabla f = \text{grad } f = \mathbf{e}_1^* \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2^* \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3^* \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Градиент ∇f функции f имеет тензорный ранг, который на единицу превосходит тензорный ранг функции f , поэтому можно сказать, что оператор ∇ умножается на функцию тензорно. Если тензорное умножение заменить скалярным умножением, то получим оператор, называемый *дивергенцией*:

$$\nabla \cdot = \text{div}, \quad (18.51)$$

а если заменить тензорное умножение векторным, то получим оператор, называемый *ротором*:

$$\nabla \times = \text{rot}. \quad (18.52)$$

Вычислим градиент, дивергенцию и ротор радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки x . На основании формул (18.49)–(18.52), учитывая взаимную независимость переменных x_i и независимость от них базисных векторов $\mathbf{e}_i$, нетрудно убедиться в том, что

$$\nabla \mathbf{r} = \text{grad } \mathbf{r} = I; \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = \text{div } \mathbf{r} = 3; \quad \nabla \times \mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (18.53)$$

где I — единичный тензор над Γ , который, согласно формуле (2.26) из главы 2 (с. 30) и равенствам (18.48), имеет вид

$$I = \mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^* = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (18.54)$$

С помощью формул (18.45), (18.49), зависимостей (4.6) из главы 4 (с. 322) и равенства $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, находим:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} = \Delta(x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1). \quad (18.55)$$

Формулы (18.40), (18.55) и равенство $\Delta^2 = 1$ позволяют записать:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \nabla \cdot \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \mp \frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) - \frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right). \quad (18.56)$$

Продифференцируем по отдельности каждое слагаемое в правой части выражения (18.56), пользуясь формулами (18.46)–(18.50):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \right) &= \mathbf{e}_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \right) + \mathbf{e}_2^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \right) + \mathbf{e}_3^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \right) = \\ &= \mathbf{e}_1^* \cdot \left(-3 \frac{e x_1}{r^5} \mathbf{r} + \frac{e}{r^3} \mathbf{e}_1 \right) + \mathbf{e}_2^* \cdot \left(-3 \frac{e x_2}{r^5} \mathbf{r} + \frac{e}{r^3} \mathbf{e}_2 \right) + \mathbf{e}_3^* \cdot \left(-3 \frac{e x_3}{r^5} \mathbf{r} + \frac{e}{r^3} \mathbf{e}_3 \right) = \\ &= -\frac{3e}{r^5} (x_1 \mathbf{e}_1^* + x_2 \mathbf{e}_2^* + x_3 \mathbf{e}_3^*) \cdot \mathbf{r} + \frac{e}{r^3} (\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_3) = \\ &= -\frac{3e}{r^5} (-\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} + \frac{e}{r^3} 3 = -3 \frac{e}{r^5} r^2 + 3 \frac{e}{r^3} = 0. \end{aligned} \quad (18.57)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) &= \mathbf{e}_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) + \\
&+ \mathbf{e}_2^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) + \mathbf{e}_3^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = \\
&= \mathbf{e}_1^* \cdot \left(-3 \frac{2e x_1}{\pi r^5} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) + \frac{2e}{\pi r^3} \mathbf{e}_2 \right) + \\
&+ \mathbf{e}_2^* \cdot \left(-3 \frac{2e x_2}{\pi r^5} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) - \frac{2e}{\pi r^3} \mathbf{e}_1 \right) + \mathbf{e}_3^* \cdot \left(-3 \frac{2e x_3}{\pi r^5} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = \\
&= -3 \frac{2e}{\pi r^5} (x_1^2 \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 - x_1 x_2 \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 x_1 \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_2 - x_2^2 \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1 + \\
&+ x_3 x_1 \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_2 - x_3 x_2 \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_1) + \frac{2e}{\pi r^3} (\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1) = 0. \quad (18.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) &= \mathbf{e}_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) + \\
&+ \mathbf{e}_2^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) + \mathbf{e}_3^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = \\
&= \mathbf{e}_1^* \cdot \left(-2 \frac{e\Omega x_1}{cr^4} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) + \frac{e\Omega}{\pi r^2} \mathbf{e}_2 \right) + \\
&+ \mathbf{e}_2^* \cdot \left(-2 \frac{e\Omega x_2}{cr^4} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) - \frac{e\Omega}{cr^2} \mathbf{e}_1 \right) + \mathbf{e}_3^* \cdot \left(-2 \frac{e\Omega x_3}{cr^4} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = \\
&= -2 \frac{e\Omega}{cr^4} (x_1^2 \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 - x_1 x_2 \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 x_1 \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_2 - x_2^2 \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1 + \\
&+ x_3 x_1 \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_2 - x_3 x_2 \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_1) + \frac{e\Omega}{cr^2} (\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1) = 0. \quad (18.59)
\end{aligned}$$

Из (18.51) и (18.56)–(18.59) получаем:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \operatorname{div} \mathbf{E}_s = 0. \quad (18.60)$$

Формула для ротора функции может быть получена из формулы для дивергенции заменой скалярного умножения векторным. Поскольку операции дифференцирования одинаковы у ротора и дивергенции, то формула (18.56) и начальные строки в выражениях (18.57)–(18.59), относящиеся к дивергенции поля $\mathbf{E}_s$, остаются верными и для ротора этого поля (с заменой знака $\cdot$ знаком $\times$), поэтому можем записать:

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla \times \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \mp \frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) - \frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right). \quad (18.61)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\frac{e}{r^3} \mathbf{r} \right) &= \dots = \\
&= -\frac{3e}{r^5} (x_1 \mathbf{e}_1^* + x_2 \mathbf{e}_2^* + x_3 \mathbf{e}_3^*) \times \mathbf{r} + \frac{e}{r^3} (\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_3) = \\
&= -\frac{3e}{r^5} (-\mathbf{r}) \times \mathbf{r} - \frac{e}{r^3} \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (18.62)
\end{aligned}$$

где применены равенства (18.48).

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) &= \dots = \\
&= -3 \frac{2e}{\pi r^5} (x_1^2 \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2 - x_1 x_2 \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_1 + x_2 x_1 \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_2 - x_2^2 \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_1 + \\
&+ x_3 x_1 \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_2 - x_3 x_2 \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_1) + \frac{2e}{\pi r^3} (\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_1) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \frac{2e}{\pi r^5} (x_1^2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - x_1 x_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + x_2 x_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 - x_2^2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \\
&+ x_3 x_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 - x_3 x_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) - \frac{2e}{\pi r^3} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = \\
&= 3 \frac{2e}{\pi r^5} \Delta (x_1^2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{0} + \mathbf{0} + x_2^2 \mathbf{e}_3 - x_3 x_1 \mathbf{e}_1 - x_3 x_2 \mathbf{e}_2) - \frac{2e}{\pi r^3} \Delta (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3),
\end{aligned}$$

здесь использованы равенства (18.48) и зависимости (4.6) из главы 4 (с. 322). Из (18.49) вытекает равенство $-x_3 x_1 \mathbf{e}_1 - x_3 x_2 \mathbf{e}_2 = x_3^2 \mathbf{e}_3 - x_3 \mathbf{r}$. Применяя его и равенство $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$, находим из выше написанного:

$$\nabla \times \left(\frac{2e}{\pi r^3} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = 3 \frac{2\Delta e}{\pi r^5} (r^2 \mathbf{k} - x_3 \mathbf{r}) - \frac{2\Delta e}{\pi r^3} 2\mathbf{k} = \frac{2\Delta e}{\pi r^3} \mathbf{k} - \frac{6\Delta e x_3}{\pi r^4} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (18.63)$$

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \left(\frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = \dots = \\
&= -2 \frac{e\Omega}{cr^4} (x_1^2 \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2 - x_1 x_2 \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_1 + x_2 x_1 \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_2 - x_2^2 \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_1 + \\
&+ x_3 x_1 \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_2 - x_3 x_2 \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_1) + \frac{e\Omega}{cr^2} (\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_1),
\end{aligned}$$

здесь выражения, стоящие в скобках в двух последних строках, те же, что во второй и третьей строках предыдущей цепочки равенств. Используя такие же преобразования и равенство (18.45), получаем:

$$\nabla \times \left(\frac{e\Omega}{cr^2} (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) \right) = 2 \frac{\Delta e\Omega}{cr^4} (r^2 \mathbf{a} - x_3 \mathbf{r}) - \frac{\Delta e\Omega}{cr^2} 2\mathbf{a} = -\frac{2\Delta e\Omega x_3}{cr^3} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (18.64)$$

На основании (18.52) и (18.61)–(18.64) имеем:

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = \text{rot } \mathbf{E}_s = \mp \left(\frac{2\Delta e}{\pi r^3} \mathbf{k} - \frac{6\Delta e x_3}{\pi r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{2\Delta e\Omega x_3}{cr^3} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (18.65)$$

выражение в скобках относится к случаю переориентации лучей частицы; если переориентации нет, то это выражение отсутствует.

Предваряя вычисление дивергенции и ротора поля $\bar{H}_s$, выведем вспомогательные формулы. В каждой из них, начиная со второй, используется предыдущая формула. При выводе применяются выражения (18.43), (18.49) и учитывается постоянство вектора $\mathbf{a}$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{2x_i}{2r} = -\frac{x_i}{r^3} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (18.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \mathbf{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_i.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} (\cos \gamma) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) = -\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{x_i}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{r} \mathbf{e}_i \right) = \\
&= \frac{x_i}{r^2} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} - \frac{1}{r} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = -\frac{x_i}{r^2} \cos \gamma - \frac{1}{r} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}}{r} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \\
&= - \left(\frac{x_i}{r^2} \cos \gamma + \frac{1}{r} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + \cos \gamma \left(\frac{1}{r} \mathbf{e}_i - \frac{x_i}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \\
&= \frac{1}{r} \cos \gamma \mathbf{e}_i - \frac{1}{r} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) \frac{\mathbf{r}}{r} - 2 \frac{x_i}{r^2} \cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (18.67)
\end{aligned}$$

С помощью (18.43), (18.45) и (18.49) находим:

$$\cos \gamma = - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} = - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}}{r} = \frac{x_3}{r}. \quad (18.68)$$

Из (18.44), (18.48)–(18.50), (18.66), (18.67), принимая во внимание равенства $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\delta_{ij}$ и постоянство $\mathbf{a}$, получаем:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \overline{H}_s &= \nabla \cdot \left[\frac{\Delta e \Omega}{c r} (\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}) \right] = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\Delta e \Omega}{c r} (\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}) \right] = \\
&= \frac{\Delta e \Omega}{c} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i^* \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) (\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} (\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r}) \right] = \\
&= \frac{\Delta e \Omega}{c} \sum_{i=1}^3 (-\mathbf{e}_i) \cdot \left[-\frac{x_i}{r^3} (\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \cos \gamma \mathbf{e}_i - \frac{1}{r} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) \frac{\mathbf{r}}{r} - 2 \frac{x_i}{r^2} \cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] = \\
&= \frac{\Delta e \Omega}{c} \sum_{i=1}^3 \left[3 \frac{x_i}{r^4} \cos \gamma (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}) - \frac{x_i}{r^3} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r^2} \cos \gamma (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) + \frac{1}{r^3} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}) \right] = \\
&= \frac{\Delta e \Omega}{c} \left[3 \frac{1}{r^4} \cos \gamma \left(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{a} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r^2} \cos \gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \right) + \frac{1}{r^3} \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}) \right) \right] = \\
&= \frac{\Delta e \Omega}{c} \left[3 \frac{1}{r^4} \cos \gamma (-r^2) - \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3) + 3 \frac{1}{r^2} \cos \gamma + \frac{1}{r^3} (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}) \right] = \\
&= \frac{\Delta e \Omega}{c} \left[-3 \frac{1}{r^2} \cos \gamma + \frac{x_3}{r^3} + 3 \frac{1}{r^2} \cos \gamma + \frac{x_3}{r^3} \right] = \frac{2 \Delta e \Omega x_3}{c r^3}. \quad (18.69)
\end{aligned}$$

Отсюда и из (18.68) следует:

$$\nabla \cdot \overline{H}_s = \operatorname{div} \overline{H}_s = \frac{2 \Delta e \Omega x_3}{c r^3} = \frac{2 \Delta e \Omega}{c r^2} \cos \gamma. \quad (18.70)$$

Выведем формулу для ротора поля $\bar{H}_s$, по аналогии со случаем ротора поля $\mathbf{E}_s$, путем замены в начальных строках формулы (18.69) знака скалярного умножения знаком векторного умножения (за исключением знака $\cdot$ в произведении $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$, которое вошло в (18.69) из (18.67)):

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \bar{H}_s &= \nabla \times \left[\frac{\Delta e \Omega}{cr} (\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}) \right] = \dots = \\
 &= \frac{\Delta e \Omega}{c} \left[3 \frac{1}{r^4} \cos \gamma \left(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \right) \times \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \right) \times \mathbf{a} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \cos \gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i \right) + \frac{1}{r^3} \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \right) \right] = \\
 &= \frac{\Delta e \Omega}{c} \left[3 \frac{1}{r^4} \cos \gamma (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) - \mathbf{0} + \frac{1}{r^3} \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \right) \right] = \\
 &= \frac{\Delta e \Omega}{c} \left[\mathbf{0} - \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) - \mathbf{0} - \frac{1}{r^3} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) \right] = \mathbf{0}, \tag{18.71}
 \end{aligned}$$

здесь применены формулы (18.45), (18.49) и равенство $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\delta_{ij}$.

На основании (18.60), (18.65), (18.70) и (18.71) заключаем, что *собственные электрическое $\mathbf{E}_s$ и магнитное $\bar{H}_s$ поля вращающейся частицы ненулевого радиуса* удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E}_s(x) &= \operatorname{div} \mathbf{E}_s = 0; \\
 \nabla \times \mathbf{E}_s(x) &= \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = \mp \left(\frac{2\Delta e}{\pi r^3} \mathbf{k} - \frac{6\Delta e x_3}{\pi r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{2\Delta e \Omega x_3}{cr^3} \frac{\mathbf{r}}{r}; \\
 \nabla \cdot \bar{H}_s(x) &= \operatorname{div} \bar{H}_s = \frac{2\Delta e \Omega x_3}{cr^3} = \frac{2\Delta e \Omega}{cr^2} \cos \gamma; \\
 \nabla \times \bar{H}_s(x) &= \operatorname{rot} \bar{H}_s = \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{18.72}$$

где x_3 — координата вектора $\mathbf{r}$ вдоль оси вращения частицы; γ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$ (см. (18.43)); остальные обозначения приведены в комментарии к (18.41) (с. 637); формулы (18.72) верны, как и формулы (18.40), (18.41), на которых они основаны, вне центрального сечения частицы, то есть при $r > r_* + p_*$, причем формула для $\operatorname{rot} \mathbf{E}_s$ верна при $r \gg r_*$; формулы (18.40), (18.41) и (18.72) получены из формулы (18.36) для поля F_s , поэтому к ним относится сказанное в пояснениях на с. 632 (и далее), в особенности, в пояснениях 4, 6 и 13.

Согласно (18.72), *поле $\mathbf{E}_s$ вихревое, а поле $\bar{H}_s$ безвихревое.*

Ранее было отмечено, что поля $\mathbf{E}_s$ и $\bar{H}_s$ частицы ненулевого радиуса отличаются от полей «точечной» частицы только наличием в формуле (18.40) для поля $\mathbf{E}_s$ дополнительного слагаемого, связанного с переориентацией лучей частицы (перед ним стоит знак $\mp$). Убирая в (18.72) такое слагаемое, получаем формулы (9.6) для полей вращающейся «точечной» частицы (с. 463).

19. Вращение частицы магнитным полем с учетом самодействия

1. Продолжим рассмотрение частицы, центр которой неподвижен относительно инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. Мировая линия L такой частицы прямолинейна и параллельна оси времени T . Пусть, как и ранее, мировая линия L совпадает с осью симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ и ось времени T проходит через центр частицы. В таком случае мировая линия L совпадает с осью времени T , собственное физическое пространство частицы Γ_* совпадает с координатным физическим пространством Γ и собственное время частицы t_* совпадает с координатным временем t ($L = T = Lin\{\mathbf{i}\}$; $\Gamma_* = \Gamma$; $t_* = t$).

Исследуем движение частицы под действием внешнего постоянно-го и однородного магнитного поля $\bar{H}$ и собственного поля частицы F_s .

Напомним, что воздействие на частицу ее собственного поля называется *самодействием* частицы. Сечение частицы ее собственным физическим пространством Γ_* называется *центральной сечением* частицы. Центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей с единственной общей точкой — центром частицы O (см. разд. 2, с. 413).

В разд. 18 найдено значение собственного поля частицы F_s на внешней границе центрального сечения частицы, то есть в точках, которые находятся на расстоянии $r = r_* + p_*$ от центра частицы (см. формулу (18.37), с. 631). Для учета самодействия частицы нужно знать значение собственного поля F_s во всем центральном сечении частицы. Воспользуемся для конкретизации этого значения поля F_s рассуждениями, аналогичными тем, с помощью которых в разд. 7 конкретизировано значение магнитной составляющей собственного поля в центральном сечении частицы.

На внешней границе центрального сечения частицы располагаются те точки кругов радиуса p_* , изображенных на рис. 2.1 (с. 411), которые удалены от центра частицы O на расстояние $r = r_* + p_*$. В этих точках поле F_s задается формулой (18.37). Запишем эту формулу в виде

$$F_s(x) \Big|_{r=r_*+p_*} = A_1 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \Delta A_2 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \Delta A_3 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \Delta A_4 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (19.1)$$

где A_i — скалярные коэффициенты при бивекторах в формуле (18.37) (без учета единичного псевдоскаляра Δ); i — порядковый номер слагаемого в правой части (18.37), $i = 1, 2, 3, 4$.

По смыслу рассматриваемой модели электрона, порождаемое им электромагнитное поле создается материальными прообразами винтовых спиралей, образующих лучи частицы. Так как спирали располагаются по периферии лучей (см. рис. 1.3, с. 409), то во внутренней области центрального сечения частицы поле отсутствует. Значит, на рис. 2.1 (с. 411) в точках кругов радиуса p_* , наиболее близких к центру O , то есть при $r = r_* - p_*$, выполняется $F_s = \hat{0}$ ($\hat{0}$ — нулевой тензор).

Таким образом, в тех точках упомянутых кругов, которые находятся от центра частицы на расстоянии $r_* - p_*$, собственное поле частицы равно нулю, а в точках кругов, находящихся от центра частицы на расстоянии $r_* + p_*$, оно имеет значение $F_s|_{r=r_*+p_*}$ вида (19.1). Допустим, что на самих кругах поле F_s изменяется линейным образом между этими двумя значениями (вдоль направлений, которые исходят радиально из центра частицы и проходят через центры кругов) (рис. 19.1).

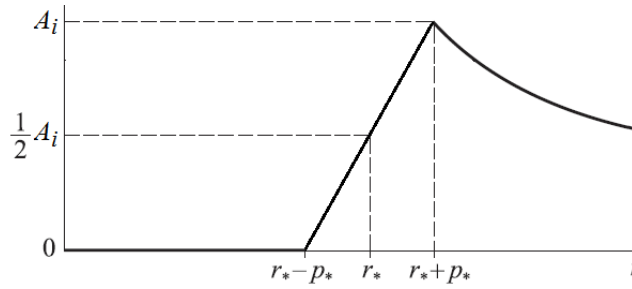


Рис. 19.1. Зависимость собственного поля F_s частицы от расстояния r до центра частицы.

Часть графика, которая отвечает значениям $r > r_* + p_*$, иллюстрирует убывание поля F_s при удалении от центрального сечения частицы (см. формулу (18.36), с. 629); A_i имеет тот же смысл, что в (19.1), $i = 1, 2, 3, 4$.

Из формулы (4.5) (с. 420) следует, что радиус кругов p_* существенно мал в сравнении с радиусом частицы r_* (см. рис. 4.1 на с. 419). Учитывая это, будем считать при последующих расчетах, что поле F_s принимает на каждом круге значение, которое равно его среднему значению на интервале $[r_* - p_*, r_* + p_*]$ на рис. 19.1. В силу линейности функции $F_s(r)$ на этом интервале, это означает, что на каждом круге поле F_s равно половине величины $F_s|_{r=r_*+p_*}$, задаваемой формулой (19.1):

$$F_s = \frac{1}{2} A_1 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \frac{\Delta}{2} A_2 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{\Delta}{2} A_3 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{\Delta}{2} A_4 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (19.2)$$

Начнем исследование воздействия на частицу полей $\bar{H}$ и F_s с доказательства того, что принятое в начале раздела предположение о прямолинейности мировой линии L не противоречит допущению о действии на частицу этих полей.

Теорема 19.1. Пусть в начальный момент времени вектор $\mathbf{i}$ направлен вдоль оси времени T ($\mathbf{i} \in T$). Тогда при действии на частицу магнитного поля $\bar{H}$, однородного и постоянного в центральном сечении частицы, и собственного поля частицы F_s , задаваемого формулой (19.2), выполняется равенство

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \mathbf{0}; \quad (19.3)$$

это равенство означает, что воздействие на частицу указанных полей не приводит к искривлению мировой линии L .

Доказательство [оно заканчивается на с. 657]. Движение частицы описывается уравнением (13.10) (с. 524):

$$\begin{aligned} & \left(n_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \int_{(S_0^*)} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} \right) \frac{d\mathbf{i}}{dl} = \\ & = a_1 \frac{1}{Z} \int \int_{(Z)(S_*)} F \cdot \mathbf{q} \sigma dS dZ + a_1 \frac{1}{Z} \int \int_{(Z)(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS dZ, \end{aligned} \quad (19.4)$$

где F — внешнее электромагнитное поле; F_s — собственное поле частицы; звездочка при области интегрирования означает, что эта область лежит в центральном сечении частицы.

Так как по условию теоремы внешнее поле F имеет только магнитную составляющую, то, согласно формуле (4.9) из главы 4 (с. 324),

$$F = \bar{H} \cdot \varkappa, \quad (19.5)$$

где $\bar{H}$ — напряженность внешнего магнитного поля; $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством Γ , определяемый равенством (4.2) из главы 4 (с. 320).

Подставим значение (19.5) поля F в первое слагаемое в правой части уравнения (19.4). Учитывая однородность поля $\bar{H}$ в центральном сечении частицы и постоянство псевдотензора $\varkappa$, вынесем величину $\bar{H} \cdot \varkappa$

за знаки интегралов. Тогда внутренний интеграл в данном слагаемом станет равным $\int_{(S_*)} \mathbf{q} \sigma dS$. Пользуясь его значением (12.16) (с. 515) и значением (19.2) поля F_s , преобразуем уравнение (19.4) к форме

$$\begin{aligned}
 (\dots) \frac{d\mathbf{i}}{dl} = & a_1 n_* \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \frac{1}{Z} \int_{(Z)} \mathbf{q}_0 \left(\int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) dZ + \\
 & + \frac{1}{2} a_1 \frac{1}{Z} \int_{(Z)} \left\{ A_1 \int_{(S_*)} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \sigma dS \pm \right. \\
 & \pm \Delta A_2 \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS + \\
 & + \Delta A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS + \\
 & \left. + \Delta A_4 \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS \right\} dZ, \quad (19.6)
 \end{aligned}$$

где многоточие в левой части уравнения обозначает выражение, которое заключено в (19.4) в круглые скобки; использовано определение операции внешнего умножения ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ для любых векторов и псевдовекторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Рассмотрим некоторый луч частицы в начальный момент времени. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси. Разложим вектор $\mathbf{q}_0$ по формуле (11.20) (она же (16.16); с. 492, 576) на взаимно ортогональные составляющие:

$$\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \perp \mathbf{i}), \quad (19.7)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ (угол φ не меняется при движении частицы).

Исследуем по отдельности каждое слагаемое, входящее в правую часть уравнения (19.6).

Начнем со слагаемого, стоящего в первой строке. Поскольку $\varkappa \in \Gamma$, $\Gamma \perp T$ и, по условию теоремы, в начальный момент времени $\mathbf{i} \in T$, то $\varkappa \cdot \mathbf{i} = \hat{0}$. Отсюда и из (19.7) имеем: $\varkappa \cdot \mathbf{q}_0 = \varkappa \cdot (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}) = \varkappa \cdot \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}$. Следовательно, в этом слагаемом вместо вектора $\mathbf{q}_0$ можно поставить вектор $\operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}$. Примем для параметра β_0 приближенное значение (13.25): $\beta_0 \approx \operatorname{ch} \varphi$. Тогда $\sqrt{|\beta_0^2 - 1|} \approx \operatorname{sh} \varphi$ (с учетом $\varphi > 0$). Вынесем эту величину за знак внутреннего интеграла и сократим с такой же

величиной, стоящей множителем при векторе $\mathbf{n}$. Оставшийся интеграл $\int_{(S_{0*})} \sigma dS$ равен N_* (см. (12.2) на с. 508 или (15.9) на с. 539). В итоге это слагаемое примет вид

$$a_1 n_* N_* \bar{H} \cdot \kappa \cdot \frac{1}{Z} \int_{(Z)} \mathbf{n} dZ. \quad (19.8)$$

Согласно (19.8), нужно проинтегрировать вектор $\mathbf{n}$ по всем лучам, составляющим частицу. Напомним, что оси лучей проходят через центр частицы O и равномерно распределены по внутренности светового конуса с вершиной в O . Поэтому направляющие орты осей $\mathbf{q}_0$ имеют начала в O , а их концы равномерно распределены по единичной псевдосфере с центром в O , точнее, по той ее доле, которая принадлежит внутренности светового конуса будущего (пола псевдосферы радиуса R и вводимые на ней угловые координаты показаны на рис. 15.3, с. 545). Из (19.7) вытекает, что $\text{sh } \varphi \mathbf{n}$ — составляющая вектора $\mathbf{q}_0$ вдоль Γ (так как $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$ и $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$). Поскольку вектор $\mathbf{n}$ служит направляющим ортом этой составляющей, то на основании указанных свойств ортов $\mathbf{q}_0$ заключаем, что начала всех векторов $\mathbf{n}$ находятся в центре частицы O , а их концы равномерно распределены в Γ по единичной сфере с центром в O . Отсюда следует, что для каждого вектора $\mathbf{n}$ существует противоположно направленный к нему вектор, поэтому сумма (интеграл) всех векторов $\mathbf{n}$ есть нулевой вектор.

Этот результат можно получить строго формально. Для этого нужно ввести сферические координаты на единичной сфере в Γ , задать вектор $\mathbf{n}$ как радиус-вектор точек сферы и провести интегрирование по всем $\mathbf{n}$.

Для вычисления интеграла по псевдосфере остается провести интегрирование по переменной φ . Понятно, что результат также будет нулевым: $\int_{(Z)} \mathbf{n} dZ = \mathbf{0}$. В силу (19.8) это означает, что слагаемое, стоящее в первой строке уравнения (19.6), равно нулевому вектору. Значит, данное слагаемое не влияет на вектор $\mathbf{i}$.

Теперь исследуем слагаемые в (19.6), которые заключены в фигурные скобки.

Продолжим рассмотрение луча с направляющим ортом оси $\mathbf{q}_0$. Воспользуемся введенным в разд. 11 ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с началом в центре частицы O , где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n} = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0 - \frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i}$ (последнее равенство вытекает из (19.7); $\text{sh } \varphi \neq 0$, так как $\varphi \neq 0$). Этот базис свой для каждого луча, потому что вектор $\mathbf{e}_3$ определен через направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$. Поскольку векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ ортогональны вектору $\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}$, то $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис в физическом пространстве Γ , имеющий начало в O .

Из $\mathbf{e}_0 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0 - \frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i}$ следует $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3 \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, поэтому $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Поперечное сечение луча, по построению модели, лежит в $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (см. разд. 2, с. 410), значит, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ находятся в поперечном сечении луча и ортогональны направляющему орту оси луча $\mathbf{q}_0$. Отсюда вытекает, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ — ортонормированный базис в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$, содержащем данный луч. В этом базисе радиус-вектор $\mathbf{R}$ элементов винтовой нити и вектор $\mathbf{q}$, касательный к нити, задаются уравнениями (11.19) и (11.34) для непереориентированного луча и уравнениями (11.36) и (11.39) для переориентированного луча (с. 492, 497 и 498) (см. также рис. 10.2 на с. 466).

Вектор $\mathbf{r}$, входящий в (19.6), является радиусом-вектором такого элемента нити, который находится в поперечном сечении луча, принадлежащем центральному сечению частицы. Поэтому вектор $\mathbf{r}$ совпадает с радиусом-вектором $\mathbf{R}$, когда последний имеет нулевую составляющую вдоль оси луча. Точкой приложения векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ служит центр частицы O . Точкой приложения вектора $\mathbf{q}$, касательного к нити, является указанный элемент нити, то есть конец вектора $\mathbf{r}$. В связи с тем, что рассматриваются фиксированный (начальный) момент времени и элементы нитей, лежащие в этот момент в центральном сечении частицы, винтовая переменная ψ имеет нулевое значение. На основании сказанного и формул (11.21), (11.34), (11.36) и (11.39) можем записать:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \cos \chi \mathbf{e}_1 + \sin \chi \mathbf{e}_2; \quad (19.9)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \chi \mathbf{e}_1 \pm \cos \chi \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right], \quad (19.10)$$

где верхние знаки отвечают случаю совпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити, нижние знаки отвечают случаю их несовпадения (см. правило выбора знака в разд. 10, с. 467); символ $\bullet$ означает, что для перехода к случаю переориентированной нити нужно изменить знак, над которым он стоит, на противоположный.

Угловая переменная χ принимает значение (17.3) (при $\psi = 0$):

$$\chi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi, \quad (19.11)$$

где ξ — номер спирали, которой принадлежит рассматриваемая нить ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); χ_0 — значение угла χ для нити, которая относится к спирали № 0 и для которой данная нить является соответственной (см. рис. 10.5, с. 479; определение соответственной нити дано на с. 480).

Отметим, что в (19.6) и (19.9) символы $\mathbf{r}$ и r имеют смысл такой же, какой имеют применявшиеся ранее символы $\mathbf{r}_0$ и r_0 (см. в разд. 10 рис. 10.2 и пояснение к формуле (10.2), с. 466, 467). Разным нитям луча соответствуют разные значения радиуса нити r_0 и параметра χ .

Легко проверить, что из (19.9) и (19.10), благодаря ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, вытекает ортогональность векторов $\frac{\mathbf{r}}{r}$ и $\mathbf{q}$:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (19.12)$$

С помощью (19.7) и (19.10), учитывая ортонормированность базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, находим:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{q} = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}. \quad (19.13)$$

Формула (19.12) может быть обоснована без ссылок на (19.9) и (19.10). Действительно, винтовая нить лежит на цилиндрической поверхности, ось которой совпадает с осью луча. Вектор $\mathbf{r}$ направлен от оси к цилиндрической поверхности перпендикулярно оси, поэтому он ортогонален любому вектору, касательному к поверхности в точке его конца. Одним из таких векторов является вектор $\mathbf{q}$, касательный к нити, поэтому вектор $\mathbf{r}$ ортогонален вектору $\mathbf{q}$. Из этого следует справедливость формулы (19.12). Формула (19.13) может быть доказана без применения (19.7). Достаточно воспользоваться равенством (19.10), зависимостями $\mathbf{i} \perp \mathbf{e}_1$, $\mathbf{i} \perp \mathbf{e}_2$ и тем, что угол φ между единичными векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}$ определяется формулой $\operatorname{ch} \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$.

Преобразуем первое слагаемое в фигурных скобках в (19.6) с помощью формул (19.9) и (19.11) – (19.13):

$$\begin{aligned} A_1 \int_{(S_*)} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \sigma dS &= A_1 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{i} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{q} \right) \right] \sigma dS = \\ &= A_1 \int_{(S_*)} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \right) \mathbf{e}_1 + \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \right) \mathbf{e}_2 \right] \sigma dS. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Вычислим интеграл в правой части выражения (19.14) способом, аналогичным тому, каким подобный интеграл был вычислен в разд. 17.

Поперечное сечение луча S_* , служащее областью интегрирования, состоит из n_* одинаковых сечений спиралей (см. рис. 4.1, с. 419), поэтому интеграл по сечению луча S_* может быть представлен в виде суммы n_* интегралов по сечениям спиралей S_{ξ_*} :

$$\int_{(S_*)} \dots dS = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_{\xi_*})} \dots dS. \quad (19.15)$$

Введем в сечении S_* полярные координаты (r_0, χ) с полюсом в центре сечения и полярной осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{e}_1$ (см. рис. 10.5, с. 479). При каждом ξ интегрирование в правой части равенства (19.15) проводится только по сечению $S_{\xi*}$ спирали № ξ . Элемент площади сечения $S_{\xi*}$ в полярных координатах (r_0, χ) есть $r_0 d\chi dr_0$. А так как вдоль всего сечения $S_{\xi*}$ величина ξ одинакова, то из (19.11) вытекает, что в сечении $S_{\xi*}$ выполняется $d\chi = d\chi_0$. Поэтому элемент площади сечения $S_{\xi*}$ (при любом ξ) равен $r_0 d\chi_0 dr_0$, где $r_0 \in [r_{0min}, r_{0max}]$ и $\chi_0 \in [\chi_{01}(r_0), \chi_{02}(r_0)]$ (χ_{01} и χ_{02} — минимальное и максимальное значения угла χ_0 , определяемые формой сечения спирали и зависящие от r_0 ; см. рис. 10.5). Следовательно, интеграл по сечению $S_{\xi*}$ может быть записан в виде

$$\int_{(S_{\xi*})} \dots dS = \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} r_0 d\chi_0 dr_0. \quad (19.16)$$

На основании сказанного перепишем выражение (19.14) в форме

$$\begin{aligned} A_1 \int_{(S_*)} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \sigma dS &= A_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \times \\ &\times \left[\cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \right) \mathbf{e}_1 + \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \right) \mathbf{e}_2 \right] \sigma r_0 d\chi_0 dr_0. \end{aligned}$$

Поскольку пределы интегрирования и величины φ , β_0 , χ_0 , σ , r_0 , $d\chi_0$ и dr_0 не зависят от номера спирали ξ , то можно внести знак суммирования под знаки интегралов и суммировать только выражение, стоящее в квадратных скобках. Внося далее знак суммирования внутрь квадратных скобок, получаем с учетом независимости $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ от ξ :

$$\begin{aligned} A_1 \int_{(S_*)} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \sigma dS &= A_1 \int_{r_{0min}}^{r_{0max}} \int_{\chi_{01}(r_0)}^{\chi_{02}(r_0)} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \times \\ &\times \left[\mathbf{e}_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \right) + \mathbf{e}_2 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \right) \right] \sigma r_0 d\chi_0 dr_0. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Согласно формулам (17.8) (при $\psi = 0$; с. 600), обе суммы, входящие в (19.17), равны нулю. Следовательно, первое слагаемое в фигурных скобках в (19.6) является нулевым вектором, поэтому оно не приводит к изменению вектора $\mathbf{i}$.

Второе и четвертое слагаемые в фигурных скобках в (19.6) проанализируем совместно, так как мы исследуем ситуацию, когда направляющий орт оси вращения $\mathbf{a}$ и вектор переориентации $\mathbf{k}$ совпадают ($\mathbf{a} = \mathbf{k}$). Внесем вектор $\mathbf{q}$ внутрь квадратных скобок в этих слагаемых:

$$\begin{aligned} \Delta A_{2\vee 4} \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS = \\ = \Delta A_{2\vee 4} \int_{(S_*)} \left\{ \mathbf{i} \left[\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \right] - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) (\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}) \right\} \sigma dS, \end{aligned} \quad (19.18)$$

где $\vee$ — знак дизъюнкции (означает «или»). Преобразуем произведения, стоящие в правой части равенства.

Разложим вектор $\mathbf{q}$ на взаимно ортогональные составляющие $\mathbf{q}_T$ и $\mathbf{q}_\Gamma$, направленные вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ соответственно. На основании (19.7), (19.10) и ортонормированности базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ можем записать:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma, \quad (19.19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_T &= \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \mathbf{i} \quad (\mathbf{q}_T \in T); \\ \mathbf{q}_\Gamma &= \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \chi \mathbf{e}_1 \pm \cos \chi \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n} \right] \quad (\mathbf{q}_\Gamma \in \Gamma). \end{aligned} \quad (19.20)$$

Зависимости $(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) \in \Gamma$, $\mathbf{q}_T \in T$ и $\Gamma \perp T$ влекут $(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}) \cdot \mathbf{q}_T = 0$. Отсюда и из (19.19) находим, пользуясь симметрией скалярного произведения векторов и цикличностью смешанного произведения:

$$\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} = \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot (\mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma) = \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q}_\Gamma = \mathbf{q}_\Gamma \cdot \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{q}_\Gamma \right).$$

Таким образом, выполняется равенство

$$\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{q}_\Gamma \right). \quad (19.21)$$

Формулы (4.6) из главы 4 (с. 322) приводят к следующим соотношениям для векторов ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \Delta \mathbf{n}; \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\Delta \mathbf{n}; \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n} &= -\Delta \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{n} &= \Delta \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (19.22)$$

Подставим в правую часть равенства (19.21) значения векторов $\frac{\mathbf{r}}{r}$ и $\mathbf{q}_\Gamma$ из (19.9), (19.20) и произведем векторное умножение в соответствии с формулами (19.22). После очевидных дополнительных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \cdot \mathbf{q} = & \pm \frac{\Delta \beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} + \\ & + \frac{\Delta \operatorname{sh} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \mathbf{a} \cdot \left(\dot{+} \sin \chi \mathbf{e}_1 - \cos \chi \mathbf{e}_2\right), \end{aligned} \quad (19.23)$$

где учтено, что $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \Delta \mathbf{0}$.

Из (19.9) и (19.13) имеем:

$$\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) (\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}) = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \mathbf{a} \times \left(\cos \chi \mathbf{e}_1 \dot{+} \sin \chi \mathbf{e}_2\right). \quad (19.24)$$

С помощью (19.18), (19.23) и (19.24) находим:

$$\begin{aligned} \Delta A_{2\vee 4} \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS = \\ = A_{2\vee 4} \left[\dot{\pm} \mathbf{i} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS + \right. \\ \left. + \mathbf{i} \mathbf{a} \cdot \int_{(S_*)} \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left(\dot{+} \sin \chi \mathbf{e}_1 - \cos \chi \mathbf{e}_2\right) \sigma dS - \right. \\ \left. - \Delta \mathbf{a} \times \int_{(S_*)} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left(\cos \chi \mathbf{e}_1 \dot{+} \sin \chi \mathbf{e}_2\right) \sigma dS \right], \end{aligned} \quad (19.25)$$

где использовано постоянство векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ в поперечном сечении луча S_* ; единичный псевдоскаляр Δ внесен внутрь квадратных скобок и учтено равенство $\Delta^2 = 1$.

Представим второй и третий интегралы в правой части (19.25) в виде суммы n_* интегралов по сечениям спиралей S_{ξ_*} и внесем знаки суммирования под знаки интегралов, аналогично тому, как это было сделано выше. Заменяя величину χ ее значением (19.11), вновь получаем нулевые суммы (см. формулу (19.17) и текст под ней), поэтому слагаемые, содержащие эти интегралы, являются нулевыми векторами и их

можно отбросить. В результате выражение (19.25) упрощается:

$$\begin{aligned} \Delta A_{2\vee 4} \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS = \\ = \dot{\pm} A_{2\vee 4} \mathbf{i} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS. \end{aligned} \quad (19.26)$$

Уравнение (19.6) содержит интеграл по псевдосфере Z от рассматриваемых второго и четвертого слагаемых (см. рис. 15.3, с. 545). Элемент площади псевдосферы, по (15.19), есть

$$dZ = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta.$$

Вычислим интеграл по псевдосфере Z от правой части выражения (19.26):

$$\begin{aligned} \int_{(Z)} \left[\dot{\pm} A_{2\vee 4} \mathbf{i} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS \right] dZ = \\ = \dot{\pm} R^3 A_{2\vee 4} \mathbf{i} \mathbf{a} \cdot \int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{+\infty} \int_{\substack{0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} \mathbf{n} \left[\int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS \right] \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta = \\ = \dot{\pm} R^3 A_{2\vee 4} \mathbf{i} \mathbf{a} \cdot \left[\int_{\substack{0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} \mathbf{n} \sin \theta d\theta d\eta \right] \left[\int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{+\infty} \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi \right], \end{aligned} \quad (19.27)$$

здесь учтено постоянство величин R , $A_{2\vee 4}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{a}$ на псевдосфере Z ; использована независимость вектора $\mathbf{n}$ от φ и независимость величин β_0 , σ , dS от θ и η . Подставляя сюда значение $\mathbf{n}$ как радиуса-вектора точек единичной сферы в Γ ($\mathbf{n} = \sin \theta \cos \eta \mathbf{a}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{a}_2 + \cos \theta \mathbf{a}_3$) и интегрируя по θ и η , получаем нулевой вектор. Вместе с (19.26) это означает, что второе и четвертое слагаемые в фигурных скобках в (19.6) тоже не приводят к изменению вектора $\mathbf{i}$.

Остается проанализировать третье слагаемое в фигурных скобках в (19.6). Внесем в нем вектор $\mathbf{q}$ внутрь квадратных скобок и применим зависимости (19.12) и (19.23):

$$\Delta A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta A_3 \int_{(S_*)} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{r} \left[\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \right] - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{q} \right) \right\} \sigma dS = \\
&= A_3 \int_{(S_*)} \frac{\mathbf{r}}{r} \left[\pm \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \mathbf{n} + \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left(\dot{\mp} \sin \chi \mathbf{e}_1 - \cos \chi \mathbf{e}_2 \right) \right] \sigma dS \cdot \mathbf{a},
\end{aligned}$$

где использована симметрия скалярного произведения векторов; постоянные величины Δ и $\mathbf{a}$ вынесены за знак интеграла и учтено равенство $\Delta^2 = 1$. Подставим сюда значение (19.9) вектора $\frac{\mathbf{r}}{r}$ и произведем умножение, при этом анализируемое слагаемое примет вид

$$\begin{aligned}
&\Delta A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS = \\
&= \dot{\pm} A_3 \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left(\cos \chi \mathbf{e}_1 \dot{\mp} \sin \chi \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{n} \sigma dS \cdot \mathbf{a} + \\
&+ A_3 \int_{(S_*)} \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left(\dot{\mp} \sin \chi \cos \chi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \cos^2 \chi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 \chi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \sin \chi \cos \chi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \right) \sigma dS \cdot \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Представим в правой части данного выражения каждый из интегралов по сечению луча S_* в виде суммы n_* интегралов по сечениям спиралей $S_{\xi*}$ и внесем знаки суммирования под знаки интегралов по аналогии с тем, как это было сделано ранее (см. текст, обосновывающий формулы (19.15) – (19.17)). Используя значение (19.11) величины χ ($\chi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi$) и формулы (17.8), (17.11) – (17.13) (при $\psi = 0$; с. 600), получим:

$$\begin{aligned}
&\Delta A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS = \\
&= A_3 \frac{n_*}{2} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{a} \int_{(S_{0*})} \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS,
\end{aligned} \tag{19.28}$$

где величины, которые постоянны вдоль сечения S_* , вынесены за знак интеграла; S_{0*} – сечение спирали № 0, лежащее в центральном сечении частицы (тот факт, что указано сечение S_{0*} спирали № 0, не умаляет общности, потому что любая спираль может быть принята за нулевую).

Напомним, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – связанный с лучом ортонормированный базис в Γ , где $\mathbf{e}_i$ – мнимоеединичные векторы ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = -1$) и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$.

На основании свойств векторного произведения и формул (4.2) и (4.5) главы 4 (с. 320, 322) запишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{a} \times \mathbf{n} &= -\Delta \mathbf{n} \times \mathbf{a} = \Delta \mathbf{n} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{a} = \Delta \mathbf{e}_3 \cdot \varkappa \cdot \mathbf{a} = \\ &= \Delta^2(-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{a},\end{aligned}$$

где $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над Γ .

Отсюда, читая справа налево, имеем:

$$(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} \times \mathbf{n}. \quad (19.29)$$

Из (19.28) и (19.29) находим:

$$\begin{aligned}\Delta A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS = \\ = \Delta A_3 \frac{n_*}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{n} \int_{(S_{0*})} \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS.\end{aligned} \quad (19.30)$$

Интегрируя обе части выражения (19.30) по псевдосфере Z , как этого требует уравнение (19.6), получаем, по аналогии с (19.27):

$$\begin{aligned}\int_{(Z)} \left\{ \Delta A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS \right\} dZ = \\ = \Delta R^3 A_3 \frac{n_*}{2} \mathbf{a} \times \left[\int_{\substack{0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} \mathbf{n} \sin \theta d\theta d\eta \right] \left[\int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{+\infty} \int_{(S_{0*})} \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS \text{sh}^2 \varphi d\varphi \right].\end{aligned}$$

Интеграл от вектора $\mathbf{n}$, как показано в пояснении к (19.27), равен нулевому вектору, поэтому третье слагаемое в фигурных скобках в (19.6) также не вызывает изменения вектора $\mathbf{i}$.

Итак, правая часть уравнения (19.6) есть нулевой вектор. Сокращая обе его части на скалярный множитель, обозначенный многоточием, приходим к равенству $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{0}$. Мы доказали это равенство для начального момента времени. Из него следует, что в момент, близкий к начальному, вектор $\mathbf{i}$ остается тем же, что в начальный момент. Принимая этот новый момент в роли начального, можно доказать для него тот же результат. Повторяя эту процедуру, можно доказать данный результат для любого момента времени. Значит, равенство (19.3) верно для произвольного момента времени. Теорема 19.1 доказана. ■

2. Согласно теореме 19.1, воздействие на частицу внешнего однородного и постоянного магнитного поля $\bar{H}$ и собственного поля частицы F_s вида (19.2), не приводит к искривлению мировой линии частицы L . Это позволяет считать мировую линию L прямолинейной и пользоваться инерциальной системой отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени T , проходящей через центр частицы O и совпадающей с L . В этом случае, напомним, собственное физическое пространство частицы Γ_* совпадает с координатным физическим пространством Γ и собственное время частицы t_* совпадает с координатным временем t ($T = L = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$; $\Gamma_* = \Gamma$; $t_* = t$).

Рассмотрим произвольный луч частицы. Пусть $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт его оси.

Уравнение движения оси луча имеет вид (13.7) (с. 523):

$$\left(n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \int_{(S_*)} F \cdot \mathbf{q} \sigma dS + a_1 \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS, \quad (19.31)$$

где F — внешнее электромагнитное поле; F_s — собственное поле частицы; звездочка при области интегрирования означает, что эта область лежит в центральном сечении частицы.

Поскольку мы считаем, что внешнее поле F имеет только магнитную составляющую $\bar{H}$, которая однородна и постоянна в центральном сечении частицы, то, согласно формуле (4.9) из главы 4 (с. 324),

$$F = \bar{H} \cdot \varkappa \quad (\bar{H} = \text{const}), \quad (19.32)$$

где $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством Γ , задаваемый равенством (4.2) из главы 4 (с. 320).

Подставим значение (19.32) поля F в уравнение (19.31) и вынесем постоянную величину $\bar{H} \cdot \varkappa$ за знак интеграла. Тогда интеграл окажется равным $\int_{(S_*)} \mathbf{q} \sigma dS$. Используя его значением (12.16) (с. 515), приведем уравнение (19.31) к форме

$$\left(n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS + a_1 \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS. \quad (19.33)$$

Начнем решать уравнение (19.33) со случая, когда самодействие частицы отсутствует, то есть $F_s = \hat{0}$. В этом случае последнее слагаемое в (19.33) обращается в нулевой вектор, и после сокращения обеих частей уравнения на величину, стоящую в скобках, получаем:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_0. \quad (19.34)$$

С помощью формулы (19.7) ($\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}$) представим направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$ в виде

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma, \quad (19.35)$$

где

$$\mathbf{q}_T = \text{ch } \varphi \mathbf{i}; \quad \mathbf{q}_\Gamma = \text{sh } \varphi \mathbf{n}; \quad (19.36)$$

φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$ (угол φ не меняется при движении частицы). Из прямолинейности мировой линии L следует, что вектор $\mathbf{i}$ постоянен. Отсюда и из $T = L = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$, вытекает, что $\mathbf{q}_T$ и $\mathbf{q}_\Gamma$ являются составляющими вектора $\mathbf{q}_0$, которые в каждый момент времени направлены соответственно вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ .

Заметим, что в формуле (19.19) эти же символы $\mathbf{q}_T$ и $\mathbf{q}_\Gamma$ были применены для обозначения составляющих вектора $\mathbf{q}$, касательного к нити.

Внесем значение (19.35) вектора $\mathbf{q}_0$ в уравнение (19.34):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} &= \frac{d\mathbf{q}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T + a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_\Gamma = \\ &= a_1 \overline{H} \cdot \hat{0} + a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_\Gamma = a_1 \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_\Gamma = -a_1 \overline{H} \times \mathbf{q}_\Gamma, \end{aligned} \quad (19.37)$$

здесь учтено, что $\varkappa \cdot \mathbf{q}_T = \hat{0}$ (так как псевдотензор $\varkappa$ определен над Γ , $\mathbf{q}_T \in T$ и $\Gamma \perp T$); $\times$ — знак векторного умножения в Γ ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{b}$ для любых векторов и псевдовекторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma$, см. формулу (4.5) из главы 4, с. 322).

Из (19.37) следует равенство

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = -\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} - a_1 \overline{H} \times \mathbf{q}_\Gamma. \quad (19.38)$$

В левой части равенства стоит вектор, направленный вдоль оси времени T , в правой части — вектор, лежащий в гиперплоскости Γ . Поскольку $T \perp \Gamma$, то равенство выполняется в единственном случае, когда оба вектора нулевые. Поэтому из (19.38) вытекают с учетом формул $dl = c dt$ и $a_1 = \frac{e}{m_e c^2}$ (см. (13.3), с. 519) следующие зависимости:

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dt} = \mathbf{0}; \quad \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \overline{\Omega} \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (19.39)$$

где производные берутся по t (а не по l) и обозначено

$$\overline{\Omega} = -\frac{e}{m_e c} \overline{H} \quad (\overline{\Omega} \in \Gamma). \quad (19.40)$$

Зависимости (19.39) означают, что при действии на частицу магнитного поля направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$ не меняет свою временную составляющую $\mathbf{q}_T$, а его пространственная составляющая $\mathbf{q}_L$ вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (19.40). Поскольку этот результат верен для всех лучей и угловая скорость $\bar{\Omega}$ одинакова для всех них, то рассматриваемое движение частицы представляет собой вращение вокруг неподвижной псевдоевклидовой плоскости, содержащей векторы $\mathbf{i}$ и $\bar{\Omega}$. Изнутри трехмерного физического пространства Γ этот результат «выглядит» как вращение частицы с угловой скоростью $\bar{\Omega}$, сонаправленной напряженности магнитного поля $\bar{H}$ (ибо $e < 0$). Данный результат был получен ранее в разд. 19 главы 3 для модели электрона в виде материальной точки со скрепленными с ней векторами (с. 243) и в разд. 12 главы 4 для модели электрона в виде «точечной» частицы (с. 389). Подчеркнем, что этот результат относится к случаю, когда в уравнении (19.33) не учитывается самодействие частицы ($F_s = \hat{0}$).

3. Теперь проанализируем вращение частицы при наличии самодействия.

Ранее мы условились считать, что собственное поле частицы F_s принимает значение (19.2) на каждом круге, образующем поперечное сечение луча. Для нахождения влияния этого поля на вращение частицы нужно подставить значение (19.2) поля F_s в уравнение движения оси луча (19.33) и решить его.

Чтобы не переписывать уравнение несколько раз, подставим сначала значение (19.2) поля F_s в последний интеграл в (19.33):

$$\begin{aligned} \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS &= \frac{1}{2} A_1 \int_{(S_*)} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{q} \sigma dS \pm \\ &\pm \frac{\Delta}{2} A_2 \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS + \\ &+ \frac{\Delta}{2} A_3 \int_{(S_*)} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS + \\ &+ \frac{\Delta}{2} A_4 \int_{(S_*)} \left[\mathbf{i} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{q} \sigma dS, \end{aligned} \quad (19.41)$$

где A_i — скалярные коэффициенты при бивекторах в формуле (18.37).

Преобразуем правую часть этого выражения с помощью формул, полученных при доказательстве теоремы 19.1.

Из формулы (19.17) и текста после нее (с. 652) следует, что первое слагаемое в правой части выражения (19.41) равно нулевому вектору.

Согласно (19.26), второе и четвертое слагаемые в (19.41) равны соответственно (при $\mathbf{k} = \mathbf{a}$)

$$\dot{+} \frac{1}{2} A_2 \mathbf{i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS, \quad \dot{\pm} \frac{1}{2} A_4 \mathbf{i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \int_{(S_*)} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS,$$

где учтено, что перед вторым слагаемым в (19.41) стоит знак $\pm$. Заменим в каждом из выражений интеграл по сечению луча S_* суммой n_* интегралов по сечениям спиралей $S_{\xi*}$. Поскольку величины β_0 , σ и dS не зависят от номера спирали ξ , то интегралы по всем сечениям спиралей одинаковы. Это означает, что второе и четвертое слагаемые в (19.41) могут быть записаны в виде

$$\dot{+} \frac{1}{2} A_2 \mathbf{i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS, \quad \dot{\pm} \frac{1}{2} A_4 \mathbf{i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS,$$

где S_{0*} — сечение спирали № 0 (оно участвует в уравнении (19.33)).

Из (19.30) вытекает, что третье слагаемое равно

$$\frac{\Delta}{2} A_3 \frac{n_*}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{n} \int_{(S_{0*})} \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS.$$

Внесем в (19.41) найденные значения слагаемых и подставим полученное выражение в уравнение движения оси луча (19.33):

$$\begin{aligned} \left(n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} &= a_1 \overline{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \dot{+} \\ &\dot{+} \frac{1}{2} a_1 A_2 \mathbf{i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS + \\ &+ \frac{\Delta}{4} a_1 A_3 (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\text{sh } \varphi}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS \dot{\pm} \\ &\dot{\pm} \frac{1}{2} a_1 A_4 \mathbf{i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \sigma dS. \end{aligned} \quad (19.42)$$

Преобразуем уравнение (19.42). Подставим в него значение (19.35) вектора $\mathbf{q}_0$: $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma$. В первом слагаемом в правой части применим равенство $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q}_\Gamma$ (вытекающее из $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q}_T = \hat{0}$, см. пояснение к (19.37)). Во втором и четвертом слагаемых примем для параметра β_0 в числителях подынтегральных выражений приближенное значение $\beta_0 \approx \operatorname{ch} \varphi$ (см. (13.25), с. 531), затем вынесем величину $\operatorname{ch} \varphi$ за знак интеграла (потому что угол φ фиксирован для луча) и воспользуемся первым равенством (19.36): $\mathbf{q}_T = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}$. В третьем слагаемом вынесем величину $\operatorname{sh} \varphi$ за знак интеграла и воспользуемся вторым равенством (19.36): $\mathbf{q}_\Gamma = \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}$. После этого сократим обе части уравнения на величину, заключенную в левой части в скобки. В итоге уравнение (19.42) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q}_\Gamma + \\ + \frac{1}{2} a_1 (A_2 \pm A_4) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{q}_T + \frac{\Delta}{4} a_1 A_3 (\mathbf{a} \times \mathbf{q}_\Gamma). \end{aligned}$$

Перенесем все слагаемые, содержащие вектор $\mathbf{q}_T$, в левую часть равенства, а все слагаемые, содержащие вектор $\mathbf{q}_\Gamma$, в правую часть. Тогда в левой части равенства будет стоять вектор, направленный вдоль оси времени T , а в правой части — вектор, принадлежащий физическому пространству Γ . Так как $\Gamma \perp T$, то такое возможно только в случае, когда оба вектора нулевые. Следовательно, выполняются два уравнения:

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = + \frac{1}{2} a_1 (A_2 \pm A_4) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{q}_T; \quad (19.43)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = -a_1 \left(\bar{H} - \frac{\Delta}{4} A_3 \mathbf{a} \right) \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (19.44)$$

где применено равенство $\bar{H} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q}_\Gamma = -\bar{H} \times \mathbf{q}_\Gamma$ (см. формулу (4.5) из главы 4, с. 322); символ $\bullet$, напомним, означает, что в случае переориентированной нити нужно изменить знак, над которым он стоит, на противоположный; знак перед A_4 определяется правилом выбора знака (см. разд. 10, с. 467). Проанализируем эти уравнения.

Согласно уравнению (19.43), магнитное поле $\bar{H}$ не влияет на временную составляющую $\mathbf{q}_T$ направляющего орта оси луча $\mathbf{q}_0$, так как оно не входит в это уравнение. Самодействие частицы стремится изменить длину составляющей $\mathbf{q}_T$ без изменения ее направления (потому что эта составляющая в любой момент времени направлена вдоль оси времени T). Если подставить в (19.43) значение составляющей $\mathbf{q}_T$, задаваемое равенством $\mathbf{q}_T = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}$, и учесть постоянство вектора $\mathbf{i}$, то

придем к уравнению

$$\frac{d(\text{ch } \varphi)}{dl} = + \frac{1}{2} a_1 (A_2 \pm A_4) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \text{ch } \varphi. \quad (19.45)$$

В самом начале построения модели мы приняли допущение о недеформируемости частицы, которое подразумевает, в частности, неизменность углов φ между вектором $\mathbf{i}$ и лучами частицы. Уравнение (19.45) не согласуется с этим допущением, поэтому на основании данного уравнения можно заключить только, что самодействие частицы способно вызывать напряжения внутри нее. Для их нахождения нужно перейти к следующему этапу развития модели — построению модели электрона как деформируемого тела. Эта задача выходит за рамки настоящего исследования. Отметим только, что так как среднее значение вектора $\mathbf{n}$ по всем лучам частицы равно нулевому вектору, то, по (19.45), суммарное напряжение в частице, о котором идет речь, равно нулю.

Теперь проанализируем уравнение (19.44). Символ A_3 в нем обозначает скалярный коэффициент при третьем бивекторе в правой части формулы (18.37) (без учета единичного псевдоскаляра, с. 631):

$$A_3 = \frac{e \Omega}{c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (19.46)$$

Подставим это значение коэффициента A_3 в уравнение (19.44). Пользуясь равенствами $a_1 = \frac{e}{m_e c^2}$, $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a}$ и переходя к дифференцированию по t (с помощью равенства $dl = c dt$), находим:

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = - \frac{e}{m_e c} \left(\bar{H} - \frac{e}{4 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \bar{\Omega} \right) \times \mathbf{q}_\Gamma. \quad (19.47)$$

Уравнение (19.47) означает, что пространственная составляющая $\mathbf{q}_\Gamma$ вектора $\mathbf{q}_0$ вращается с угловой скоростью, равной псевдовектору, стоящему перед знаком векторного умножения. Именно эта угловая скорость входит в формулу для собственного поля частицы, следовательно, она равна входящей в (19.47) величине $\bar{\Omega}$. Таким образом, уравнение (19.47) может быть переписано в форме

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (19.48)$$

где

$$\bar{\Omega} = - \frac{e}{m_e c} \left(\bar{H} - \frac{e}{4 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \bar{\Omega} \right). \quad (19.49)$$

Выражение (19.49) представляет собой алгебраическое уравнение относительно угловой скорости $\bar{\Omega}$. Решая его, получаем:

$$\bar{\Omega} = - \frac{1}{1 - \frac{e^2}{4 m_e c^2 r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}} \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.50)$$

Коэффициент при $\bar{H}$ в этой формуле содержит известные фундаментальные константы e , m_e , c , целочисленную константу $n_* = 137$ (см. формулу (4.3) на с. 418) и радиус частицы r_* .

В разд. 8 получена для r_* формула (8.3) (с. 456):

$$r_* = \frac{2\hbar}{m_e (|o|r_*) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (19.51)$$

Произведение $|o|r_*$ имеет три возможных значения (13.22) (с. 531):

$$|o|r_* = \frac{c}{1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}} \quad (\text{где } \diamond = -1, 0, 1). \quad (19.52)$$

Подстановка в (19.51) значения (19.52) произведения $|o|r_*$ дает:

$$r_* = \frac{2\hbar \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}{m_e c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (19.53)$$

С помощью (4.2) и (4.4) $\left(n_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) = \alpha^{-1}; \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}\right)$ можно преобразовать формулу (19.53) к виду

$$r_* = 2n_* \frac{e^2}{m_e c^2} \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right). \quad (19.54)$$

Из (19.50) и (19.54) находим:

$$\bar{\Omega} = - \frac{1}{1 - \frac{1}{8n_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}} \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.55)$$

Отсюда видно, что поправочный коэффициент при «классической» величине $\frac{e}{m_e c} \bar{H}$ зависит только от одной целочисленной характеристики модели $n_* = 137$. Вычисление приводит к следующему результату (в среднем по трем значениям $\diamond$):

$$\bar{\Omega} \approx -1.000893 \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.56)$$

Современные эксперименты, основанные на методе электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) [29], дают зависимость

$$\bar{\Omega}_{\text{exp.}} \approx -1.00115965 \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.57)$$

Сравнение формул (19.56) и (19.57) показывает, что учет самодействия частицы позволил описать опытные данные с относительной погрешностью $2.7 \cdot 10^{-4}$.

Отметим, что без учета самодействия, согласно (19.40) и (19.57), относительная погрешность составляет $1 \cdot 10^{-3}$.

В разд. 7 рассматриваемый физический эффект описан с относительной погрешностью, меньшей $5 \cdot 10^{-6}$ (см. формулу (7.15), с. 452). Отличие в описании эффекта здесь и в разд. 7 состоит в том, что там использовано среднее значение собственного поля частицы по центральному сечению частицы, а здесь мы подставили в уравнение движения оси луча локальное значение собственного поля частицы. Крайне маловероятно, что достигнутая в разд. 7 высокая точность — случайное совпадение.

4. Проведем повторный расчет угловой скорости вращения частицы, подставив в уравнение движения оси луча собственное поле частицы F_s , усредненное по центральному сечению частицы.

Найдем среднее значение поля F_s в центральном сечении частицы. Повторим формулу (19.2):

$$F_s = \frac{1}{2} A_1 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \frac{\Delta}{2} A_2 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{\Delta}{2} A_3 \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{\Delta}{2} A_4 \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (19.58)$$

где A_i — скалярные коэффициенты при бивекторах в формуле (18.37) (без учета единичного псевдоскаляра Δ ; с. 631).

Центральное сечение частицы представляет собой сферическую оболочку в физическом пространстве Γ , которая имеет центр в центре частицы O , срединный радиус r_* и толщину $2p_*$ (см. разд. 2, с. 413). Формула (19.58) задает поле F_s в центральном сечении частицы. Так как радиус-вектор $\mathbf{r}$ точек центрального сечения входит в эту формулу

только в виде дроби $\frac{\mathbf{r}}{r}$, то поле F_s принимает в центральном сечении частицы постоянное значение вдоль любого направления, радиально выходящего из центра частицы. Поэтому среднее значение поля F_s по центральному сечению частицы может быть найдено как среднее значение функции (19.58) по сфере радиуса r_* с центром в центре частицы.

В первом, втором и четвертом слагаемых в формуле (19.58) все скалярные и векторные величины, за исключением $\mathbf{r}$, постоянны на этой сфере, следовательно, среднее значение каждого из этих слагаемых по центральному сечению частицы равно с соответствующим коэффициентом среднему значению радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точек сферы. Так как для каждого вектора $\mathbf{r}$ существует противоположно направленный к нему вектор, то среднее значение всех векторов $\mathbf{r}$ равно нулевому вектору, значит, среднее значение указанных слагаемых есть нулевой вектор.

Заметим, что этот результат можно получить строго формальным способом таким же, каким найдено ниже среднее значение третьего слагаемого.

Итак, остается найти среднее значение третьего слагаемого в формуле (19.58). Вектор $\mathbf{r}$ входит в это слагаемое дважды, что приводит к отличному от нуля его среднему значению.

Рассмотрим сферу в физическом пространстве Γ , имеющую радиус r_* и центр в центре частицы O . В ближайших выкладках будем писать вместо r_* просто r , потому что они содержат радиус лишь в виде отношения $\frac{\mathbf{r}}{r}$, которое не зависит от конкретного значения r . Пусть, как и ранее, $\mathbf{a}$ — единичный вектор, сонаправленный угловой скорости вращения частицы $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{a}$; $\bar{\Omega} \in \Gamma$; Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ; $\Omega = \text{const} > 0$; $\mathbf{a} = \text{const}$). Введем в физическом пространстве Γ ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$ с началом в центре частицы O и связанную с ним сферическую систему координат с угловыми координатами $\gamma \in [0, \pi]$ и $\eta \in [0, 2\pi)$ (рис. 19.2).

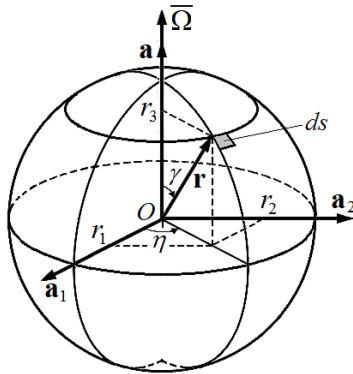


Рис. 19.2. Сфера радиуса r и базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$ в физическом пространстве Γ инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$.

$\bar{\Omega}$ — угловая скорость вращения частицы; $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{a}$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек сферы; r_1, r_2, r_3 — координаты вектора $\mathbf{r}$ в базисе $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$; $r = |\mathbf{r}|$; ds — элемент площади сферы.

Среднее значение собственного поля частицы по центральному сечению частицы, которое обозначим символом F_{s*} , может быть найдено в соответствии со сказанным выше, как среднее значение величины F_s вида (19.58) по сфере радиуса r_* (который мы временно обозначаем r):

$$F_{s*} = \frac{1}{S} \int_{(S)} F_s ds, \quad (19.59)$$

где буква S обозначает площадь сферы радиуса r , а также саму сферу; ds — элемент площади этой сферы.

Во введенной сферической системе координат площадь S сферы радиуса r , элемент ее площади ds и единичный вектор $\frac{\mathbf{r}}{r}$ задаются формулами

$$S = 4\pi r^2; \quad ds = r^2 \sin \gamma d\gamma d\eta; \quad (19.60)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \gamma \cos \eta \mathbf{a}_1 + \sin \gamma \sin \eta \mathbf{a}_2 + \cos \gamma \mathbf{a}.$$

Преобразуем произведение $\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}$ с помощью последнего равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} &= \sin \gamma \cos \eta \mathbf{a} \times \mathbf{a}_1 + \sin \gamma \sin \eta \mathbf{a} \times \mathbf{a}_2 + \cos \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \\ &= \Delta \sin \gamma (\cos \eta \mathbf{a}_2 - \sin \eta \mathbf{a}_1), \end{aligned} \quad (19.61)$$

где применены формулы (4.6) из главы 4 (с. 322) и равенство $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Из (19.60) и (19.61) с учетом $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ находим:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \\ &= \Delta \sin \gamma [(\sin \gamma \cos \eta \mathbf{a}_1 + \sin \gamma \sin \eta \mathbf{a}_2 + \cos \gamma \mathbf{a}) \wedge (\cos \eta \mathbf{a}_2 - \sin \eta \mathbf{a}_1)] = \\ &= \Delta \sin \gamma (\sin \gamma \cos^2 \eta \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 - \sin \gamma \sin^2 \eta \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1 + \\ &\quad + \cos \gamma \cos \eta \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_2 - \cos \gamma \sin \eta \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_1) = \\ &= \Delta \sin \gamma (\sin \gamma \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 + \cos \gamma \cos \eta \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_2 + \cos \gamma \sin \eta \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (19.62)$$

Поскольку первое, второе и четвертое слагаемые в (19.58) имеют, как показано, нулевые средние значения по центральному сечению частицы, то для вычисления среднего значения поля F_s достаточно подставить в формулу (19.59) только третье слагаемое. На основании (19.58) – (19.60) и (19.62) можем записать:

$$F_{s*} = \frac{1}{S} \int_{(S)} F_s ds = \frac{\Delta}{8\pi r^2} A_3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) r^2 \sin \gamma d\gamma d\eta =$$

$\begin{matrix} 0 & 0 \\ (\gamma) & (\eta) \end{matrix}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta^2 r^2}{8\pi r^2} A_3 \left[\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \int_0^\pi \sin^3 \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} d\eta + \right. \\
&\quad + \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_2 \int_0^\pi \sin^2 \gamma \cos \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} \cos \eta d\eta + \\
&\quad \left. + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a} \int_0^\pi \sin^2 \gamma \cos \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} \sin \eta d\eta \right] = \frac{1}{3} A_3 \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2,
\end{aligned}$$

где учтено, что $\Delta^2 = 1$, $\int_0^\pi \sin^3 \gamma d\gamma = \frac{4}{3}$ и что интегралы от $\cos \eta$ и $\sin \eta$ по интервалу $[0, 2\pi]$ равны нулю. Отсюда получаем:

$$F_{s*} = \frac{1}{S} \int_{(S)} F_s ds = \frac{1}{3} A_3 \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2. \quad (19.63)$$

Подставим в уравнение движения оси луча (19.33) (с. 658) на место собственного поля частицы F_s его усредненное значение F_{s*} . Так как в правой части выражения (19.63) все величины постоянны, то в уравнении (19.33) можно вынести величину F_{s*} за знак интеграла. Тогда последнее слагаемое в этом уравнении примет форму

$$a_1 F_{s*} \cdot \int_{(S_*)} \mathbf{q} \sigma dS = a_1 F_{s*} \cdot \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS,$$

где использовано значение (12.16) интеграла $\int_{(S_*)} \mathbf{q} \sigma dS$ (с. 515).

С учетом данного равенства обе части уравнения (19.33) могут быть сокращены на величину, заключенную в его левой части в скобки. После такого сокращения уравнение движения оси луча приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_0 + a_1 F_{s*} \cdot \mathbf{q}_0, \quad (19.64)$$

где F_{s*} имеет значение (19.63).

Разложим, как и ранее, направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$ на сумму составляющих $\mathbf{q}_T$ и $\mathbf{q}_\Gamma$, лежащих соответственно на оси времени T и в физическом пространстве Γ (см. формулы (19.35) и (19.36), с. 659):

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma. \quad (19.65)$$

Поскольку $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \Gamma$, то, по (19.63), тензор F_{s*} определен над Γ , как и псевдотензор $\varkappa$. Вместе с $\mathbf{q}_T \in T$ и $\Gamma \perp T$ это означает, что $F_{s*} \cdot \mathbf{q}_T = \mathbf{0}$

и $\varkappa \cdot \mathbf{q}_T = \hat{0}$. Следовательно, $F_{s*} \cdot \mathbf{q}_0 = F_{s*} \cdot \mathbf{q}_T$ и $\varkappa \cdot \mathbf{q}_0 = \varkappa \cdot \mathbf{q}_T$. Эти равенства и (19.65) позволяют записать уравнение (19.64) в форме

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = \frac{d\mathbf{q}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T + a_1 F_{s*} \cdot \mathbf{q}_T,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = -\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} + a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T + a_1 F_{s*} \cdot \mathbf{q}_T.$$

Левая часть последнего равенства является вектором, лежащим на оси времени T , правая часть — вектором, лежащим в гиперплоскости Γ . Так как $T \perp \Gamma$, то это равенство выполняется в единственном случае, когда оба вектора нулевые. Значит,

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = \mathbf{0}; \quad \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T + a_1 F_{s*} \cdot \mathbf{q}_T. \quad (19.66)$$

Согласно первому из этих уравнений, магнитное поле $\bar{H}$ и собственное поле частицы F_s не изменяют временную составляющую $\mathbf{q}_T$ направляющего орта оси луча $\mathbf{q}_0$.

Проанализируем второе уравнение.

Вектор $\mathbf{a}$ играет роль третьего вектора в базисе $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}\}$ ($\mathbf{a} = \mathbf{a}_3$). Ортонормированность базиса означает, что $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Учитывая эту формулу и определение псевдотензора Леви-Чивита $\varkappa$ (см. (4.2) в главе 4, с. 320), нетрудно убедиться в том, что

$$-\Delta \mathbf{a} \cdot \varkappa = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2. \quad (19.67)$$

С помощью формулы (4.5) из главы 4 (с. 322), равенства (19.63) и формулы (19.67) (читаемой справа налево) находим:

$$\bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T = -\bar{H} \times \mathbf{q}_T;$$

$$F_{s*} \cdot \mathbf{q}_T = \frac{1}{3} A_3 (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{q}_T = -\frac{\Delta}{3} A_3 \mathbf{a} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T = \frac{\Delta}{3} A_3 \mathbf{a} \times \mathbf{q}_T.$$

Применяя эти зависимости, преобразуем второе уравнение в (19.66):

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = -a_1 \left(\bar{H} - \frac{\Delta}{3} A_3 \mathbf{a} \right) \times \mathbf{q}_T. \quad (19.68)$$

Подставим в (19.68) значение (19.46) коэффициента A_3 , воспользуемся формулами $a_1 = \frac{e}{m_e c^2}$, $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a}$ и перейдем к дифференцированию по t (посредством равенства $dl = c dt$):

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = -\frac{e}{m_e c} \left(\bar{H} - \frac{e}{3 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*} \right)} \bar{\Omega} \right) \times \mathbf{q}_T. \quad (19.69)$$

Уравнение (19.69) означает, что пространственная составляющая $\mathbf{q}_\Gamma$ вектора $\mathbf{q}_0$ вращается с угловой скоростью, которая равна псевдовектору, стоящему перед знаком векторного умножения. Поскольку именно эта угловая скорость участвует в формуле для собственного поля частицы, то она равна входящей в (19.69) величине $\bar{\Omega}$. Поэтому уравнение (19.69) может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (19.70)$$

где

$$\bar{\Omega} = -\frac{e}{m_e c} \left(\bar{H} - \frac{e}{3c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \bar{\Omega} \right). \quad (19.71)$$

Выражение (19.71) является алгебраическим уравнением относительно угловой скорости $\bar{\Omega}$. Решая его способом, каким из (19.49) найдено значение угловой скорости (19.55), получаем:

$$\bar{\Omega} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{6n_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}} \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.72)$$

Согласно первому уравнению (19.66) и уравнению (19.70), направляющий орт оси луча $\mathbf{q}_0$ не меняет свою временную составляющую $\mathbf{q}_T$, а его пространственная составляющая $\mathbf{q}_\Gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ вида (19.72). В связи с тем, что этот результат верен для всех лучей и угловая скорость $\bar{\Omega}$ одинакова для всех них, данное движение частицы представляет собой вращение вокруг неподвижной псевдоевклидовой плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{i}$ и $\bar{\Omega}$. Изнутри трехмерного физического пространства Γ этот результат «выглядит» как вращение частицы с угловой скоростью $\bar{\Omega}$, сонаправленной напряженности магнитного поля $\bar{H}$ (так как $e < 0$).

Вычисление коэффициента, стоящего в (19.72) перед «классической» величиной $\frac{e}{m_e c} \bar{H}$ (при $n_* = 137$), дает:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &\approx -1.0012187 \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = -1; \\ \bar{\Omega} &\approx -1.0011907 \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = 0; \\ \bar{\Omega} &\approx -1.0011640 \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = 1. \end{aligned} \quad (19.73)$$

Последняя формула в (19.73) описывает экспериментальную зависимость (19.57) с относительной погрешностью $4.3 \cdot 10^{-6}$. Эта точность превышает точность формулы (19.56) более чем в 60 раз.

Таким образом, подстановка в уравнение движения оси луча усредненного значения собственного поля частицы F_{s*} вместо локального значения F_s позволила описать опытные данные с высокой точностью. Кроме того, использование усредненного значения поля не приводит к появлению «внутренних напряжений» в частице, о которых шла речь при обсуждении формул (19.43) и (19.45) (ср. (19.43) с (19.66)).

Отметим, что формулы (19.44) и (19.49), полученные при использовании локального значения поля, отличаются от аналогичных формул (19.68) и (19.71), полученных при использовании усредненного значения поля, только тем, что в (19.44) и (19.49) в знаменателе стоит число 4, а в (19.68) и (19.71) — число 3. В формулах (19.55) и (19.72), задающих угловую скорость $\bar{\Omega}$, эти числа переходят в 8 и 6 соответственно. Такое различие формул объясняется тем, что при усреднении поля F_s по центральному сечению частицы интегрирование по угловой переменной η не вносит вклада в усредненное значение поля, а интегрирование по переменной γ дает множитель $\frac{4}{3}$ (см. вывод формулы (19.63)).

Три значения (19.73) угловой скорости $\bar{\Omega}$ отвечают трем значениям параметра $\diamond$. Этот параметр был введен при записи формулы (19.52) для того, чтобы описать одним выражением три возможных значения величины $|o|r_*$ (см. (10.28), с. 479; o — угловая скорость вращения лучей, одинаковая для всех лучей и не зависящая от времени, ее определение дано в разд. 11, с. 485). Три значения величин $|o|r_*$ и $\bar{\Omega}$ соответствуют трем вариантам вращения лучей, при которых с линейной скоростью c вращаются точки поперечного сечения луча, находящиеся от центра сечения на расстоянии $r_{0\min} = r_* - p_*$, или r_* , или $r_{0\max} = r_* + p_*$ (см. текст перед формулами (10.27) на с. 478).

В разд. 10 показано, что при первом варианте ($|o|r_{0\min} = c$) все винтовые нити, образующие частицу, являются пространственноподобными. А при втором и третьем вариантах ($|o|r_* = c$ и $|o|r_{0\max} = c$) частица содержит нити всех трех возможных типов — пространственноподобные, изотропные и времениподобные (см. с. 480).

Лучи частицы вращаются вокруг своих осей с угловой скоростью o , поэтому линейная скорость вращения винтовых нитей радиуса r_0 равна $|o|r_0$. Очевидно, что при первом из упомянутых вариантов вращения лучей ($|o|r_{0\min} = c$) все нити с радиусами $r_0 > r_{0\min}$ вращаются с линейными скоростями $|o|r_0$, большими c , при втором варианте ($|o|r_* = c$) нити с радиусами $r_0 < r_*$ и нити с радиусами $r_0 > r_*$ вращаются с линейными скоростями, которые меньше и больше c соответственно, а при третьем варианте ($|o|r_{0\max} = c$) все нити с радиусами $r_0 < r_{0\max}$ вращаются с линейными скоростями, меньшими c .

5. Результат, описываемый равенствами (19.73), получен путем анализа воздействия на вращающуюся частицу ее собственного поля F_s . Из уравнений (19.44) и (19.68) видно, что вращение частицы зависит только от третьего слагаемого в формуле для поля F_s (потому что они содержат коэффициент A_3 , относящийся именно к этому слагаемому). В разд. 18 (в пункте 7 на с. 635) отмечено, что третье слагаемое в формуле для поля F_s определяет магнитную составляющую поля.

Покажем, как можно получить равенства (19.73) посредством учета только магнитной составляющей собственного поля частицы.

Возьмем за основу следующий результат. При действии на электрон внешнего магнитного поля $\bar{H}$ он вращается с угловой скоростью

$$\bar{\Omega} = -\frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.74)$$

Этот результат получен ранее в разд. 19 главы 3 для модели электрона в виде материальной точки со скрепленными с ней векторами, в разд. 12 главы 4 для модели электрона в виде «точечной» частицы и в настоящем разделе при помощи модели электрона в виде частицы ненулевого радиуса (с. 243, 389, 659).

Очевидно, что для учета самодействия частицы нужно добавить в правую часть формулы (19.74) магнитную составляющую $\bar{H}_s$ собственного поля частицы. Принимая во внимание, что в (19.74) внешнее магнитное поле $\bar{H}$ считается однородным в центральном сечении частицы, добавим значение магнитной составляющей $\bar{H}_s$, усредненное по центральному сечению частицы (обозначим это значение через $\bar{H}_{s*}$):

$$\bar{\Omega} = -\frac{e}{m_e c} (\bar{H} + \bar{H}_{s*}). \quad (19.75)$$

Допустим, что формула (18.44) для поля $\bar{H}_s$ (с. 638), относящаяся к случаю $r > r_* + p_*$, является верной также при $r = r_* + p_*$, то есть выполняется и в точках внешней границы центрального сечения частицы:

$$\bar{H}_s(x) \Big|_{r=r_*+p_*} = \frac{\Delta e \Omega}{c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (19.76)$$

где применена формула (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$); отметим, что так как $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор, то $\bar{H}_s \Big|_{r=r_*+p_*}$ не зависит от расстояния r .

В начале данного раздела сказано, что на внутренней границе центрального сечения частицы (то есть при $r = r_* - p_*$) собственное поле частицы F_s равно нулю. Значит, поле $\bar{H}_s$, являющееся магнитной составляющей поля F_s , равно нулю на этой границе.

Рассмотрим произвольный луч частицы. Его поперечное сечение, лежащее в центральном сечении частицы, состоит из n_* кругов радиуса p_* (см. рис. 2.1, с. 411). Допустим, что на этих кругах собственное магнитное поле частицы $\overline{H}_s$ меняется линейно от нулевого значения при $r = r_* - p_*$ до значения (19.76) при $r = r_* + p_*$ (вдоль прямых, которые проходят через центр частицы и центры кругов; аналогично тому, как ранее мы допустили подобное для поля F_s , см. рис. 19.1, с. 646).

При расчете будем считать, что поле $\overline{H}_s$ принимает на каждом круге значение, равное его среднему значению на интервале $[r_* - p_*, r_* + p_*]$ (тоже аналогично тому, что было принято в отношении поля F_s). Вследствие допущения о линейности функции $\overline{H}_s(x)$ на данном интервале, это означает, что магнитное поле на каждом круге равно половине величины $\overline{H}_s|_{r=r_*+p_*}$, описываемой формулой (19.76) (пометим это среднее значение поля индексом «a.f.v.d.» — average field value on the disk):

$$\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} = \frac{1}{2} \overline{H}_s|_{r=r_*+p_*} = \frac{\Delta e \Omega}{2 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right). \quad (19.77)$$

Формула (19.77) задает поле $\overline{H}_s$ в центральном сечении частицы. Это сечение представляет собой сферическую оболочку в физическом пространстве G , которая имеет центр в центре частицы, срединный радиус r_* и толщину $2p_*$. Поскольку радиус-вектор $\mathbf{r}$ точек центрального сечения входит в формулу (19.77) только в виде дроби $\frac{\mathbf{r}}{r}$, то поле $\overline{H}_s$ принимает в центральном сечении частицы постоянное значение вдоль каждого направления, радиально выходящего из центра частицы. Поэтому среднее значение магнитной составляющей по всему центральному сечению частицы (обозначенное символом $\overline{H}_{s*}$) может быть найдено как среднее значение величины $\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}}$ вида (19.77) по сфере, имеющей центр в центре частицы и радиус r_* (который временно обозначим через r):

$$\overline{H}_{s*} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} ds, \quad (19.78)$$

где буква S обозначает площадь сферы радиуса r , а также саму сферу; ds — элемент площади этой сферы (см. рис. 19.2 на с. 666).

Пользуясь формулами (19.60) (с. 667), (19.77) и (19.78), получаем:

$$\overline{H}_{s*} = \frac{\Delta e \Omega}{8 \pi r^2 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\cos \gamma (\sin \gamma \cos \eta \mathbf{a}_1 + \sin \gamma \sin \eta \mathbf{a}_2 + \right. \\ \left. + \cos \gamma \mathbf{a}) - \mathbf{a} \right] r^2 \sin \gamma d\gamma d\eta.$$

Интегрируя и применяя равенство $\bar{\Omega} = \Delta\Omega\mathbf{a}$, находим:

$$\bar{H}_{s*} = - \frac{e}{3cr_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \bar{\Omega}. \quad (19.79)$$

Подстановка этого значения величины $\bar{H}_{s*}$ в (19.75) дает:

$$\bar{\Omega} = - \frac{e}{m_e c} \left(\bar{H} - \frac{e}{3cr_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \bar{\Omega} \right). \quad (19.80)$$

Формула (19.80) совпадает с (19.71). Проводя далее преобразования такие же, какие были проведены с выражением (19.71), вновь приходим к формулам (19.73), третья из которых описывает экспериментальную зависимость с относительной погрешностью $4.3 \cdot 10^{-6}$.

Отметим, что результат, соответствующий третьей формуле в (19.73), был получен аналогичным способом в разд. 7.

6. Настоящая модель позволяет описать опытные данные с еще большей точностью.

В разд. 12 введена плотность σ точек пересечения винтовых нитей с поперечным сечением луча. Она определена условием, что число точек пересечения, приходящееся на элемент dS площади сечения, равно σdS (с. 507). Общее количество точек пересечения равняется количеству нитей, образующих луч. В разд. 12 рассмотрены две ситуации: 1) точки пересечения винтовых нитей с поперечным сечением луча распределены по сечению равномерно; 2) распределение точек пересечения таково, что одинаковым элементам площади сечения отвечают равные суммарные длины пересекающих их нитей. Поскольку все винтовые нити луча имеют одинаковый шаг, то длина нити, отвечающая одному шагу, зависит от ее радиуса r_0 . Поэтому во второй ситуации плотность σ является функцией r_0 . В первой и второй ситуациях плотность σ помечена индексами соответственно 1 и 2; σ_1 и σ_2 имеют вид (12.3) (с. 509):

$$\sigma_1 = \frac{N_*}{\pi p_*^2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_*}{J_0} \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \quad \text{при} \quad J_0 = \int_{(S_0)} \frac{dS}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}, \quad (19.81)$$

где N_* — количество нитей в одной спирали луча; S_0 — сечение любой спирали луча; σ_1 является константой; σ_2 зависит от r_0 в силу зависимости от r_0 параметра β_0 . Напомним, что по (13.24) (с. 531):

$$\beta_0 = \frac{r_0 \operatorname{ch} \varphi}{r_* \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \quad (\diamond = -1, 0, 1). \quad (19.82)$$

При предыдущем способе описания вращения частицы мы вычислили среднее значение поля $\bar{H}_s$ по центральному сечению частицы без учета того, как распределены в центральном сечении элементы частицы, воспринимающие воздействие. Теперь учтем это распределение.

Воспользуемся следующим соображением. В разд. 3 спин луча был рассчитан в предположении, что масса спирали равномерно распределена по ее объему. В рамках представления о том, что спираль состоит из отдельных винтовых нитей, естественно допустить, что масса нити пропорциональна ее длине. В таком случае для постоянства плотности массы внутри спирали нужно, чтобы суммарная длина нитей в единице объема спирали была одинаковой по всей спирали. Благодаря тому, что спираль имеет винтовую симметрию и количество нитей в спирали равно количеству точек пересечения нитей с сечением спирали, указанное требование будет удовлетворено, если в качестве плотности точек пересечения нитей с поперечным сечением луча применить функцию σ_2 .

Итак, вычислим среднее значение собственного поля частицы по центральному сечению частицы как среднее значение функции $\bar{H}_s(x)$ по тем элементам центрального сечения, которые воспринимают воздействие. Иначе говоря, примем в роли среднего значения поля $\bar{H}_s$ интеграл по центральному сечению от произведения $\sigma_2 \bar{H}_s(x)$.

Начнем с расчета среднего значения поля $\bar{H}_s$ по сечению винтовой спирали луча, лежащему в центральном сечении частицы (рис. 19.3).

На рис. 19.3 показано, что плоскость, в которой лежит рассматриваемое сечение спирали, проходит через центр частицы O . Убедимся в том, что это действительно так. В самом деле, собственное физическое пространство частицы — это гиперплоскость, проходящая через центр частицы и ортогональная оси симметрии частицы. Поскольку центральное сечение частицы есть ее сечение собственным физическим пространством, то по теореме 15.1 (с. 541) сечение луча, лежащее в центральном сечении частицы, является его поперечным сечением. Последнее, согласно принятому в разд. 2, содержится в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, которая проходит через центр частицы O (см. рис. 2.1 и текст перед ним, с. 411). Следовательно, центр частицы O и сечение любой винтовой спирали луча, лежащее в центральном сечении частицы, действительно находятся в одной плоскости.

Зададим в этой плоскости полярную систему координат $\{\rho, \psi\}$ с началом в центре сечения спирали и полярной осью, проходящей через центр частицы O и центр сечения G (см. рис. 19.3). Координаты точек сечения спирали принадлежат следующим интервалам:

$$\rho \in [0, p_*]; \quad \psi \in [0, 2\pi). \quad (19.83)$$

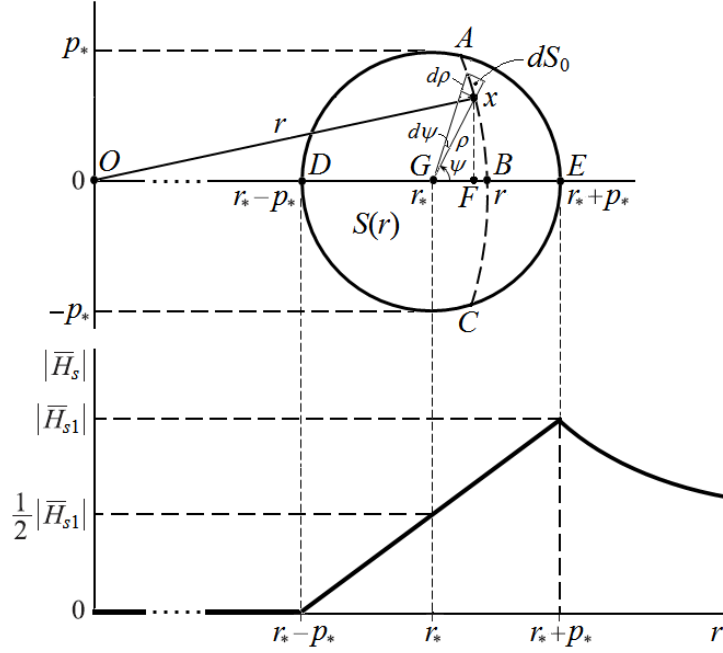


Рис. 19.3. Сечение спирали, лежащее в центральном сечении частицы, и график функции $|\bar{H}_s(r)|$ вдоль прямой OE .

Луч состоит из $n_* = 137$ винтовых спиралей (см. рис. 1.3 и 4.1 на с. 409, 419 и формулу (4.3) на с. 418). В связи с тем, что расстояние r_* между центром частицы и центром сечения спирали превосходит радиус сечения p_* примерно в 44 раза (см. (4.5) на с. 420), размер книжной страницы не позволяет выполнить рисунок с соблюдением реальной пропорции между r_* и p_* при показанном размере сечения спирали. Поэтому на горизонтальных прямых сделаны разрывы, обозначенные точками. Часть графика, которая отвечает значениям $r > r_* + p_*$, задается формулой (18.44) (с. 638) и показывает убывание поля $\bar{H}_s$ при удалении от центрального сечения частицы.

r — расстояние между центром частицы O и точкой x ; ρ, ψ — полярные координаты с началом в центре сечения G и полярной осью, проходящей через центр частицы и центр сечения; $S(r)$ — фигура, которая ограничена дугой ADC окружности радиуса p_* и (штриховой) дугой ABC окружности радиуса r , а также площадь этой фигуры (если точка x находится в точке D , то $r = r_* - p_*$ и $S(r) = 0$, если же точка x находится в точке E , то $r = r_* + p_*$ и $S(r) = \pi p_*^2$).

Обозначим сечение спирали и его площадь одним и тем же символом S_0 . Элемент площади сечения определяется равенством

$$dS_0 = \rho d\psi d\rho. \quad (19.84)$$

Из (19.83) и (19.84) находим площадь сечения спирали:

$$S_0 = \int_{(S_0)} dS_0 = \int_0^{p_*} \int_0^{2\pi} \rho d\psi d\rho = \pi p_*^2; \quad (19.85)$$

так и должно быть, ибо сечение представляет собой круг радиуса p_* .

Пусть x — некоторая точка сечения S_0 (точка наблюдения); (ρ, ψ) — координаты точки x в полярной системе координат; r — расстояние от центра частицы O до точки x ; F — проекция точки x на полярную ось.

Треугольник $Ox F$ лежит, вместе с сечением спирали, в пространственноподобной плоскости и является прямоугольным (так как $x F \perp OF$; см. рис. 19.3), поэтому

$$|Ox| = r; \quad |OF| = r_* + \rho \cos \psi; \quad |x F| = \rho \sin \psi.$$

Отсюда, по теореме Пифагора, получаем:

$$r = \sqrt{(r_* + \rho \cos \psi)^2 + (\rho \sin \psi)^2} = \sqrt{r_*^2 + 2r_*\rho \cos \psi + \rho^2},$$

следовательно,

$$r = r_* \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2}. \quad (19.86)$$

Из зависимостей $\left(\frac{\rho}{r_*} \right)_{max} = \frac{p_*}{r_*}$ и $\frac{p_*}{r_*} \ll 1$ вытекает $\frac{\rho}{r_*} \ll 1$. Разложим величину $\left(\frac{r}{r_*} \right)^{-1}$, задаваемую равенством (19.86), по степеням малого параметра $\frac{\rho}{r_*}$ с точностью до $\left(\frac{\rho}{r_*} \right)^3$. Применяя известные формулы разложения в степенной ряд, находим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_*} \right)^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2 \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \right]}} \underset{\frac{\rho}{r_*} \ll 1}{\approx} 1 - \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{3}{8} \left[2 \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \right]^2 - \frac{5}{16} \left[2 \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \right]^3 \approx \\ &\approx 1 - \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \cos^2 \psi + \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^3 \cos \psi - \frac{5}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^3 \cos^3 \psi. \end{aligned} \quad (19.87)$$

Вычислим интеграл, который потребуется в дальнейшем. На основании (19.83), (19.84), (19.86) и (19.87) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(S_0)} \frac{dS_0}{r} &= \int_{\substack{0 \\ (\rho)}}^{p_*} \int_{\substack{0 \\ (\psi)}}^{2\pi} \frac{\rho d\psi d\rho}{r_* \sqrt{1 + \left[2 \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \right]}} \approx \\ &\approx_{\frac{\rho}{r_*} \ll 1} \frac{1}{r_*} \int_{\substack{0 \\ (\rho)}}^{p_*} \int_{\substack{0 \\ (\psi)}}^{2\pi} \rho \left[1 - \left(\frac{\rho}{r_*} \right) \cos \psi - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^2 \cos^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^3 \cos \psi - \frac{5}{2} \left(\frac{\rho}{r_*} \right)^3 \cos^3 \psi \right] d\psi d\rho = \frac{\pi p_*^2}{r_*} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right]; \end{aligned}$$

отметим, что слагаемые, содержащие куб величины $\frac{\rho}{r_*}$, обращаются в нули при интегрировании.

Итак, разложение подынтегрального выражения по степеням малого параметра $\frac{\rho}{r_*}$ с точностью до $\left(\frac{\rho}{r_*}\right)^3$ приводит к следующему приближенному равенству (с точностью до $\left(\frac{p_*}{r_*}\right)^3$):

$$\int_{(S_0)} \frac{dS_0}{r} \approx_{\frac{p_*}{r_*} \ll 1} \frac{\pi p_*^2}{r_*} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right]. \quad (19.88)$$

Повторим формулу (19.76), используя обозначение $\overline{H}_{s1} = \overline{H}_s|_{r=r_*+p_*}$:

$$\overline{H}_{s1} = \frac{\Delta e \Omega}{c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*} \right)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (19.89)$$

здесь $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор, направленный вдоль прямой Ox ; $\mathbf{a}$ — направляющий орт оси вращения; γ — угол между векторами $\frac{\mathbf{r}}{r}$ и $\mathbf{a}$; отметим, что псевдовектор $\overline{H}_{s1}$ не зависит от координаты r , потому что r входит в (19.89) лишь в виде отношения $\frac{\mathbf{r}}{r}$.

Формула (19.89), как и формула (19.76), которую она повторяет, описывает поле $\overline{H}_s$ во всех точках внешней границы центрального сечения частицы, то есть при любом направлении вектора $\mathbf{r}$. Ранее отмечалось, что на внутренней границе центрального сечения (при $r = r_* - p_*$) собственное поле частицы отсутствует, то есть $\overline{H}_s|_{r=r_*-p_*} = \overline{0}$. Допустим,

подобно тому, как делали ранее, что поле $\overline{H}_s$ меняется вдоль каждого направления вектора $\mathbf{r}$ линейно между значениями $\overline{H}_s|_{r=r_*-p_*} = \overline{0}$ и $\overline{H}_s|_{r=r_*+p_*} = \overline{H}_{s1}$. Такая зависимость поля $\overline{H}_s$ от расстояния r описывается формулой

$$\overline{H}_s(x) = \frac{1}{2p_*} \overline{H}_{s1} [r - (r_* - p_*)] \quad \text{при } r \in [r_* - p_*, r_* + p_*]; \quad (19.90)$$

легко проверить, что действительно $\overline{H}_s = \overline{0}$ при $r = r_* - p_*$ и $\overline{H}_s = \overline{H}_{s1}$ при $r = r_* + p_*$; график этой зависимости (вдоль диаметра DE сечения спирали) показан на рис. 19.3 наклонным прямолинейным отрезком.

Нас сейчас интересуют только элементы частицы, лежащие в сечении спирали. Найдем среднее значение поля $\overline{H}_s$ по сечению спирали с учетом плотности σ_2 точек пересечения нитей с сечением. Обозначим это среднее значение поля тем же символом $\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}}$, как и при предыдущем способе описания вращения частицы («a.f.v.d.» — average field value on the disk). Поскольку для нас важно относительное распределение по сечению точек пересечения нитей с сечением, а всего таких точек N_* штук, то возьмем в качестве веса при интегрировании величину $\frac{\sigma_2}{N_*}$:

$$\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} = \int_{(S_0)} \frac{\sigma_2}{N_*} \overline{H}_s dS_0 = \int_{(S_0)} \frac{\sigma_2}{N_*} \frac{1}{2p_*} A \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right) [r - (r_* - p_*)] dS_0, \quad (19.91)$$

где применены формулы (19.89), (19.90) и обозначено

$$A = \frac{\Delta e \Omega}{c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*} \right)} \quad (A = \text{const}). \quad (19.92)$$

На основании обобщенной теоремы о среднем значении (с. 630) приведем выражение (19.91) к виду

$$\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} = \frac{1}{2p_*} A \left(\cos \tilde{\gamma} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{a} \right) \int_{(S_0)} \frac{\sigma_2}{N_*} [r - (r_* - p_*)] dS_0, \quad (19.93)$$

где $\tilde{\gamma}$ и $\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{r}$ — некоторые значения угла γ и единичного вектора $\frac{\mathbf{r}}{r}$.

Нетрудно убедиться в том, что средние по сечению спирали значения величин γ и $\frac{\mathbf{r}}{r}$ соответствуют точкам, лежащим на диаметре DE сечения (см. рис. 19.3). Поэтому, допуская нестрогость, примем, что

в (19.93) единичный вектор $\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{r}$ направлен вдоль прямой OG , проходящей через центр частицы и центр сечения, а $\tilde{\gamma}$ является углом между этим вектором и (постоянным) вектором $\mathbf{a}$. Далее будем обозначать величины γ и $\frac{r}{r}$ без знака тильды, подразумевая, что они имеют именно эти значения.

Преобразуем выражение (19.93). Вернемся, для сокращения записи, к обозначению $\bar{H}_{s1}$, полагая теперь, что величины γ и $\frac{r}{r}$ имеют в формуле (19.89) указанные выше значения. Применим формулы (19.89) и (19.92), подставим значение функции σ_2 из (19.81), вынесем постоянный параметр J_0 за знак интеграла и выполним простые преобразования, используя значение J_0 из (19.81) (с заменой обозначения элемента площади dS на dS_0):

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\text{a.f.v.d.}} &= \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} \frac{1}{J_0} \int_{(S_0)} \frac{r - (r_* - p_*)}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS_0 = \\ &= \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} \frac{1}{\int_{(S_0)} \frac{dS_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}} \int_{(S_0)} \frac{r dS_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} - \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} \frac{(r_* - p_*)}{\int_{(S_0)} \frac{dS_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}} \int_{(S_0)} \frac{dS_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}. \end{aligned}$$

Сокращая интегралы в последнем слагаемом, получаем:

$$\bar{H}_{\text{a.f.v.d.}} = \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} \frac{1}{\int_{(S_0)} \frac{dS_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}} \int_{(S_0)} \frac{r dS_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} - \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} (r_* - p_*). \quad (19.94)$$

В разд. 9 главы 4 (на с. 369) отмечено, что основной вклад в собственное поле «точечной» частицы вносят лучи, которые непосредственно примыкают к световому конусу, ограничивающему частицу. Такие лучи характеризуются большими значениями угла φ . В случае частицы ненулевого радиуса это относится к осям лучей. Для лучей с большими углами φ параметр β_0 тоже принимает большое значение, так как по (19.82) он пропорционален $\text{ch } \varphi$, поэтому будем считать, что

$$\beta_0^2 \gg 1. \quad (19.95)$$

Отсюда, в силу $\beta_0 > 0$, следует:

$$\sqrt{|\beta_0^2 - 1|} \underset{\beta_0^2 \gg 1}{\approx} \beta_0. \quad (19.96)$$

Преобразуем (19.94) с учетом (19.96):

$$\bar{H}_{\text{a.f.v.d.}} \underset{\beta_0^2 \gg 1}{\approx} \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} \frac{1}{\int_{(S_0)} \frac{dS_0}{\beta_0}} \int_{(S_0)} \frac{r dS_0}{\beta_0} - \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s1} (r_* - p_*). \quad (19.97)$$

Поскольку рассматриваемое сечение спирали ортогонально оси луча, то радиус r_0 винтовой нити, проходящей через точку x сечения спирали, равен расстоянию r между центром сечения O и точкой x ($r_0 = r$; см. рис. 10.2 и 19.3, с. 466 и 676). Подставим в (19.97) значение (19.82) параметра β_0 с заменой r_0 на r , затем вынесем величины, не зависящие от r , за знаки интегралов и сократим одинаковые величины, стоящие в числителе и знаменателе:

$$\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} \underset{\beta_0^2 \gg 1}{\approx} \frac{1}{2p_*} \overline{H}_{s1} \frac{1}{\int_{(S_0)} \frac{dS_0}{r}} \int_{(S_0)} dS_0 - \frac{1}{2p_*} \overline{H}_{s1} (r_* - p_*).$$

Внесем в эту формулу значения интегралов из (19.85) и (19.88). Далее разложим дробь по степеням $\frac{p_*}{r_*}$ (с точностью до $(\frac{p_*}{r_*})^3$) и произведем очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} \overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} &\underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{r_*} \ll 1}}{\approx} \frac{1}{2p_*} \overline{H}_{s1} \frac{\pi p_*^2}{\frac{\pi p_*^2}{r_*} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*}\right)^2\right]} - \frac{1}{2p_*} \overline{H}_{s1} (r_* - p_*) \approx \\ &\approx \frac{r_*}{2p_*} \overline{H}_{s1} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*}\right)^2\right] - \frac{r_*}{2p_*} \overline{H}_{s1} \left[1 - \left(\frac{p_*}{r_*}\right)\right] = \frac{1}{2} \overline{H}_{s1} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*}\right)\right]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение псевдовектора $\overline{H}_{s1}$ из (19.89) и применяя формулу (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$), получаем среднее значение собственного магнитного поля частицы по сечению спирали с учетом плотности точек пересечения нитей с сечением σ_2 :

$$\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} \underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{r_*} \ll 1}}{\approx} \frac{\Delta e \Omega \left(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}{2c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a}\right), \quad (19.98)$$

здесь, напомним, единичный вектор $\frac{\mathbf{r}}{r}$ направлен вдоль прямой, проходящей через центр частицы и центр сечения спирали, а угол γ есть угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\frac{\mathbf{r}}{r}$.

Перейдем к расчету среднего значения поля $\overline{H}_s$ по всему центральному сечению частицы.

Центральное сечение частицы представляет собой сферическую оболочку со срединным радиусом r_* , толщиной $2p_*$ и с центром в центре частицы. В связи с тем, что диаметр сечения спирали равен толщине оболочки, можно считать, что $\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}}$ является средним значением поля $\overline{H}_s$ по радиальным направлениям в центральном сечении

частицы. Поэтому среднее значение поля $\overline{H}_s$ по всему центральному сечению частицы (которое по-прежнему обозначим символом $\overline{H}_{s*}$) может быть найдено как среднее значение величины $\overline{H}_{\text{a.f.v.d.}}$ вида (19.98) по сфере, имеющей центр в центре частицы и радиус r_* :

$$\overline{H}_{s*} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \overline{H}_{\text{a.f.v.d.}} ds, \quad (19.99)$$

где буква S обозначает площадь сферы, а также саму сферу; эта формула повторяет формулу (19.78) (с. 673).

Правая часть формулы (19.98) отличается от правой части формулы (19.77) только постоянным множителем, стоящим в числителе в скобках, поэтому, проводя интегрирование, получим результат, который отличается от (19.79) тоже только этим множителем:

$$\overline{H}_{s*} = - \frac{e \left(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}{3 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \overline{\Omega}, \quad (19.100)$$

где применено равенство $\overline{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a}$.

Снова воспользуемся уравнением (19.75):

$$\overline{\Omega} = - \frac{e}{m_e c} (\overline{H} + \overline{H}_{s*}). \quad (19.101)$$

Из (19.100) и (19.101) имеем:

$$\overline{\Omega} = - \frac{e}{m_e c} \left(\overline{H} - \frac{e \left(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}{3 c r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \overline{\Omega} \right). \quad (19.102)$$

Решая уравнение (19.102) относительно $\overline{\Omega}$, находим:

$$\overline{\Omega} = - \frac{1}{e^2 \left(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{n_*}\right) - 3 m_e c^2 r_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \frac{e}{m_e c} \overline{H}. \quad (19.103)$$

Преобразуем формулу (19.103) тем же способом, которым из формулы (19.50) была получена формула (19.55).

Коэффициент при $\overline{H}$ в (19.103) содержит известные фундаментальные константы e , m_e , c , целочисленную константу $n_* = 137$ (см. формулу (4.3) на с. 418) и радиус частицы r_* .

В разд. 8 получена для r_* формула (8.3) (с. 456):

$$r_* = \frac{2\hbar}{m_e(|o|r_*)\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (19.104)$$

Произведение $|o|r_*$ имеет три возможных значения (13.22) (с. 531):

$$|o|r_* = \frac{c}{1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}} \quad (\text{где } \diamond = -1, 0, 1). \quad (19.105)$$

Подстановка в (19.104) значения (19.105) произведения $|o|r_*$ дает:

$$r_* = \frac{2\hbar\left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}{m_e c \left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{n_*}\right)}. \quad (19.106)$$

С помощью (4.2) и (4.4) $\left(n_*\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{n_*}\right) = \alpha^{-1}; \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}\right)$ можно преобразовать формулу (19.106) к виду

$$r_* = 2n_* \frac{e^2}{m_e c^2} \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right). \quad (19.107)$$

Из (19.103) и (19.107) находим:

$$\overline{\Omega} = - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{8}\sin \frac{\pi}{n_*}\right)} \frac{e}{m_e c} \overline{H}. \quad (19.108)$$

$$1 - \frac{1}{6n_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*}\right) \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}\right)}$$

Отсюда видно, что поправочный коэффициент при «классической» величине $\frac{e}{m_e c} \overline{H}$ зависит только от одной целочисленной характеристики модели $n_* = 137$. Вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &\approx -1.00121517 \frac{e}{m_e c} \overline{H} \quad \text{при } \diamond = -1; \\ \overline{\Omega} &\approx -1.00118728 \frac{e}{m_e c} \overline{H} \quad \text{при } \diamond = 0; \\ \overline{\Omega} &\approx -1.00116063 \frac{e}{m_e c} \overline{H} \quad \text{при } \diamond = 1. \end{aligned} \quad (19.109)$$

Последняя формула в (19.109) описывает экспериментальную зависимость (19.57) (с. 665) с относительной погрешностью $1 \cdot 10^{-6}$. Эта точность в 270 раз превышает точность формулы (19.56), полученной без усреднения поля F_s по центральному сечению частицы и без учета того, как распределены в центральном сечении элементы частицы, воспринимающие воздействие. Напомним, что равенство $\diamond = 1$, при котором выполняется данная формула, относится к случаю, когда с линейной скоростью c вращаются периферические элементы центрального сечения частицы (находящиеся на расстоянии $r_* + p_*$ от центра частицы).

7. Покажем, как можно получить еще более точное значение угловой скорости частицы.

Протяженность пространства Минковского во временном направлении означает, что каждое тело присутствует в этом пространстве сразу во всех своих временных состояниях. Другими словами, настоящее состояние тела сосуществует со всеми его прошлыми и будущими состояниями. Понятно, что для того, чтобы два ближайших друг к другу состояния тела могли быть различимы, они должны быть разделены каким-то промежутком времени. Поэтому представляется целесообразным исследовать ситуацию, при которой совокупность состояний тела, отвечающих разным моментам времени, образует в пространстве Минковского не непрерывное, а дискретное множество. При этом в качестве временного промежутка Δl , разделяющего ближайшие состояния тела, естественно принять такой промежуток, который является объективно выделенным и минимальным.

Утверждение. *В модели электрона в виде частицы ненулевого радиуса минимальный объективно выделенный промежуток собственного времени частицы — это проекция шага спирали P на ось симметрии частицы, разделенная на количество спиралей n_* в одном луче:*

$$\Delta l = \frac{P \operatorname{ch} \varphi}{n_*} = \frac{2\pi r_*}{n_*} \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*} \right) = \frac{2\pi r_*}{n_*} \left(1 + \diamond \frac{p_*}{r_*} \right). \quad (19.110)$$

Мы пишем здесь Δl вместо Δl_* , так как в настоящем разделе рассматривается частица, центр которой неподвижен относительно используемой инерциальной системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, вследствие чего приращение собственного времени частицы Δl_* совпадает с приращением координатного времени Δl .

Доказательство. Фрагментом частицы, имеющим наименьший ненулевой размер, является спираль. При этом каждая из спиралей, составляющих луч частицы, обладает в направлении оси луча «толщиной», равной P/n_* (в этом легко убедиться с помощью рис. 12.1 (с. 508), если учесть, что отрезки AB и $A'B'$ на рисунке параллельны оси луча

и их длина P равна «толщине» спирали, умноженной на количество спиралей в луче n_*). А так как ось луча составляет угол φ с осью симметрии частицы, то проекция этой «толщины» на ось симметрии равна $\frac{P}{n_*} \operatorname{ch} \varphi$. В исследуемой ситуации ось симметрии частицы совпадает с мировой линией L и с осью времени T , поэтому данная проекция равна промежутку времени Δl , задаваемому первым выражением в (19.110):

$$\Delta l = \frac{P \operatorname{ch} \varphi}{n_*}. \quad (19.111)$$

На основании формул (2.2), (13.18) и (13.23) (с. 412, 530, 531) имеем:

$$\frac{p_*}{r_*} = \sin \frac{\pi}{n_*}; \quad P = \frac{2\pi r_*}{\beta}; \quad \beta = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*}} \quad (\diamond = -1, 0, 1).$$

С помощью этих зависимостей приводим (19.111) к виду

$$\Delta l = \frac{P \operatorname{ch} \varphi}{n_*} = \frac{2\pi r_*}{n_*} \left(1 + \diamond \sin \frac{\pi}{n_*} \right) = \frac{2\pi r_*}{n_*} \left(1 + \diamond \frac{p_*}{r_*} \right).$$

Это выражение совпадает с (19.110). Из него видно, что величина Δl одинакова для всех лучей и зависит только от трех фиксированных параметров частицы p_* , r_* и n_* . Кроме того, она непосредственно связана с наименьшим (во времениподобном направлении) размером фрагмента частицы. Следовательно, указанное значение Δl в самом деле является минимальным объективно выделенным временным промежутком в настоящей модели. ■

Собственное поле частицы F_s , согласно определению (14.4) (с. 535), вычисляется с использованием операции интегрирования вдоль мировой линии частицы. Между тем, если расположения частицы в пространстве Минковского образуют не непрерывное, а дискретное множество, то поле F_s должно вычисляться с помощью не операции интегрирования, а операции суммирования по расположениям частицы. Однако вторая операция значительно сложнее первой, поэтому мы не будем отказываться от интегрирования, а поступим следующим образом.

Будем вычислять поле F_s по-прежнему путем интегрирования, но при этом будем учитывать только те расположения частицы, которые отстоят в прошлое от рассматриваемого момента времени не менее, чем на Δl . Иначе говоря, мы продолжим считать, что расположения частицы в пространстве M переходят друг в друга непрерывным образом, но «обрежем» отвечающее им множество значений переменной интегрирования l в (14.4) на величину Δl вблизи рассматриваемого момента

времени l_x . Таким образом, далее будем считать при интегрировании по времени, что $l \in (-\infty, l_x - \Delta l]$, а не $l \in (-\infty, l_x)$, как следует из формулы (16.52) при выписанных в ней ограничениях (с. 593).

Благодаря такому «обрезанию», мы в какой-то мере учтем упомянутую дискретность расположений частицы, потому что это «обрезание» может быть интерпретировано как отражение того факта, что расположение частицы, непосредственно предшествующее рассматриваемому моменту времени, находится от этого момента на конечном временном расстоянии Δl .

Такое «обрезание», как мы сейчас покажем, приводит к изменению области пространства, в которой собственное поле частицы F_s и его магнитная составляющая $\overline{H}_s$ могут быть вычислены с помощью формул (18.34) и (18.44) (с. 627, 638).

На рис. 19.4 изображен диаметр DE сечения спирали (тот же, что на рис. 19.3). Он показан в трех положениях — в момент времени l_x , соответствующий точке наблюдения x (помечен цифрой 1), в предшествующий момент времени (2) и в некоторый прошлый момент l (3). При отсутствии «обрезания» (рис. 19.4, а) положения 1 и 2 диаметра фактически совпадают. Если же «обрезание» имеет место (рис. 19.4, б), то эти положения разделены промежутком времени Δl .

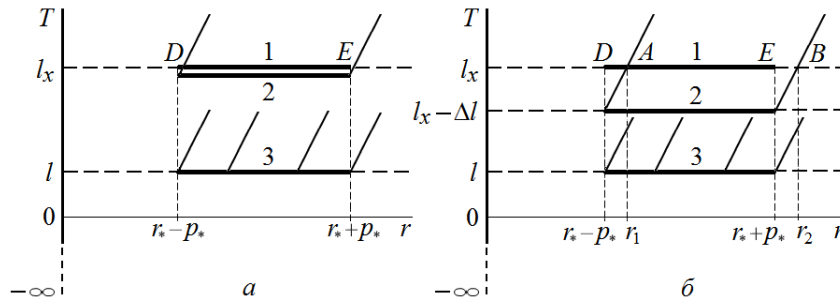


Рис. 19.4. Диаметр DE сечения спирали в трех положениях — в момент времени l_x , в предшествующий момент времени и в некоторый прошлый момент l : а — без «обрезания» промежутка интегрирования по временной переменной l ; б — при «обрезании» промежутка интегрирования на величину Δl .

Переменная интегрирования l измеряется вдоль оси времени T (которая совпадает с мировой линией частицы L); интегрирование по l проводится в случае а по интервалу $(-\infty, l_x)$, а в случае б по интервалу $(-\infty, l_x - \Delta l]$.

Оси лучей наклонены по отношению к оси симметрии частицы. Поскольку в рассматриваемой ситуации ось симметрии совпадает с мировой линией частицы и с осью времени T , то оси лучей и вместе с ними нити частицы наклонены по отношению к оси времени T . На рис. 19.4 наклонные прямолинейные отрезки, исходящие из точек D и E , — условные изображения крайних винтовых нитей, проходящих через диаметр DE . Показаны также две промежуточные нити, проходящие через диаметр DE в его положении 3.

Рисунок 19.4,а позволяет заключить, что все нити, исходящие из элементов диаметра DE в его положении 2, проходят через диаметр DE в положении 1, поэтому порождаемое этими нитями поле F_s воздействует на все элементы диаметра DE в положении 1. Из рис. 19.4,б видно, что, во-первых, нет нитей, исходящих из диаметра DE в его положении 2, которые порождали бы поле в точках отрезка DA диаметра в его положении 1 и, во-вторых, есть нити, исходящие из диаметра DE в его положении 2, которые проходят через интервал EB , находящийся вне диаметра DE в его положении 1, и поэтому не воздействуют на элементы диаметра DE в положении 1.

Формула (18.34) (с. 627), на основе которой рассчитано собственное поле частицы $F_s(x)$, содержит интегралы по радиусу r_0 винтовых нитей, проходящих через точку x . Пределы интегрирования в ней должны удовлетворять условию $r_0 < r$ (где r — расстояние от точки x до центра частицы при его расположении, одномоментном с x ; см. теорему 16.1, с. 568). При расчете поля F_s по формуле (18.34) применена формула (15.9) (с. 539), в которой интегрирование проводится по всем значениям $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, поэтому найденное значение (18.35) поля F_s (с. 628) относится только к тем точкам x , через которые проходят нити всех возможных радиусов r_0 (разным r_0 могут отвечать разные значения l).

Обратимся к рис. 19.4,а. Если двигать мысленно диаметр DE (в положении 3) от момента времени $l = l_x$ в направлении прошлого, то можно сделать вывод, что через точку E (в положении 1) проходят с течением времени нити всех радиусов r_0 . Благодаря этому обстоятельству, оказалось возможным вычислить поле F_s в точке E по формуле (18.34) с использованием формулы (15.9). Вместе с тем, из рисунка видно, что левее точки D нити не проходят, значит, в точке D поле равно нулю. На основании этого мы приняли, что на самом диаметре DE поле меняется линейно от нулевого значения в точке D до значения, вычисленного по формуле (18.34), в точке E . Это позволило рассчитать самодействие частицы.

Ситуация, показанная на рис. 19.4,б, иная. Здесь нити не проходят не только левее точки D , но и в точках отрезка DA диаметра (в его положении 1), поэтому поле F_s равно нулю на этом отрезке. Кроме того, не все нити проходят через точку E . Ближайшая к E точка, через которую проходят нити всех возможных радиусов r_0 , — это точка B . Значит, в данной ситуации формула (18.34) может быть применена для вычисления поля F_s только в точке B и правее нее.

Проведенные рассуждения основаны на рисунке, поэтому они носят лишь пояснительный характер. Перейдем к строгому расчету.

Согласно теореме 16.1 (с. 568), нити частицы, проходящие через точку x , подчиняются зависимости (16.3). Запишем эту зависимость в виде

$$r_0 = \sqrt{r^2 - \text{th}^2 \varphi (l_x - l)^2}, \quad (19.112)$$

где r_0 — радиус нитей, проходящих через точку x ; r — расстояние между точкой x и центром частицы при его расположении, одномоментном с точкой x ; φ — угол наклона оси луча по отношению к оси симметрии частицы (он одинаков для всех лучей, нити которых одинакового радиуса r_0 проходят через точку x); l_x и l — временные координаты соответственно точки x и центра частицы в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ (l_x — фиксированная величина, l — переменная интегрирования в (14.4), с. 535); $r > r_0$, $\varphi > 0$, $l_x > l$ (см. рис. 16.1, с. 567).

Ранее было отмечено, что основной вклад в поле F_s вносят лучи, которые характеризуются большими значениями угла φ . Благодаря тому, что $\text{th} \varphi \rightarrow 1$ при $\varphi \rightarrow +\infty$, выражение (19.112) может быть переписано для больших φ в форме

$$r_0 = \sqrt{r^2 - (l_x - l)^2}. \quad (19.113)$$

При расчете поля F_s с применением процедуры «обрезания» наибольшее значение величины l равно $l_x - \Delta l$. Поэтому из (19.113) вытекает, что радиусы r_0 нитей, порождающих поле F_s в точке x , ограничены сверху величиной

$$r_{0\max} = \sqrt{r^2 - (\Delta l)^2}. \quad (19.114)$$

Таким образом, в случае $l \leq l_x - \Delta l$ ограничение $r_0 \leq r_{0\max}$ является необходимым условием для того, чтобы среди нитей с большими значениями φ нашлись такие, которые проходят через точку x и тем самым дают вклад в поле F_s в точке x . А так как радиусы всех нитей удовлетворяют неравенству $r_0 \geq r_* - p_*$, то для существования таких нитей должно выполняться условие $r_{0\max} \geq r_* - p_*$. Из этого условия и

из (19.114) следует, что среди нитей с большими φ нет таких, которые проходили бы через точку x в случае $r < r_1$, где

$$r_1 = \sqrt{(r_* - p_*)^2 + (\Delta l)^2}. \quad (19.115)$$

Вместе с тем, поскольку $r_0 \leq r_* + p_*$ для всех нитей, то ограничение $r_0 \leq r_{0\max}$ заведомо выполняется при $r_{0\max} \geq r_* + p_*$, то есть при любых $r \geq r_2$, где

$$r_2 = \sqrt{(r_* + p_*)^2 + (\Delta l)^2}; \quad (19.116)$$

величины r_1 и r_2 соответствуют точкам A и B на рис. 19.4, б.

Далее нас будет интересовать только магнитная составляющая $\bar{H}_s$ собственного поля частицы F_s . Она задана третьим слагаемым в формуле (18.35) (с. 628) и преобразована к виду (18.44) (с. 638).

На основании сказанного приходим к такому выводу. При $r \in [0, r_1]$ собственное магнитное поле частицы $\bar{H}_s$ принимает нулевое значение (так как в этом случае не имеется нитей с большими φ , которые проходили бы через точку x). Примем, по непрерывности, что $\bar{H}_s = 0$ при $r = r_1$. При $r \geq r_2$, когда интегрирование проводится по всем значениям $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, поле $\bar{H}_s$ имеет тот же вид, что и без процедуры «обрезания», и может быть вычислено по формуле (18.44). Из этой формулы вытекает, что при $r = r_2$ поле $\bar{H}_s$ имеет следующее значение, которое обозначим через $\bar{H}_{s2}$:

$$\bar{H}_{s2} = \bar{H}_s(x) \Big|_{r=r_2} = \frac{\Delta e \Omega}{c r_2} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right). \quad (19.117)$$

Допустим, подобно тому, как делали ранее, что при $r \in [r_1, r_2]$ поле $\bar{H}_s$ изменяется линейно с ростом r от нулевого значения при $r = r_1$ до значения $\bar{H}_{s2}$ при $r = r_2$. В результате имеем: $\bar{H}_s(x) = 0$ при $r \in [0, r_1]$,

$$\bar{H}_s(x) = \bar{H}_{s2} \frac{1}{r_2 - r_1} (r - r_1) \quad \text{при } r \in [r_1, r_2], \quad (19.118)$$

$\bar{H}_s(x)$ задается формулой (18.44) при $r \in [r_2, +\infty)$. График этой функции показан линией 2 на рис. 19.5.

Итак, если «обрезание» множества значений временной переменной l отсутствует, то график функции $|\bar{H}_s|(r)$ (при фиксированных γ и $\mathbf{r}/r$) представляет собой линию 1 на рис. 19.5 (он совпадает с графиком на рис. 19.3, с. 676). Если же «обрезание» имеет место, то график функции $|\bar{H}_s|(r)$ изображается линией 2 на рис. 19.5.

К сожалению, не удастся вычислить среднее значение поля $\bar{H}_s$ по сечению спирали в случае функции $|\bar{H}_s|(r)$, имеющей график 2, из-за возникающих при расчете неберущихся интегралов.

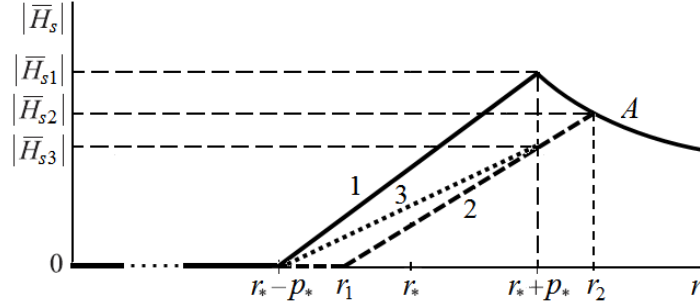


Рис. 19.5. Зависимость собственного магнитного поля $\bar{H}_s$ вращающейся частицы от расстояния r между центром частицы и точкой x (вдоль любого направления в физическом пространстве Γ , радиально выходящего из центра частицы): 1 — без «обрезания» множества значений временной переменной l ; 2 — при «обрезании»; 3 — зависимость, используемая при расчете самодействия частицы вместо зависимости 2.

График 1 совпадает с графиком на рис. 19.3 (с. 676). Дуга A — часть графика, описываемая формулой (18.44) (с. 638).

Для решения задачи поступим следующим образом. Допустим, что на промежутке $[r_* - p_*, r_* + p_*]$ график функции $|\bar{H}_s|(r)$ изображается линией 3 на рис. 19.5, а не линией 2. Иначе говоря, примем, что поле $\bar{H}_s$ возрастает в сечении спирали линейно от нуля при $r = r_* - p_*$ до значения, задаваемого формулой (19.118) при $r = r_* + p_*$. Обозначим это значение поля $\bar{H}_s$ символом $\bar{H}_{s3}$ (см. рис. 19.5). Из (19.117) и (19.118) находим:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{s3} &= \bar{H}_s(x) \Big|_{r=r_*+p_*} = \bar{H}_{s2} \frac{1}{r_2 - r_1} (r_* + p_* - r_1) = \\ &= \frac{\Delta e \Omega}{c r_2} \frac{(r_* + p_* - r_1)}{(r_2 - r_1)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right). \end{aligned} \quad (19.119)$$

В таком случае зависимость поля $\bar{H}_s$ от расстояния r описывается формулой

$$\bar{H}_s(x) = \frac{1}{2p_*} \bar{H}_{s3} [r - (r_* - p_*)] \quad \text{при } r \in [r_* - p_*, r_* + p_*]; \quad (19.120)$$

нетрудно убедиться в том, что $\bar{H}_s = 0$ при $r = r_* - p_*$ и $\bar{H}_s = \bar{H}_{s3}$ при

$r = r_* + p_*$, как и должно быть; график этой зависимости на промежутке $[r_* - p_*, r_* + p_*]$ изображен на рис. 19.5 пунктирной линией 3.

Сравнение формулы (19.120) с формулой (19.90) (с. 679) показывает, что среднее значение поля $\bar{H}_s$ по сечению спирали может быть найдено в данном случае тем же способом, каким оно найдено в предыдущем случае с помощью формулы (19.90). Нужно только заменить в выкладках величину $\bar{H}_{s1}$ величиной $\bar{H}_{s3}$. Обозначая среднее значение поля по сечению спирали тем же символом $\bar{H}_{\text{a.f.v.d.}}$, что и ранее, получаем на основании формулы, предваряющей формулу (19.98) (с. 681):

$$\bar{H}_{\text{a.f.v.d.}} \underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{r_*} \ll 1}}{\approx} \frac{1}{2} \bar{H}_{s3} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*} \right) \right]. \quad (19.121)$$

Подстановка в (19.121) значения (19.119) псевдовектора $\bar{H}_{s3}$ дает:

$$\bar{H}_{\text{a.f.v.d.}} \underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{r_*} \ll 1}}{\approx} \frac{\Delta e \Omega}{2 c r_2} \frac{(r_* + p_* - r_1)}{(r_2 - r_1)} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*} \right) \right] \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (19.122)$$

здесь, как и в (19.98), единичный вектор $\frac{\mathbf{r}}{r}$ направлен вдоль прямой, проходящей через центр частицы и центр сечения спирали, а угол γ есть угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\frac{\mathbf{r}}{r}$; эта формула, как и формула (19.98), учитывает плотность σ_2 точек пересечения нитей с сечением спирали.

Среднее значение поля $\bar{H}_s$ по всему центральному сечению частицы (которое по-прежнему обозначим $\bar{H}_{s*}$) может быть найдено по формуле

$$\bar{H}_{s*} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \bar{H}_{\text{a.f.v.d.}} ds, \quad (19.123)$$

где буква S обозначает площадь сферы радиуса r , а также саму сферу; ds — элемент площади этой сферы (см. рис. 19.2 на с. 666); обоснование этой формулы дано перед формулами (19.78) и (19.99), повторением которых она является (с. 673, 682).

В правой части формулы (19.122) все величины, стоящие перед выражением $(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a})$, постоянны на сфере S , поэтому в (19.123) фактически интегрируется только это выражение. Проинтегрируем его с помощью формул (19.60) (с. 667), в которых $\gamma \in [0, \pi]$ и $\eta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_{(S)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right) ds &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\cos \gamma (\sin \gamma \cos \eta \mathbf{a}_1 + \\ &+ \sin \gamma \sin \eta \mathbf{a}_2 + \cos \gamma \mathbf{a}) - \mathbf{a}] r^2 \sin \gamma d\gamma d\eta = -\frac{2}{3} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (19.124)$$

Из (19.122) – (19.124) и равенства $\bar{\Omega} = \Delta \Omega \mathbf{a}$ находим:

$$\bar{H}_{s*} \underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{r_*} \ll 1}}{\approx} -\frac{e}{3c} \frac{(r_* + p_* - r_1)}{r_2(r_2 - r_1)} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{p_*}{r_*} \right) \right] \bar{\Omega}. \quad (19.125)$$

Перед тем, как преобразовать эту формулу, выведем вспомогательные формулы.

Из (2.2) и (4.3) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$; $n_* = 137 (\gg \pi)$), раскладывая функцию $\sin \frac{\pi}{n_*}$ по степеням малого параметра $\frac{\pi}{n_*}$ с точностью до $\left(\frac{\pi}{n_*}\right)^3$, получаем:

$$\frac{p_*}{r_*} = \sin \frac{\pi}{n_*} \underset{\frac{\pi}{n_*} \ll 1}{\approx} \frac{\pi}{n_*} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^3.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \underset{\frac{\pi}{n_*} \ll 1}{\approx} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^4 + \frac{1}{36} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^6; \quad \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \underset{\frac{\pi}{n_*} \ll 1}{\approx} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^5 + \dots;$$

отсюда

$$\left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \underset{\frac{\pi}{n_*} \ll 1}{\approx} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^2; \quad \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \underset{\frac{\pi}{n_*} \ll 1}{\approx} \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^3; \quad (19.126)$$

эти формулы выполняются с точностью до $\left(\frac{\pi}{n_*}\right)^3$.

На основании (19.126) заключаем, что при анализе ситуации с точностью до $\left(\frac{p_*}{r_*}\right)^3$ допустима замена $\left(\frac{\pi}{n_*}\right)^2$ на $\left(\frac{p_*}{r_*}\right)^2$.

Преобразуем формулы (19.115) и (19.116) с учетом (19.110):

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \sqrt{(r_* \mp p_*)^2 + (\Delta l)^2} = \sqrt{(r_* \mp p_*)^2 + \left(\frac{2\pi r_*}{n_*} \right)^2 \left(1 + \diamond \frac{p_*}{r_*} \right)^2} = \\ &= r_* \sqrt{\left(1 \mp \frac{p_*}{r_*} \right)^2 + 4 \left(\frac{\pi}{n_*} \right)^2 \left(1 + \diamond \frac{p_*}{r_*} \right)^2} \approx \\ &\underset{\frac{p_*}{r_*} \ll 1}{\approx} r_* \sqrt{1 + \left[\mp 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right) + 5 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 + 8 \diamond \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right]}, \end{aligned}$$

где произведена замена $\left(\frac{\pi}{n_*}\right)^2$ на $\left(\frac{p_*}{r_*}\right)^2$; отброшено слагаемое, пропорциональное $\left(\frac{p_*}{r_*}\right)^4$; верхний знак относится к r_1 , нижний знак — к r_2 .

Разложим правую часть выписанной цепочки равенств по степеням малого параметра, заключенного в квадратные скобки. Пользуясь известной формулой

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x \ll 1}{\approx} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3,$$

находим (с точностью до $(\frac{p_*}{r_*})^3$):

$$r_{1,2} \underset{\frac{p_*}{r_*} \ll 1}{\approx} r_* \left[1 \mp \left(\frac{p_*}{r_*} \right) + 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 + (4\Diamond \pm 2) \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right].$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} r_1 &\underset{\frac{p_*}{r_*} \ll 1}{\approx} r_* \left[1 - \left(\frac{p_*}{r_*} \right) + 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 + 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 + 4\Diamond \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right]; \\ r_2 &\underset{\frac{p_*}{r_*} \ll 1}{\approx} r_* \left[1 + \left(\frac{p_*}{r_*} \right) + 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 - 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 + 4\Diamond \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right]; \\ r_2 - r_1 &\underset{\frac{p_*}{r_*} \ll 1}{\approx} 2p_* \left[1 - 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

С помощью этих формул вычисляем дробь, входящую в (19.125):

$$\begin{aligned} \frac{(r_* + p_* - r_1)}{r_2(r_2 - r_1)} &\approx \frac{r_* \left[1 + \left(\frac{p_*}{r_*} \right) - 1 + \left(\frac{p_*}{r_*} \right) - 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 - 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 - 4\Diamond \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right]}{r_* \left[1 + \left(\frac{p_*}{r_*} \right) + 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 - 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 + 4\Diamond \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right] 2p_* \left[1 - 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right]} \approx \\ &\approx \frac{\left[1 - \left(\frac{p_*}{r_*} \right) - (1 + 2\Diamond) \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right]}{r_* \left[1 + \left(\frac{p_*}{r_*} \right) - 4(1 - \Diamond) \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^3 \right]}. \end{aligned}$$

Подставим это значение дроби в (19.125) и применим формулу (2.2) ($p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$):

$$\overline{H}_{s*} \underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{r_*} \ll 1}}{\approx} - \frac{e \left[1 - \sin \frac{\pi}{n_*} - (1 + 2\Diamond) \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right] \left(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{n_*} \right)}{3cr_* \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_*} - 4(1 - \Diamond) \sin^3 \frac{\pi}{n_*} \right)} \overline{\Omega}; \quad (19.127)$$

формула верна с точностью до $(\frac{p_*}{r_*})^3$.

Подставим найденное значение величины $\overline{H}_{s*}$ в уравнение (19.101) ($\overline{\Omega} = -\frac{e}{m_{ec}}(\overline{H} + \overline{H}_{s*})$). Решая его способом таким же, каким оно было решено при $\overline{H}_{s*}$ вида (19.100) (с. 682–683), найдем угловую скорость $\overline{\Omega}$.

В связи с тем, что формула (19.127) отличается от (19.100) только двумя постоянными величинами — множителем, заключенным в квадратные скобки в числителе, и слагаемым $-4(1-\diamond)\sin^3\frac{\pi}{n_*}$ в знаменателе, итоговая формула оказывается отличающейся от (19.108) тоже только этими величинами:

$$\bar{\Omega} \approx - \frac{1}{1 - \frac{\left[1 - \sin\frac{\pi}{n_*} - (1+2\diamond)\sin^2\frac{\pi}{n_*}\right]\left(1 - \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{n_*}\right)}{\frac{6n_*\left(1 + \sin\frac{\pi}{n_*} - 4(1-\diamond)\sin^3\frac{\pi}{n_*}\right)\left(1 + \diamond\sin\frac{\pi}{n_*}\right)} \frac{e}{m_{ec}} \bar{H}. \quad (19.128)$$

Вычисления приводят к следующему результату (для $n_* = 137$):

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &\approx -1.00118803 \frac{e}{m_{ec}} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = -1 \quad (\delta \approx 2.8 \cdot 10^{-5}); \\ \bar{\Omega} &\approx -1.00115945 \frac{e}{m_{ec}} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = 0 \quad (\delta \approx 2.0 \cdot 10^{-7}); \\ \bar{\Omega} &\approx -1.00113216 \frac{e}{m_{ec}} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = 1 \quad (\delta \approx 2.7 \cdot 10^{-5}), \end{aligned} \quad (19.129)$$

где $\delta = \frac{|\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_{\text{exp.}}|}{|\bar{\Omega}_{\text{exp.}}|}$ — относительная погрешность при сравнении с опытными данными, которые получены с использованием электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) [29] и описываются зависимостью

$$\bar{\Omega}_{\text{exp.}} \approx -1.00115965 \frac{e}{m_{ec}} \bar{H}. \quad (19.130)$$

Вторая формула в (19.129) показывает, что учет самодействия частицы, дополненный «обрезанием» по временной переменной, позволяет описать опытные данные с относительной погрешностью $2 \cdot 10^{-7}$, что в 5 раз точнее, чем без «обрезания». Равенство $\diamond = 0$, при котором выполняется эта формула, относится к случаю, когда с линейной скоростью c вращаются элементы центральных винтовых нитей (эти винтовые нити имеют радиус r_* ; вращение происходит вокруг оси луча). Из (19.128) видно, что поправочный коэффициент при «классической» величине $\frac{e}{m_{ec}} \bar{H}$ зависит, как и в предыдущих случаях, только от одной целочисленной характеристики модели $n_* = 137$ (см. (4.3), с. 418). Формула (19.128) верна с точностью до $\left(\frac{r_*}{r_*}\right)^3$.

8. До сих пор мы полагали, что частица неподвижна относительно используемой системы отсчета. Однако в методе ЭПР исследуются атомы водорода. Электрон в атоме движется вокруг ядра с большой скоростью. Учтем это движение электрона (движением самого атома пренебрежем).

Пусть в лабораторной инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ действует однородное и постоянное магнитное поле $\bar{H} = \Delta H \mathbf{a}$, где Δ — единичный псевдоскаляр в физическом пространстве Γ ; $H = |\bar{H}|$; $\mathbf{a}$ — единичный вектор в Γ . Вследствие движения электрона относительно системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, магнитное поле $\bar{H}'$ в системе отсчета, сопутствующей электрону, отличается от $\bar{H}$. Вычислим его.

Зададим в лабораторной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T ; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}$ — направляющий орт магнитного поля $\bar{H}$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \Gamma$.

Известно, что под действием магнитного поля орбитальный момент электрона ориентируется параллельно полю. Это означает, что плоскость орбиты электрона занимает положение, ортогональное $\bar{H}$. Зафиксируем некоторый момент времени t по часам системы отсчета $\{T, \Gamma\}$. Пусть электрон движется в этот момент относительно $\{T, \Gamma\}$ со скоростью $\mathbf{v}$ в направлении, указываемом вектором $\mathbf{e}_1$, то есть $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_1$.

Введем инерциальную систему отсчета $\{T', \Gamma'\}$, мгновенно сопутствующую электрону в момент t , и связанный с ней ортонормированный базис $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, где $\mathbf{e}'_0 = \mathbf{i}$ — единичный вектор, касательный к мировой линии электрона, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}$.

Запишем преобразования Лоренца, связывающие заданные базисы:

$$\mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\tau} + \frac{v}{c} \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_1 = \frac{\frac{v}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{a} \quad (19.131)$$

(см. формулы (9.8) в разд. 9 главы 3, с. 164).

Поскольку в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ действует магнитное поле $\bar{H}$, а электрическое поле отсутствует, то, согласно формуле (4.9) из главы 4 (с. 324), тензор электромагнитного поля F имеет вид

$$F = \bar{H} \cdot \varkappa, \quad (19.132)$$

где $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством Γ .

В системе отсчета $\{T', \Gamma'\}$ магнитное поле $\bar{H}'$ может быть рассчитано по формуле (4.10) из главы 4 (с. 324):

$$\bar{H}' = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa', \quad (19.133)$$

где $\varkappa'$ — псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством Γ' .

Из (19.132) и (19.133) находим:

$$\bar{H}' = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa' = \frac{1}{2} (\bar{H} \cdot \varkappa) \cdot \cdot \varkappa' = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot (\varkappa \cdot \cdot \varkappa'). \quad (19.134)$$

Вычислим бискалярное произведение $\varkappa \cdot \cdot \varkappa'$.

Псевдотензор Леви-Чивита выражается через векторы ортонормированного базиса с помощью формулы (4.2) из главы 4 (с. 320). Запишем эту формулу для ортонормированных базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \Gamma$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \in \Gamma'$ (с учетом $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}$):

$$\begin{aligned}\varkappa &= \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{a} - \mathbf{e}_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{a}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{a}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1); \\ \varkappa' &= \Delta'(\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2\mathbf{a} - \mathbf{e}'_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{a}\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_1\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{a}\mathbf{e}_2\mathbf{e}'_1),\end{aligned}\quad (19.135)$$

где Δ и Δ' — единичные псевдоскаляры в Γ и Γ' (каждый из них равен единице, если соответствующий базис правоориентированный и равен минус единице, если базис левоориентированный).

Допустим, что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный. Тогда $\Delta = 1$. Из (19.131) вытекает, что базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ может быть преобразован в базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ путем непрерывного перехода (при $v \rightarrow 0$), следовательно, оба базиса имеют одинаковую ориентацию. Поэтому базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ тоже правоориентированный и, значит, $\Delta' = 1$.

Операция бискалярного умножения тензоров производится в соответствии с правилом (4.3) из главы 4 (с. 321). Повторим это правило:

$$\begin{aligned}\mathbf{abc} \cdot \cdot \mathbf{xyz} &= \mathbf{ab} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{yz} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{ab} \cdot \mathbf{yz} = \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})\mathbf{az},\end{aligned}\quad (19.136)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ — произвольные векторы; $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$ — скалярные произведения векторов (числа).

Ортонормированность базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ означает, что

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\delta_{ij}; \quad \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = -\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (19.137)$$

где знак минус связан с отрицательной определенностью метрической формы в физических пространствах Γ и Γ' ; δ_{ij} — символ Кронекера.

Пользуясь формулами (19.135), правилом бискалярного умножения тензоров (19.136), условием ортонормированности базисов (19.137) и равенствами $\Delta = 1$ и $\Delta' = 1$, получаем:

$$\begin{aligned}\varkappa \cdot \cdot \varkappa' &= \Delta\Delta'(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{a} - \mathbf{e}_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{a}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{a}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \cdot \cdot \\ &\cdot (\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2\mathbf{a} - \mathbf{e}'_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{a}\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_1\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{a}\mathbf{e}_2\mathbf{e}'_1) = \\ &= 2[(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}\mathbf{a}) - \mathbf{e}_1\mathbf{e}'_1].\end{aligned}$$

Подставим это значение бискалярного произведения $\varkappa \cdot \cdot \varkappa'$ в формулу (19.134). С помощью равенств $\overline{H} = \Delta H\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$,

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1$ и второго из преобразований Лоренца (19.131) находим:

$$\begin{aligned}\bar{H}' &= \frac{1}{2} \bar{H} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}') = \Delta H \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1')(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{a} \mathbf{a}) - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1'] = \\ &= -\Delta H (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1') \mathbf{a} = -\bar{H} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1') = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \bar{H}.\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что если в лабораторной инерциальной системе отсчета $\{T, G\}$ действует магнитное поле $\bar{H}$ и электрон движется относительно этой системы отсчета со скоростью v в ортогональном к $\bar{H}$ направлении, то в инерциальной системе отсчета $\{T', G'\}$, мгновенно сопутствующей электрону, действует магнитное поле

$$\bar{H}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \bar{H}; \quad (19.138)$$

отметим, что $|\bar{H}'| > |\bar{H}|$ (при $v \neq 0$); этот результат совпадает с известной формулой (см. [25], § 24).

Рассмотрим частицу, моделирующую орбитальный электрон. Ее центр покоится относительно системы отсчета $\{T', G'\}$ (в момент t). Проведем для этой частицы рассуждения такие же, посредством которых было определено вращение частицы с центром, неподвижным относительно системы отсчета $\{T, G\}$. Тогда получим формулу для угловой скорости вращения частицы, совпадающую с (19.128), с единственным отличием: в ней вместо поля $\bar{H}$ будет стоять поле $\bar{H}'$. Подставим в эту формулу значение поля $\bar{H}'$ из (19.138). Если обозначить большую дробь, стоящую в (19.128) перед «классической» величиной $\frac{e}{m_e c} \bar{H}$, буквой B (от английского *Big* — Большой), то получим:

$$\bar{\Omega} \underset{\substack{\beta_0^2 \gg 1 \\ \frac{p_*}{p_*} \ll 1}}{\approx} -B \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (19.139)$$

Пусть электрон обращается вокруг ядра атома по первой боровской орбите. Тогда его скорость $v = \alpha c$, где α — постоянная тонкой структуры, c — скорость света. При $\alpha \approx 0,0072973526$ [26] имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \approx 1.00002663. \quad (19.140)$$

Формула (19.139) отличается от (19.128) только релятивистским множителем (19.140), поэтому численные значения угловой скорости $\bar{\Omega}$ получаются в данном случае умножением значений (19.129) на этот множитель:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &\approx -1.00121469 \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = -1 \quad (\delta \approx 5.5 \cdot 10^{-5}); \\ \bar{\Omega} &\approx -1.00118611 \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = 0 \quad (\delta \approx 2.6 \cdot 10^{-5}); \\ \bar{\Omega} &\approx -1.00115882 \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad \text{при } \diamond = 1 \quad (\delta \approx 8.3 \cdot 10^{-7}),\end{aligned}\tag{19.141}$$

где δ — относительная погрешность при сравнении с опытными данными, описываемыми зависимостью (19.130).

Из (19.141) видно, что при учете орбитального движения электрона наивысшая точность ($\delta \approx 8.3 \cdot 10^{-7}$) достигается при $\diamond = 1$. Это — тот случай, когда с линейной скоростью c вращаются периферийные элементы центрального сечения частицы (они находятся на расстоянии $r_* + p_*$ от центра частицы).

Пояснения к разд. 19. В этом разделе исследовано вращение частицы под действием магнитного поля и собственного поля частицы.

Результат таков: *чем детальнее учитываются характеристики частицы, тем точнее согласуется теоретический расчет с опытными данными.*

В пункте 1 (с. 645) доказано, что совместное действие на частицу однородного и постоянного магнитного поля и собственного поля частицы не вызывает движения центра частицы, если в начальный момент он покоился (см. теорему 19.1, с. 647).

В п. 2 (с. 658) рассмотрено вращение частицы под действием однородного и постоянного магнитного поля без учета собственного поля частицы. Доказано, что в этом случае частица вращается с угловой скоростью $\bar{\Omega}$, сонаправленной напряженности магнитного поля $\bar{H}$ в соответствии с законом (19.40) (с. 659):

$$\bar{\Omega} = - \frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad (e < 0);\tag{19.142}$$

относительная погрешность этого значения $\bar{\Omega}$ по сравнению с экспериментальным значением (19.57) (или (19.130), с. 665, 694) составляет $1 \cdot 10^{-3}$.

Ранее формула (19.142) была получена в разд. 19 главы 3 для модели электрона в виде материальной точки со скрепленными с ней векторами (с. 243) и в разд. 12 главы 4 для модели электрона в виде «точечной» частицы (с. 389).

В п. 3 (с. 660) учтено самодействие частицы. Для этого найденный ранее тензор собственного поля частицы F_s подставлен в уравнение движения оси луча. Учет самодействия частицы позволил описать экспериментальные данные с относительной погрешностью $2.7 \cdot 10^{-4}$.

Отмечено, что в разд. 7 этот же физический эффект описан с относительной погрешностью, меньшей $5 \cdot 10^{-6}$. Отличие состоит в том, что в разд. 7 использовано при расчете среднее значение собственного поля частицы по центральному сечению частицы, тогда как в данном пункте использовано локальное значение собственного поля частицы.

В п. 4 (с. 665) в связи со сказанным проведен повторный расчет угловой скорости вращения частицы путем подстановки в уравнение движения оси луча среднего значения поля F_s по центральному сечению частицы. Это привело к уменьшению относительной погрешности до $4.3 \cdot 10^{-6}$, что в 63 раза точнее результата, полученного в п. 3.

В п. 5 (с. 672) на основании изложенного в пп. 3 и 4 сделан вывод, что вращение частицы зависит не от всего тензора F_s , а только от его магнитной составляющей. В этом пункте за основу взята формула (19.142). В нее добавлена магнитная составляющая поля F_s , усредненная по центральному сечению частицы (она обозначена символом $\overline{H}_{s*}$; см. формулу (19.75), с. 672):

$$\overline{\Omega} = -\frac{e}{m_e c} (\overline{H} + \overline{H}_{s*}); \quad (19.143)$$

эта формула приводит к результату, совпадающему с результатом п. 4.

В п. 6 (с. 674) отмечено, что величина $\overline{H}_{s*}$ вычислена в предыдущем пункте без учета того, как распределены в центральном сечении частицы ее элементы, воспринимающие воздействие (фактически это соответствует равномерному распределению этих элементов по центральному сечению частицы). Проведен расчет угловой скорости $\overline{\Omega}$ при таком распределении элементов частицы, воспринимающих воздействие, которое соответствует постоянству плотности массы внутри луча. Относительная погрешность полученного результата составила $1 \cdot 10^{-6}$.

В п. 7 (с. 684) обращено внимание на то, что в пространстве Минковского каждое тело присутствует сразу во всех своих временных состояниях. Высказано предположение, что для того, чтобы два ближайших друг к другу состояния тела могли быть различимы, они должны быть разделены каким-то промежутком времени. Применительно к частице, моделирующей электрон, в качестве такого промежутка принят промежуток, который является в данной модели объективно выделенным и минимальным. Это снизило относительную погрешность до $2 \cdot 10^{-7}$.

В п. 8 (с. 694) отмечено, что в методе ЭПР исследуются не непосредственно электроны, а атомы (в частности, атомы водорода). В атоме электрон движется вокруг ядра с большой скоростью, поэтому магнитное поле, которое действует на электрон, отличается от поля, задаваемого в лаборатории (см. (19.138), с. 697). Включение в формулу для $\bar{\Omega}$ релятивистской поправки (19.140) позволило описать вращение электрона с относительной погрешностью $8.3 \cdot 10^{-7}$.

Итак, наиболее точными являются результаты, полученные в пп. 7 и 8. При выводе этих результатов учтены:

- самодействие частицы (т. е. воздействие на частицу ее собственного магнитного поля, усредненного по центральному сечению частицы),
- распределение элементов частицы внутри ее лучей, обеспечивающее постоянство плотности массы внутри луча,
- дискретность множества расположений тела в пространстве Минковского (то есть наличие временного зазора между ближайшими друг к другу расположениями тела на мировой линии),
- релятивистская поправка к значению магнитного поля, действующего на движущийся электрон (в п. 8).

Несколько комментариев.

а) Наилучшие результаты, как указано выше, достигнуты в пп. 7 и 8. В п. 7 результат получен при $\diamond = 0$, а в п. 8 — при $\diamond = 1$. В первом случае с линейной скоростью s вращаются вокруг своих осей центральные винтовые нити спиралей (они имеют радиус r_*), а во втором случае — периферические винтовые нити (их радиус равен $r_* + p_*$). Несмотря на то, что в п. 7 точность результата выше, чем в п. 8, нельзя сделать определенный вывод о том, какой вариант вращения лучей более реалистичен. Это связано с тем, что при расчетах был принят ряд упрощений, которые могли оказать влияние на точность результата. Наиболее существенными являются предположение о линейной зависимости собственного поля частицы от расстояния r (в центральном сечении частицы) и замена зависимости, показанной линией 2 на рис. 19.5, зависимостью, показанной линией 3 (с. 690).

б) Усреднение собственного поля F_s по центральному сечению частицы привело к результату, который в 63 раза точнее результата, полученного на основе локального значения поля (см. пп. 3 и 4). Маловероятно, что это — случайность. Кроме того, при использовании среднего значения поля не возникают «внутренние напряжения» в частице, о которых сказано в п. 3 (с. 663). Тем не менее, нет полной ясности, почему использование среднего значения поля дает результат существенно более точный, чем использование локального значения поля.

в) Из изложенного выше вытекает, что вращение частицы зависит от значения собственного поля, усредненного по центральному сечению частицы. Собственное поле частицы и внешнее поле образуют при совместном действии единое электромагнитное поле, которое невозможно разделить в опыте на составляющие части, поэтому сделанный вывод относится также к внешнему полю. Следовательно, формула (19.143) должна быть переписана в виде

$$\overline{\Omega} = -\frac{e}{m_e c} (\overline{H} + \overline{H}_s)_*, \quad (19.144)$$

где индекс * обозначает операцию усреднения по центральному сечению частицы (в настоящем разделе предполагалось, что внешнее поле $\overline{H}$ является однородным, поэтому его среднее значение совпадает с локальным значением).

г) Обратим внимание на важное обстоятельство. Центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей, имеющих единственную общую точку — центр частицы (см. рис. 2.1 и 4.1, с. 411, 419). Поэтому центральное сечение частицы — это сферическая оболочка в собственном физическом пространстве частицы L_* , имеющая срединный радиус r_* и толщину $2p_*$.

При расчете самодействия частицы мы воспользовались тем обстоятельством, что на внешней границе центрального сечения частицы (при $r = r_* + p_*$) собственное поле частицы F_s описывается полученной ранее формулой, а на внутренней границе (при $r = r_* - p_*$) оно равно нулю (так как при $r < r_* - p_*$ нет винтовых нитей, порождающих поле; r — расстояние от центра частицы). Мы приняли, что поле F_s меняется определенным образом внутри центрального сечения частицы от нулевого значения при $r = r_* - p_*$ до указанного значения при $r = r_* + p_*$. В п. 4 и в последующих пунктах нам потребовалось найти среднее значение поля по центральному сечению частицы. При этом мы не стали проводить формальное интегрирование по сферической оболочке, а поступили следующим образом: сначала нашли среднее значение поля по сечению спирали, лежащему в центральном сечении частицы, и затем вычислили интеграл от этого среднего значения по сфере радиуса r_* . Объясним причину применения такого способа расчета.

Элементы частицы, воспринимающие воздействие, находятся в центральном сечении частицы. Точнее, они принадлежат сечениям спиралей, лежащим в центральном сечении частицы. Сечения спиралей разделены промежутками, которые не содержат элементов частицы. Один из таких промежутков показан на рис. 19.6 штриховкой. Более того, части каждого такого промежутка, находящиеся по разные сто-

роны от центральной сферы радиуса r_* , имеют разные площади (это непосредственно видно из неравенства площадей участков, заштрихованных на рисунке вертикальными и горизонтальными линиями). По этой причине формальное интегрирование по толщине центрального сечения частицы привело бы к заведомо ошибочному результату.

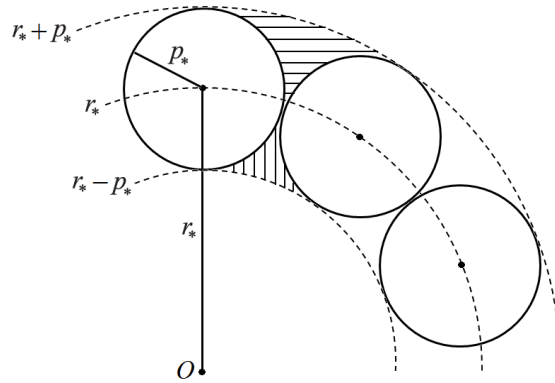


Рис. 19.6. Фрагмент поперечного сечения луча, лежащего в центральном сечении частицы.

O — центр частицы; круги радиуса p_* — сечения спиралей; штриховые дуги радиусов $r_* - p_*$ и $r_* + p_*$ — внутренняя и внешняя границы центрального сечения частицы.

д) Коэффициент при «классической» величине $\frac{e}{m_e c} \overline{H}$, обеспечивающий согласие расчетного значения угловой скорости с ее экспериментальным значением, зависит во всех рассмотренных случаях только от одной целочисленной характеристики модели $n_* = 137$ (в п. 8 этот коэффициент содержит еще релятивистскую поправку). Достигнутая высокая точность результата служит существенным доводом в пользу справедливости модели.

В заключение повторим сказанное в конце разд. 7.

Наблюдаемый эффект, выражаемый зависимостью (19.130) (с. 694), заключается во вращении электронов магнитным полем, причем отличие в (19.130) числового коэффициента от единицы объясняется самодействием электронов. Этот эффект не связан со спином электрона и его собственным магнитным моментом, а обусловлен только вращением электрона как целого. Отсутствие ларморовской прецессии спина электрона, которую принято считать причиной данного эффекта, объяснено в разд. 19 главы 3 (с. 244).

20. Действие на частицу неоднородного магнитного поля

Исследование воздействия на частицу магнитного поля имеет особое значение, потому что именно результаты магнитных измерений послужили Дж. Уленбеку и С. Гаудсмиту в 1925 г. основанием для введения представления о наличии у электрона собственных кинетического и магнитного моментов. К тому времени эксперименты по воздействию на вещество магнитного поля были проведены в двух постановках: при одной использовалось однородное магнитное поле (опыт Эйнштейна–де Хааза, 1915 г.), при другой — существенно неоднородное поле (опыт Штерна–Герлаха, 1922 г.).

В предыдущем разделе подробно рассмотрено воздействие на частицу однородного магнитного поля. В настоящем разделе проанализируем воздействие неоднородного магнитного поля. В связи с тем, что соответствующие опыты дают количественные результаты гораздо менее точные, чем опыты с использованием однородного магнитного поля, примем в дальнейшем несколько упрощений:

- не будем учитывать самодействие частицы;
- пренебрежем величиной $\frac{p_*}{r_*}$ (то есть будем считать, что $\frac{p_*}{r_*} \approx 0$);
- пренебрежем релятивистской поправкой ($\sqrt{1 - (v/c)^2} \approx 1$);
- применим приближенное уравнение движения частицы;
- учтем неоднородность магнитного поля с точностью только до первых производных поля по пространственным координатам.

Будем считать, как и ранее, что вектор $\mathbf{i}_L$, касательный к мировой линии в центре частицы, совпадает с направляющим вектором оси симметрии частицы $\mathbf{i}$, то есть выполняется закон (13.27): $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$.

Рассмотрим частицу в некоторый момент l_0 ее собственного времени. Пусть в этот момент центр частицы находится в точке O мировой линии L (сам центр частицы тоже обозначим буквой O). Введем инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с началом в O , мгновенно сопутствующую частице в момент l_0 , где $T = \text{Lin}\{\tau\}$ — ось времени, $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\tau\}$ — координатное физическое пространство, $\tau = \mathbf{i}_L(l_0)$ — касательный орт к L в точке O (из $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$ следует $\tau = \mathbf{i}(l_0)$).

В настоящем разделе нас будут интересовать характеристики движения частицы, относящиеся к моменту l_0 . В этот момент собственное физическое пространство частицы Γ_* и координатное физическое пространство Γ совпадают ($\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\tau\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}(l_0)\} = \Gamma_*|_{l=l_0}$). Поэтому в момент l_0 центральное сечение частицы лежит в Γ . А так как движение частицы, согласно уравнению движения (13.10) (с. 524), зависит от

значений внешнего поля только в точках центрального сечения частицы, то именно внутри него и будем задавать это поле. Для определенности, будем считать, что это поле не изменяется со временем.

Пусть тензор внешнего электромагнитного поля F имеет в системе отсчета $\{T, G\}$ лишь магнитную составляющую. Это означает в соответствии с формулой (4.9) из главы 4 (с. 324), что

$$F = \bar{H} \cdot \varkappa, \quad (20.1)$$

где $\bar{H}$ — псевдовектор напряженности магнитного поля ($\bar{H} \in G$); $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита над физическим пространством G , определяемый равенством (4.2) из главы 4 (с. 320).

Мы допускаем, что напряженность магнитного поля $\bar{H}$ может быть неоднородной функцией, но ограничимся учетом лишь ее первых производных по пространственным координатам. А именно, будем считать, что в физическом пространстве G задано магнитное поле $\bar{H}$ вида

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H})_0, \quad (20.2)$$

где $\bar{H}_0$ и $(\nabla \bar{H})_0$ — постоянные псевдовектор и псевдотензор, равные значениям соответственно поля $\bar{H}$ и градиента поля $\bar{H}$ в центре частицы O ; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек физического пространства G относительно O ($\mathbf{r} \in G$); ∇ — набла-оператор в G .

В связи с тем, что в уравнении движения частицы (13.10) (с. 524) используется значение поля F только в точках центрального сечения частицы, достаточно, чтобы зависимости (20.1) и (20.2) выполнялись именно в этих точках.

Пренебрежем в уравнении движения частицы (13.10) самодействием частицы ($F_s = 0$). Тогда правая часть уравнения оказывается линейной функцией по F , поэтому воздействие на частицу магнитного поля $\bar{H}$ вида (20.2) может быть описано как сумма воздействий, оказываемых по отдельности однородным полем $\bar{H}_0$ и неоднородным полем $\mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H})_0$. Воздействие на частицу однородного магнитного поля рассмотрено в разд. 19. Теперь проанализируем, каким образом воздействует на частицу неоднородная составляющая магнитного поля.

Итак, пусть в физическом пространстве G магнитное поле $\bar{H}$ имеет вид второго слагаемого в (20.2):

$$\bar{H} = \mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H}), \quad (20.3)$$

где $\nabla \bar{H}$ — фиксированный псевдотензор, равный значению градиента поля $\bar{H}$ в центре частицы (индекс 0, которым выражение $\nabla \bar{H}$ помечено в (20.2), опущен).

Воспользуемся приближенным уравнением движения частицы (13.12) (с. 525). При $F_s = \hat{0}$ оно приобретает форму

$$n_* \frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 \frac{1}{Z} \int \sum_{(Z)}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_\xi dZ, \quad (20.4)$$

здесь n_* — количество спиралей в луче (оно же — количество кругов радиуса p_* , образующих поперечное сечение луча; см. рис. 1.3, 2.1 и 4.1, с. 409, 411, 419); $\mathbf{i}$ — 4-скорость частицы (единичный вектор, касательный к мировой линии L в центре частицы, он обозначается символом $\mathbf{i}_L$, но, учитывая равенство $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$ — орт оси симметрии частицы, мы не пишем индекс L); l — собственное время частицы, измеряемое в единицах длины; в рассматриваемый момент времени l_0 приращение dl совпадает с приращением координатного времени (при $dl \rightarrow 0$);

$$a_1 = \frac{e}{m_e c^2}; \quad (20.5)$$

e и m_e — заряд и масса электрона (при трактовке частицы как модели электрона; $e < 0$, $m_e > 0$); c — скорость света; Z — площадь полу единичной псевдосферы, находящейся во внутренней области светового конуса будущего с вершиной в центре частицы (величины dZ и Z определяются формулами (12.5) и (12.6) при $R = 1$, с. 510, 511); буква Z обозначает также саму полу; F — внешнее поле; $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити в точке ее пересечения с сечением луча S_* ; S_* — поперечное сечение луча, лежащее в центральном сечении частицы; суммирование ведется по всем n_* кругам, образующим сечение S_* ; ξ — номер круга; индекс ξ при функции означает, что берется значение функции в центре круга № ξ ; данное уравнение выполняется при условии, что величинами порядка p_*/r_* можно пренебречь по сравнению с единицей.

Напомним, что мы исследуем ситуацию в момент l_0 собственного времени частицы, когда центр частицы находится в точке O мировой линии L и координатное физическое пространство Γ совпадает с собственным физическим пространством частицы Γ_* ($\Gamma = \Gamma_*|_{l=l_0}$). В этот момент центральное сечение частицы лежит в Γ .

Вычислим сумму, входящую в (20.4). С учетом (20.1) и (20.3) имеем:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_\xi = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (\mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H}) \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{q})_\xi. \quad (20.6)$$

Приведем формулы, которые требуются для вычисления правой части равенства (20.6).

Винтовые нити, образующие луч частицы, имеют радиусы r_0 , принадлежащие промежутку $[r_* - p_*, r_* + p_*] = [r_*(1 - \frac{p_*}{r_*}), r_*(1 + \frac{p_*}{r_*})]$. При пренебрежении величинами порядка p_*/r_* это означает, что все винтовые нити частицы имеют радиус r_0 , примерно равный радиусу r_* центральных нитей спиралей. Кроме того, в этом случае, в силу $\beta_0 = \beta \frac{r_0}{r_*}$, параметр β_0 всех винтовых нитей примерно равен параметру β центральных нитей (см. (13.13), с. 529). Поэтому далее будем считать, что для всех нитей частицы выполняются равенства

$$r_0 = r_*; \quad \beta_0 = \beta. \quad (20.7)$$

Мы рассматриваем частицу в фиксированный момент времени l_0 , поэтому будем отсчитывать винтовую переменную ψ , индивидуализирующую элементы нитей, от центра частицы O (см. рис. 10.2, с. 466, и пояснение к уравнению нити (10.2), с. 467). В таком случае элементам нитей, принадлежащим центральному сечению частицы, соответствует значение $\psi = 0$. Тогда $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}$ (см. (10.2)). Для элементов нитей, находящихся в центральном сечении частицы, вектор $\mathbf{r}_0$ служит радиусом-вектором элемента относительно центра частицы, поэтому вектор $\mathbf{r}_0$ совпадает с вектором $\mathbf{r}$, фигурирующим в (20.6) ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$).

В данной ситуации выполняются равенства

$$Q(l_0) = \pm a\psi, \quad \mathbf{U}_O(l_0) = \mathbf{0} \quad (20.8)$$

(см. (11.26) и пояснение к (11.21), с. 493) и выполняется равенство

$$\chi(l_0) = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi \quad (20.9)$$

(см. формулу (10.31) (с. 481), мы поставили $\chi(l_0)$ вместо χ , так как в (10.31) угол χ относится к начальному моменту времени); здесь χ — угол, определение которого дано в пояснении к уравнению нити (10.2), с. 467 (см. также рис. 10.2, с. 466); ξ — номер спирали, которой принадлежит рассматриваемая нить, он же — номер круга радиуса p_* в поперечном сечении луча (см. рис. 10.5, с. 479), $\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$; χ_0 — значение угла χ для нити, которая относится к спирали № 0 и для которой рассматриваемая нить является соответственной (определение соответственной нити приведено в разд. 10, с. 480).

При выполнении равенств $\psi = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}$ и равенств (20.7) — (20.9) формулы (11.21), (11.34), (11.36) и (11.39) (с. 492, 497, 498) приводят к следующим значениям векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{q}$ для элементов нитей,

принадлежащих центральному сечению частицы:

$$\mathbf{r} = r_* \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_1 + r_* \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_2; \quad (20.10)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[\mp \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_1 \pm \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \right]; \quad (20.11)$$

$$\mathbf{r}' = r_* \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_1 - r_* \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_2; \quad (20.12)$$

$$\mathbf{q}' = \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[\mp \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_1 \mp \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \right], \quad (20.13)$$

где штрихом помечены величины, относящиеся к переориентированному лучу (эти величины отличаются от величин, относящихся к непереориентированному лучу, только знаком слагаемых, содержащих вектор $\mathbf{e}_2$); $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный базис в сечении луча, принадлежащем центральному сечению частицы; $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ — ортонормированный базис в подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$, содержащем луч (см. рис. 10.2, с. 466, и текст перед (10.1), с. 467); параметр β связан с шагом нити P формулой (13.18) (с. 530); выбор верхнего или нижнего знаков определяется правилом выбора знака (разд. 10, с. 467); все величины относятся к моменту l_0 .

В разд. 17 на основе известных математических формул получены формулы (17.8), (17.11)–(17.13) (с. 600, 601), которые при $\psi = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) &= 0; & \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) &= 0; \\ \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin^2\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) &= \frac{n_*}{2}; & \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos^2\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) &= \frac{n_*}{2}; \\ \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) \cos\left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*}\xi\right) &= 0. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, входящие в (20.10)–(20.13), лежат в рассматриваемый момент времени l_0 в координатном физическом пространстве Γ (так как $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \Gamma_*$ и $\Gamma_*|_{l=l_0} = \Gamma$). Зададим в Γ мнимое единичный вектор $\mathbf{e}_3$, дополняющий эти векторы до ортонормированного правоориентированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Началом базиса считаем точку O , в которой в момент l_0 находится центр частицы.

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис в Γ и $\mathbf{i} \perp \Gamma$ (в момент l_0), то $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис в пространстве Минковского M . В этом базисе вектор $\mathbf{q}_0$, участвующий в (20.13), описывается формулой (11.22) (с. 493):

$$\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3, \quad (20.15)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{i}$ (то есть угол между осью луча и осью симметрии частицы); все величины относятся к моменту l_0 .

Псевдотензор Леви-Чивита $\varkappa$ над Γ задается в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ формулой (4.2) из главы 4 (с. 320):

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad (20.16)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ (здесь $\Delta = 1$, потому что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правоориентированный; убрать Δ нельзя, так как псевдотензор не может равняться тензору, ибо это разные математические объекты).

Оператор набла (градиент) ∇ , действующий в физическом пространстве Γ , определяется в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ формулой (18.50) (с. 639), которая при учете (18.48) принимает вид

$$\nabla = -\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (20.17)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вдоль осей с направляющими ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ соответственно; знаки минус перед векторами базиса связаны с отрицательной определенностью метрической формы в Γ .

Теперь приступим к вычислению суммы, входящей в (20.4). Подставим в (20.6) значения величин $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$ и $\varkappa$ из (20.10)–(20.13), (20.16) и заменим величины $\mathbf{q}_0$ и ∇ их значениями (20.15) и (20.17). Для сокращения записи, воспользуемся обозначением

$$\nu = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi \quad (20.18)$$

и запишем формулы только для непереориентированного луча, при этом поставим символ $\bullet$ над теми знаками, которые в случае переориентированного луча должны быть изменены на противоположные ($+$ на $-$, $\pm$ на $\mp$ или наоборот).

Повторим формулу (20.6) и преобразуем ее так, как сказано выше:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (\mathbf{r} \cdot (\nabla \overline{H}) \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q})_{\xi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \left[(r_* \cos \nu \mathbf{e}_1 + \dot{r}_* \sin \nu \mathbf{e}_2) \cdot \left(-\mathbf{e}_1 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \Delta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \cdot \\
&\quad \cdot \left. \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left(\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \pm \cos \nu \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{e}_3 \right) \right]_{\xi}.
\end{aligned}$$

Перемножим первый сомножитель со вторым и третий с четвертым, затем перемножим полученные произведения. Учитывая независимость параметров r_* , Δ и β от ξ и вытекающие из ортонормированности базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ равенства $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\delta_{ij}$ и $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{i} = 0$ (где δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$), находим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} = \\
&= \frac{\Delta \beta r_*}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \left[\left(\cos \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} + \sin \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \right) \cdot \left(-\frac{\operatorname{sh} \varphi}{\beta} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \pm \cos \nu \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \pm \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \pm \sin \nu \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\beta} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mp \cos \nu \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mp \sin \nu \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \right) \right]_{\xi} = \frac{\Delta \beta r_*}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \times \\
&\times \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \left(-\cos \nu \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\beta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \pm \cos^2 \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \pm \sin \nu \cos \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \right. \\
&\quad + \cos \nu \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\beta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mp \cos^2 \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mp \sin \nu \cos \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 - \\
&\quad - \sin \nu \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\beta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \pm \sin \nu \cos \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \pm \sin^2 \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \\
&\quad \left. + \sin \nu \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\beta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mp \sin \nu \cos \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mp \sin^2 \nu \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \right)_{\xi}.
\end{aligned}$$

Внесем знак суммирования внутрь скобок. Так как от переменной суммирования ξ зависит только угол ν (см. (20.18)), то суммироваться будут лишь функции, содержащие $\sin \nu$ и $\cos \nu$. Из (20.14) вытекает, что восемь из двенадцати слагаемых обратятся в нули. В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} &= \pm \frac{\Delta n_* \beta r_*}{2 \sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \right). \tag{20.19}
\end{aligned}$$

Отметим, что индекс ξ отсутствует в конце формулы (20.19), потому что после суммирования по ξ полученное выражение не зависит от ξ .

На основании симметрии скалярного произведения векторов и правила скалярного умножения тензоров (см. (4.3) в главе 4, с. 321), можно записать следующие зависимости:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b},$$

откуда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b}, \quad (20.20)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — произвольные векторы; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение векторов (число); $\mathbf{bc}$ — тензорное произведение векторов (диада).

Прибавим и вычтем в правой части (20.19) выражение $\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$, затем сгруппируем слагаемые определенным образом и применим равенства (20.20) и формулу (20.17):

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} &= \pm \frac{\Delta n_* \beta r_*}{2\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \right) = \\ &= \pm \frac{\Delta n_* \beta r_*}{2\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_3 + \left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 + \left(\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_3 - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{e}_1 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{e}_3 \right] = \\ &= \pm \frac{\Delta n_* \beta r_*}{2\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[- \left(-\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} - \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\mathbf{e}_1 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} \right) \cdot \mathbf{e}_3 \right] = \\ &= \pm \frac{\Delta n_* \beta r_*}{2\sqrt{|\beta^2 - 1|}} [-(\nabla \cdot \bar{H}) \mathbf{e}_3 + (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{e}_3] = \pm \frac{\Delta n_* r_* \operatorname{ch} \varphi}{2 \operatorname{sh} \varphi} (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

где в последнем преобразовании использованы *уравнение Максвелла*

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0$$

и приближенное значение (13.25) параметра β : $\beta = \operatorname{ch} \varphi$ (с. 531) вместе с вытекающим из него равенством $\sqrt{|\beta^2 - 1|} = \operatorname{sh} \varphi$ (с учетом $\varphi > 0$).

Итак, получены следующие значения суммы $\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi}$ для непереориентированного и переориентированного лучей:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} = \pm \Delta r_* \frac{n_*}{2} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\operatorname{sh} \varphi} (\nabla \overline{H}) \cdot \mathbf{e}_3; \quad (20.21)$$

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})'_{\xi} = \mp \Delta r_* \frac{n_*}{2} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\operatorname{sh} \varphi} (\nabla \overline{H}) \cdot \mathbf{e}_3, \quad (20.22)$$

где, как и ранее, штрих означает, что помеченная им величина относится к переориентированному лучу; верхние знаки отвечают случаю совпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ триэдра $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити (в ее состоянии до переориентации луча), нижние знаки отвечают случаю несовпадения этих ориентаций (см. правило выбора знака в разд. 10, с. 467); вектор $\mathbf{e}_3$ соответствует состоянию луча до его переориентации; все величины относятся к моменту времени l_0 .

Уравнение движения частицы (20.4) содержит интеграл от найденной суммы $\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi}$ по поле Z единичной псевдосферы, находящейся в будущем относительно центра частицы O .

Рассмотрим какой-либо луч частицы. Пусть его ось образует угол φ с осью симметрии частицы. Направляющий орт оси $\mathbf{q}_0$ имеет начало в центре частицы O и конец на упомянутой единичной псевдосфере. Обозначим: A — конец вектора $\mathbf{q}_0$ (находится на псевдосфере), C — ортогональная проекция точки A на ось симметрии частицы (рис. 20.1).

Из $\triangle OCA$, вследствие $AC \perp OC$, вытекает $|OC| = |\mathbf{q}_0| \operatorname{ch} \varphi$ и $|CA| = |\mathbf{q}_0| \operatorname{sh} \varphi$. А так как $|\mathbf{q}_0| = 1$, то $|OC| = \operatorname{ch} \varphi$ и $|CA| = \operatorname{sh} \varphi$.

Нас будет интересовать сечение Ω этой полы, выделяемое *условием постоянства угла φ между осью симметрии частицы $\operatorname{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и осями лучей $\operatorname{Lin}\{\mathbf{q}_0\}$ (при разных $\mathbf{q}_0$)*. Благодаря $\varphi = \operatorname{const}$, указанные значения $|OC| = \operatorname{ch} \varphi$ и $|CA| = \operatorname{sh} \varphi$ одинаковы для всех точек сечения. Следовательно, сечение Ω представляет собой обычную двумерную сферу с центром в точке C и радиусом $\operatorname{sh} \varphi$.

Зададим на поле псевдосферы угловые координаты φ, θ и η , где φ — угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$; θ и η — обычные сферические координаты на двумерной сфере Ω , выделяемой на поле Z условием $\varphi = \operatorname{const}$ (см. рис. 20.1); $\theta \in [0, \pi]$, $\eta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in (0, +\infty)$ ($\varphi \neq 0$ по принятой ранее договоренности).

Сфера Ω , вместе с заданными на ней координатами θ и η , принадлежит гиперплоскости, пересекающей ось симметрии частицы в точке C . Покажем, что координатам θ и η может быть придана роль сферических координат в физическом пространстве Γ (которое пересекает ось симметрии частицы в центре частицы O).

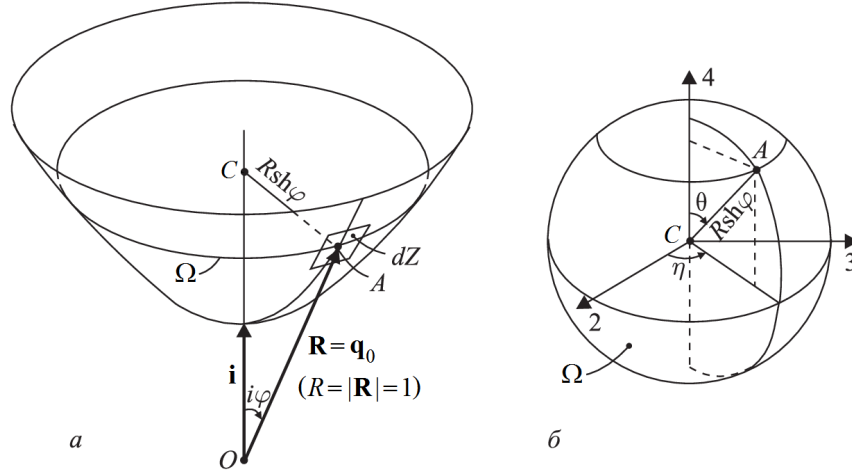


Рис. 20.1. *a* — пола псевдосферы единичного радиуса с центром в центре частицы O , находящаяся в будущем относительно O ; *б* — сечение этой полы, выделяемое условием постоянства угла φ между осью симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ и осями лучей $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ (при разных $\mathbf{q}_0$).

Псевдосфера на рис. *a* изображена с понижением размерности на единицу (поэтому показанная на рис. *б* сфера Ω имеет на рис. *a* вид окружности); $R = |\mathbf{R}|$ — радиус псевдосферы ($R = 1$); $R \operatorname{sh} \varphi$ — радиус сферы Ω ; $\mathbf{i}$ — направляющий орт оси симметрии частицы; $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт оси луча; φ, θ, η — угловые координаты на поле псевдосферы; A — конец вектора $\mathbf{q}_0$ (находится на псевдосфере); C — ортогональная проекция точки A на ось симметрии частицы (центр сферы Ω); каждая из букв C и A обозначает на рис. *a* и *б* одну и ту же точку; вектор $\mathbf{i}$ и векторы, занумерованные цифрами от 2 до 4, образуют ортогональный базис пространства Минковского; символ i в обозначении угла указывает на необходимость использования гиперболических функций при оперировании с этим углом.

Теорема 20.1. *Двумерная сфера Ω , выделяемая на поле псевдосферы условием $\varphi = \operatorname{const}$, лежит в гиперплоскости, параллельной физическому пространству Γ .*

Доказательство. Радиусами-векторами точек сферы Ω относительно центра частицы служат векторы $\mathbf{q}_0$ — направляющие орты осей лучей, наклоненных по отношению к оси симметрии частицы на угол φ . Радиусами-векторами этих же точек относительно точки C , которая отстоит от центра частицы на вектор $|OC|\mathbf{i} = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}$, являются векторы $\mathbf{q}_0 - \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}$ (точка C — одна и та же для всех точек сферы в си-

лу условия $\varphi = \text{const}$). Учитывая, что $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ и что согласно (20.15) $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} = \text{ch } \varphi$, можем записать:

$$(\mathbf{q}_0 - \text{ch } \varphi \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} - \text{ch } \varphi \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \text{ch } \varphi - \text{ch } \varphi = 0.$$

Отсюда вытекает, что при всех $\mathbf{q}_0$, о которых идет речь, векторы $\mathbf{q}_0 - \text{ch } \varphi \mathbf{i}$ (имеющие общее начало C) ортогональны $\mathbf{i}$. А так как эти векторы являются радиусами-векторами элементов сферы Ω относительно точки C , то, следовательно, данная сфера принадлежит гиперплоскости, проходящей через точку C и ортогональной вектору $\mathbf{i}$. Эта гиперплоскость параллельна собственному физическому пространству частицы Γ_* , потому что последнее тоже ортогонально вектору $\mathbf{i}$. Значит, сфера лежит в гиперплоскости, параллельной Γ_* . На основании $\Gamma_* = \Gamma$ (в момент времени t_0) заключаем, что сфера Ω действительно лежит в гиперплоскости, параллельной Γ . ■

Поскольку сфера Ω лежит в гиперплоскости, параллельной физическому пространству Γ , то, как и утверждалось, величины θ и η могут быть использованы в роли сферических координат в Γ . Для этого достаточно спроецировать на Γ векторы 2, 3 и 4 базиса, показанного на рис. 20.1,б, и отсчитывать угловые координаты θ и η от векторов полученного базиса. Пусть $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ — такой базис; его начало находится в центре частицы O , так как центр C сферы Ω переходит при проецировании в O (рис. 20.2).

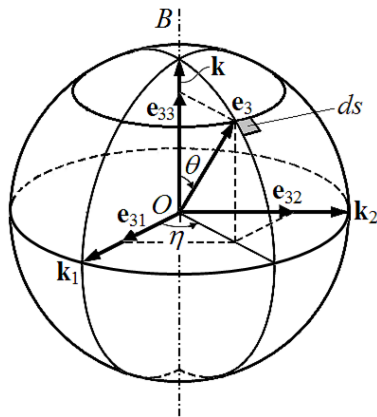


Рис. 20.2. Базис $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ и сфера единичного радиуса в Γ .

$\mathbf{e}_3$ — единичный вектор, входящий в формулы (20.21) и (20.22); $\mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{33}$ — составляющие вектора $\mathbf{e}_3$ вдоль базисных векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}$ (они равны слагаемым в правой части формулы (20.23)); OB — ось симметрии центрального сечения частицы (при выполнении условия переориентации лучей с вектором $\mathbf{k}$ в качестве вектора переориентации); ds — элемент площади сферы.

В связи с тем, что вектор 4 может быть выбран произвольно (в гиперплоскости, проходящей через точку C и параллельной Γ), вектор $\mathbf{k}$, служащий его проекцией, фактически есть произвольный вектор в Γ .

Напомним, что введенные ранее векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ (лежащие в Γ) свои для каждого луча. Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ находятся в поперечном сечении луча, принадлежащем центральному сечению частицы. Вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то есть он является вектором нормали к поперечному сечению луча (по этой причине мы обозначали его также символом $\mathbf{n}$ в предыдущих разделах).

Центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей с единственной общей точкой — центром частицы O . При этом оно симметрично относительно произвольных пространственных поворотов вокруг центра частицы O (в состоянии до переориентации лучей). Поэтому векторы $\mathbf{e}_3$, являющиеся нормальными к поперечным сечениям лучей, имеют общее начало в центре частицы O и их концы равномерно распределены по единичной сфере в Γ , имеющей центр в центре частицы. Это позволяет задать вектор $\mathbf{e}_3$ как радиус-вектор точек такой сферы и описывать его с помощью введенных выше сферических координат θ и η .

Построим в физическом пространстве Γ сферу единичного радиуса с центром в центре частицы O (см. рис. 20.2). При трактовке вектора $\mathbf{e}_3$ как радиуса-вектора точек сферы координата θ представляет собой угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}_3$ ($\theta \in [0, \pi]$), а координата η является углом между вектором $\mathbf{k}_1$ и проекцией $\mathbf{e}_3$ на плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$, отсчитываемым от $\mathbf{k}_1$ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{k}_1$ к $\mathbf{k}_2$ ($\eta \in [0, 2\pi]$). С помощью рис. 20.2 можно убедиться в том, что разложение вектора $\mathbf{e}_3$ по базису $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ имеет вид

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \cos \eta \mathbf{k}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{k}_2 + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (20.23)$$

Примем следующее условие переориентации лучей частицы, которое обобщает аналогичное условие, сформулированное в разд. 5 (с. 444).

Условие переориентации лучей (обобщенное). Пусть частица находится в исходном состоянии, когда она симметрична относительно любых пространственных поворотов, сохраняющих вектор $\mathbf{i}$. Зафиксируем наряду с введенным вектором $\mathbf{k}$ число $\theta_0 \in [0, \pi]$. Лучи, для которых вектор $\mathbf{e}_3$ образует с $\mathbf{k}$ угол $\theta \in [0, \theta_0)$, сохраняют свою ориентацию, а лучи, для которых $\theta \in (\theta_0, \pi]$, являются переориентированными. Вектор $\mathbf{k}$ назовем вектором переориентации (как и при предыдущей формулировке условия переориентации).

Относительно лучей с углом $\theta = \theta_0$ мы не уточняем, какие из них переориентированы, а какие нет, потому что это не влияет на последующие результаты. При $\theta_0 = \pi$ ни один из лучей не подвергается переориентации, а при $\theta_0 = 0$ все лучи являются переориентированными. В принятом условии

под $\mathbf{e}_3$ понимается вектор, относящийся к состоянию луча до его переориентации. Условие, сформулированное в разд. 5, является частным случаем данного условия при $\theta_0 = \pi/2$.

Элемент площади dZ единичной псевдосферы и ее площадь Z задаются формулами (12.5) и (12.6) при $R = 1$ (с. 510, 511):

$$dZ = \text{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta; \quad Z = 4\pi \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi, \quad (20.24)$$

где $\varphi \in (0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\eta \in [0, 2\pi]$, $d\varphi > 0$, $d\theta > 0$, $d\eta > 0$.

Подставим в уравнение движения частицы (20.4) (с. 705) найденные значения (20.21) и (20.22) суммы $\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_\xi$, учтем условие переориентации лучей и применим формулы (20.23) и (20.24). Тогда, принимая во внимание постоянство $\nabla \bar{H}$, получим:

$$n_* \frac{d\mathbf{i}}{dl} = \pm a_1 \Delta r_* \frac{n_*}{2} \frac{1}{4\pi} \left(\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \text{ch} \varphi \text{sh} \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi} \right) (\nabla \bar{H}) \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{\substack{\theta_0 \\ 0 \\ (\theta)}}^{\theta_0} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} - \int_{\substack{\theta_0 \\ 0 \\ (\theta)}}^{\pi} \int_{\substack{0 \\ (\eta)}}^{2\pi} \right] (\sin \theta \cos \eta \mathbf{k}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{k}_2 + \cos \theta \mathbf{k}) \sin \theta d\theta d\eta, \quad (20.25)$$

здесь отношение пределов двух функций (при $\Phi \rightarrow +\infty$) заменено пределом их отношения (как это было сделано в разд. 12 при записи формулы (12.19), см. пояснение к (12.19) на с. 517) и учтено условие согласованности ориентаций всех лучей частицы (см. разд. 11, с. 495, это условие позволяет вынести знаки $\pm$ за символы интегралов).

Предел, фигурирующий в уравнении (20.25), равен единице. Действительно, используя известные значения интегралов от гиперболических функций (см. формулы в разд. 10 главы 3, с. 186) и учитывая, что $1/\text{ch}(2\Phi) \rightarrow 0$, $\Phi/\text{sh}(2\Phi) \rightarrow 0$ и $\text{th}(2\Phi) \rightarrow 1$ при $\Phi \rightarrow +\infty$, находим:

$$\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \text{ch} \varphi \text{sh} \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi} = \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4} \text{ch}(2\Phi) - \frac{1}{4} \text{ch}(0)}{\frac{1}{4} \text{sh}(2\Phi) - \frac{1}{4} \text{sh}(0) - \frac{1}{2} \Phi + \frac{1}{2} \cdot 0} =$$

$$= \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}(2\Phi) \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(2\Phi)}\right)}{\text{sh}(2\Phi) \left(1 - \frac{2\Phi}{\text{sh}(2\Phi)}\right)} = \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \text{th}^{-1}(2\Phi) = 1.$$

Таким образом, в (20.25) предел равен единице. Слагаемые, содержащие векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, при интегрировании по η обращаются в нули. Поэтому, после вычисления всех интегралов и очевидных преобразований, уравнение (20.25) приобретает форму

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \pm \frac{1}{4} \Delta a_1 r_* \sin^2 \theta_0 (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k}. \quad (20.26)$$

Отметим, что уравнение (20.26) не приводит к изменению длины вектора $\mathbf{i}$. Действительно, на основании данного уравнения получаем: $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = 2\mathbf{i} \cdot (d\mathbf{i}/dl) = \dots \mathbf{i} \cdot [(\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k}]$, где скалярный множитель заменен многочлином. Отсюда, благодаря $\mathbf{i} \perp \Gamma$ (в момент l_0) и $(\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k} \in \Gamma$, вытекает $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = 0$, что и означает сохранение длины вектора $\mathbf{i}$.

Найдем силу $\mathbf{f}$, действующую на частицу.

Согласно теории относительности, частица обладает 4-импульсом $\mathbf{P}$, определяемым равенством (3.2) из разд. 3 главы 3 (с. 115):

$$\mathbf{P} = m_e c \mathbf{i}_L, \quad (20.27)$$

где m_e — масса частицы (равная массе электрона); c — скорость света; $\mathbf{i}_L$ — единичный вектор, касающийся мировой линии L в центре частицы и направленный в сторону будущего (в главе 3 он обозначен без индекса L); это равенство повторено в разд. 7 главы 3 (см. (7.1), с. 151).

Разложим 4-импульс $\mathbf{P}$ на составляющие, направленные вдоль оси времени T и вдоль физического пространства Γ системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ (см. формулу (7.8) из разд. 7 главы 3, с. 153):

$$\mathbf{P} = m_e c \mathbf{i} = \frac{E}{c} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p}, \quad (20.28)$$

где E и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс частицы; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T ; $\mathbf{p} \in \Gamma$; учтено, что в нашем случае $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$; равенство (20.28) проиллюстрировано рисунком 7.1 из разд. 7 главы 3 (с. 151).

Из (20.28) получаем:

$$\mathbf{p} = m_e c \mathbf{i} - \frac{E}{c} \boldsymbol{\tau}. \quad (20.29)$$

Продифференцируем обе части равенства (20.29) по координатному времени t (отсчитываемому в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_e c \frac{d\mathbf{i}}{dt} - \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \boldsymbol{\tau}, \quad (20.30)$$

где учтено постоянство m_e , c и $\boldsymbol{\tau}$.

Искомая сила $\mathbf{f}$ принадлежит координатному физическому пространству $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\boldsymbol{\tau}\}$, поэтому проанализируем ситуацию внутри Γ .

Поддействуем на обе части равенства (20.30) тензором (оператором) проецирования на гиперплоскость Γ (он имеет вид $I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$, где I — единичный тензор, см. формулу (12.17) из разд. 12 главы 3, с. 210):

$$(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_e c (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} - \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (20.31)$$

Поскольку $\mathbf{p} \in \Gamma$ при всех t , то $\frac{d\mathbf{p}}{dt} \in \Gamma$. Поэтому из $\Gamma \perp \boldsymbol{\tau}$ следует $\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. В рассматриваемый момент времени l_0 имеет место равенство $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}(l_0)$, однако производная $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ может не быть параллельной $\boldsymbol{\tau}$. Более того, так как длина вектора $\mathbf{i}$ не меняется (см. абзац после (20.26)), то $\frac{d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})}{dt} = 0$, поэтому $\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})}{dt} = 0$, то есть $\frac{d\mathbf{i}}{dt} \perp \mathbf{i}$. Значит, в момент l_0 , когда $\mathbf{i}(l_0) = \boldsymbol{\tau}$, выполняется $\frac{d\mathbf{i}}{dt} \in \Gamma$, откуда $\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0$. Принимая во внимание полученные равенства $\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0$ и единичность вектора $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$), находим из (20.31):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_e c \frac{d\mathbf{i}}{dt}. \quad (20.32)$$

В специальной теории относительности постулируется следующий *закон движения* материальной точки ненулевой массы:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (20.33)$$

где $\mathbf{f}$ — сила, действующая на материальную точку; $\mathbf{p}$ — импульс материальной точки ($\mathbf{f}, \mathbf{p} \in \Gamma$); t — координатное время в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ (см. формулу (15.1) в главе 3, с. 229). Под силой $\mathbf{f}$ понимается та же механическая характеристика, что и в классической механике.

Система отсчета $\{T, \Gamma\}$ является мгновенно сопутствующей частице в момент времени l_0 , поэтому бесконечно малые приращения собственного времени частицы и координатного времени совпадают. При измерении собственного времени частицы l в единицах длины и координатного времени t в единицах времени имеем: $dl = c dt$ (вблизи момента l_0). Отсюда и из формул (20.32) и (20.33) получаем:

$$\mathbf{f} = m_e c^2 \frac{d\mathbf{i}}{dt}; \quad (20.34)$$

эта формула совпадает (с точностью до обозначений) с известным в специальной теории относительности выражением для силы, действующей на тело в инерциальной системе отсчета в момент, когда тело покоится ([25], § 9, формулы (9.17) и (9.18)).

Подстановка в (20.34) значения (20.26) производной $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$ приводит к следующему выражению для силы $\mathbf{f}$, действующей на частицу в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$:

$$\mathbf{f} = \pm \frac{1}{4} \Delta e r_* \sin^2 \theta_0 (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k} \quad (\mathbf{f} \in \Gamma), \quad (20.35)$$

здесь для a_1 использовано значение (20.5): $a_1 = e/(m_e c^2)$.

В формуле (20.35) все величины, за исключением $\bar{H}$, не зависят от пространственных координат, поэтому можно внести их под знак градиента. Тогда действующая на частицу *сила* $\mathbf{f}$ примет вид

$$\mathbf{f} = \nabla (\bar{H} \cdot \bar{\mu}_{\theta_0})_+, \quad (20.36)$$

где

$$\bar{\mu}_{\theta_0} = \mp \frac{1}{4} e r_* \sin^2 \theta_0 \Delta \mathbf{k} \quad (\bar{\mu}_{\theta_0} \in \Gamma); \quad (20.37)$$

индекс $+$ при скалярном произведении означает переход к положительно определенной метрической форме в Γ ($(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})_+ = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$); знак $\mp$ поставлен вместо $\pm$ для того, чтобы выполнялось равенство (20.35) (так как $(\mathbf{x} \cdot (\mp \mathbf{y}))_+ = \mp (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})_+ = \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$).

Переход в физическом пространстве Γ к положительно определенной метрической форме произведен для удобства сравнения результатов настоящего исследования с опытными данными, потому что последние представляются всегда в виде, предполагающем именно положительную определенность метрической формы в физическом пространстве. Такой переход допустим только при условии, что все рассматриваемые векторы и псевдовекторы принадлежат физическому пространству Γ .

Максимальное по модулю значение псевдовектора $\bar{\mu}_{\theta_0}$, которое обозначим через $\bar{\mu}$, достигается при $\theta_0 = \pi/2$ и составляет

$$\bar{\mu} = \mp \frac{1}{4} e r_* \Delta \mathbf{k} \quad (\bar{\mu} \in \Gamma), \quad (20.38)$$

где e — заряд электрона ($e < 0$); r_* — радиус частицы; $\mathbf{k}$ — вектор, участвующий в принятом условии переориентации лучей частицы (вектор переориентации); Δ — псевдоскаляр в физическом пространстве Γ , равный в право- и левоориентированных базисах соответственно единице и минус единице (так что $\Delta \mathbf{k}$ — псевдовектор). Верхний знак в (20.38), как и в предыдущих выражениях, отвечает случаю, когда ориентации всех винтовых нитей, образующих частицу, и ориентации

соответствующих триэдров $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ совпадают (в состоянии частицы до переориентации лучей), нижний знак отвечает случаю, когда эти ориентации не совпадают (см. правило выбора знака в разд. 10, с. 467).

Отметим, что при $\theta_0 = \pi/2$ обобщенное условие переориентации лучей (с. 714) совпадает с условием переориентации лучей, принятым в разд. 5 и повторенным в разд. 18 (с. 444, 612).

В связи с тем, что мы трактуем нашу частицу как модель реального объекта (электрона), найденное значение (20.35) силы $\mathbf{f}$ не должно зависеть от используемых базисов. Между тем, в соответствии с указанным смыслом двойных знаков, правые части формул (20.35), (20.37) и (20.38) меняют знаки при изменении ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскостях $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Покажем, что в действительности сила $\mathbf{f}$ и псевдовектор $\bar{\mu}_{\theta_0}$ при этом не изменяются.

Теорема 20.2. *Сила $\mathbf{f}$ и псевдовектор $\bar{\mu}_{\theta_0}$, задаваемые формулами (20.35) – (20.37), не изменяются при изменении ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскостях $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.*

Доказательство. Согласно принятому в разд. 11 условию, все лучи частицы имеют в исходном непереориентированном состоянии одинаковую ориентацию базисов $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (см. с. 495). Поэтому изменение ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскостях $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ может быть произведено только одновременно для всех лучей. Осуществим такую переориентацию. Тогда все векторы $\mathbf{e}_3$ поменяют свои направления на противоположные, так как каждый из них, по определению, дополняет соответствующие векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ до правоориентированного базиса в Γ . Вследствие этого, для всех лучей частицы изменятся значения углов θ , входящих в условие переориентации лучей. А именно, непереориентированным лучам частицы, которым ранее соответствовали углы $\theta \in [0, \theta_0)$, теперь будут отвечать углы $\theta \in (\pi - \theta_0, \pi]$, а переориентированным лучам будут соответствовать вместо углов $\theta \in (\theta_0, \pi]$ углы $\theta \in [0, \pi - \theta_0)$. В связи с этим в формуле (20.25) изменятся пределы интегрирования по переменной θ , что приведет к изменению знака правой части формулы (20.26). Тогда поменяют знаки и правые части формул (20.35) и (20.37). А это вместе с переменной их знаков, обусловленной изменением ориентации триэдров $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, даст в итоге значения силы $\mathbf{f}$ и псевдовектора $\bar{\mu}_{\theta_0}$, совпадающие с исходными. ■

Итак, если частица находится в *неоднородном* магнитном поле $\bar{H}$ и выполняется принятое условие переориентации лучей, то на частицу действует сила $\mathbf{f}$ вида (20.36). Из (20.36) и (20.37) вытекает, что эта сила имеет наибольшее по модулю значение (при фиксированном $\nabla \bar{H}$), когда $\theta_0 = \pi/2$ и $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$.

Сравним два псевдовектора — введенный выше псевдовектор $\bar{\mu}_{\theta_0}$ и спин частицы $\bar{K}$, вычисленный в разд. 5. Спин $\bar{K}$, напомним, есть та часть кинетического момента частицы, которая обусловлена собственным вращением лучей вокруг их осей с угловой скоростью o .

В связи с тем, что в рассматриваемый момент времени l_0 собственное физическое пространство частицы Γ_* и координатное физическое пространство Γ совпадают, можно отождествить векторы $\mathbf{e}_3, \mathbf{k} \in \Gamma$, использованные в настоящем разделе, с векторами $\mathbf{e}_3, \mathbf{k} \in \Gamma_*$ из разд. 5. При расчете как спина $\bar{K}$, так и величины $\bar{\mu}_{\theta_0}$ мы интегрировали вектор $\mathbf{e}_3$ по одной и той же единичной сфере, окружающей центр частицы. Различие состояло лишь в том, что в разд. 5 мы предположили, что угол между векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{k}$, отделяющий переориентированные лучи от непереориентированных, равен $\pi/2$, а здесь мы допустили, что этот угол принимает некоторое значение $\theta_0 \in [0, \pi]$. Если такое же допущение сделать при вычислении спина, то, как нетрудно убедиться, для спина получится значение, отличающееся от значения (5.38), найденного в разд. 5 (с. 443), только дополнительным множителем $\sin^2 \theta_0$. Обозначая это значение спина через $\bar{K}_{\theta_0}$, имеем:

$$\bar{K}_{\theta_0} = \frac{1}{2} m_e o r_*^2 \sin^2 \theta_0 \Delta \mathbf{k}, \quad (20.39)$$

где мы подставили на место массы частицы массу электрона m_e и пренебрегли величиной $(1/2) \sin^2(\pi/n_*)$ по сравнению с единицей (так как в силу (2.2), с. 412, эта величина равна $(1/2)(p_*/r_*)^2$, а в этом разделе мы пренебрегаем величиной p_*/r_*).

В разд. 13 показано, что при пренебрежении величиной p_*/r_* выполняются равенства (13.25) (с. 531), первое из которых имеет вид

$$|o| r_* = c. \quad (20.40)$$

В том же разделе показано, что во всех случаях взаимной ориентации винтовых нитей и соответствующих триэдров $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ имеет место неравенство (13.15) (с. 530):

$$\pm o < 0, \quad (20.41)$$

где выбор верхнего или нижнего знака определяется правилом выбора знака (разд. 10, с. 467).

На основании (20.40) и (20.41) заключаем, что

$$o r_* = \mp c. \quad (20.42)$$

С помощью равенства (20.42) выражение (20.39) приобретает вид

$$\bar{K}_{\theta_0} = \mp \frac{1}{2} m_e c r_* \sin^2 \theta_0 \Delta \mathbf{k}. \quad (20.43)$$

Спин $\bar{K}_{\theta_0}$ достигает наибольшего по модулю значения при $\theta_0 = \pi/2$. Это значение, которое мы обозначим прежним символом $\bar{K}$, составляет

$$\bar{K} = \mp \frac{1}{2} m_e c r_* \Delta \mathbf{k}. \quad (20.44)$$

Сравнивая формулу (20.37) с (20.43), а также (20.38) с (20.44), находим:

$$\bar{\mu}_{\theta_0} = \frac{e}{2m_e c} \bar{K}_{\theta_0}; \quad \bar{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \bar{K}. \quad (20.45)$$

Зависимость, подобная зависимостям (20.45), имеет место в электродинамике между магнитным и кинетическим моментами движущихся электронов. Учитывая этот факт и то обстоятельство, что термин «спин электрона» есть синоним термина «собственный кинетический момент электрона», будем называть величину $\bar{\mu}_{\theta_0}$ (включая ее максимальное значение $\bar{\mu}$) *собственным магнитным моментом частицы*; эта величина задается равенствами (20.37), (20.38) и удовлетворяет зависимостям (20.45).

Теперь рассмотрим частицу, все лучи которой находятся в исходном *непереориентированном* состоянии.

В этом случае, согласно обобщенному условию переориентации лучей и примечанию к нему (с. 714), выполняется $\theta_0 = \pi$. Поэтому из (20.35) следует $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Выберем произвольный орт $\mathbf{k} \in \Gamma$ и разобьем все множество лучей частицы на два подмножества. К одному отнесем лучи, векторы $\mathbf{e}_3$ которых образуют с $\mathbf{k}$ углы $\theta \in [0, \pi/2)$, к другому — лучи, векторы $\mathbf{e}_3$ которых образуют с $\mathbf{k}$ углы $\theta \in (\pi/2, \pi]$ (лучи, для которых $\theta = \pi/2$, могут быть включены в любое подмножество). Проанализируем воздействие градиентного магнитного поля на эти два подмножества лучей.

Для каждого подмножества выполняется уравнение, аналогичное уравнению (20.25). Принимая во внимание, что в (20.25) предел равен единице и проведя интегрирование по η , получаем для этих подмножеств следующие выражения:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \pm \frac{1}{4} a_1 \Delta r_* \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k} = \pm \frac{1}{8} a_1 \Delta r_* (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k};$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \pm \frac{1}{4} a_1 \Delta r_* \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k} = \mp \frac{1}{8} a_1 \Delta r_* (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k}.$$

Подставим в формулу (20.34) для силы $\mathbf{f}$ эти значения производной $\frac{d\mathbf{i}}{dl}$ и значение (20.5) коэффициента a_1 : $a_1 = e/(m_e c^2)$. Затем воспользуемся значением (20.38) магнитного момента $\bar{\mu}$ и перейдем к положительно определенной метрической форме в Γ . Тогда получим, что одно из указанных подмножеств лучей подвержено действию силы $\mathbf{f}_1$, а другое — действию силы $\mathbf{f}_2$, которые равны по модулю, противоположны по направлению и имеют вид

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2} \nabla (\bar{H} \cdot \bar{\mu})_+; \quad \mathbf{f}_2 = -\frac{1}{2} \nabla (\bar{H} \cdot \bar{\mu})_+. \quad (20.46)$$

Таким образом, хотя в рассматриваемом случае результирующая сила $\mathbf{f}$, действующая на всю частицу, равна нулю ($\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$), тем не менее к двум «половинкам» частицы приложены силы, которые из-за их противоположной направленности стремятся разорвать частицу.

Допустим, что под влиянием напряжения, создаваемого в частице этими силами, может происходить переориентация лучей частицы. Такое допущение оправдано тем обстоятельством, что если подвергнуть переориентации лучи какой-либо одной «половинки» частицы, то на обе «половинки» будут действовать силы одного направления, и напряжение, стремящееся разорвать частицу, исчезнет.

Вследствие произвольности вектора $\mathbf{k}$, возможны различные варианты разбиения множества лучей частицы на два подмножества. Однако среди них имеется предпочтительный. В самом деле, каждая из сил (20.46), действующих на «половинки» частицы, равна по модулю половине силы (20.36) при $\bar{\mu}_{\theta_0} = \bar{\mu}$. Из (20.38) и (20.46) вытекает, что эти силы принимают наибольшие по модулю значения и, следовательно, создают в частице наибольшее напряжение в том случае, когда вектор $\mathbf{k}$ параллелен $\bar{H}$. В связи с этим можно ожидать, что переориентации подвергнутся лучи такой «половинки» частицы, для которой выполняется условие $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$. А поскольку таких «половинок» две и они одинаковы, то каждая из них имеет равный шанс оказаться переориентированной. На основании сказанного примем следующую гипотезу.

Гипотеза о переориентации лучей частицы. Если на частицу действует неоднородное магнитное поле $\bar{H}$, то половина ее лучей подвергается переориентации, тогда как другая половина лучей остается непереориентированной. Разбиение множества лучей на две половины подчиняется условию $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$ ($\mathbf{k}$ — вектор переориентации); это

означает, что у одной из половин лучей векторы $\mathbf{e}_3$ образуют с псевдовектором $\bar{H}$ углы, лежащие в промежутке $[0, \pi/2)$, а у другой — углы из промежутка $(\pi/2, \pi]$. При этом любая из половин лучей может оказаться переориентированной с равной вероятностью.

Лучи, у которых угол между $\mathbf{e}_3$ и $\bar{H}$ равен $\pi/2$, не влияют на результат, поэтому не имеет значения, переориентированы они или нет.

Важно, что переориентация лучей частицы происходит без изменения положения осей лучей, то есть без поворота частицы как целого.

После переориентации лучей результирующая сила $\mathbf{f}$, действующая на частицу, становится не нулевой. Эта сила описывается (с точностью до знака) зависимостью (20.36) при $\bar{\mu}_{\theta_0} = \bar{\mu}$:

$$\mathbf{f} = \nabla(\bar{H} \cdot \bar{\mu})_+ \quad \text{или} \quad \mathbf{f} = -\nabla(\bar{H} \cdot \bar{\mu})_+, \quad (20.47)$$

где собственный магнитный момент частицы $\bar{\mu}$ определяется формулой (20.38) при $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$; смысл индекса $+$ при скалярном произведении пояснен в примечании к (20.36); выбор одного из двух вариантов силы $\mathbf{f}$ зависит от того, какая из половин лучей переориентирована.

Спин частицы $\bar{K}$ задается в данном случае формулой (20.44), где вектор $\mathbf{k}$ — тот же, что в формуле (20.38) для магнитного момента $\bar{\mu}$. Спин $\bar{K}$ и магнитный момент $\bar{\mu}$ связаны зависимостью (20.45)

Мы рассмотрели ситуацию, когда в исходном состоянии частицы все ее лучи не переориентированы. Нетрудно проверить, что если в исходном состоянии частицы все лучи переориентированы, то результат будет таким же, только каждая из сил $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ окажется направленной в сторону, противоположную той, которая следует из (20.46).

Полученные формулы выполняются в инерциальной системе отсчета, сопутствующей частице в некоторый момент времени. Пренебрегая релятивистскими поправками, будем считать, что эти формулы верны в лабораторной («неподвижной») системе отсчета, в которой измеряются сила $\mathbf{f}$ и магнитное поле $\bar{H}$.

Примечания. 1. В рамках настоящей модели, по-видимому, можно отказаться от использования принятой выше гипотезы и вывести условие, приводящее к переориентации лучей, непосредственно из исходных положений модели. Для этого нужно описать переориентацию лучей не как мгновенное изменение состояния лучей (что подразумевалось при проведенном анализе), а как развивающийся во времени процесс вращения луча, производимый оператором поворота луча P_γ вида (5.16) (с. 428; см. текст, выделенный курсивом на с. 431). Однако такое исследование выходит за рамки данной работы, поэтому мы придали условию переориентации лучей статус гипотезы, даже не обсуждая степень неоднородности поля $\bar{H}$, требуемую для реализации этого

процесса. Заметим, что, согласно принятой гипотезе, неоднородность поля $\bar{H}$ является условием, достаточным для осуществления переориентации лучей, но не обязательно необходимым. Иначе говоря, мы не исключаем того, что переориентация лучей может происходить и в результате других причин.

2. Присутствие в формулах (20.38) и (20.44) двойных знаков объясняется необходимостью учета двух возможных ориентаций базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в подпространствах $C_{\mathbf{q}_0}$ — совпадающей и не совпадающей с ориентацией составляющих частицу винтовых спиралей. В связи с тем, что рассматриваемая частица служит математической моделью реальных объектов (электронов), можно условиться выбирать базисы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ всегда той же ориентации, что и ориентация прообразов спиралей, из которых состоит реальный моделируемый объект. Тогда в формулах (20.38) и (20.44) останутся только верхние знаки. Вместе с тем в этих формулах имеется вектор $\mathbf{k}$, который определен только с точностью до знака, так как из налагаемых на него условий $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1$ и $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$ вытекает $\Delta \mathbf{k} = \bar{H}/|\bar{H}|$ или $\Delta \mathbf{k} = -\bar{H}/|\bar{H}|$ (при $|\bar{H}| \neq 0$). Это означает, что *при любой ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ существуют два возможных значения $\bar{\mu}$ и $\bar{K}$, различающиеся знаком* (причем знаки в (20.38) и (20.44) должны быть одинаковыми, чтобы выполнялась зависимость (20.45)). Обратим внимание на то, что из-за $e < 0$ псевдовекторы $\bar{\mu}$ и $\bar{K}$ противонаправлены.

Найденные значения (20.47) силы $\mathbf{f}$, действующей на частицу, соответствуют результатам опыта Штерна–Герлаха.

Из (20.47) и известных результатов опыта Штерна–Герлаха следует:

$$\bar{\mu} \approx \mu_B \Delta \mathbf{k} \quad \text{или} \quad \bar{\mu} \approx -\mu_B \Delta \mathbf{k}, \quad (20.48)$$

где $\mu_B = |e|\hbar/(2m_e c)$ — магнетон Бора; $\Delta \mathbf{k} = \bar{H}/|\bar{H}|$ ($\Delta \mathbf{k}$ — псевдовектор); для примерно половины участвующих в опыте электронов $\bar{\mu}$ имеет один знак, для остальных электронов — другой знак.

Отметим, что с помощью (20.48) могут быть найдены радиус частицы r_* и спин частицы $\bar{K}$. Подставим в (20.48) значение (20.38) магнитного момента $\bar{\mu}$ и указанное значение магнетона Бора μ_B (коэффициенты при $\Delta \mathbf{k}$ берем по модулю):

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4} |e| r_* \Delta \mathbf{k} \approx \frac{|e|\hbar}{2m_e c} \Delta \mathbf{k};$$

отсюда и из (20.45) находим:

$$r_* \approx \frac{2\hbar}{m_e c} \approx 7.7 \cdot 10^{-13} \text{ м}; \quad |\bar{K}| = \hbar. \quad (20.49)$$

Значения (20.49) спина и радиуса частицы совпадают с их значениями (8.2) и (8.8) (с. 456, 457). Данное значение радиуса r_* превосходит известную в физике верхнюю оценку радиуса электрона.

Нужно иметь в виду, что современная экспериментальная техника не позволяет измерить напрямую спин и радиус электрона. Количественные оценки этих характеристик электрона, делаемые на основе опытных данных, всегда носят косвенный характер и базируются на определенных априорных теоретических посылках (не все из которых являются верными). Причина отличия найденного значения радиуса частицы r_* от принятого в физике значения радиуса электрона объяснена в разд. 8 после формулы (8.8) (с. 457).

Итак, сила $\mathbf{f}$, действующая на электрон в неоднородном магнитном поле $\overline{H}$, описывается формулами (20.47). Эти формулы одинаковы в нашей модели и в традиционной физической теории. Между тем, трактовка этих формул у нас и в физической теории существенно различна. Поясним это различие.

Согласно рассматриваемой модели, неоднородное магнитное поле $\overline{H}$ приводит к переориентации половины лучей частицы, в результате чего частица приобретает магнитный момент $\overline{\mu}$, который с равной вероятностью сонаправлен или противоположен $\overline{H}$.

С традиционной точки зрения ситуация иная. Считается, что электрон обладает магнитным моментом $\overline{\mu}$. Входящее в (20.47) скалярное произведение $\overline{H} \cdot \overline{\mu}$ представляется в форме

$$\overline{H} \cdot \overline{\mu} = |\overline{H}| \mu_H, \quad \text{где} \quad \mu_H = \overline{\mu} \cdot \frac{\overline{H}}{|\overline{H}|}, \quad |\mu_H| = \mu_B;$$

параметр μ_H интерпретируется как проекция собственного магнитного момента электрона $\overline{\mu}$ на направление магнитного поля $\overline{H}$. Вследствие наличия двух знаков в (20.47), проекция μ_H может иметь любое из двух значений, различающихся знаком. Этот эффект принято называть квантованием проекции магнитного момента $\overline{\mu}$ на направление магнитного поля. При этом считается, что проекция магнитного момента на любое направление, ортогональное магнитному полю, определена быть не может. Отметим, что в нашей модели, благодаря $\overline{\mu} \parallel \overline{H}$, проекция $\overline{\mu}$ на любое направление, ортогональное $\overline{H}$, равна нулю.

Если в будущем эксперименты по воздействию на электроны неоднородного магнитного поля дадут результаты с точностью, превосходящей точность современных опытов, то нужно будет провести анализ, подобный изложенному, учитывая самодействие частицы, релятивистские поправки и конечность величины $\frac{p_*}{r_*}$, которыми мы пренебрегли в настоящем разделе.

21. Собственная энергия частицы

Определение. *Собственная энергия частицы — это кинетическая энергия частицы относительно пространства Минковского M в состоянии, когда частица движется вдоль прямолинейной мировой линии L без вращения вокруг L .*

Если ввести инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени T , параллельной мировой линии L , то такая частица будет покоиться относительно этой системы отсчета. Следовательно, собственная энергия частицы может быть интерпретирована как *энергия покоя* частицы в этой системе отсчета. Учитывая это, обозначим собственную энергию частицы тем же символом E_0 , каким в разд. 7 главы 3 обозначена энергия покоя частицы (см. в главе 3 формулу (7.10), с. 153).

Будем считать (в согласии с принятым ранее), что прямолинейная мировая линия L совпадает с осью симметрии частицы. Тогда направляющий орт $\mathbf{i}_L$ мировой линии и направляющий орт $\mathbf{i}$ оси симметрии частицы равны и постоянны ($\mathbf{i}_L = \mathbf{i} = \text{const}$).

Энергия — характеристика аддитивная (энергия тела равна сумме энергий его частей). Это позволяет рассчитать собственную энергию частицы E_0 как сумму собственных энергий лучей, составляющих частицу.

При указанном движении частицы оси всех ее лучей движутся в пространстве M поступательно, то есть с сохранением своих направляющих векторов $\mathbf{q}_0$. В таком случае для каждого луча содержащее его трехмерное подпространство $C_{\mathbf{q}_0}$ тоже движется поступательно, поэтому векторы введенного ранее базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$ постоянны.

Скорость луча $\mathbf{j}$ задается формулой (11.29) (с. 495). При постоянных векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$ эта формула имеет вид

$$\mathbf{j} = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} \left[-\sin(\chi + \psi)\mathbf{e}_1 + \cos(\chi + \psi)\mathbf{e}_2 \right], \quad (21.1)$$

где o — угловая скорость вращения луча, она одинакова для всех лучей и представляет собой производную угла поворота луча по собственному времени частицы t_* (см. определение в разд. 11, с. 485).

В формуле (21.1) первые два слагаемые описывают поступательное движение луча, оставшееся выражение — вращение луча вокруг своей оси (внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$). Поскольку $\mathbf{i}, \mathbf{q}_0 \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, то для каждого луча скорость поступательного и скорость вращательного движений взаимно ортогональны.

С помощью формулы (13.17) ($q = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}$, с. 530) и равенств $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\operatorname{ch} \varphi = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i}$ (φ — угол между единичными векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}_0$) находим:

$$(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} = 0.$$

Отсюда вытекает, что скорость поступательного движения луча $(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0)$ ортогональна вектору $\mathbf{i}$. Скорость вращательного движения луча тоже ортогональна $\mathbf{i}$, потому что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Таким образом, для каждого элемента луча оба вектора скорости являются пространственноподобными векторами и лежат в гиперплоскости, параллельной собственному физическому пространству частицы Γ_* (так как $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$). Это позволяет определить собственную энергию луча как обычную кинетическую энергию (вида $\frac{1}{2}mv^2$).

Рассмотрим сечения луча гиперплоскостями, параллельными Γ_* . Из $\Gamma_* \perp \mathbf{i}$ вытекает, по теореме 15.1 (с. 541), что все такие сечения луча являются его поперечными сечениями. В данной ситуации все эти сечения движутся одинаково, поэтому при расчете собственной энергии луча можно ограничиться рассмотрением только поперечного сечения луча, лежащего в центральном сечении частицы, полагая, что вся масса луча находится в этом сечении (см. рис. 2.1 и 4.1, с. 411 и 419).

Скорость $\mathbf{j}$ — величина безразмерная. Для придания энергии частицы E_0 обычной размерности, нужно использовать вместо $\mathbf{j}$ величину $c\mathbf{j}$, имеющую размерность скорости (где c — скорость света; см. пояснение к формуле (11.29), с. 496).

На основании сказанного введем *собственную энергию луча* E_* :

$$E_* = \frac{1}{2} m_* n_* c^2 |\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}|, \quad (21.2)$$

где m_* — масса спирали; n_* — количество спиралей в луче (так что $m_* n_*$ — масса луча); $\mathbf{j}$ — скорость луча, описываемая формулой (21.1); знак модуля связан с тем, что $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} < 0$ из-за отрицательной определенности метрической формы в физическом пространстве Γ_* .

Строго говоря, в формуле (21.2) должен стоять интеграл по всем значениям радиуса нити $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*] = [r_*(1 - \frac{p_*}{r_*}), r_*(1 + \frac{p_*}{r_*})]$. Однако, пренебрегая величиной $\frac{p_*}{r_*}$ в сравнении с единицей, будем считать, что все нити луча имеют радиус r_0 , примерно равный r_* , и примем, что в формуле (21.1) $r_0 = r_*$.

Вычислим произведение $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$.

Воспользуемся равенствами

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi; \quad q = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}; \quad \operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1;$$

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1; & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1; \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.\end{aligned}$$

Применяя формулу (21.1) (при $r_0 = r_*$) и эти равенства, получаем:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -\text{th}^2\varphi - \left(\frac{r_* o}{c}\right)^2, \quad (21.3)$$

где первое слагаемое связано с поступательной составляющей скорости $\mathbf{j}$, а второе слагаемое — с вращательной составляющей.

В (21.3) перекрестное слагаемое отсутствует, потому что скорости поступательного и вращательного движений луча, как отмечалось, ортогональны (наглядный пример: если $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ при $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, то $v^2 = v_1^2 + v_2^2$).

Поскольку мы пренебрегаем величиной p_*/r_* по сравнению с единицей, то выполняется первое равенство (13.25) (с. 531): $|o|r_* = c$. Из него следует $\left(\frac{r_* o}{c}\right)^2 = 1$, поэтому формула (21.3) принимает вид

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -\text{th}^2\varphi - 1. \quad (21.4)$$

Подставим в (21.2) значение (21.4) произведения $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ и выразим собственную энергию луча E_* в виде суммы двух составляющих: энергии поступательного движения луча E_{*t} (индекс t от translational movement) и энергии вращательного движения луча E_{*r} (индекс r от rotational movement):

$$E_* = E_{*t} + E_{*r}, \quad (21.5)$$

где

$$E_{*t} = \frac{1}{2} m_* n_* c^2 \text{th}^2\varphi; \quad E_{*r} = \frac{1}{2} m_* n_* c^2. \quad (21.6)$$

Для нахождения собственной энергии частицы E_0 нужно проинтегрировать собственную энергию луча E_* по всем направляющим ортам $\mathbf{q}_0$ осей лучей:

$$E_0 = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} E_* dZ,$$

где N — общее количество лучей, из которых состоит частица; символ Z обозначает полу единичной псевдосферы с центром в центре частицы, находящуюся в будущем относительно центра частицы (на этой поле располагаются концы векторов $\mathbf{q}_0$, см. рис. 20.1, с. 712); символ Z обозначает также площадь этой полу; dZ — элемент площади полу Z ; площадь Z и элемент площади dZ задаются формулами (20.24) (с. 715).

В данном случае проводить интегрирование не требуется, так как результат очевиден. Действительно, энергия вращательного движения

луча E_{*r} одинакова для всех лучей, поэтому ее интегрирование приводит просто к умножению ее на количество лучей N . Формула для энергии поступательного движения луча E_{*t} содержит функцию $\text{th } \varphi$. Напомним, что φ есть угол между осью симметрии частицы и осью луча. Поскольку φ принимает значения из бесконечного интервала $(0, +\infty)$ и оси лучей распределены равномерно по внутренности светового конуса, то количество лучей со значениями $\varphi \in (0, \Phi]$ (для любого числа $\Phi > 0$) пренебрежимо мало по сравнению с количеством лучей, для которых $\varphi \in (\Phi, +\infty)$, поэтому основной вклад в энергию E_{*t} дают лучи с большими φ . Для таких лучей $\text{th } \varphi \approx 1$ (см. график функции $\text{th } \varphi$ на рис. 10.4 в главе 3, с. 186), значит, при интегрировании энергии E_{*t} можно не учитывать лучи с малыми φ . А для лучей с большими φ можно принять $\text{th } \varphi = 1$. Для всех таких лучей энергия E_{*t} оказывается одинаковой (см. (21.6)), поэтому интегрирование приводит, аналогично случаю E_{*r} , к умножению E_{*t} на N (строгие вычисления дают этот же результат).

На основании (21.5), (21.6) и сказанного выше заключаем, что *собственная энергия частицы* E_0 может быть представлена, как и собственная энергия луча, в виде суммы двух составляющих — энергии поступательного движения E_t и энергии вращательного движения E_r :

$$E_0 = E_t + E_r \quad (21.7)$$

при

$$E_t = \frac{1}{2} m_e c^2; \quad E_r = \frac{1}{2} m_e c^2, \quad (21.8)$$

где $m_e = N n_* m_*$ — масса электрона (при трактовке частицы как модели электрона).

В итоге получаем:

$$E_0 = m_e c^2. \quad (21.9)$$

Формула (21.9) совпадает с известной в теории относительности формулой для энергии покоя тела массы m_e (см. (7.10) в главе 3, с. 153).

Приведем еще две формулы, имеющие отношение к собственной энергии частицы.

В разд. 8 и 20 найдено следующее значение радиуса частицы r_* (см. (8.8) или (20.49), с. 457, 724):

$$r_* \approx \frac{2\hbar}{m_e c}. \quad (21.10)$$

Это значение радиуса получено при пренебрежении величиной p_*/r_* по сравнению с единицей. При таком приближении выполняется первое

равенство (13.25) (с. 531):

$$|o|r_* = c. \quad (21.11)$$

Угловая скорость собственного вращения лучей o , напомним, постоянна и одинакова для всех лучей частицы. Введем частоту вращения лучей ν_r , связанную с угловой скоростью o обычной формулой:

$$|o| = 2\pi\nu_r. \quad (21.12)$$

Из (21.10)–(21.12) находим:

$$\nu_r = \frac{|o|}{2\pi} = \frac{c}{2\pi r_*} = \frac{m_e c^2}{2h}, \quad (21.13)$$

где $h = 2\pi\hbar$ — константа, называемая, как и $\hbar$, постоянной Планка.

С помощью формул (21.8) и (21.13) *вращательная составляющая собственной энергии* частицы может быть записана в виде

$$E_r = h\nu_r. \quad (21.14)$$

Выведем аналогичную формулу для поступательной составляющей собственной энергии частицы.

Согласно выражению (10.20) (с. 475), при одном полном обороте лучей центр частицы смещается вдоль мировой линии L на расстояние

$$|dl_{2\pi}| = 2\pi \frac{c}{|o|} = 2\pi \frac{r_*}{\beta|q|} = \frac{P}{|q|} \quad (\text{при } o \neq 0 \text{ и } q \neq 0), \quad (21.15)$$

где P — шаг луча (он же — шаг винтовой нити и шаг спирали).

Воспользуемся формулой (13.25) (с. 531): $\beta = \operatorname{ch} \varphi$ (верной при пренебрежении величиной p_*/r_*) и формулой (13.17) (с. 530): $q = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}$. Подставим эти значения β и q в (21.15):

$$|dl_{2\pi}| = 2\pi r_* = P_i, \quad (21.16)$$

где $P_i = P \operatorname{ch} \varphi$ — проекция на ось симметрии частицы участка оси луча, длина которого равна шагу луча P (в данном случае P_i является также проекцией этого участка на мировую линию частицы). Отсюда, в силу постоянства величины $2\pi r_*$, следует, что величина P_i одинакова для всех лучей частицы (хотя лучи, наклоненные по-разному к оси симметрии частицы, имеют разный шаг P).

Итак, частица смещается вдоль мировой линии за время одного поворота лучей на расстояние $|dl_{2\pi}|$ вида (21.16). Промежуток собственного времени частицы, соответствующий этому расстоянию, равен

$$|dt_*| = \frac{|dl_{2\pi}|}{c}. \quad (21.17)$$

Введем величину ν_t , обратную к $|dt_*|$:

$$\nu_t = \frac{1}{|dt_*|}. \quad (21.18)$$

Применяя последовательно формулы (21.18), (21.17), (21.15) и (21.12), запишем цепочку равенств:

$$\nu_t = \frac{1}{|dt_*|} = \frac{c}{|dl_{2\pi}|} = \frac{c|o|}{2\pi c} = \frac{2\pi\nu_r}{2\pi} = \nu_r,$$

откуда

$$\nu_t = \nu_r. \quad (21.19)$$

Из (21.8), (21.14) и (21.19) вытекает, что *поступательная составляющая собственной энергии* частицы может быть представлена в форме

$$E_t = h\nu_t. \quad (21.20)$$

Формулы (21.14) и (21.20) связывают вращательную и поступательную составляющие собственной энергии частицы с частотой собственного вращения лучей и с величиной, обратной времени, за которое частица проходит вдоль мировой линии расстояние $P_i = 2\pi r_*$ (см. (21.16)).

Полученные результаты основаны на формуле (21.1), которая задает скорость $\mathbf{j}$ непереориентированного луча. Формула, задающая скорость переориентированного луча, отличается от (21.1) только знаком слагаемого, содержащего вектор $\mathbf{e}_2$ (в случае постоянных $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}_0$; см. формулу (11.37), с. 498). Легко убедиться в том, что все результаты верны и для переориентированного луча. Следовательно, *собственная энергия частицы E_0 имеет значение (21.9) независимо от того, переориентированы или нет какие-либо лучи частицы.*

Примечания. 1. Лучи вращаются вокруг своих осей с угловой скоростью o . Спирали, образующие луч, находятся на периферии луча, на расстоянии r_* от оси луча, поэтому спирали вращаются вокруг оси луча с линейной скоростью or_* (в предположении, что толщина спирали $2p_*$ пренебрежимо мала по сравнению с радиусом луча r_*). Согласно (21.11), эта скорость равна по модулю скорости света c . Скорость поступательного движения лучей $c(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0)$ тоже равна по модулю скорости света c (при больших углах φ).

Действительно, на основании зависимостей $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi$ и $q = -\frac{1}{\text{ch } \varphi}$ получаем: $|c(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0)|^2 = c^2 |(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0)| = c^2 |\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + 2q\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 + q^2 \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0| = c^2 |1 - 2\frac{1}{\text{ch } \varphi} \text{ch } \varphi + \frac{1}{\text{ch}^2 \varphi}| = c^2 \text{th}^2 \varphi \approx c^2$ (при больших φ), откуда $|c(\mathbf{i} + q\mathbf{q}_0)| = c$, что доказывает сказанное.

Итак, скорости вращательного и поступательного движения лучей равны по модулю скорости света c . Будучи выраженными в безразмерных единицах (то есть без множителя c), они оказываются равными по модулю единице. Это косвенно подтверждает их фундаментальный характер в рамках данной модели.

2. Собственная энергия частицы E_0 не зависит от переориентации лучей частицы. Вместе с тем спин частицы $\bar{K}$ зависит от переориентации лучей. Поясним на простом примере причину этого различия.

Подвесим велосипед на стену. Раскрутим с одинаковой скоростью оба колеса. Пусть E и $\bar{K}$ — кинетическая энергия и механический момент одного колеса. Тогда суммарная кинетическая энергия и суммарный механический момент велосипеда будут равны $2E$ и $2\bar{K}$. Теперь повернем рулем переднее колесо на 180° , не останавливая его вращения. В этом случае суммарная кинетическая энергия останется равной $2E$, а суммарный механический момент окажется равным нулю, так как колеса вращаются в противоположных направлениях.

Подобная ситуация имеет место и с частицей. Благодаря вращению лучей вокруг своих осей, частица обладает энергией вращательного движения $E_r = \frac{1}{2} m_e c^2$. Эта энергия не зависит от переориентации лучей. В то же время, если частица находится в исходном состоянии, когда ее лучи не переориентированы, то механический момент (спин) частицы $\bar{K}$ равен нулю, потому что в этом состоянии, вследствие сферической симметрии, для каждого луча существует луч, вращающийся в противоположную сторону. Однако, если часть лучей переориентирована, то суммарный механический момент становится не равным нулю. Расчет спина частицы $\bar{K}$ проведен в разд. 5 (с. 421).

Резюме. Собственная энергия частицы E_0 состоит из двух равных по величине слагаемых — энергии поступательного движения E_t и энергии вращательного движения E_r — и задается формулами (21.7) — (21.9), (21.14) и (21.20). Все три энергии не зависят от переориентации лучей частицы.

Собственная энергия частицы $E_0 = mc^2$ может быть отождествлена с энергией покоя тела массы m , рассматриваемой в теории относительности. Обратим внимание на то, что в теории относительности не дается какого-либо механического истолкования понятию энергии покоя. В нашей же модели собственная энергия частицы E_0 имеет простой механический смысл: это есть кинетическая энергия частицы относительно пространства Минковского M при движении частицы вдоль прямолинейной мировой линии L (без вращения вокруг L). Половина этой энергии связана с поступательным движением лучей частицы, другая

половина — с вращением лучей вокруг их осей, причем обе половины энергии вычисляются по обычной формуле для кинетической энергии: $\frac{1}{2}mv^2$ (при $v = c$ и $m = m_e$; см. (21.8)). Можно сказать, что E_0 — это кинетическая энергия свободной частицы при ее инерциальном движении (без вращения как целой). Эта энергия не зависит от выбора системы отсчета, так как рассчитывается относительно пространства Минковского.

22. Позитрон

Собственное поле частицы F_s задается формулой (14.4) (с. 535). Запишем эту формулу в упрощенном виде с учетом (14.2) (с. 533):

$$F_s(x) \sim e \iiint (\mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}) d^3X, \quad (22.1)$$

где x — точка пространства Минковского M , в которой вычисляется поле F_s ; $\sim$ — знак пропорциональности; e — заряд электрона ($e < 0$); $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити в некотором ее элементе; $\mathbf{j}$ — скорость этого элемента нити относительно пространства M ; d^3X — условная запись произведения трех дифференциалов.

Изменим скорости всех элементов частицы на противоположные. В формуле (22.1) это проявится заменой $\mathbf{j}$ на $-\mathbf{j}$ (позначим преобразование индексом минус при F_s):

$$F_{s-}(x) \sim e \iiint (\mathbf{q}(-\mathbf{j}) - (-\mathbf{j})\mathbf{q}) d^3X. \quad (22.2)$$

Вынесем (мысленно) знаки минус при $\mathbf{j}$ за знаки интегралов. Сравнение с (22.1) показывает, что собственное поле частицы имеет в данном случае противоположный знак: $F_{s-} = -F_s$.

Поскольку $\mathbf{j}$ — это скорость относительно пространства Минковского и скорости всех элементов частицы изменены на противоположные, то, следовательно, частица движется вспять во времени, то есть из будущего в прошлое.

Однако возможна иная трактовка этого результата. Преобразуем формулу (22.2):

$$F_{s-}(x) \sim (-e) \iiint (\mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}) d^3X. \quad (22.3)$$

Такая запись формулы позволяет рассматривать данную ситуацию как движение частицы в обычном направлении из прошлого в будущее,

но со сменой знака заряда на противоположный, интерпретируя такую частицу как античастицу электрона — *позитрон*.

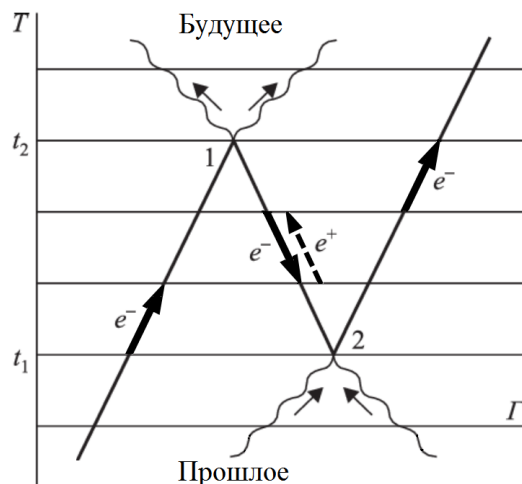


Рис. 22.1. Аннигиляция и рождение пары электрон–позитрон.

$\{T, \Gamma\}$ — лабораторная система отсчета в пространстве Минковского (T — ось времени; Γ — трехмерное физическое пространство, движущееся с течением времени вдоль оси T из прошлого в будущее); e^- — электрон, движущийся из прошлого в будущее (на участке от точки 1 до точки 2 он движется вспять во времени; $t_2 > t_1$). При описании ситуации внутри физического пространства Γ принято трактовать электрон на участке между точками 1 и 2 как позитрон e^+ , движущийся в обычном направлении из прошлого в будущее (от точки 2 к точке 1, как показано штриховой стрелкой); при такой интерпретации событие в точке 1 есть аннигиляция пары электрон–позитрон, а событие в точке 2 — рождение такой пары (волнистые линии — фотоны, несущие энергию). Электрон e^- имеет отрицательный заряд e ; позитрон e^+ имеет положительный заряд $|e|$.

Проиллюстрируем эту ситуацию. На рис. 22.1 изображена мировая линия электрона, который дважды меняет направление своего движения во времени: вначале, до точки 1, он движется из прошлого в будущее, затем, между точками 1 и 2, — из будущего в прошлое, и, наконец, после точки 2 — вновь из прошлого в будущее. Такой вид имеет картина движения электрона в пространстве Минковского. Однако в опыте эта картина выглядит совершенно иначе. Поскольку мы наблюдаем все явления природы изнутри трехмерного физического пространства, то,

перемещаясь вместе с ним сквозь пространство Минковского из прошлого в будущее, мы наблюдаем такую последовательность событий: сначала, в момент t_1 , в точке 2 происходит рождение пары электрон–позитрон, а затем, в более поздний момент t_2 , в точке 1 этот позитрон сталкивается с каким-то другим электроном и они аннигилируют.

Собственная энергия частицы E_0 не меняется при изменении скорости $\mathbf{j}$ на противоположную, так как она представляет собой сумму собственных энергий лучей E_* , которые пропорциональны произведению $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ (см. формулу (21.2), с. 727). Спин частицы $\bar{K}$ в этом случае не меняется по модулю, но изменяет свое направление на противоположное, потому что лучи вращаются в противоположную сторону.

Отметим, что любые материальные тела, в том числе элементарные частицы, имеют какую-то внутреннюю структуру. Поэтому если бы аннигиляция и рождение электронно-позитронной пары представляли собой не кажущиеся эффекты, а реальные процессы исчезновения и возникновения элементарных частиц, то в этом случае потребовалось бы вводить в теорию какие-то искусственные схемы разрушения и образования внутренней структуры частиц. Наша модель, трактуя позитрон как электрон, движущийся вспять во времени, не требует такого усложнения теории.

Итак, данная модель естественным образом описывает изменение движения электрона от прямого направления во времени к обратному и наоборот: это достигается простым изменением знака скорости частицы. Модель описывает наряду с электроном также его античастицу — позитрон. Это — тот же электрон, но движущийся в пространстве Минковского из будущего в прошлое.

Идея о том, что античастица — это частица, движущаяся назад во времени, принадлежит Р. Фейнману (1948 г.).

23. Количественные характеристики модели

В разд. 20 проанализировано воздействие на частицу неоднородного магнитного поля $\overline{H}$. С помощью уравнения движения частицы (13.12) (с. 525) доказано, что частица подвергается действию силы

$$\mathbf{f} = \nabla(\overline{H} \cdot \overline{\mu})_+ \quad \text{или} \quad \mathbf{f} = -\nabla(\overline{H} \cdot \overline{\mu})_+, \quad (23.1)$$

где

$$\overline{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \overline{K}; \quad (23.2)$$

$\overline{K}$ — спин частицы; $\overline{\mu}$ и $\overline{K}$ параллельны $\overline{H}$ (см. формулы (20.45), (20.47) и пояснения к ним, с. 721, 723).

Зависимость (23.2) подобна известной в электродинамике зависимости между магнитным и кинетическим моментами движущихся электронов. Это позволило назвать величину $\overline{\mu}$ *собственным магнитным моментом частицы*.

Формула (23.1) соответствует результатам опыта Штерна–Герлаха. В физике на основе этого опыта принято считать, что собственный магнитный момент электрона равен по модулю магнетону Бора μ_B . Поэтому мы постулировали, что собственный магнитный момент частицы $\overline{\mu}$ имеет именно это значение:

$$|\overline{\mu}| = \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c}. \quad (23.3)$$

Из (23.2) и (23.3) вытекает следующее значение модуля спина $\overline{K}$:

$$|\overline{K}| = \hbar. \quad (23.4)$$

Формула (20.38) (с. 718) влечет:

$$|\overline{\mu}| = \frac{1}{4} |e| r_*. \quad (23.5)$$

Зависимости (23.3) и (23.5) позволяют найти радиус частицы r_* :

$$r_* = \frac{2\hbar}{m_e c} \approx 7.7 \cdot 10^{-13} \text{ м}; \quad (23.6)$$

здесь использованы известные значения фундаментальных констант: $\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $c \approx 3,0 \cdot 10^8$ м/с.

Формулы (23.4) и (23.6), задающие спин и радиус частицы, получены ранее в разд. 8 и 20 (см. (8.2) и (8.8) или (20.49), с. 456, 457, 724).

Значение (23.6) радиуса r_* существенно превышает известную в физике верхнюю оценку радиуса электрона. Нужно заметить, что радиус электрона не измеряется в опыте напрямую. Его количественная оценка носит косвенный характер и базируется на априорных теоретических посылках, не имеющих строгих доказательств. Причина отличия найденного значения радиуса частицы r_* от принятого в физике значения радиуса электрона объяснена в разд. 8 после формулы (8.8) (с. 457).

Отметим, что опыт Штерна–Герлаха дает количественные результаты с невысокой точностью, поэтому характеристики модели (радиус частицы r_* и другие) приведены в настоящем разделе в предположении, что величина $\frac{p_*}{r_*} = \sin \frac{\pi}{n_*}$ пренебрежимо мала по сравнению с единицей.

Принимая во внимание, что частица движется вдоль мировой линии с единичной скоростью (в безразмерных единицах), мы по аналогии постулировали, что линейная скорость вращения спиралей (вокруг оси луча) тоже является единичной. При использовании для скоростей обычной размерности, это означает, что обе скорости равны скорости света c . Поскольку лучи вращаются с угловой скоростью o и спирали находятся на периферии луча, то при пренебрежении толщиной спиралей $2p_*$ по сравнению с радиусом частицы r_* линейная скорость вращения спиралей равна $|o|r_*$, поэтому

$$|o|r_* = c. \quad (23.7)$$

Из (23.6) и (23.7) находим:

$$|o| = \frac{c}{r_*} = \frac{m_e c^2}{2\hbar} \approx 3,9 \cdot 10^{20} \frac{[\text{рад.}]}{c}. \quad (23.8)$$

В разд. 21 введена частота вращения лучей ν_r , связанная с угловой скоростью o обычной формулой: $|o| = 2\pi\nu_r$. Отсюда и из (23.8) получаем:

$$\nu_r = \frac{|o|}{2\pi} = \frac{c}{2\pi r_*} = \frac{m_e c^2}{2h} \approx 6,2 \cdot 10^{19} \text{ Гц}, \quad (23.9)$$

где $h = 2\pi\hbar$ — константа, называемая, как и $\hbar$, постоянной Планка.

Важной характеристикой модели является параметр n_* , задающий количество спиралей в луче (см. рис. 1.3, рис. 2.1 и рис. 4.1, с. 409, 411, 419). Постулировано его значение (4.3) (с. 418):

$$n_* = 137. \quad (23.10)$$

Постоянная тонкой структуры α и коэффициент A в известной формуле $\bar{\Omega} = -A \frac{e}{m_e c} \bar{H}$, равный примерно 1.00116, однозначно определяются параметром n_* и при выполнении (23.10) согласуются с высокой точностью со своими экспериментальными значениями (см. формулу (4.2) на с. 418 и текст после нее, а также формулу (19.128) на с. 694 и последующий текст).

Радиус p_* сечения спирали, лежащего в поперечном сечении луча, связан с радиусом частицы r_* формулой (2.2) (с. 412): $p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}$. Отсюда и из (23.6) следует:

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*} \approx 1.77 \cdot 10^{-14} \text{ м}; \quad (23.11)$$

см. рис. 2.1 и рис. 4.1, с. 411, 419.

В разд. 19 исследована ситуация, когда совокупность состояний частицы, отвечающих разным моментам времени, образует в пространстве Минковского не непрерывное, а дискретное множество. В качестве временного промежутка, разделяющего ближайшие состояния частицы, принят промежуток Δl , который в рамках данной модели является объективно выделенным и минимальным. Он задается формулой (19.110) (с. 684). Согласно этой формуле (при пренебрежении величиной $\frac{p_*}{r_*}$ в сравнении с единицей), два ближайших состояния частицы находятся друг от друга на временном расстоянии Δl (в единицах длины) или Δt (в единицах времени) следующего вида:

$$\Delta l = \frac{2\pi r_*}{n_*} \approx 3.5 \cdot 10^{-14} \text{ м}; \quad \Delta t = \frac{\Delta l}{c} = \frac{2\pi r_*}{n_* c} \approx 1.2 \cdot 10^{-22} \text{ с}, \quad (23.12)$$

где использовано значение (23.6) радиуса частицы r_* .

24. Выводы

В главе 5 построена модель электрона в виде частицы ненулевого радиуса в пространстве Минковского M . Частица представляет собой совокупность трехмерных винтообразных объектов, названных лучами, которые вращаются вокруг своих осей с одинаковой и постоянной угловой скоростью ω (см. рис. 1.3, с. 409). Времениподобные оси лучей пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Внешней границей частицы является (псевдо)сфера в M (аналог однополостного гиперболоида в трехмерном евклидовом пространстве, см. рис. 2.2, с. 413), поэтому частица есть шар в пространстве Минковского.

Модель электрона в виде частицы ненулевого радиуса в пространстве Минковского:

а) приводит к значению электромагнитного поля электрона такому же, как разработанная в главе 4 «точечная» частица (без применения уравнений Максвелла); если электрон движется с ускорением, но не вращается, то его поле совпадает с полем, описываемым уравнениями Максвелла, в частности, магнитная составляющая поля является вихревой, а электрическая составляющая — безвихревой; если электрон вращается, то его собственное поле получает добавку к максвелловскому полю, причем магнитная составляющая этой добавки является безвихревой, а электрическая составляющая — вихревой;

б) объясняет наличие спина и магнитного момента электрона — они являются следствием вращения лучей вокруг своих осей и не зависят от вращения электрона как целого; спин рассчитывается по обычным правилам механики; спин и магнитный момент электрона связаны обычной зависимостью, вытекающей из законов электродинамики;

в) успешно описывает результаты опытов Эйнштейна–де Хаазе и Штерна–Герлаха;

г) приводит к новому определению постоянной тонкой структуры α и дает её значение с точностью $1 \cdot 10^{-7}$; постоянная α зависит только от одного целочисленного параметра модели n_* ; вероятность того, что совпадение не является случайным, составляет 0,99997;

д) позволяет учесть самодействие электрона (благодаря ненулевому радиусу частицы); приводит к заключению, что именно самодействие электрона является причиной так называемого аномального магнитного момента электрона; описывает этот эффект с точностью $2 \cdot 10^{-7}$; коэффициент, обеспечивающий эту точность (равный примерно 1.00116), определяется только целочисленным параметром n_* .

е) придает энергии покоя электрона $E_0 = m_e c^2$ смысл кинетической энергии электрона относительно пространства Минковского; половина этой энергии связана с поступательным движением лучей частицы, другая половина — с вращением лучей вокруг своих осей; обе половины энергии вычисляются по обычной формуле для кинетической энергии: $\frac{1}{2} m_e v^2$ (при $v = c$); энергия E_0 не зависит от выбора системы отсчета, так как рассчитывается относительно пространства Минковского;

ё) приводит к выводу, что физическая система, состоящая из большого количества вращающихся электронов, может порождать вокруг себя самоподдерживающееся магнитное поле;

ж) описывает позитрон как электрон, движущийся в пространстве Минковского вспять во времени.

Глава 6

ОБСУЖДЕНИЕ

1. О стационарных электронных орбитах

Согласно законам электродинамики и результатам данной книги, собственное поле электрона, движущегося с ускорением, имеет составляющую, обратно пропорциональную первой степени расстояния. Из этого следует, что электрон при ускорении излучает электромагнитные волны и, значит, теряет энергию. Поэтому планетарная модель атома является нестабильной и в электродинамике, и в нашей теории.

В электродинамике эта ситуация не исправима. Однако наша модель допускает модернизацию, при которой безызлучательное ускоренное движение электрона оказывается возможным. Покажем это.

Собственное электромагнитное поле частицы F_s пропорционально скорости элементов частицы $\mathbf{j}_0$ (см. в главе 4 формулу (1.10), с. 313). Известно, что любое движение тела может быть представлено в виде комбинации поступательного движения, одинакового для всех элементов тела, и вращения, при котором скорость элемента пропорциональна его расстоянию от центра вращения. По этой причине выражения для скорости $\mathbf{j}_0$ и поля F_s содержат два вида слагаемых, различающихся на одну степень расстояния (см. в главе 4 формулы (7.20), (7.23) и (7.24), с. 362, 363). Слагаемые, которые обратно пропорциональны второй степени расстояния, описывают кулоновскую составляющую поля, не связанную с излучением. Слагаемые, обратно пропорциональные первой степени расстояния, описывают волновую составляющую поля, приводящую к излучению электромагнитных волн. Волновая составляющая поля F_s возникает при гиперболическом и пространственном вращениях частицы (первое из них называется бустом и проявляется в опыте как ускоренное движение частицы).

В данной книге собственное поле частицы рассчитано при условии, что направляющий орт $\mathbf{i}_L$ мировой линии L всё время совпадает с направляющим ортом $\mathbf{i}$ оси симметрии частицы ($\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$).

Откажемся от этого условия и рассмотрим такое движение частицы, при котором центр частицы движется вдоль мировой линии L , а ось каждого луча (проходящая через центр частицы) перемещается параллельно самой себе, иначе говоря, остов частицы, состоящий из осей лучей, движется вдоль L поступательно. В этом случае направляющий орт $\mathbf{i}$ оси симметрии частицы постоянен и частица не вращается. Рис. 1.1 иллюстрирует эту ситуацию в проекции на физическое пространство.

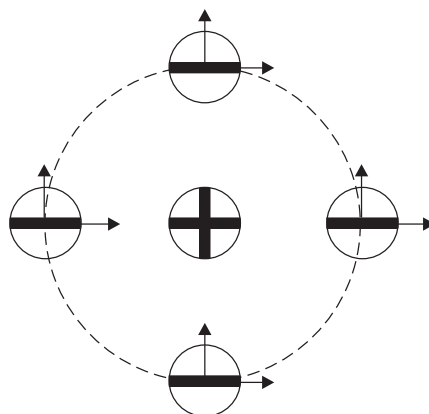


Рис. 1.1. Поступательное движение остова частицы по круговой орбите.

$\oplus$ — положительно заряженное ядро; $\ominus$ — отрицательно заряженная частица (в четырех положениях). Стрелки отмечают два направления, скрепленных с остовом частицы. При поступательном движении остова частицы стрелки перемещаются параллельно самим себе. Так выглядит движение частицы изнутри трехмерного физического пространства. В пространстве Минковского круговой орбите соответствует винтовая мировая линия.

При таком движении частицы выполняются равенства $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{0}$ и $\bar{\omega} = \mathbf{0}$. Поэтому в формуле для собственного поля частицы остается только кулоновская составляющая поля, которая обратно пропорциональна второй степени расстояния и не приводит к излучению электромагнитных волн (см. в главе 4 формулу (6.3), с. 346).

Итак, если бы движение остова частицы было поступательным, то частица, даже при наличии ускорения, не излучала бы электромагнитные волны и поэтому не расходовала энергию. В этом случае движение

частицы вокруг ядра происходило бы по стационарной орбите, и в целом система частица–ядро, моделирующая атом, была бы стабильной.

Однако принятые нами законы движения частицы не согласуются с условием $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{0}$. В частности, закон (13.10) (с. 524) напрямую связывает производную $\frac{d\mathbf{l}}{dt}$ с действующими внутри центрального сечения частицы полями F и F_s . Поэтому для описания стационарных электронных орбит требуется дальнейшее развитие модели.

Выскажем соображение, которое, возможно, позволит согласовать законы движения частицы с допустимостью поступательного движения остова частицы.

Поскольку все лучи частицы вращаются, то каждый луч может быть уподоблен гироскопу. Известно, что при движении гироскопа его ось вращения перемещается параллельно самой себе. Такое свойство имеет место при рассмотрении гироскопа в трехмерном пространстве. По аналогии можно ожидать, что в четырехмерном пространстве Минковского каждый луч-волчок тоже движется так, что его ось вращения перемещается параллельно самой себе. А это означает поступательное движение остова частицы, обеспечивающее отсутствие излучения. Сказанное позволяет предположить, что вопрос о существовании стационарных орбит электронов может быть решен путем построения аналога теории гироскопов применительно к пространству Минковского.

Таким образом, настоящая модель, с точки зрения ее кинематических свойств, допускает возможность безызлучательного ускоренного движения частицы и тем самым допускает существование стационарных электронных орбит. Однако для согласования характеристик такого движения с принятыми законами движения частицы требуется дополнительное исследование.

Начать это исследование целесообразно с расчета мощности излучения, испускаемого орбитальным электроном в рамках предложенной модели. И затем сравнить результат с тепловыми потоками, которые излучают Солнце, Земля, Луна и другие космические тела в расчете на один электрон (за вычетом тепла, получаемого от Солнца). Не исключено, что после такого сравнения проводить упомянутое исследование не потребуются.

Для описания дискретного набора стационарных орбит электрона в атоме нужно построить модель ядра атома, прежде всего модель протона, тоже, как и электрона, в виде четырехмерного объекта в пространстве Минковского, а также уточнить закон взаимодействия ядра с электроном. Нет сомнения в том, что методы механики позволяют решить эту задачу.

2. О реакции излучения

Важным эффектом, влияющим на движение частицы, является ее *самодействие*. Оно определяется значением собственного поля частицы F_s внутри центрального сечения частицы. Сформулированные в настоящей работе законы движения частицы позволяют рассчитать самодействие частицы при любом характере ее движения (в частности, в разд. 19 главы 5 рассчитано самодействие частицы в случае ее вращения). В электродинамике принято называть эффект воздействия на заряд его собственного электромагнитного поля *реакцией излучения*. Поэтому можно сказать, что результаты настоящей работы дают возможность найти реакцию излучения для произвольно движущейся частицы.

3. О дискретности и непрерывности характеристик частицы

При построении модели были использованы допущение о непрерывности и гладкости мировой линии частицы и допущения о континуальности множества осей лучей и множества нитей. Это позволило при расчете характеристик частицы применять операцию интегрирования вместо более сложной операции суммирования. (Такой подход к построению модели аналогичен подходу, принятому в механике сплошной среды, где реальные физические тела, представляющие собой дискретный набор атомов и молекул, моделируются областями евклидова пространства, состоящими из континуального множества точек.)

Ввести дискретность в нашу модель можно следующими способами:

а) можно принять, что мировая линия частицы является не гладкой, а кусочно-гладкой кривой. Тогда в моменты перехода частицы через угловые точки мировой линии собственное поле частицы F_s будет испытывать резкие изменения. Возможно, что этот эффект удастся интерпретировать как испускание или поглощение частицей фотонов, несущих определенную энергию;

б) можно допустить, что расположения частицы в пространстве Минковского образуют не непрерывное, а дискретное множество. В таком случае при вычислении собственного поля частицы F_s операция интегрирования вдоль мировой линии должна быть заменена операцией суммирования по отдельным расположениям частицы. Отметим,

что упрощенный вариант этой дискретности был применен при описании вращения частицы магнитным полем. А именно, при учете взаимодействия вращающейся частицы было принято, что расположение частицы, непосредственно предшествующее рассматриваемому ее положению, отстоит от него в прошлое на определенный временной промежуток. Это позволило существенно приблизить результат теоретического расчета к экспериментальным данным (см. пункт 7 раздела 19 главы 5, с. 684).

Важным фактором, влияющим на свойства частицы, может оказаться конечность количества лучей, из которых она состоит. Собственное поле частицы F_s рассчитано в книге в предположении, что оси лучей частицы заполняют внутренность светового конуса непрерывным образом. Это позволило использовать операцию интегрирования вместо операции суммирования. Однако это же предположение означает, что частица состоит из бесконечного множества лучей. Введение в формулу для F_s бесконечно малой плотности лучей ε , равной отношению конечного количества лучей N к бесконечно большой площади (псевдо)сферы Z , позволило учесть конечность количества лучей (см. в главе 4 формулы (1.10) и (3.3), с. 313, 319). При таком способе расчета собственное поле частицы F_s оказывается непрерывным. Между тем, на достаточно большом расстоянии от центра частицы поле F_s может не быть непрерывным. Это объясняется тем, что лучи частицы расходятся от ее центра в разных времениподобных направлениях и, значит, на каком-то расстоянии от центра частицы соседние лучи не перекрываются и между ними образуются пустоты, в которых поле F_s отсутствует (точнее, $F_s = \hat{0}$).

Тот факт, что такая дискретность поля F_s пока что не обнаружена в опыте, означает, что количество лучей N , образующих частицу, очень велико. К сожалению, пока что не удалось определить, чему равно N , так как единственная формула, которая связывает N с известными константами, включает в себя наряду с N еще неизвестный параметр a :

$$aN = 4\pi e;$$

см. в главе 4 формулу (7.26) и текст до и после нее (с. 365); a — коэффициент в формуле для собственного поля частицы F_s (см. (1.10) в главе 4, с. 313).

4. О причинности и взаимодействии частиц

Принятое нами определение собственного поля частицы F_s базируется на допущении, что это поле порождается теми участками лучей, которые находятся в будущем по отношению к центральному сечению частицы. Вследствие этого допущения, участки лучей, которые находятся в прошлом относительно центрального сечения частицы, оказываются исключенными из рассмотрения. Во всяком случае, полученные в книге результаты не зависят от них. По этой причине в отношении роли данных участков лучей можно занять с равным правом любую из приводимых ниже позиций.

Во-первых, можно просто игнорировать существование участков лучей, находящихся в прошлом относительно центрального сечения частицы, подобно тому, как в физических теориях принято игнорировать существование опережающих решений волновых уравнений. Учитывая, что в физике такое игнорирование принято обосновывать необходимостью соблюдения принципа причинности, мы тоже сослались на этот принцип, когда при определении собственного поля частицы исключили из рассмотрения указанные участки лучей.

Во-вторых, поскольку эти участки лучей все равно никак не влияют на полученные результаты, то можно допустить, что они вообще отсутствуют. Тогда лучи будут состоять только из участков, которые идут в будущее от центрального сечения частицы. В этом случае можно связать с моделью следующий художественный образ.

Пусть некоторая совокупность наших частиц моделирует какое-то реальное макроскопическое тело (рис. 4.1). В соответствии с одним из принятых условий, оси лучей частицы движутся в направлениях, ортогональных к оси симметрии частицы. Поэтому по мере продвижения частицы из прошлого в будущее элементы лучей, находящиеся впереди нее во временном направлении, подходят один за другим к центральному сечению частицы, как показано стрелками на рис. 4.1. Будем считать, что они превращаются там в мировую линию, остающуюся в прошлом позади частицы. В таком случае вся совокупность мировых линий рассматриваемых частиц представляет собой геометрический образ некоторого материального объекта, связанного с данным телом и находящегося в прошлом относительно него. Так как лучи состоят из нитей, то этот объект фактически сплетен из нитей (точнее, из их материальных прообразов в реальном мире). Следовательно, можно сказать, что посредством перемещения тел в пространстве-времени из прошлого в будущее Бог плетет из нитей-возможностей ткань судьбы.

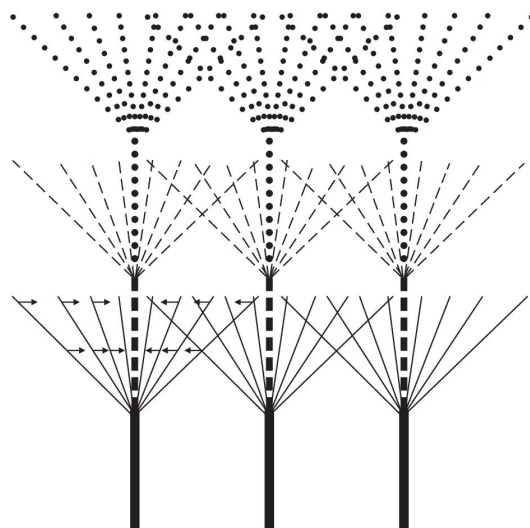


Рис. 4.1. Частицы, моделирующие макроскопическое тело в пространстве Минковского.

Тонкие сплошные линии — тело в настоящий момент времени; штриховые и пунктирные линии — тело в будущие моменты; широкие сплошные линии — остающийся в прошлом «след» данного тела; стрелки указывают направления перемещения осей лучей.

Третья возможная позиция состоит в том, чтобы сначала выяснить, к каким именно следствиям может приводить наличие в модели участков лучей, находящихся в прошлом относительно центрального сечения частицы, и только после этого решать вопрос о целесообразности или нецелесообразности исключения их из модели. Понятно, что вследствие нахождения этих участков в прошлом относительно центрального сечения частицы, эффекты, описываемые с их помощью, могут быть каким-то образом связаны с воздействием будущих событий на прошлые события. Современная физическая парадигма исключает возможность такого воздействия. Это находит свое выражение в постулировании в физике упомянутого выше принципа причинности.

Между тем результаты, полученные в области наблюдательной астрономии, дают основание усомниться во всеобъемлющей справедливости этого принципа. Так, в статьях [35, 36] сообщается о регистрации с помощью специальных датчиков сигналов от будущих положений звезд, то есть от тех мест на небесной сфере, где звезды пока что отсут-

ствуют, но куда они придут через определенные промежутки времени. В публикациях [37, 38] наличие таких сигналов подтверждено независимыми наблюдателями.

Обсудим возможность воздействия будущих событий на прошлые с методологической точки зрения.

Формулируемый в физике *принцип причинности* заключается в утверждении, что только прошлые физические события могут влиять на будущие события, но не наоборот (что с учетом положений теории относительности приводит к заключению о невозможности движения материальных тел со скоростями, превышающими скорость света в вакууме). Однако философское осмысление понятия причинности, обобщающее опыт всех естественных наук, приводит к выводу, что это понятие имеет гораздо более богатое содержание.

Согласно философским воззрениям, *причинность* есть генетическая связь между отдельными состояниями видов и форм материи в процессах ее движения и развития. Сущностью причинности является производство причиной следствия. Причинность представляет собой внутреннюю связь между наличествующим явлением и тем, что им порождается, что еще только становится. Этим она принципиально отличается от других форм связей. В процессе причинения происходит перенос материи и движения от причины к следствию, поэтому он сопровождается изменением и самой причины. Причина во времени предшествует следствию, но вместе с тем существует более или менее длительная стадия, когда причина и следствие сосуществуют вместе, активно воздействуя друг на друга [39, 40].

Рассмотрим две наши частицы, моделирующие электроны. В соответствии с данным представлением, они должны активно взаимодействовать между собой. Однако в нашей модели, вследствие использования принципа причинности, фактически имеет место не взаимное действие частиц друг на друга, а лишь воздействие одной частицы на другую, что проиллюстрировано на рис. 4.2. Из рисунка видно, что если частица в момент собственного времени l_0 воздействует на другую частицу, то эта вторая частица не оказывает воздействия на рассматриваемое расположение первой частицы, а может влиять лишь на более поздние расположения первой частицы, например, на расположение, отвечающее моменту l_1 . Ситуация еще более усугубляется в том случае, если первая частица, начиная с момента l_0 , движется вспять во времени (пунктирная линия на рис. 4.2). Тогда она вообще становится не подверженной действию со стороны второй частицы, хотя сама продолжает воздействовать на нее.

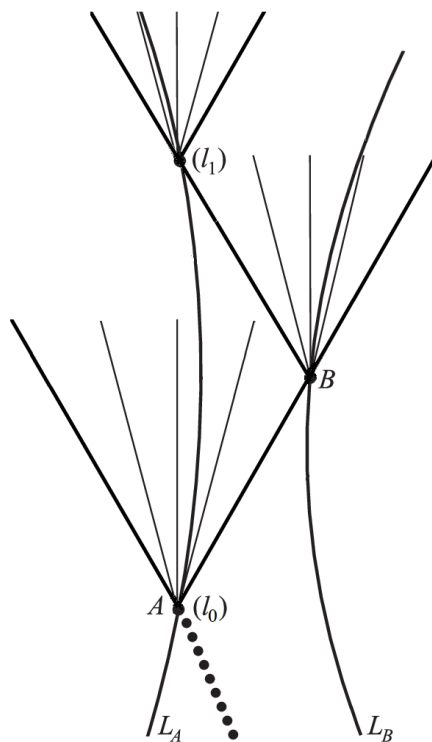


Рис. 4.2. Две частицы.

L_A и L_B — мировые линии частиц A и B ; пунктиром изображен вариант мировой линии L_A , при котором частица A , начиная с момента l_0 , движется вспять во времени; тонкие прямые линии — участки осей лучей, идущие в будущее относительно центра частицы; толстые прямые линии — световые конусы (показаны только их половины будущего).

Очевидно, что описать в нашей модели воздействие частицы-следствия на частицу-причину, можно как раз с помощью тех участков лучей частицы-следствия, которые находятся в прошлом относительно ее центрального сечения.

Однако можно описать воздействие частицы-следствия на частицу-причину и иным способом. Этот способ изложен в следующем разделе.

5. Эффект Эйнштейна– Подольского–Розена

В рассматриваемой модели воздействие одной частицы на другую осуществляется следующим образом. Частица создает вокруг себя поле F_s , и оно, действуя на центральное сечение другой частицы, изменяет характер ее движения в пространстве Минковского. Поле F_s в некотором месте пространства определяется теми элементами частицы, которые находятся именно в этом месте. Поэтому фактически воздействие первой частицы на вторую оказывают только те элементы первой частицы, которые при данных расположениях частиц находятся внутри центрального сечения второй частицы. Ранее мы молча предполагали, что при этом сами элементы первой частицы не испытывают никакого обратного воздействия со стороны второй частицы. Понятно, что вполне можно ожидать, что в реальности такое обратное воздействие имеет место. А это и означает, что частица-следствие воздействует на частицу-причину.

Обратим внимание на одно обстоятельство, которое связано с таким воздействием.

Допустим, что частица-следствие оказывает воздействие на те элементы частицы-причины, которые находятся в ее центральном сечении. В связи с тем, что в рамках данной модели частица является недеформируемым объектом, произведенное воздействие будет «почувствовано» сразу всеми элементами частицы-причины (рис. 5.1). Если условно трактовать лучи частицы-причины как отдельные фотоны, испущенные ею в разные стороны, то картина этого воздействия будет представляться таким образом: происходит изменение состояния одного из испущенных частицей фотонов и это событие мгновенно изменяет состояния всех других испущенных ею фотонов, даже тех, которые находятся в этот момент на значительном удалении от первого фотона. Такой эффект действительно наблюдается в опыте. Он носит название эффекта Эйнштейна–Подольского–Розена [41].

Очевидно, что представление о недеформируемости частицы — идеализация. Способ построения более реалистической модели указан в разд. 6.

Итак, если философское понятие причинности, о котором было сказано в предыдущем разделе, отражает свойства реальных причинно-следственных связей точнее, нежели понятие причинности, принятое в физике, то при описании взаимодействия материальных тел нужно учитывать возможность воздействия тела-следствия на тело-причину. Наша модель позволяет учесть такое воздействие двумя способами.

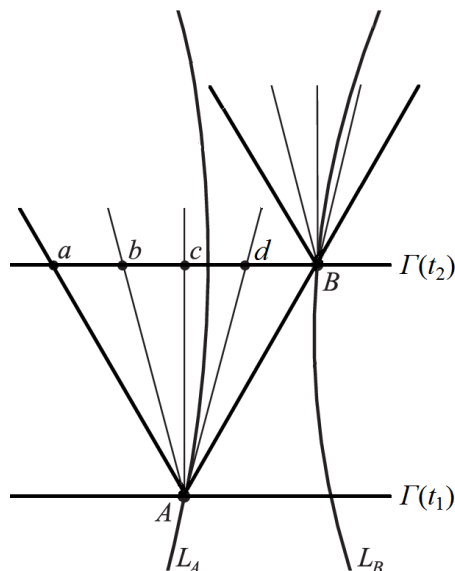


Рис. 5.1. Две частицы.

L_A и L_B — мировые линии частиц A и B ; тонкие прямые линии, исходящие из центров частиц, — оси лучей; толстые прямые линии — совокупности осей лучей, непосредственно примыкающих к световому конусу (показаны участки осей лучей, идущие в будущее относительно центров частиц); Γ — физическое пространство лабораторной системы отсчета в двух положениях: в момент t_1 , когда частица A испускает фотон и в момент t_2 , когда частица B поглощает фотон ($t_1 < t_2$); a, b, c, d — точки пространства Γ , в которых воздействие частицы B на частицу A может быть зарегистрировано без задержки во времени (в предположении, что частица — недеформируемый объект, вследствие чего воздействие на частицу в любой ее части проявляется сразу во всех ее частях).

Во-первых, можно допустить, что элементы центрального сечения частицы-следствия воздействуют на соприкасающиеся с ними элементы лучей частицы-причины, как описано выше.

Во-вторых, можно принять, что участки лучей частицы-следствия, находящиеся в прошлом относительно ее центрального сечения (если они существуют), воздействуют на центральное сечение частицы-причины, как сказано в предыдущем разделе.

6. О межзвёздной связи

Хочется думать, что мы не одиноки во Вселенной, поэтому возникает желание установить связь с инопланетными братьями по разуму. Однако делать это с помощью космических аппаратов, отправляя их по разным направлениям вглубь Вселенной, — затея более безнадёжная, чем отправлять с необитаемого острова послание людям в запечатанной бутылке, бросив ее в океан (потому что у океана хотя бы имеются протяженные участки берегов, куда бутылка может прибиться и где ее могут найти, а Вселенная безбрежна, к тому же центрами притяжения являются звезды, попав на которые, аппарат сгорит). Бессмысленно пользоваться также радио или световыми сигналами, так как скорость света столь мала по космическим масштабам, что до ближайшей звездной системы сообщение будет идти около 5 лет. Послав сегодня сообщение «Здравствуйте», мы получим ответ «Привет» лишь через 10 лет (если там существует развитая цивилизация и она сразу ответит на наше послание). А что говорить о звездных системах, находящихся от нас на расстояниях десятков и сотен тысяч световых лет?

Выскажем гипотезу о возможности межзвездной связи.

Согласно нашей модели, воздействие частицы-причины на частицу-следствие оказывают те элементы частицы-причины, которые находятся внутри центрального сечения частицы-следствия. Обратное воздействие частицы-следствия на эти элементы нами не рассматривалось. В разд. 5 отмечено, что в реальности такое обратное воздействие может иметь место. Допустим, что оно существует. Тогда в нашей модели, в силу недеформируемости частицы, это воздействие будет воспринято сразу всеми элементами частицы-причины, в том числе ее центром. А это фактически есть установление связи вдоль светового конуса, в том числе межзвездной связи (между точками A и B на рис. 5.1).

Отметим, что в пространстве Минковского расстояние между любыми двумя точками, лежащими на одной образующей светового конуса, равно нулю, поэтому на рис. 5.1 выполняется $|AB| = 0$. При этом расстояние между одномоментными точками мировых линий L_A и L_B , то есть расстояние, измеряемое вдоль физического пространства G , может быть любым.

Понятно, что допущение о недеформируемости частицы является идеализацией. Следующий шаг в развитии модели — построение модели электрона как деформируемого упругого тела. Тогда скорость передачи информации вдоль лучей частицы будет равна скорости упругих волн. Эта скорость может существенно превышать скорость света (так же, как скорость звука в металлическом корпусе летящего самолета значительно превышает скорость самолета относительно земли).

7. О двухщелевом эксперименте

При двухщелевом эксперименте пучок электронов проходит через две щели в преграде и попадает на экран (рис. 7.1).

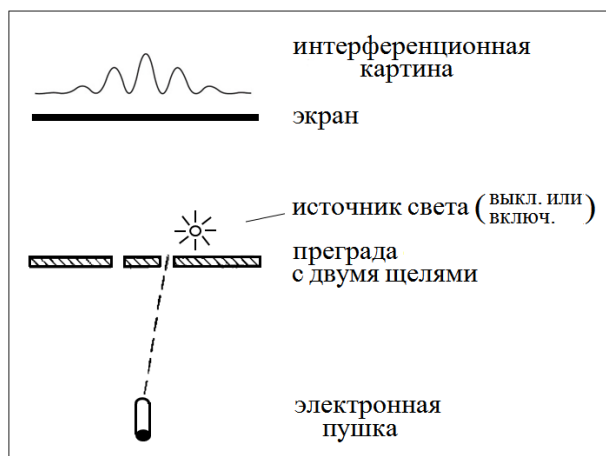


Рис. 7.1. Двухщелевой эксперимент.

За преградой находится источник света. Если он выключен, то неизвестно, через какую щель пролетел электрон. В этом случае на экране появляется интерференционная картина, как показано на рисунке. Если источник света включен, то испускаемые им фотоны, отражаясь от пролетающего электрона, попадают в детектор, что позволяет определить, через какую щель пролетел электрон. При этом на экране вместо интерференционной картины появляются две полосы, образуемые прошедшими через щели электронами (детектор не показан на рисунке).

Данный эксперимент трактуется как проявление корпускулярно-волнового дуализма в поведении электронов: если траектория электрона известна, то электрон ведет себя как частица (корпускула), если не известна, то он ведет себя как волна. В последнем случае принято говорить о прохождении электрона сразу через две щели и о интерференции электрона на самом себе.

Наша модель электрона в виде «точечной» частицы приводит к иной интерпретации результатов двухщелевого эксперимента.

Изобразим показанную на рис. 7.1 схему эксперимента в аксонометрической проекции (рис. 7.2).

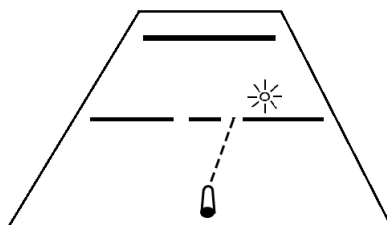


Рис. 7.2. Схема двухщелевого эксперимента в аксонометрической проекции.

Теперь изобразим эту же схему эксперимента в пространстве Минковского (рис. 7.3).

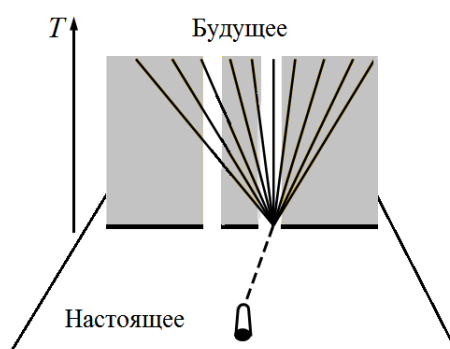


Рис. 7.3. Двухщелевой эксперимент, рассматриваемый с позиции пространства Минковского.

Электрон моделирован «точечной» частицей (она состоит из времениподобных лучей, исходящих из одной точки — центра частицы); T — ось времени; серым показана преграда с двумя щелями, протяженная во времени.

Из рис. 7.3 видно, что, при пролете электрона через одну из щелей, на границах другой щели может происходить когерентное переизлучение от его лучей. При взаимодействии переизлученной волны с прошедшим через щель электроном возникает интерференционная картина. Так выглядит эксперимент при выключенном источнике света, находящемся за преградой. Если же источник света включен, то попавшие на электрон фотоны нарушают когерентность, и поэтому интерференция

пропадает. Отметим, что эта интерпретация не нуждается в гипотезе о прохождении электрона сразу через две щели.

Проверить справедливость данной интерпретации можно следующим способом. Расположим источник света не за преградой, а перед ней (рис. 7.4). Согласно нашей интерпретации, в этом случае при включенном источнике света электрон придет в новое состояние до прохождения через щель, поэтому за преградой когерентность не будет нарушаться и интерференционная картина сохранится.

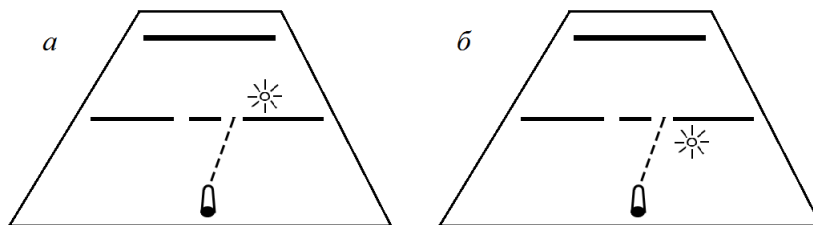


Рис. 7.4. Два варианта двухщелевого эксперимента: *a* — источник света находится за преградой (традиционный вариант, см. рис. 7.2); *б* — источник света находится перед преградой.

По-другому выглядит эта ситуация при традиционной интерпретации. Поскольку при любом варианте эксперимента, изображенном на рис. 7.4, траектория электрона может быть определена с одинаковой достоверностью, то интерференция должна пропадать при обоих вариантах эксперимента.

Таким образом, если справедлива наша интерпретация, то интерференционная картина должна сохраняться при включенном источнике света, находящемся перед преградой, а если верна традиционная интерпретация, то в этом случае интерференция должна пропадать.

Предложенная интерпретация подтверждается результатом опыта, опубликованном в статье [42]. В опыте одна щель в преграде закрывалась заглушкой, проницаемой для электромагнитного поля, но непроницаемой для электронов. При этом интерференционная картина за открытой щелью оставалась такой же, какой была при двух открытых щелях. Сделан вывод, что «электрон интерферирует со своей электромагнитной частью, проходящей через закрытую прозрачным диэлектриком щель». Этот вывод согласуется с интерпретацией результатов двухщелевого эксперимента, изложенной выше.

8. Модель электрона в общей теории относительности

Материальные тела не могут иметь нулевые размеры, то есть быть ничем. Именно это методологическое положение послужило основанием для моделирования электрона геометрическим объектом ненулевого размера. Вместе с тем, наша частица, моделирующая электрон, простирается во времениподобных направлениях через всё пространство Минковского, то есть имеет бесконечный размер. Понятно, что материальные тела не могут иметь не только нулевые, но и бесконечные размеры.

Модель материального тела в виде геометрической точки или бесконечно большого геометрического объекта позволяет в ряде случаев упростить решение задачи. Однако это — лишь идеализация далекая от реальности.

Переход к модели электрона, имеющей конечные размеры, может быть произведен заменой псевдоевклидова пространства Минковского, объем которого бесконечен, псевдоримановым пространством конечного объема (например, четырехмерной псевдосферой). В такой модели осями лучей, образующими остов частицы, будут служить пересекающиеся в одной точке — центре частицы — времениподобные геодезические. Поскольку псевдориманово пространство используется в общей теории относительности, то фактически таким способом может быть построена модель электрона в рамках общей теории относительности.

Отметим некоторые обстоятельства, связанные с моделированием электрона в общей теории относительности.

Одно обстоятельство состоит в следующем. При построении нашей частицы мы проводили интегрирование по всем направляющим ортам осей лучей. Эти орты имеют начало в центре частицы и концы на единичной псевдосфере (см. в главе 4 рис. 3.1, с. 318, или в главе 5 рис. 20.1, с. 712). Из-за некомпактности псевдосферы, одна из угловых координат, определяющих положение ортов в пространстве, принимает значения из бесконечного интервала $(0, +\infty)$. Поэтому операция интегрирования по этой координате включает в себя предельный переход к бесконечному значению верхнего предела интегрирования. В ряде формул такие предельные переходы нужно было производить одновременно в числителе и знаменателе. В этих случаях мы заменяли отношение пределов двух функций пределом их отношения, что, строго говоря, не является корректным из-за бесконечного значения пределов. Избежать этого, по-видимому, можно в общей теории относительности, если использовать псевдориманово пространство конечного объема. Посколь-

ку в этом случае площадь псевдосферы тоже будет конечной, то все угловые координаты будут принимать значения из конечных интервалов, в связи с чем применять упомянутую некорректную процедуру не потребуется.

Второе обстоятельство таково. Благодаря ненулевой кривизне псевдориманова пространства, собственное поле частицы в этом пространстве будет отличаться от поля, вычисленного для пространства Минковского. Однако на расстояниях от частицы, существенно меньших радиуса кривизны пространства, это отличие, очевидно, будет весьма малым. Поэтому для таких расстояний разность собственных полей частицы в псевдоримановом пространстве и в пространстве Минковского можно трактовать как малую добавку к вычисленному полю. Если окажется, что определяемая этой добавкой сила взаимодействия двух частиц пропорциональна произведению количеств их лучей, обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами и стремится сблизить частицы (при любых знаках их электрических зарядов), то это будет означать, что данная добавка описывает гравитационное взаимодействие между частицами. В таком случае в общей теории относительности можно будет использовать пространство с кривизной, не зависящей от распределения массы, например пространство постоянной кривизны, что существенно упростит уравнения этой теории.

Третье обстоятельство имеет научно-фантастический оттенок. Допустим, что псевдориманово пространство-время представляет собой четырехмерную сферу с выколотой точкой (наличие выколотой точки связано с топологической причиной, ибо на целой сфере нельзя задать псевдориманову метрику). Рассмотрим частицу, центр которой располагается в точке, диаметрально противоположной выколотой точке. Оси лучей частицы, как сказано ранее, являются времениподобными геодезическими. В случае сферы они представляют собой дуги больших кругов. Они расходятся от центра частицы во всех времениподобных направлениях, но на противоположной части сферы они вновь сходятся, причем предельной точкой для них служит выколотая точка (это можно пояснить на примере глобуса: меридианы, являющиеся геодезическими на его поверхности, выходят из одного полюса и сходятся в противоположном полюсе). Таким образом, все лучи частицы сходятся в малой области, окружающей выколотую точку. Предположим, что мы можем воздействовать каким-то образом на элементы лучей, находящиеся в этой области. Тогда в силу недеформируемости частицы это воздействие будет воспринято сразу всей частицей. Следовательно, из данной области пространства-времени можно управлять поведени-

ем частицы, хотя ее центр находится в диаметрально противоположной части пространства-времени.

Допустим теперь, что все геометрические объекты, моделирующие реальные тела, имеют фрагменты, находящиеся в той же малой области пространства-времени. Тогда из этой области можно управлять всеми объектами. Если такая модель верно отражает свойства реальности, то это означает, что весь материальный мир может управляться из одного центра, хотя этот центр, возможно, и находится от нас на расстоянии миллиардов световых лет. Если это действительно так, то вся Вселенная есть просто некий механизм... Но кто же управляет им?

К сказанному можно добавить следующее. В рамках теории относительности, вследствие использования единого геометрического пространства для описания пространственных и временных свойств мира, имеет место сосуществование всех прошлых, настоящих и будущих расположений геометрических объектов, моделирующих материальные тела. Успехи теории относительности в описании природы позволяют распространить это положение на сами материальные тела. Это означает, что в мире сосуществуют прошлые, настоящие и будущие состояния всех материальных тел. Допустим, что элементарные частицы, из которых состоят материальные тела, создают вокруг себя электромагнитные поля, которые подобно полю, порождаемому нашей частицей, пропорциональны их скоростям. Рассмотрим ситуацию, когда все тела неподвижны. В таком случае поля будут отсутствовать, и поэтому обнаружить наличие тел с помощью электромагнитных датчиков невозможно. А если к тому же все элементарные частицы взаимно проницаемы, как наша частица, то у исследователя, находящегося среди них, создается впечатление, что мир пуст. Допуская, что они еще и недеформируемы, подобно нашей частице, можно назвать всю их совокупность, заполняющую мир, твердью. При отсутствии электромагнитных полей, то есть света, эта твердь будет погружена во мрак. Теперь из центра, о котором шла речь выше, приведем все тела в движение. Тогда появятся электромагнитные поля, то есть возникнет свет.

Завершим раздел гипотезой. В космологии известен вириальный парадокс. Он заключается в том, что скорости галактик на периферии скопления галактик превышают скорость, рассчитываемую, исходя из массы видимого вещества. Возможно, что это связано с тем, что масса электронов (и, возможно, масса других частиц) сосредоточена не вблизи их центров, а распределена вдоль лучей, исходящих из центров во времениподобных направлениях. Из-за этого вдали от видимого вещества закон тяготения может отличаться от применяемого в расчетах.

9. О моделях элементарных частиц

При построении модели электрона мы воспользовались методологией, посредством которой в классической механике Ньютона строятся модели любых материальных тел. Начальные положения этой методологии заключаются в следующем: постулативным образом выбираются базисное геометрическое пространство, отражающее пространственные свойства мира, и математическое множество, отражающее временные свойства мира; затем материальные тела моделируются в базисном пространстве геометрическими объектами, имеющими ту же размерность, какую имеет базисное пространство (геометрические объекты большей размерности не помещаются внутрь пространства, а геометрические объекты меньшей размерности могут использоваться только для упрощения решения отдельных частных задач; см. главу 1, с. 12).

В теории относительности базисное геометрическое пространство отражает как пространственные, так и временные свойства мира (оно называется пространством-временем). Согласно упомянутым положениям методологии механики, материальные тела должны моделироваться геометрическими объектами той же размерности, что и размерность базисного пространства. Именно на основе этой методологии построена модель электрона как четырехмерного объекта в пространстве-времени. Нет сомнения в том, что с помощью данной методологии могут быть разработаны модели и других элементарных частиц.

Опыт построения модели электрона свидетельствует о том, что на первом этапе разработки моделей элементарных частиц целесообразно использовать в качестве их математических образов линейчатые геометрические объекты в пространстве Минковского (подобно тому как мы приняли в роли первоначального математического образа электрона «точечную» частицу, представляющую собой совокупность пересекающихся в одной точке времениподобных прямых). При этом прямые, образующие такие линейчатые объекты, могут быть, вообще говоря, не только времениподобными, но также пространственноподобными или изотропными. На следующем шаге построения моделей можно «наращивать» на этих прямых какие-то структуры подобно тому, как мы «нарастили» на лучах «точечной» частицы определенную винтообразную структуру, получив тем самым частицу конечного радиуса.

10. О физических законах и свободе воли

Известно, что современная физика не дает всеобъемлющего описания мира. Единственная имеющаяся на настоящий момент полная и внутренне непротиворечивая картина бытия дается в религии. Она гласит: «Всё от Бога, а Бог непознаваем». Вследствие отсутствия строгих доказательств, опровергающих эту концепцию, было бы крайне ненаучным отвергать ее.

Согласно религиозным воззрениям, тварный мир имеет две составляющие: так называемую проявленную — материальный мир (мир неживой или косной материи), и непроявленную — мир ангелов и духов, к которому относятся и души людей. Материальные тела, составляющие проявленный мир, характеризуются строго детерминированным поведением, то есть поведением, которое может быть описано физическими законами — математическими зависимостями между параметрами тел. Именно выявление этих законов является главной задачей физики и других естественных наук (детерминированным может быть как поведение отдельных тел, так и поведение ансамблей тел, как это принимается в статистической физике и квантовой механике).

В отличие от материальных тел, жители непроявленного мира — ангелы и духи — имеют свободу воли, и поэтому их поведение не является детерминированным. Не является полностью детерминированным и поведение человека, представляющего собой соединение материального тела и наделенной свободой воли нематериальной души. Известные в настоящее время физические теории не содержат уравнений, которые позволили бы описать поведение объектов, обладающих свободой воли. Современная физическая картина мира вообще не включает в себя такие понятия, как «жизнь», «сознание», «свобода воли». Эти термины просто отсутствуют в Физической энциклопедии (из чего, конечно, не следует, что соответствующие явления не существуют).

Согласно современным физическим представлениям, материальные тела являются системами из элементарных частиц. Поэтому развитие теории элементарных частиц может многое прояснить в свойствах материальных тел. Однако, поскольку материальная и нематериальная составляющие мира находятся во взаимосвязи, а нынешняя физическая парадигма не включает в себя представление о нематериальной составляющей мира, то теория элементарных частиц, даже если она будет когда-либо завершена, не явится завершающим аккордом в исследовании устройства мира, как иногда считается, а станет лишь очередным шагом в выяснении свойств его материальной составляющей.

11. Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени

«Я предлагаю ... посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства-времени».
Дж. Л. Синг [43]

Суть теории относительности заключается в утверждении, что пространство и время могут быть моделированы единым четырехмерным геометрическим пространством. В специальной теории относительности это — пространство Минковского. В общей теории относительности — псевдориманово пространство.

Пространства, рассматриваемые в теории относительности, как и любое геометрическое пространство, не содержат в себе ничего относительного. В геометрии не имеется положений, которые можно было бы назвать относительными. Можно ли сказать, например, об утверждении, что длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, или о теореме Пифагора, что они относительные? Поэтому использование в названии теории относительности слова «относительность» является крайне неудачным. С математической точки зрения эту теорию с полным основанием можно считать теорией абсолютного пространства-времени, что и отражает заголовок настоящего раздела, повторяющий название статьи [44]. В этой статье детально проанализированы математические и философские основания теории относительности и со всей определенностью подчеркнуто ее значение именно как теории абсолютного пространства-времени.

Механика тоже дает веские основания характеризовать некоторые положения теории относительности как абсолютные. При этом в данном случае под абсолютностью подразумевается независимость от систем координат. (В математике это свойство обычно называют инвариантностью.) Приведем два примера таких положений.

Согласно теории относительности, каждая материальная точка движется в пространстве-времени вдоль определенной мировой линии. Мировые линии фиксированы в пространстве-времени, поэтому они не зависят от того, введена в нем или нет система координат и если введена, то какая именно. В соответствии с указанным смыслом понятия абсолютности, это означает, что движение материальных точек в пространстве-времени является абсолютным.

Еще одно основание для применения понятия абсолютности дают законы движения и взаимодействия частиц (см. разд. 13 главы 5, с. 519). Эти законы записаны в тензорной форме, поэтому они не зависят от систем координат. Отсюда следует, что в теории относительности законы движения и взаимодействия тел носят абсолютный характер. Обратим внимание на то, что данный факт делает теорию относительности даже «более абсолютной», чем классическая механика, потому что в последней основные законы, например, второй закон Ньютона, формулируются в инерциальных системах координат.

Поясним, с чем связано появление слова «относительность» в названии теории. Дело в том, что по неизвестной науке причине мы не можем перемещаться во временном направлении так же свободно, как делаем это в пространственных направлениях. В связи с этим мы изучаем в опытах свойства тел в трехмерном физическом пространстве, которое с позиции теории относительности представляет собой трехмерное сечение пространства-времени. В четырехмерном пространстве-времени физические пространства, движущиеся относительно друг друга, наклонены по отношению друг к другу (см. в главе 3 рис. 5.5 и 5.6, с. 136, 137). Из-за этого наклона одна и та же картина событий воспринимается изнутри разных физических пространств по-разному. В частности, различными (то есть относительными) оказываются траектории и размеры тел, а также промежутки времени между событиями. Это обстоятельство явилось одной из причин, по которой теория была названа теорией относительности. Еще одной причиной послужило то, что эта теория базируется на заимствованном из механики принципе относительности Галилея (с. 128), который распространен в ней на электромагнитные явления. (Заметим, что классическую механику никто не называет относительной, хотя она базируется на этом же принципе.)

В первые годы развития теории относительности именно указанные специфические черты этой теории казались особенно важными. Однако впоследствии стало ясным, что наиболее важным является само представление о пространстве-времени и мировых линиях как объектах, которые можно назвать абсолютными. Свидетельством этому служат, например, следующие две цитаты.

«... геометрический способ рассмотрения пространства-времени восходит непосредственно к Минковскому. Он протестовал против употребления слова «относительность» в применении к теории, основанной на «абсолютном» (пространство-время), и я уверен, что если бы он дожил до создания общей теории относительности, то повторил бы свой протест даже в более сильных выражениях» [43].

«... четырехмерная [мировая линия] является построением *абсолютным*, не зависящим от выбора системы отсчета и в таком выборе вообще не нуждающимся» [12] (с. 284).

Итак, согласно теории относительности, четырехмерный геометрический объект — пространство-время — содержит мировые линии всех материальных точек. При этом каждой материальной точке отвечает в реальном мире некоторое материальное тело. Естественно задаться вопросом: «А имеет ли само пространство-время какой-либо материальный прообраз в реальном мире?»

Возможность положительного ответа на этот вопрос вытекает из содержания Дополнения 2. В нем использована гипотеза, согласно которой в природе существует материальный объект, математической моделью которого служит геометрическое пространство-время. Этот материальный объект назван *пространственно-временной субстанцией*. Субстанция является четырехмерной и обладает метрикой пространства Минковского, поэтому она удовлетворяет всем положениям специальной теории относительности. Доказано, что наблюдаемым эффектом в нашем мире, обусловленным существованием такой субстанции, может быть наличие у нашего мира симметрии, диктуемой *CPT*-теоремой квантовой теории поля.

Отметим, что данная гипотеза допускает вариант, при котором материальные тела нашего мира представляют собой не самостоятельные физические сущности, а специфические структуры самой пространственно-временной субстанции (наподобие вихрей в жидкости или дислокаций в кристалле). В рамках этого варианта гипотезы можно допустить, что пространственно-временная субстанция состоит из материальных объектов, математической моделью которых служат лучи, о которых шла речь в предыдущих главах. При этом электрон и другие материальные тела являются различными структурами, образованными такими объектами. В соответствии с этим вариантом гипотезы, *пространственно-временная субстанция* оказывается в полном смысле слова абсолютной, потому что ничего другого просто не существует. Всё остальное, в том числе мы сами, — лишь её структуры.

12. История публикаций

Статьи [45–48], посвященные лучистой модели электрона, опубликованы в 1997–2005 годах в рецензируемом журнале «Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия». Книга [49] «Лучистая модель электрона» опубликована в 2005 году Издательством Санкт-Петербургского университета на основании отзывов рецензентов — заведующих кафедрами теоретической механики СПбГУ и СПб. гос. политехнического университета. Никаких возражений по содержанию статей и книги рецензенты не высказали.

В 1996 году получен грант Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (заявка № 96-01-00431). Последующие 4 заявки на грант РФФИ в 1998, 2000, 2001 и 2005 годах отклонены без каких-либо замечаний (№ 98-01-01092, № 00-01-00483, № 01-01-00228, № 05-01-01075).

Жизнь показала, что физики не интересуются статьями, опубликованными в изданиях по механике, поэтому я попытался довести результаты, касающиеся модели электрона, до их внимания. Однако все попытки были отвергнуты без единого замечания по существу модели. Перечислю эти попытки.

Осенью 2004 года, когда книга [49] уже была написана, но еще не опубликована, я обратился к профессору кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ В. А. Франке с просьбой заслушать мой доклад на кафедральном семинаре. Он ответил: «У нас, физиков, всё уже сделано. Нам это не интересно».

Пять попыток опубликовать статью [50] (в английском переводе [51]) в иностранных физических журналах были отклонены:

- Physical Review A (регистрационный номер AX10484, октябрь 2010 г.); редактор Gordon W. F. Drake обосновал отказ тем, что в статье мало ссылок на работы других авторов;

- Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical (A/397068/PAP/270765, июль 2011 г.); администратор групповых публикаций Emma Wright и издательский администратор Daniel Heatley попросили меня разъяснить отличие этой статьи от ранее опубликованной статьи [48]; я сообщил, что статья [48] имеет объем 5 страниц и содержит 5 формул и фактически представляет собой тезисы направленной им статьи, имеющей объем 20 страниц и содержащей 29 формул; после этого получил отказ на основании того, что некоторые результаты статьи были опубликованы ранее;

– Foundations of Physics (FOOP2676, август 2011 г.); главный редактор Gerard't Hooft отказал, так как статью трудно читать;

– International Journal of Theoretical Physics (IJTP5247, ноябрь 2011 г.); главный редактор H. Saller сообщил, что статья не прошла технический контроль; я обратился к редакционному директору издательства Springer Liesbeth Mol с просьбой прислать мне официальную рецензию с указанием имеющихся в статье ошибок; её ответ гласил, что статья отклонена не из-за ошибок, а по причине того, что журнал отклоняет 57% заявок и моя статья не попала в число принятых;

– Physica Scripta (PS/452960/PAP/270765, декабрь 2012 г.); администратор публикаций John Fryer объяснил отказ тем, что статья уже рассматривалась и была отклонена; я написал, что это ошибка, так как я никогда ранее не посылал статьи в этот журнал; на это он ответил, что отказывает в публикации по той же причине, по которой статья не была принята в журнал Journal of Physics A (без формулировки самой причины).

Попытка депонировать статью [50] (в английском переводе [51]) в arXiv.org в 2011 г. тоже не удалась. В связи с тем, что я впервые послал туда статью, автоматическая служба архива потребовала, чтобы мою статью одобрил индоссант архива (специалист, имеющий право рекомендовать статьи для помещения их в архив). Оказалось, что таким индоссантом является один из авторов работы, на которую я сослался в своей статье — Younes Attaourti. Однако посланные ему два электронных письма с просьбой представить статью в архив (от 12.08.2011 и 21.08.2011) остались без ответа.

Пять отказов я получил из редакций российских журналов:

а) В 2006 и 2007 годах в журнале «Успехи физических наук» (УФН) были опубликованы две большие статьи, касающиеся прецессии Тома-са и вращения Вигнера [11, 22]. В них обсуждаются два решения одной и той же задачи, приводящие к разным результатам. С помощью разработанной в книге модели электрона в виде «точечной» частицы удалось исправить неточность в одном из решений, после чего оба решения совпали. Статья [52] с изложением этого результата направлена в УФН 21 февраля 2018 года (ufn6258). Главный редактор В. А. Рубаков отказал в публикации на основе рецензии, в которой не были указаны какие-либо ошибки в статье.

б) 24 июня 2018 года направил статью [53] в «Журнал экспериментальной и теоретической физики» (ЖЭТФ). Редакция этого журнала проявила наиболее неуважительное отношение ко мне. Во-первых, статья не была зарегистрирована. Во-вторых, краткое письмо с отказом

(4 июля 2018 г.) не содержало причины отказа. В-третьих, в этом письме даже не была указана фамилия того, кто его написал. В-четвертых, мое письмо главному редактору А. Ф. Андрееву с просьбой направить статью на рецензирование не было ему передано, а мне сразу же пришел ответ, в котором сказано: «Редколлегия еще раз рассмотрела Вашу статью и признала невозможным изменить свое первоначальное решение о нецелесообразности её публикации».

в) 13 августа 2018 года послал статью [53] в журнал «Теоретическая и математическая физика» (tmf9618). Получил ответ: «Ваша статья „Вращение электрона магнитным полем“ не представляет интереса для журнала ТМФ — отв. секретарь В. В. Жаринов». Между тем, на сайте журнала в списке тем, по которым публикуются статьи, указана тема: «математические аспекты теории элементарных частиц», к которой непосредственно относится моя статья.

г) Статья [53] направлена 23 августа 2018 года в журнал «Письма в журнал „Физика элементарных частиц и атомного ядра“» («Письма в ЭЧАЯ») (1249-3954-1-RV). Главный редактор А. Е. Дорохов прислал отказ со ссылкой на отрицательную рецензию. В этой рецензии отрицательное заключение сделано на основании того, что моя статья содержит якобы ошибочное утверждение, что «ориентация магнитного момента в направлении магнитного поля является устойчивой». При этом рецензент даже не упомянул о наличии в статье доказательства того, что магнитное поле вращает электрон. Я ответил, что не понравившееся рецензенту утверждение представляет собой цитату из учебника по электродинамике, и попросил пересмотреть решение, но вновь получил отказ.

д) 5 июня 2023 года послал статью [56] в журнал «Теоретическая и математическая физика». Получил отказ: «Ваша статья „О векторной и псевдовекторной компонентах тензора электромагнитного поля“ не представляет интереса для журнала ТМФ — отв. секретарь В. В. Жаринов» (статья не была зарегистрирована). На мое письмо главному редактору Д. И. Казакову с объяснением важности полученного результата и с просьбой зарегистрировать статью он ответил: «В Вашей статье обсуждается вопрос, который ... не вполне соответствует тематике нашего журнала» и отказал в опубликовании и регистрации статьи.

Итак, 12 попыток ознакомить физиков с моделью электрона, описывающей с высокой точностью свойства электронов, были с ходу отвергнуты физиками. При этом они ни разу не выдвинули каких-либо замечаний, касающихся данной модели.

К счастью, А. П. Левич, создавший в 1984 году при МГУ имени М. В. Ломоносова *Российский междисциплинарный семинар по темпорологии* и *Институт исследований природы времени* и руководивший ими до своей кончины в 2016 году, а также сменившие его на этом посту сначала Ю. А. Лебедев и затем И. Э. Булыженков неоднократно приглашали меня выступить на Семинаре и разместили мои статьи [45–62 и др.], посвященные модели электрона и проблемам времени и причинности, на сайте Института [63]. Искренняя им благодарность.

13. О физике, мистике и мистике в физике

«И что ты смотришь на сучок в глазе брата твоего,
а бревна в твоем глазе не чувствуешь?»
Евангелие от Матфея. Глава 7: 3

Физика — наука о наблюдаемых объектах и явлениях природы, существование которых подтверждается объективными опытами.

Мистика — «нечто загадочное, непонятное, необъяснимое» [64], в частности, любое высказывание о ненаблюдаемых объектах и явлениях природы, существование которых подтверждается субъективной верой.

1. В Физическом энциклопедическом словаре читаем: «Виртуальные частицы в квантовой теории — частицы, ... для которых не выполняется обычная связь между энергией, импульсом и массой. ... Виртуальные частицы ... не могут быть зарегистрированы» [30]. Упрощая, можно сказать, что виртуальные частицы — это объекты, которые не подчиняются физическим законам и принципиально ненаблюдаемы. В обычной жизни такие объекты называются бесами.

Изложим кратко историю появления в физической теории этого мистического антинаучного понятия.

В начале XX века были предприняты попытки построения модели элементарного электрического заряда — электрона — в виде шара в трехмерном евклидовом пространстве. Они не увенчались успехом.

Эти попытки заведомо были обречены на провал. Дело в том, что симметрия шара в трехмерном евклидовом пространстве описывается группой ортогональных преобразований этого пространства. Объект с такой симметрией в принципе не может породить электромагнитное поле, симметрия которого описывается группой Лоренца, то есть группой ортогональных преобразований четырехмерного псевдоевклидова пространства Минковского.

С тех пор и по настоящее время в теоретической физике принято считать, что *электрон представляет собой точечный объект*. Это положение противоречит методологии естествознания, так как никакое материальное тело не может иметь нулевые размеры, то есть быть ничем. Точечная модель материального тела может использоваться лишь в качестве первого приближения, позволяющего в ряде случаев упростить решение задачи. Например, Земля и другие планеты моделируются точками при расчете их орбит, однако это не означает, что мы живем на точке.

В 1925 г. Дж. Уленбек и С. Гаудсмит предложили следующую гипотезу призванную объяснить результаты опытов Барнетта и Эйнштейна–де Хааза по воздействию на электроны магнитного поля. Моделируя электрон геометрической точкой, они постулировали, что электрон обладает собственным кинетическим моментом (спином) $\vec{K}$ и собственным магнитным моментом $\vec{\mu}$, пропорциональными между собой: $\vec{\mu} = \gamma \vec{K}$ (где γ — гиромагнитное отношение).

Этот постулат не соответствует законам механики, так как вращающаяся точка неотличима от невращающейся, поэтому точечное тело заведомо имеет нулевой кинетический момент.

Далее Уленбек и Гаудсмит, ссылаясь на законы механики и электродинамики, приняли, что при действии на электрон магнитного поля $\vec{H}$ возникает ларморовская прецессия спина электрона $\vec{K}$ с частотой

$$\vec{\Omega} = -\gamma \vec{H}. \quad (*)$$

Они предположили, что именно величина $\vec{\Omega}$ определяется в опытах по воздействию на электроны магнитного поля.

Однако сравнение формулы (*) с зависимостью, вытекающей из опытов Барнетта и Эйнштейна–де Хааза, показало, что экспериментальное значение коэффициента при $\vec{H}$ в два раза превышает величину гиромагнитного отношения γ , диктуемую законами электродинамики. Казалось бы, единственный вывод, который может быть сделан из этого несоответствия, — это признание ошибочности предлагаемой гипотезы. Тем не менее авторы гипотезы, вопреки здравому смыслу и научной методологии, постулировали, что кинетический момент электрона (спин) является «эффектом, не имеющим классического толкования» [65], и что для электронов гиромагнитное отношение γ в два раза отличается от принятого в электродинамике.

Этот постулат является вненаучным, так как кинетический и магнитный моменты, согласно их определениям, таковы, что связывающий их коэффициент γ (гиромагнитное отношение) не может иметь никакого другого значения, кроме того, которое дается в электродинамике.

Сказанное отражает историю появления в физике понятий спина и магнитного момента электрона. В современной квантовой электродинамике наличие у электрона спина вытекает из уравнения для волновой функции электрона, которое постулировано П. А. М. Дираком в 1928 г. и носит его имя — уравнение Дирака.

Последующие опыты, основанные на методе электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), показали, что в правой части формулы (*) должен стоять числовой коэффициент, равный примерно 1.00116.

Для согласования теории с этим экспериментальным результатом физики-теоретики постулировали существование упомянутых мистических виртуальных частиц, взаимодействие которых с электроном приводит, как они считают, к появлению указанного коэффициента.

В настоящей книге построена модель электрона в виде лоренц-инвариантного шара в пространстве Минковского. С помощью этой модели доказано, что наблюдаемый эффект, выражаемый зависимостью (*), заключается во вращении электронов магнитным полем и что отличие в (*) числового коэффициента от единицы объясняется самодействием электронов. Этот эффект не связан со спином и магнитным моментом электрона, а обусловлен только вращением электрона как целого.

Данный результат базируется на законах механики, электродинамики и специальной теории относительности и не требует использования представлений о мистических ненаблюдаемых виртуальных частицах и о механической характеристике электрона (спине), которая «не имеет классического истолкования» [65]. Спин и магнитный момент электрона вычисляются в нашей модели по обычным правилам механики и электродинамики, примененным к пространству Минковского.

Более подробно гипотеза Дж. Уленбека и С. Гаудсмита и причина появления понятия виртуальных частиц рассмотрены в конце разд. 7 главы 5 (с. 453). Отсутствие ларморовской прецессии спина электрона объяснено в конце разд. 19 главы 3 (с. 244). Детальное исследование вращения электрона магнитным полем с учетом самодействия электрона проведено в разд. 19 главы 5 (с. 645).

2. В квантовой теории считается, что переносчиками электромагнитного взаимодействия являются виртуальные фотоны. Однако фотон не обладает зарядом, поэтому его воздействие на поглощающую частицу не зависит от знака заряда частицы, испустившей фотон. Между тем, в реальности заряженные частицы взаимодействуют по-разному (отталкиваются или притягиваются) в зависимости от того, одинаковы или различны знаки их зарядов. Таким образом, квантовая теория не объясняет электромагнитное взаимодействие элементарных частиц,

В физической литературе отсутствует ответ на вопрос: «Каким образом заряд, поглотивший виртуальный фотон, узнаёт, нужно ему оттолкнуться или притянуться к частице, испустившей фотон?». Поэтому я обратился с этим вопросом к физiku (доктору наук, профессору), занимающемуся задачами в области атомной физики. Он дал удивительный ответ: «Я знаю, какой знак надо поставить в уравнение, такой знак и ставлю». По-видимому, каждый заряд, при действии на него фотона, сразу бежит к этому физiku и спрашивает его: «Притянуться мне или оттолкнуться?»

Идея о взаимодействии элементарных частиц путем обмена виртуальными переносчиками взаимодействия имеет и другие недостатки.

В самом деле, элементарные частицы и переносчики взаимодействия считаются в физике точечными объектами. Между тем, вероятность попадания одной точки в другую равна в точности нулю, поэтому такое взаимодействие в принципе не может быть реализовано.

Еще один недостаток иллюстрируется следующим мысленным экспериментом. Пусть две элементарные частицы взаимодействуют посредством обмена виртуальными частицами. Удалим мгновенно одну из частиц. Возможны два варианта реакции оставшейся частицы на это событие. Она либо продолжит испускать виртуальные частицы-переносчики взаимодействия, либо перестанет их испускать. При первом варианте эта элементарная частица выступает в роли неограниченного производителя энергии, то есть служит *вечным двигателем*, так как каждая виртуальная частица уносит от нее некоторую порцию энергии. Теперь допустим, что реализуется второй вариант — оставшаяся в одиночестве элементарная частица перестает испускать виртуальные переносчики взаимодействия. Вернем мгновенно удаленную частицу. В этом случае оставшаяся частица для того, чтобы начать испускать виртуальные фотоны в сторону возвращенной частицы, должна предварительно узнать каким-то образом о ее появлении и местонахождении, то есть она должна обладать *телепатией*.

В последние годы в квантовой теории рассматривается возможность дистанционного взаимодействия элементарных частиц без участия материальных носителей взаимодействия. Этот эффект называют «квантовой нелокальностью» или «прямым межчастичным взаимодействием», что в действительности означает мистический «*телекинез*».

Из сказанного следует, что в квантовой физике не удастся построить теорию взаимодействия элементарных частиц без явного или неявного использования представлений о мистических виртуальных частицах, вечном двигателе, телепатии и телекинезе.

Наша модель электрона в виде лоренц-инвариантного шара лишена этих недостатков. Поскольку любые два таких шара пересекаются, то взаимодействие электронов реализуется путем непосредственного контакта. Модель не нуждается в использовании никаких мистических понятий.

3. В физике вводится представление о спин-орбитальном взаимодействии, которое приводит к появлению тонкой структуры уровней энергии атомов. Это явление принято объяснять ларморовской прецессией спина орбитального электрона при действии магнитного поля на магнитный момент электрона. В связи с тем, что магнитный момент может иметь две противоположно направленные проекции на направление магнитного поля, данное явление приводит к расщеплению уровней энергии электронов в (водородоподобных) атомах на два подуровня.

Однако ядро атома создает кулоновское электрическое поле, которое не имеет магнитной составляющей, поэтому оно не может вызвать ларморовскую прецессию спина электрона. Чтобы вопреки этому факту обосновать наличие прецессии, используется такое рассуждение: «Перейдем мысленно в систему отсчета, в которой электрон покоится (то есть в систему, движущуюся вместе с электроном). В этой системе ядро будет двигаться и, как любой движущийся заряд, порождать магнитное поле, которое будет действовать на магнитный момент электрона» [66]. Подразумевается, что при этом возникает прецессия магнитного момента электрона и коллинеарного ему спина.

Пояснение: прецессия заключается, говоря упрощенно, в том, что при вращении тела ось вращения сама вращается вокруг другой, неподвижной, оси. Для материальных точек тела, лежащих на оси вращения, это есть обычное вращение вокруг неподвижной оси.

Таким образом, согласно цитированному рассуждению, ларморовская прецессия спина электрона имеет место при рассмотрении ситуации в инерциальной системе отсчета, которая мгновенно сопутствует электрону. В то же время при рассмотрении ситуации в инерциальной системе отсчета, связанной с ядром атома, она отсутствует.

Если бы ко мне пришел студент с идеей, объясняющей некоторое физическое явление тем, что в одной инерциальной системе отсчета тело вращается, а в другой инерциальной системе отсчета оно не вращается, то я выгнал бы его с двойкой и представил к отчислению за незнание основ механики. Ибо вращательное движение не является относительным. Оно либо присутствует во всех инерциальных системах отсчета, причем с одинаковой угловой скоростью, либо отсутствует во всех них. (Кто в этом сомневается пусть укажет инерциальную систему отсчета, в которой Земля не вращается вокруг своей оси.)

В нашей модели тонкая структура уровней энергии атома объясняется вращением орбитального электрона под действием электрического поля ядра. Угловая скорость вращения рассчитана на основе закона динамики электрона. Она не зависит от выбора системы отсчета, потому что закон имеет тензорную (бескоординатную) форму. Разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода вычислена (с учетом самодействия электрона) с точностью $5 \cdot 10^{-4}$ (см. с. 261–263 в конце разд. 20 главы 3 или с. 398–400 в конце разд. 13 главы 4).

4. Современная квантовая теория обладает и иными недостатками.

Нерелятивистская квантовая теория, базирующаяся на уравнении Шредингера, использует представление о трехмерном пространстве, поэтому она не удовлетворяет положениям теории относительности.

Квантовая электродинамика, основывающаяся на уравнении Дирака, тоже не удовлетворяет положениям теории относительности. Действительно, это уравнение описывает эволюцию волновой функции элементарной частицы. В нерелятивистском приближении, когда уравнение Дирака переходит в уравнение Паули, волновая функция является элементом двумерного комплексного унитарного пространства. Группа симметрии этого пространства образует двулистное накрытие группы Лоренца [67]. В таком пространстве поворот вектора на 360° ведет к изменению направления вектора на противоположное. Это означает, что если человек встанет вертикально и сделает полный оборот вокруг своей вертикальной оси, то он должен оказаться стоящим вниз головой. И только второй поворот на 360° должен вернуть его в первоначальное положение. Понятно, что этот результат не соответствует ни опыту, ни теории относительности.

Известно, что точечная модель элементарных частиц приводит к сингулярностям (бесконечным значениям некоторых физических величин). В квантовой теории для устранения сингулярностей используется так называемая процедура перенормировки — искусственное исключение из уравнений бесконечно больших слагаемых. С математической точки зрения такая процедура является недопустимой. И даже хорошее количественное согласие получаемых результатов с опытными данными не может служить оправданием для этой процедуры (как, например, не служит оправданием для модели мира Птолемея весьма точное описание ею движения планет по небосводу).

О недостатках квантовой физики говорят и классики науки. Так, П. А. М. Дирак, резюмируя состояние этой области знания, утверждает, что «у нас нет вообще истинной математической теории, а есть только правила для вычислений» [68].

Перечисленные недостатки современной квантовой теории объясняются использованием точечной модели элементарных частиц. Применительно к электрону все недостатки устраняются при моделировании электрона лоренц-инвариантным шаром в пространстве Минковского. Такая модель построена в данной книге. Она основана на законах механики, электродинамики и специальной теории относительности и с высокой точностью описывает свойства электронов.

В Российской Академии наук имеется Комиссия по борьбе с лженаукой, организованная ведущими учеными-физиками. Комиссия борется с разными направлениями человеческой мысли и деятельности, например, с гомеопатией, которая на протяжении более двух столетий успешно лечит людей от разных недугов. Однако в своей родной физике члены Комиссии не замечают описанных выше вопиющих признаков лженауки. Лучше бы они занялись критикой собственной науки.

14. Цитаты

«Знаете, было бы вполне достаточно по-настоящему понять электрон».
А. Эйнштейн, цит. по [1]

«Электрон так же *неисчерпаем*, как и атом, природа бесконечна . . . »
В. И. Ульянов [2]

«... теорию электрона нельзя считать законченной, поскольку ей присущи внутренние логические противоречия».

Физический энциклопедический словарь [3]

«... у нас нет вообще истинной математической теории, а есть только правила для работы. Так что квантовая механика, которую используют в настоящее время большинство физиков, есть не более чем набор правил, а не полная динамическая теория».
П. А. М. Дирак [68]

«... перенормировочный вариант квантовой теории, с которым работают физики в настоящее время, не может быть оправдан своим согласием с экспериментом при некоторых условиях». *П. А. М. Дирак* [69]

«Таким образом, большинство физиков совершенно удовлетворены сложившейся ситуацией. Они считают, что квантовая электродинамика стала вполне совершенной теорией и о ней нечего больше беспокоиться. Должен сказать, что мне это в высшей степени не нравится, потому что в такой «совершенной» теории приходится пренебрегать возникающими в уравнениях бесконечностями, причем пренебрегать совершенно

безосновательно. Это просто бессмысленно математически. В математике величину отбрасывают только в том случае, если она оказывается очень малой, а не из-за того, что она бесконечно велика и от нее хотят избавиться!».

П. А. М. Дирак [70]

«Я предлагаю ... посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства-времени».

Дж. Л. Синг [43]

«Ученые в русле нормальной науки не ставят себе цели создания новых теорий, обычно к тому же они нетерпимы и к созданию таких теорий другими».

Т. Кун [71]

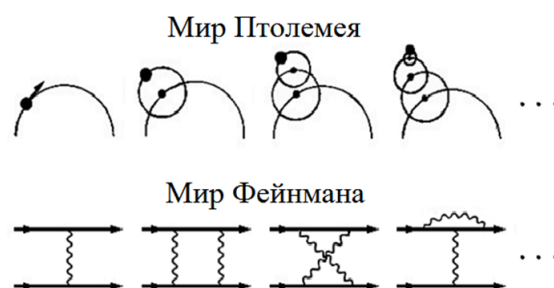


Рис. 14.1. Мир Птолемея и мир Фейнмана (схематично).

Мир Птолемея — планета в виде точки движется по окружности (деференту) на небесной сфере (первое приближение); планета движется по окружности (эпициклу), центр которой движется по деференту (второе приближение) и т. д. Мир Фейнмана — две частицы движутся из прошлого (слева) в будущее (справа), как показано стрелками, и взаимодействуют посредством виртуальных фотонов (волнистые линии), учитываются разные варианты взаимодействия.

Создатель призвал трех ученых, показал им картину (рис. 14.1) и спрашивает: «Почему вас, ученых мужей, история ничему не учит?»

Физик: «Эти две модели описывают совершенно разные явления природы. Не вижу между ними ничего общего».

Математик: «Эти модели одно и то же — разложение в ряд. Если сходимость рядов доказана, то обе модели имеют равное право на существование».

Механик: «Ни та, ни другая модель не позволяет выразить закон природы в виде одной простой формулы. И обе используют ненаблюдаемые сущности. История учит, что со второй моделью нужно поступить так же, как Николай Коперник поступил с первой, невзирая на то, что эта модель (как и первая!) прекрасно описывает опытные данные».

Дополнение 1

СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

В этом Дополнении электрон и другие заряженные частицы считаются точечными объектами. Лучистая модель электрона, разработанная в книге, не используется.

Квантовомеханические соотношения неопределенностей Гейзенберга могут быть выведены различными способами [72]. Далее приводится новый способ вывода, основанный на постулатах причинной механики Н. А. Козырева [73].

В причинной механике рассматривается *элементарное причинно-следственное звено*, состоящее из двух взаимодействующих материальных точек — точки-причины и точки-следствия. Постулируется, что в этом звене точка-причина и точка-следствие разделены сколь угодно малыми, но не равными нулю пространственным δx и временным δt различиями, отношение которых есть фундаментальная константа, названная *ходом времени* c_2 :

$$c_2 = \frac{\delta x}{\delta t} = \text{const.} \quad (1)$$

В причинной механике утверждается, что во вращающемся причинно-следственном звене возникают при определенных условиях малые силы, которые являются добавочными к силам, учитываемым классической механикой. Их величина равна по модулю $\frac{v}{c_2}F$, где v — линейная скорость относительного вращения причины и следствия; F — модуль «классической» силы. С помощью экспериментов с гироскопами Н. А. Козырев измерил добавочную силу и получил следующее значение хода времени c_2 :

$$c_2 \approx 2200 \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx \frac{1}{137} c \quad (c — \text{скорость света}).$$

На основании этого результата ученый постулировал, что

$$c_2 = \alpha c, \quad (2)$$

где α — постоянная тонкой структуры — безразмерная комбинация

трех фундаментальных констант: заряда электрона e , скорости света c и постоянной Планка $\hbar$:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (3)$$

Приведем два варианта вывода соотношений неопределенностей на основе положений причинной механики. Первый вариант короткий, но не строгий. Он дает в правой части соотношений неопределенностей постоянную Планка $\hbar$. Второй вариант вывода длинный, но более строгий. Он приводит к правой части, равной $\frac{\hbar}{2}$, как это и должно быть.

1. Воспользуемся введенным Козыревым понятием элементарного причинно-следственного звена, которое состоит из взаимодействующих материальных точек и подчиняется постулатам (1) и (2). Рассмотрим случай, когда взаимодействующие материальные точки находятся на минимально возможном расстоянии друг от друга. Этот случай соответствует экспериментальной ситуации, которая реализуется в ускорителях элементарных частиц при столкновениях пучков частиц, разогнанных до больших скоростей.

Пусть две столкнувшиеся элементарные частицы с зарядом e или $-e$ (e — заряд электрона) находятся друг от друга на минимально возможных пространственном δx и временном δt расстояниях (δx и δt могут быть разными в разных опытах). Кулоновская сила взаимодействия этих частиц имеет вид (по модулю)

$$F = \frac{e^2}{(\delta x)^2} \quad (\text{в системе единиц СГС}). \quad (4)$$

Составим произведение трех величин F , δx и δt и преобразуем его с помощью зависимостей (1)–(4):

$$F\delta x\delta t = \frac{e^2\delta x\delta t}{(\delta x)^2} = \frac{e^2\delta t}{\delta x} = \frac{e^2}{\frac{\delta x}{\delta t}} = \frac{e^2}{c_2} = \frac{e^2}{\alpha c} = \frac{\hbar c e^2}{e^2 c} = \hbar.$$

Отсюда

$$F\delta x\delta t = \hbar. \quad (5)$$

Будем интерпретировать величины δx и δt как минимально возможные неопределенности пространственного и временного расстояний между рассматриваемыми частицами. Тогда $\Delta E = F\delta x$ есть минимально возможная неопределенность энергии частицы, а $\Delta p = F\delta t$ — минимально возможная неопределенность импульса частицы. Поэтому

из (5), заменяя δx и δt традиционными символами Δx и Δt , получаем два равенства:

$$\Delta p \Delta x = \hbar; \quad \Delta E \Delta t = \hbar. \quad (6)$$

Равенства (6) отличаются от соотношений неопределенностей тем, что в их правых частях стоит величина $\hbar$ вместо требуемой величины $\frac{\hbar}{2}$. Эти равенства получены без учета функции распределения координат частиц в акте столкновения. Приведем более строгий вывод соотношений неопределенностей, который учитывает функцию распределения.

2. Пусть пространство и время образуют единое четырехмерное пространство-время, причем как по пространственным, так и по временной переменным оно обладает собственно евклидовой геометрией (для дальнейшего не имеет значения, какова геометрия всего пространства-времени в целом — собственно евклидова или псевдоевклидова, — так как пространственные и временные величины рассматриваются по отдельности).

Назовем «столкновением» материальных точек их взаимодействие при сближении на минимально возможные пространственное и временное расстояния. В различных актах «столкновения» минимальные расстояния между материальными точками могут быть различными, при этом они заведомо отличны от нуля, потому что в евклидовом континууме различающиеся точки всегда разделены ненулевым промежутком. (Термин «столкновение» заключен в кавычки, так как «сталкивающиеся» материальные точки не соприкасаются между собой.)

Введем в пространстве-времени инерциальную систему отсчета с началом в точке O .

Далее, для краткости, будем называть материальные точки *частицами*. Обозначим: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2$ — пространственные радиусы-векторы и временные координаты двух частиц в акте «столкновения» (во введенной системе отсчета).

Будем считать, что $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2$ являются независимыми случайными переменными, и примем, что величины δx и δt есть квантовомеханические неопределенности (то есть среднеквадратические значения) пространственного и временного расстояний между двумя «столкнувшимися» частицами:

$$\delta x = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}; \quad \delta t = \sqrt{(t_1 - t_2)^2}, \quad (7)$$

где черта над символом — процедура усреднения переменной по всем возможным значениям; квадрат вектора понимается как число, равное скалярному произведению вектора на себя ($\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$).

Предположим, что случайные величины $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а также t_1 и t_2 характеризуются одинаковыми плотностями распределения и одинаковыми средними значениями. Точку пространства-времени, совпадающую со средним положением обеих частиц, назовем *точкой столкновения* и обозначим буквой C . Именно эта точка воспринимается при макроскопическом описании как место, где находятся обе «столкнувшиеся» частицы. Пространственный радиус-вектор $\mathbf{r}$ и временная координата t точки столкновения C есть

$$\mathbf{r} = \overline{\mathbf{r}_1} = \overline{\mathbf{r}_2}; \quad t = \overline{t_1} = \overline{t_2}. \quad (8)$$

Среднеквадратические отклонения частиц от точки столкновения, вследствие совпадения их плотностей распределения, одинаковы для обеих частиц и составляют по пространственным и временному направлениям соответственно

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^2} = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})^2}; \\ \Delta t &= \sqrt{(t_1 - t)^2} = \sqrt{(t_2 - t)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя формулы (7) – (9), можем записать:

$$\begin{aligned} (\delta x)^2 &= \overline{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} = \overline{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})]^2} = \\ &= \overline{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^2} - 2\overline{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})} + \overline{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})^2} = \\ &= (\Delta r)^2 - 2\overline{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})} + (\Delta r)^2 = \\ &= 2(\Delta r)^2 - 2(\overline{\mathbf{r}_1} - \overline{\mathbf{r}}) \cdot (\overline{\mathbf{r}_2} - \overline{\mathbf{r}}) = 2(\Delta r)^2, \end{aligned}$$

где учтено, что $\overline{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ и что в случае независимых случайных величин среднее значение их произведения равно произведению их средних значений.

Из этой цепочки равенств следует, что неопределенность пространственного положения частицы Δr связана с величиной δx равенством

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta x. \quad (10)$$

Аналогичным образом для неопределенности временной координаты частицы Δt можно получить следующую связь с δt :

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta t. \quad (11)$$

При макроскопическом описании «столкновения» в качестве точек приложения сил, действующих на частицы, принимается для обеих частиц одна и та же точка — введенная выше точка столкновения C с координатами (8). Вместе с тем, действительные пространственные и временные положения частиц и, следовательно, действительные точки приложения сил не совпадают с точкой столкновения. Неточность задания точек приложения сил приводит к неточностям в определении энергий и импульсов частиц. При этом неточность значения энергии равна работе, которую произвела бы сила при перемещении частицы от точки столкновения до точки ее истинного местонахождения. А неточность значения импульса равна добавке импульса, которую приобрела бы частица под действием данной силы за промежуток времени, отличающий действительный момент взаимодействия от момента, отвечающего точке столкновения.

Таким образом, неточности определения энергии и импульса в каждом отдельном акте «столкновения» для одной частицы составляют соответственно $\mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_1(t_1 - t)$, а для другой — $\mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_2(t_2 - t)$, где $\mathbf{F}_1$ — сила, действующая на первую частицу со стороны второй частицы; $\mathbf{F}_2$ — сила, действующая на вторую частицу со стороны первой частицы. Среднеквадратические значения данных величин могут быть отождествлены с квантовомеханическими неопределенностями энергий и импульсов частиц. Вычислим их.

Пусть частицы взаимодействуют посредством сил, описываемых классической механикой, то есть таких сил, которые равны между собой по модулю, противоположны по направлению и имеют общую линию действия — пространственную прямую, проходящую через обе частицы. Такие силы могут быть представлены в форме

$$\mathbf{F}_1 = \pm F \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}; \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1, \quad (12)$$

где F — модуль сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$; $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ — направляющий орт прямой, проходящей через взаимодействующие частицы; знаки плюс и минус отвечают случаям взаимного отталкивания и притяжения частиц соответственно.

При вычислении неопределенности энергии ограничимся учетом ситуаций, когда «столкнувшиеся» частицы находятся на одной прямой с точкой столкновения (эта прямая может быть различной для разных актов «столкновения»). В связи с тем, что в данном случае силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ориентированы вдоль этой же прямой, направляющий орт в выражении (12) совпадает с точностью до знака с векторами $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|$

и $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|$, поэтому выражение (12) может быть переписано в виде

$$\mathbf{F}_1 = \pm F \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} = \pm F \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|}; \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 \quad (13)$$

(здесь и в приводимом далее равенстве (15) знак при F может отличаться от знака в формуле (12)). При выполнении (13) неопределенность значения энергии ΔE , одинаковая для обеих частиц, вычисляется следующим способом:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{[\mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})]^2} = \sqrt{\left[\pm F \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \right]^2} = \\ &= F' \sqrt{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})^2} = F' \Delta r, \end{aligned} \quad (14)$$

где F' — значение F в некоторой промежуточной точке; $i = 1, 2$; применены теорема о среднем значении и первое из выражений (9).

Теперь вычислим неопределенность импульса. Поскольку нашей целью является получение результата, совпадающего с соответствующим результатом квантовой механики, то произведем расчет применительно к одномерному случаю, как это сделано в [74]. Пусть при акте «столкновения» обе частицы и точка столкновения находятся на одной прямой, параллельной координатной оси z . Тогда силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, задаваемые выражением (12), могут быть представлены в форме

$$\mathbf{F}_1 = \pm F \mathbf{k}; \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1, \quad (15)$$

где $\mathbf{k}$ — направляющий орт оси z ($\mathbf{k} = \text{const}$; $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$).

В случае (15) неопределенность Δp_z z -компоненты импульса, совпадающая для обеих частиц, составляет

$$\Delta p_z = \sqrt{[\mathbf{F}_i(t_i - t)]^2} = \sqrt{[\pm F \mathbf{k}(t_i - t)]^2} = F'' \sqrt{(t_i - t)^2} = F'' \Delta t, \quad (16)$$

где F'' — значение F в некоторой промежуточной точке; $i = 1, 2$; использованы теорема о среднем значении и второе из выражений (9). В этом случае неопределенность координаты z , также одинаковая для обеих частиц, есть

$$\Delta z = \sqrt{(z_1 - z)^2} = \sqrt{(z_2 - z)^2} = \Delta r, \quad (17)$$

где z_1, z_2, z — z -координаты «столкнувшихся» частиц и точки столкновения; Δz совпадает с Δr , так как, по предположению, частицы и точка столкновения находятся на одной прямой, параллельной оси z .

Конкретизируем силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Будем считать, что частицы имеют электрические заряды e или $-e$ (e — заряд электрона) и при акте «столкновения» взаимно неподвижны. В этом случае их взаимодействие осуществляется кулоновскими силами вида (12) с модулем

$$F = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \quad (\text{в системе единиц СГС}), \quad (18)$$

где $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ — расстояние между частицами. Воспользуемся среднеквадратическим значением расстояния, определяемым выражением (7). Тогда равенство (18) примет вид

$$F = \frac{e^2}{(\delta x)^2}. \quad (19)$$

Составим произведение модуля силы взаимодействия F и неопределенностей пространственного Δr и временного Δt положений частиц. На основании зависимостей (1)–(3), (10), (11) и (19) имеем:

$$F \Delta r \Delta t = \frac{1}{2} F \delta x \delta t = \frac{e^2 \delta x \delta t}{2(\delta x)^2} = \frac{e^2}{2 \frac{\delta x}{\delta t}} = \frac{e^2}{2c_2} = \frac{e^2}{2\alpha c} = \frac{\hbar c e^2}{2e^2 c} = \frac{\hbar}{2}. \quad (20)$$

Придадим величинам F' и F'' , входящим в (14) и (16), значение, равное F : $F' = F'' = F$. Тогда с помощью (14), (16), (17) и (20) получаем соотношения неопределенностей:

$$\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2}; \quad \Delta p_z \Delta z = \frac{\hbar}{2}. \quad (21)$$

Обратим внимание на то, что соотношение неопределенностей для энергии и времени обычно записывается так:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar. \quad (22)$$

Это соотношение, в отличие от первого соотношения в (21), устанавливает не точную нижнюю границу произведения неопределенностей, а только его порядок. И сами входящие в (22) величины трактуются иначе, чем величины, фигурирующие в (21). Это связано с тем, что в квантовой механике время считается детерминированной, а не случайной переменной, поэтому величины ΔE и Δt понимаются не в обычном смысле, как среднеквадратические отклонения, а как погрешность измерения энергии и как длительность процесса ее измерения [72].

Очевидно, что различие в трактовках соотношения неопределенностей для координаты и импульса и соотношения неопределенностей для

энергии и времени противоречит релятивистской симметрии пространства и времени. В рамках предложенного способа вывода это противоречие устраняется. Первое из равенств (21) представляет собой соотношение неопределенностей для энергии и времени, записанное в обычной форме, связывающей минимально возможные значения среднеквадратических неточностей определения этих величин.

Из (20) вытекает еще одно соотношение неопределенностей:

$$F\Delta r\Delta t = \frac{\hbar}{2}, \quad (23)$$

где слева стоит величина, имеющая размерность действия.

Ограничения на возможные значения величин Δr и Δt можно получить, если принять условие, что неопределенность энергии не превосходит энергию покоя электрона:

$$\Delta E \leq m_e c^2, \quad (24)$$

где m_e — масса электрона. Из данного условия и первого соотношения в (21) получаем:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E} \geq \frac{\hbar}{2m_e c^2}. \quad (25)$$

Применяя последовательно формулы (23), (21), (19) и (10), находим:

$$\Delta r = \frac{\hbar}{2F\Delta t} = \frac{\hbar 2\Delta E}{2F\hbar} = \frac{\Delta E(\delta x)^2}{e^2} = \frac{\Delta E 2(\Delta r)^2}{e^2},$$

откуда с учетом (24) имеем:

$$\Delta r = \frac{e^2}{2\Delta E} \geq \frac{e^2}{2m_e c^2}. \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует:

$$\begin{aligned} \Delta r &\geq \frac{e^2}{2m_e c^2} \approx 1.41 \cdot 10^{-15} \text{ м}; \\ \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2m_e c^2} \approx 6.44 \cdot 10^{-22} \text{ с}; \end{aligned} \quad (27)$$

величина, стоящая в правой части первого выражения, равна половине так называемого классического радиуса электрона.

Таким образом, причинная механика приводит к новой интерпретации соотношений неопределенностей. Эти соотношения оказываются возможным трактовать как следствие того обстоятельства, что при

«столкновении» элементарных частиц пространственное и временное расстояния между ними подчиняются законам (1) и (2). Подчеркнем, что такая интерпретация соотношений неопределенностей, в отличие от традиционной интерпретации, не служит препятствием для приписывания элементарным частицам определенных траекторий. Кроме того, благодаря использованию законов (1) и (2), удалось получить дополнительное соотношение неопределенностей (23), а также представить соотношение неопределенностей для энергии и времени в обычной форме, связывающей минимально возможные значения среднеквадратических неточностей определения этих величин.

Дополнение 2

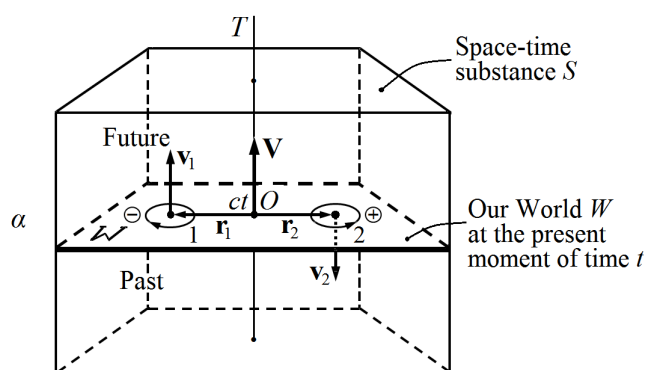
CPT-ТЕОРЕМА

В этом Дополнении лучистая модель электрона, разработанная в книге, используется только в качестве пояснительного примера.

CPT-теорема (C, P, T — латинские буквы, читается «цэ-пэ-тэ»), теорема квантовой теории поля, согласно которой уравнения теории инвариантны относительно *CPT*-преобразования, то есть не меняют своего вида, если одновременно произвести три преобразования: *зарядовое сопряжение* C (замену частиц античастицами и наоборот), *пространственную инверсию* P (замену координат частиц $\mathbf{r}$ на $-\mathbf{r}$) и *обращение времени* T (замену времени t на $-t$) [75].

Доказательство *CPT*-теоремы основывается на анализе симметрии уравнений квантовой теории поля — одной из основополагающих теорий современной физики, — поэтому принято считать, что эта теорема имеет в физике фундаментальный характер. Между тем, наиболее фундаментальными физическими понятиями являются не уравнения (которых в природе не существует), а понятия материального тела, пространства и времени. Приведем новое доказательство *CPT*-теоремы, базирующееся именно на этих понятиях.

Рассмотрим пространственно-временную субстанцию S , заполняющую четырехмерное пространство Минковского, и в ней физическое пространство (наш трехмерный Мир) W в момент времени t (рис. 1, α).



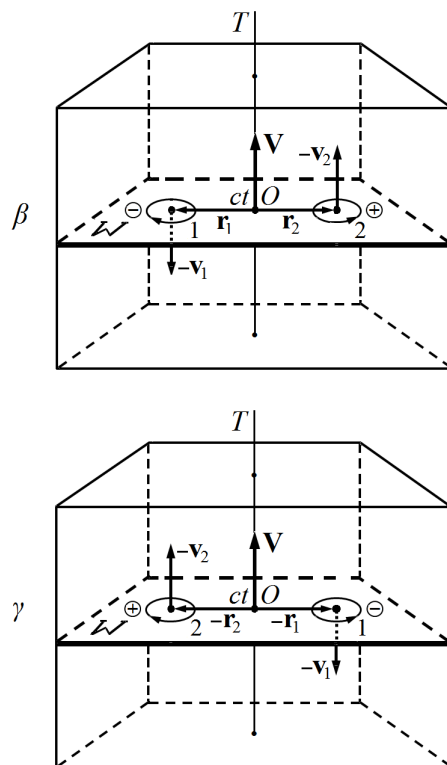


Рис. 1. Четырехмерная пространственно-временная субстанция S и наш трехмерный Мир W , движущийся сквозь нее из прошлого в будущее со скоростью $\mathbf{V}$.

1 — частица; 2 — античастица; окружности со стрелками — условные изображения их спинов; знаки зарядов указаны в кружочках (можно поменять их местами); S и W изображены с понижением размерности на единицу;

α — система до CPT -преобразования;

β — после T -преобразования;

γ — после T - и P -преобразований.

Исследуем действие преобразований C , P и T на физическую систему, состоящую из элементарной частицы и ее античастицы (см. рис. 1).

Известно, что частица и ее античастица имеют одинаковые массы и равные по модулю электрические заряды и спины, но знаки их зарядов различны, а направления спинов противоположны.

Допустим, что частица и античастица обладают векторными характеристиками, которые ортогональны физическому пространству, одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны. Это могут быть, например, составляющие 4-скоростей частиц, направленные вдоль оси времени, что соответствует идее Р. Фейнмана об античастице как о частице, движущейся вспять во времени. На рис. 1, α такими характеристиками являются: для частицы — вектор $\mathbf{v}_1$, направленный в сторону будущего, для античастицы — вектор $\mathbf{v}_2$, направленный в сторону прошлого ($\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$).

Пусть O — центр масс рассматриваемой системы, состоящей из частицы и античастицы. Вследствие равенства их масс, точка O находится посередине между ними, поэтому пространственные радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ частиц относительно O равны по модулю и противоположны по направлению ($\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$).

Зададим в пространстве Минковского инерциальную систему отсчета с осью времени T , проходящей через точку O . Зафиксируем некоторый момент времени t и произведем в этот момент интересующие нас преобразования системы частица–античастица (см. рис. 1).

Начнем с преобразования обращения времени T . В результате этого преобразования векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ изменят свои направления на противоположные (рис. 1, β). Далее осуществим пространственную инверсию P относительно точки O . Тогда частица и античастица поменяются местами. Одновременно их спины изменят знаки, так как инверсия меняет направление вращения на противоположное (рис. 1, γ). Теперь произведем зарядовое сопряжение C , то есть изменим знаки зарядов и поменяем местами номера 1 и 2, относящиеся соответственно к частице и античастице. Тогда, благодаря равенствам $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$, рисунок 1, γ перейдет, как легко убедиться, в исходный рисунок 1, α .

Итак, получаем равенство

$$CPT = I,$$

что доказывает *CPT*-теорему (I — тождественное преобразование).

Обратим внимание на то, что при реализации T -преобразования мы не изменили направление вектора V . Это объясняется тем, что *CPT*-теорема должна соответствовать результатам опытов, а опыты проводятся в физическом пространстве, которое не меняет своего направления движения от прошлого к будущему.

В завершение сделаем несколько комментариев.

1. Данное доказательство *CPT*-теоремы базируется на допущении о существовании пространственно-временной субстанции, сквозь кото-

рую движется наш Мир. Если бы пространственно-временная субстанция отсутствовала, то направления векторов $\mathbf{V}$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ вверх или вниз на рис. 1 были бы физически не различимы, поэтому теорема не могла бы быть доказана предложенным способом.

2. Поскольку наш Мир движется сквозь пространственно-временную субстанцию в направлении оси времени, то изнутри Мира это явление должно восприниматься как движение пространственно-временной субстанции сквозь наш Мир в противоположном направлении, то есть тоже вдоль оси времени. Поэтому изнутри Мира пространственно-временная субстанция может быть интерпретирована как *временная субстанция* или просто как *время*.

Такая интерпретация этой субстанции соответствует утверждению Н. А. Козырева о том, что время представляет собой явление природы, которое наряду с геометрическим свойством длительности обладает также другими, физическими, свойствами, которые могут быть изучены лабораторными опытами и астрономическими наблюдениями [73].

3. Предложенная в книге модель электрона позволяет трактовать античастицу электрона либо как сам электрон, движущийся вспять во времени, либо как позитрон, движущийся в обычном направлении во времени из прошлого в будущее. Оба варианта получаются путем изменения знаков 4-скоростей элементов модели. Если в формуле для собственного поля поставить знак минус при 4-скорости, то получаем электрон, движущийся назад во времени. Если же знак минус перенести от 4-скорости к заряду (стоящему множителем в формуле), то получается позитрон, движущийся в обычном направлении во времени, но имеющий противоположный знак заряда (см. разд. 22 главы 5, с. 733).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Лучист дворец небес,
но он из тяжких плит».
К. Д. Бальмонт [76]

Известно, что электромагнитное поле, описываемое уравнениями Максвелла, симметрично относительно преобразований Лоренца. Породить такое поле может только источник, который сам обладает этой симметрией. Значит, элементарный электрический заряд — электрон — симметричен относительно преобразований Лоренца. В трехмерном пространстве нет геометрических объектов с данной симметрией. Простейший не точечный лоренц-инвариантный геометрический объект — это (псевдо)шар в пространстве Минковского.

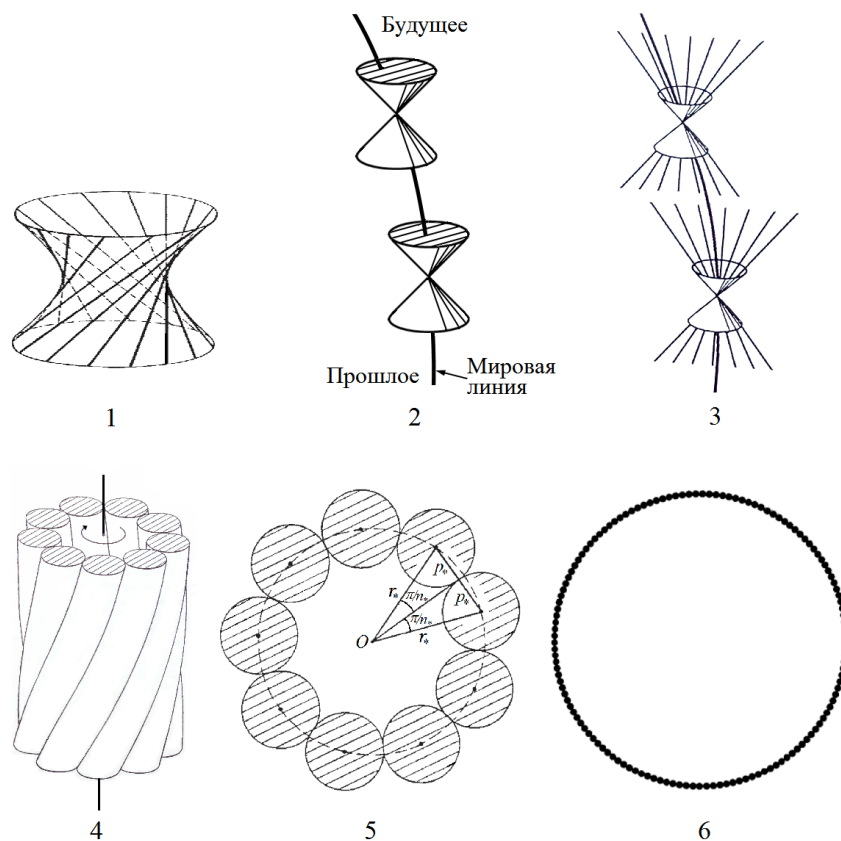
В книге построена модель электрона в виде такого шара и доказано, что она описывает свойства электрона с высокой точностью. Математическая конструкция, моделирующая электрон, названа *частицей*. А сама модель названа *лучистой моделью* электрона.

Шар в пространстве Минковского — некомпактный объект. Его граница представляет собой (псевдо)сферу, которая задается уравнением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -R^2$ ($R \geq 0$) и является аналогом однополостного гиперболоида в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 1; гиперболоид неограниченно продолжается вверх и вниз).

Разработаны два варианта модели — упрощенный ($R = 0$) и общий ($R > 0$). При упрощенном варианте внешняя граница частицы есть сфера нулевого радиуса, то есть световой конус ($\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$). Такая конструкция названа «точечной» *частицей* (точечной, потому что ее сечение собственным физическим пространством, проходящим через центр, — точка, а в кавычках, так как она простирается во времениподобных направлениях). В общем случае конструкция названа *частицей ненулевого радиуса*. Центр частицы движется в пространстве Минковского M вдоль времениподобной мировой линии (рис. 2).

Поскольку две любые (псевдо)сферы в M пересекаются, то для описания взаимодействия частиц не требуется привлекать дополнительные сущности типа физических полей или виртуальных частиц.

Анализ возможного взаимодействия частиц позволил установить их внутреннюю структуру. «Точечная» частица состоит из времениподобных прямых, которые пересекаются в одной точке и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке (рис. 3; показанный на рисунке световой конус, ограничивающий части-



цу, не входит в состав модели). Эти прямые трактуются как геометрические образы неких материальных тел. В случае частицы ненулевого радиуса эти материальные тела моделируются трехмерными винтообразными объектами, протяженными во времениподобных направлениях и вращающимися вокруг своих осей (рис. 4). При обоих вариантах модели протяженные объекты названы *лучами* (поэтому модель названа лучистой моделью электрона). Лучи считаются недеформируемыми и взаимопроницаемыми. Каждый луч состоит из n_* одинаковых «толстых» винтовых линий, именуемых *спиралями*. Поперечное сечение луча состоит из n_* одинаковых кругов, являющихся сечениями спиралей (рис. 5 и 6). На рис. 5 количество кругов n_* условное, на рис. 6 $n_* = 137$ (именно это значение n_* обеспечивает высокую степень совпадения теоретических расчетов с результатами опытов).

В данной модели электромагнитное поле не является самостоятельной материальной сущностью. Есть только одна материальная сущность — электрон. Он простирается от своего центра во времениподобных направлениях. Тензор собственного электромагнитного поля электрона в некоторой точке пространства M определяется характеристиками тех элементов электрона, которые находятся в этой точке.

Термин «поле» употребляется в книге в обычном для механики смысле как функция, заданная в некоторой области пространства, а не как некий материальный объект (аналогичные примеры: поле температуры в атмосфере, поле скоростей в русле реки).

Модель *лоренц-инвариантна* и удовлетворяет *принципу причинности*, *принципу близкодействия* и *принципу суперпозиции полей*.

В упрощенном варианте модели, названном «точечной» частицей, каждому элементу луча ставится в соответствие антисимметричный тензор (бивектор) $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$, где $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча; $\mathbf{j}_0$ — 4-скорость элемента (то есть скорость относительно пространства M); тензорное произведение векторов обозначается без символа умножения между ними. Интеграл от этого бивектора

$$F_s(x) = a \int_{L_-} \varepsilon (\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0) dl \quad (\text{при } aN = 4\pi e) \quad (1)$$

представляет собой тензор собственного электромагнитного поля, создаваемого частицей в точке $x \in M$; здесь ε — плотность лучей (она характеризует количество лучей вблизи x , см. разд. 3 главы 4, с. 317); N — общее количество лучей в частице; e — заряд электрона ($e < 0$); подынтегральная функция вычисляется в точке x ; L_- — участок мировой линии L , содержащийся внутри светового конуса прошлого с вершиной в x ; интеграл берется по всем расположениям частицы с центром на L_- (при каждом таком расположении частицы имеется луч, проходящий через точку x , см. рисунок на с. 312).

Воздействие внешнего электромагнитного поля F на «точечную» частицу осуществляется посредством воздействия на лучи частицы и описывается законом

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0 \quad \left(\text{при } a_1 = \frac{e}{m_e c^2} \right), \quad (2)$$

где $\mathbf{q}_0$ — направляющий орт луча; l — собственное время частицы, измеряемое в единицах длины (натуральный параметр на мировой линии L), $l = ct_*$; t_* — собственное время частицы, измеряемое в единицах времени; m_e — масса электрона; c — скорость света; значение поля F берется в центре частицы.

При $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$ закон (2) совпадает с известным в электродинамике уравнением движения точечного заряда в электромагнитном поле F ($\mathbf{i}$ — единичный вектор, касающийся мировой линии L в центре частицы).

Упрощенный вариант модели электрона, названный «точечной» частицей:

1) описывает наряду с движением электрона вдоль мировой линии также вращение электрона вокруг своего центра (движущегося вдоль мировой линии);

2) позволяет вычислить электромагнитное поле произвольно движущегося электрона без использования уравнений Максвелла и потенциалов Лиенара–Вихерта. Это поле в точности совпадает с полем, описываемым уравнениями Максвелла, если электрон движется вдоль мировой линии без вращения вокруг своего центра. Если же электрон при движении вдоль мировой линии вращается, то его собственное поле получает добавку к максвелловскому полю, причем магнитная составляющая этой добавки является безвихревой, а электрическая составляющая — вихревой, в противоположность электрической и магнитной составляющим максвелловского поля. Такое поле может иметь магнитную составляющую, параллельную скорости электрона. (См. формулы на с. 362, 363, 463 и 644);

3) дает ясные ответы на вопросы:

а) «Почему электромагнитное поле заряда содержит две составляющие — волновую и кулоновскую, — различающиеся на одну степень расстояния r ?» Это объясняется просто. Поле F_s , согласно (1), пропорционально скорости элементов частицы $\mathbf{j}_0$. А так как любое движение тела может быть представлено в виде комбинации поступательного движения, одинакового для всех элементов тела, и вращения, пропорционального расстоянию элемента от центра вращения, то это и дает в выражениях для скорости $\mathbf{j}_0$ и поля F_s два слагаемых, различающихся на одну степень расстояния;

б) «Почему в случае прямолинейной мировой линии и не вращающегося заряда электромагнитное поле заряда в точке x таково, как будто заряд занимает положение, одномоментное с x , то есть поле как бы распространяется с бесконечной скоростью?» Дело в том, что окончательная формула для поля F_s содержит бивектор, который пропорционален бивектору $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$, входящему в (1). В данном случае скорость $\mathbf{j}_0$ одинакова для всех элементов частицы, поэтому указанный бивектор не изменится при добавлении к $\mathbf{q}_0$ любого вектора, пропорционального $\mathbf{j}_0$. Это дает возможность пересчитать поле на любое местонахождение частицы на мировой линии, в том числе на место, од-

номоментное с точкой x . При не прямолинейной мировой линии такое невозможно. (См. разд. 10А в главе 4, с. 371);

в) «Почему величина электрического заряда не подвергается лоренцевым преобразованиям?» Это связано с тем, что согласно (1) величина заряда e пропорциональна количеству лучей N , которое не меняется при движении частицы. (Аналогия: если космический корабль стартует с двумя космонавтами, то как бы быстро он ни летел в дальнейшем, их количество не станет равным ни двум с половиной, ни полутора.)

В случае частицы ненулевого радиуса, каждая спираль («толстая» винтовая линия на рис. 4) представляется в виде связки винтовых линий, именуемых *нитями* (это позволяет использовать аппарат математического анализа). Собственное поле частицы $F_s(x)$ задается формулой, аналогичной (1), с заменой входящего в нее бивектора бивектором $\mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к нити; $\mathbf{j}$ — 4-скорость элемента нити. При расчете поля $F_s(x)$ векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ берутся в элементе нити, находящемся в точке x (см. (14.4) в главе 5, с. 535).

Основной закон динамики в этом случае аналогичен закону (2), причем, благодаря ненулевому радиусу частицы, он позволяет учесть самовоздействие частицы:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = a_1(F + F_s) \cdot \mathbf{q} \quad \left(\text{при } a_1 = \frac{e}{m_e c^2} \right), \quad (3)$$

где F — внешнее электромагнитное поле; F_s — собственное поле частицы; все величины относятся к элементу нити, принадлежащему центральному сечению частицы.

Вариант модели, названный *частицей ненулевого радиуса*, в дополнение к пунктам 1–3:

4) успешно описывает результаты опытов Эйнштейна–де Хаазе и Штерна–Герлаха, послуживших в свое время основанием для введения представления о наличии у электронов спина и магнитного момента;

5) обеспечивает наличие у электрона собственного момента количества движения (спина) $\bar{K}$ и собственного магнитного момента $\bar{\mu}$. Они являются следствием вращения лучей вокруг своих осей. Расчет, основанный на законе (3) и обычных правилах механики, показал, что $\bar{\mu}$ и $\bar{K}$ связаны зависимостью $\bar{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \bar{K}$ такой же, какой в электродинамике связаны между собой магнитный и кинетический моменты движущихся электронов (см. главу 5, разд. 23, с. 736);

6) приводит к новому определению постоянной тонкой структуры α и дает её численное значение с точностью $1 \cdot 10^{-7}$. Постоянная α вычисляется из простой формулы, вытекающей из законов механики, и

зависит только от одного целочисленного параметра модели $n_* = 137$. Вероятность того, что совпадение не является случайным, составляет 0,99997 (см. в главе 5, формулы (4.2) и (4.3) и текст после них, с. 418);

7) приводит к заключению, что причиной так называемого аномального магнитного момента электрона является самодействие электрона. Дело в том, что при вращении электрона внешним магнитным полем магнитная составляющая собственного поля электрона вносит дополнительный вклад в его вращение. Благодаря учету этой добавки, точность описания эффекта составила $2 \cdot 10^{-7}$. Коэффициент, обеспечивающий эту точность (равный примерно 1.00116), зависит только от целочисленного параметра модели $n_* = 137$ (см. формулу (19.128), вторую формулу в (19.129) и последующий текст, с. 694). Данный эффект не имеет отношения к магнитному моменту электрона, поэтому принятое его название «аномальный магнитный момент электрона» неверно отражает суть явления. Для объяснения этого эффекта не требуется привлекать традиционно используемую гипотезу о существовании виртуальных частиц, которые не подчиняются законам физики и принципиально не наблюдаемы.

8) описывает энергию покоя электрона $E_0 = m_e c^2$ как кинетическую энергию электрона относительно пространства Минковского. Половина этой энергии связана с поступательным движением лучей частицы, другая половина — с вращением лучей вокруг своих осей. Обе половины энергии вычисляются по обычной формуле для кинетической энергии: $\frac{1}{2}mv^2$ (при $m = m_e$ и $v = c$). Энергия E_0 не зависит от выбора системы отсчета, так как рассчитывается относительно пространства Минковского (см. разд. 21 в главе 5, с. 726);

9) приводит к выводу, что система из электронов, состоящая из достаточно большого их количества, после раскручивания электронов внешним магнитным полем и выключения поля, может поддерживать вращение посредством собственных магнитных полей. Такая система электронов порождает вокруг себя постоянное магнитное поле (см. разд. 9 в главе 5, с. 458);

10) описывает позитрон как электрон, движущийся в пространстве Минковского вспять во времени. Действительно, изменим в (1) 4-скорость $\mathbf{j}_0$ на противоположную и вынесем минус за знак интеграла:

$$F_s(x) = e \frac{4\pi}{N} \int_{L-} \varepsilon(\mathbf{q}_0(-\mathbf{j}_0) - (-\mathbf{j}_0)\mathbf{q}_0) dl = (-e) \frac{4\pi}{N} \int_{L-} \varepsilon(\mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0) dl; \quad (4)$$

первое выражение соответствует электрону с зарядом e , движущемуся вспять во времени, второе — позитрону с зарядом $-e$, движущемуся в обычном направлении во времени (см. разд. 22 в главе 5, с. 733);

11) не приводит к расходимостям, свойственным имеющейся теории электрона (вследствие ненулевого радиуса частицы);

12) вводит объективный масштаб времени в нашем мире: он задается процессом собственного вращения лучей частицы (с частотой около $6 \cdot 10^{19}$ Гц; см. формулу (23.9) в главе 5, с. 737). Можно сказать, что процесс вращения лучей обуславливает темп течения времени в нашем мире. Благодаря этому процессу, становится возможным вести речь о времени не только как о пассивном параметре (время-параметр), но и как о явлении, связанном с определенным процессом (время-явление).

Кроме того, в книге:

13) доказаны формулы

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot \boldsymbol{\varkappa}, \quad (6)$$

связывающие тензор электромагнитного поля F с его электрической $\mathbf{E}$ и магнитной $\overline{H}$ составляющими; здесь точка — скалярное умножение; двоеточие — бискалярное умножение; $\boldsymbol{\tau}$ — направляющий орт оси времени T ; $\boldsymbol{\varkappa}$ — трехвалентный псевдотензор Леви-Чивита над трехмерным физическим пространством G ; $\{T, G\}$ — произвольная инерциальная система отсчета в пространстве M (ось времени T неподвижна относительно M , физическое пространство G движется вдоль оси T поступательно, $G \perp T$); F — тензор над M ; $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ — вектор и псевдовектор в G . Тензор F , как всякий тензор, не зависит от системы отсчета. Его составляющие $\mathbf{E}$ и $\overline{H}$ зависят от системы отсчета. Формулы (5) и (6), благодаря бескоординатной форме записи, позволяют эффективно решать динамические задачи о движении электрона под действием электромагнитного поля F разного вида. (См. в главе 4 теорему 4.1 и последующий текст, с. 324);

14) найден общий вид тензора (оператора), который обеспечивает движение «точечной» частицы вдоль заданной мировой линии L и одновременно вращает частицу вокруг ее центра (см. формулу (18.8) в главе 3, с. 239);

15) найден общий вид скорости элемента «точечной» частицы при движении частицы вдоль заданной мировой линии L и одновременном вращении вокруг центра (см. формулу (5.43) в главе 4, с. 342);

16) доказано, что кулоновское поле ядра атома обеспечивает наряду с движением электрона вокруг ядра, также вращение электрона вокруг его центра с угловой скоростью, задаваемой формулой (20.39) из главы 3 (с. 258); эта формула повторена в главе 4 (см. (13.14), с. 397);

17) доказано, что разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода объясняется вращением орбитального электрона под действием электрического поля ядра атома (а не ларморовской прецессией спина электрона, как принято считать). При учете самодействия вращающегося электрона модель описывает этот эффект с точностью $5 \cdot 10^{-4}$ (см. в разд. 20 главы 3 с. 261–263 или в разд. 13 главы 4 с. 398–400);

18) решена задача о вращении орбитального электрона под действием лоренцевых бустов. Задача решена методом, разработанным Е. Вигнером в статье 1939 года. Обнаружена неточность в этой статье, из-за которой угловая скорость вращения электрона, рассчитываемая по формулам этой статьи, оказывается не совпадающей с угловой скоростью электрона, рассчитываемой методом Ферми–Уолкера. После исправления неточности угловая скорость электрона по Вигнеру совпала с угловой скоростью по Ферми–Уолкеру (см. разд. 21 в главе 3, с. 263);

19) доказано, что вращение электрона, именуемое прецессией Томаса или вращением Вигнера, отсутствует в атоме, потому что требует такого воздействия на электрон, которое не реализуется в атоме (см. разд. 21 в главе 3, с. 263);

20) объяснен эффект Эйнштейна–Подольского–Розена (без традиционной ссылки на «квантовую нелокальность» или «прямое межчастичное взаимодействие», то есть на телекинез; см. с. 749);

21) объяснены результаты двухщелевого эксперимента (без допущения о прохождении электрона сразу через две щели; см. с. 752);

22) высказаны основанные на лучистой модели электрона гипотезы:

а) о возможном установлении информационной связи вдоль лучей частицы в обе стороны (из прошлого в будущее и обратно; см. с. 751);

б) о том, что эффекты космологии, связанные с кажущимся недостатком массы во Вселенной, могут быть объяснены тем фактом, что масса электронов (и, возможно, масса других элементарных частиц) сосредоточена не в окрестности их центров, а распределена вдоль лучей, исходящих из центров во времениподобных направлениях (см. с. 757);

23) устранены некорректности, имеющиеся в современной теории электрона:

а) исключено из теории электрона вненаучное представление о том, что спин электрона, являясь механической характеристикой, «не имеет классического истолкования» [65] (см. выше пункт 5);

б) исключено из теории электрона антинаучное представление о существовании неких виртуальных частиц, которые не подчиняются законам физики и принципиально не наблюдаемы [30] (в быту такие объекты называются бесами) (см. выше пункт 7);

в) исправлена неточность в известной работе Е. П. Вигнера 1939 года, которая посвящена решению задачи о вращении орбитального электрона под действием лоренцевых бустов (см. выше пункт 18). Обращено внимание на то, что еще в 1913 году Л. Фёппл (L. Föppel) и П. Даниэл (P. Daniell) первыми получили релятивистское выражение для угла поворота системы координат при движении ее начала по круговой траектории под действием лоренцевых бустов. Поэтому исторически справедливо называть вращение Вигнера *вращением Фёппла–Даниэля* (см. разд. 21 в главе 3, с. 263);

г) доказано, что разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода объясняется не ларморовской прецессией спина электрона, как принято считать, а вращением электрона под действием электрического поля ядра атома (см. выше пункт 17);

д) исправлена трактовка физического процесса, который реализуется при электронном парамагнитном резонансе, а именно: «перевертывание» спинов электронов происходит в результате резонанса, который возникает при совпадении частоты переменного магнитного поля с частотой нутации вращающихся электронов, а не с частотой прецессии спинов электронов, как обычно считается (см. с. 455);

е) исключено использование математически недопустимой процедуры перенормировки, применяемой в квантовой теории поля (благодаря моделированию электрона шаром ненулевого радиуса).

Модель предсказывает новый эффект — наличие у вращающегося электрона не учитывавшейся ранее составляющей собственного поля, добавочной к максвелловскому полю. Доказано, что магнитная часть этой составляющей является причиной так называемого аномального магнитного момента электрона (см. выше пункты 2 и 7). Данный эффект допускает экспериментальную проверку обычными методами измерения электромагнитного поля.

Модель основана на законах механики, линейной алгебры, специальной теории относительности и электродинамики. Модель строго математически формализована. Все доказательства приведены. Необходимые сведения из механики, линейной алгебры и специальной теории относительности даны в главах 1–3.

Модель может быть распространена на случай псевдориманова пространства-времени общей теории относительности (см. с. 755).

Метод построения модели электрона может быть использован при построении моделей других элементарных частиц (см. с. 758).

Данная модель представляет собой развитие одного из направлений причинной механики (теории физических свойств времени), раз-

работанной Н. А. Козыревым (см. разд. 4 в указателе «Дополнительная литература»).

Дополнение 1 (с. 774) содержит новый вывод соотношений неопределенностей Гейзенберга, основанный на постулатах причинной механики Козырева. Величины Δx и Δt оказываются погрешностями используемого понятия «точка столкновения» элементарных частиц, а не свойствами самих частиц. Поэтому соотношения неопределенностей не служат препятствием для приписывания элементарным частицам определенных траекторий. Кроме того, в данном случае пара величин ΔE и Δt имеет смысл аналогичный тому, который имеет пара Δx и Δp , а не иной смысл, как считается в квантовой физике.

В Дополнении 2 (с. 783) дан новый вывод *CPT*-теоремы квантовой теории поля, базирующийся на анализе симметрии системы частица–античастица, находящейся в 4-х мерном пространстве-времени.

Основные результаты опубликованы в работах [45–62]. С ними можно ознакомиться на именной странице автора на сайте *Института исследований природы времени имени А. П. Левича* [63] и на моем сайте <https://shikhobalov.nethouse.ru/>.

Итак, построенная модель электрона в виде *лоренц-инвариантного шара* описывает свойства электронов с высокой точностью. Это не удивительно, так как она практически с неизбежностью вытекает из симметрии уравнений Максвелла и законов механики, линейной алгебры и геометрии. Удивительно было бы, если бы, наоборот, эта модель не описывала свойства электронов. А вот, что действительно удивляет, так это то, что за более чем 120 лет, прошедших со времени создания специальной теории относительности, которая строилась именно для описания электродинамики, физики-теоретики даже не попытались рассмотреть эту простейшую и очевидную модель электрона.

А какой ещё может быть простейшая не точечная модель электрона?

Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного университета.
Институт исследований природы времени имени А. П. Левича

СССР		Россия
Ленинград	—	Санкт-Петербург
1988 г.		2025 г.

CONCLUSION

«Лучист дворец небес,
но он из тяжких плит».
К. Д. Бальмонт [76]

«The palace of heaven is radiant,
but built of heavy slabs».
K. D. Balmont

It is known that the electromagnetic field described by Maxwell's equations is symmetric with respect to Lorentz transformations. Such a field can be produced only by a source that itself possesses this symmetry. Therefore, the elementary electric charge — the electron — is symmetric with respect to Lorentz transformations. In three-dimensional space, there are no geometric objects with this symmetry. The simplest non-point Lorentz-invariant geometric object is a *(pseudo)ball in Minkowski space*.

In this book, the model of the electron is built as a ball of such kind, and it is proven that it describes the properties of the electron with high accuracy. The mathematical construct modeling the electron is called *the particle*. The model itself is called *the radiant model* of the electron.

The ball in Minkowski space is a non-compact object. Its boundary is a (pseudo)sphere defined by the equation $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -R^2$ ($R \geq 0$). It is an analog of the one-sheet hyperboloid in three-dimensional Euclidean space (Fig. 1; hyperboloid extends unboundedly upward and downward).

Two variants of the model have been developed — a simplified one ($R = 0$) and a general one ($R > 0$). In the simplified variant, the external boundary of the particle is a sphere of zero radius, i.e., a light cone ($\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$). This construction is called *the «point» particle* (point-like because its cross-section by its own physical space passing through the center is a point, and in quotation marks, because it extends in time-like directions). In the general case, the construction is called *the particle of nonzero radius*. The center of the particle moves in Minkowski space M along the time-like world line (Fig. 2).

Since any two (pseudo)spheres in M intersect, describing particle interactions does not require invoking additional entities such as physical fields or virtual particles.

Analysis of possible particle interaction allowed us to determine their internal structure. The «point» particle consists of time-like straight lines that intersect at a single point and uniformly fill the interior of a light cone with its vertex at this point (Fig. 3; the light cone shown in the

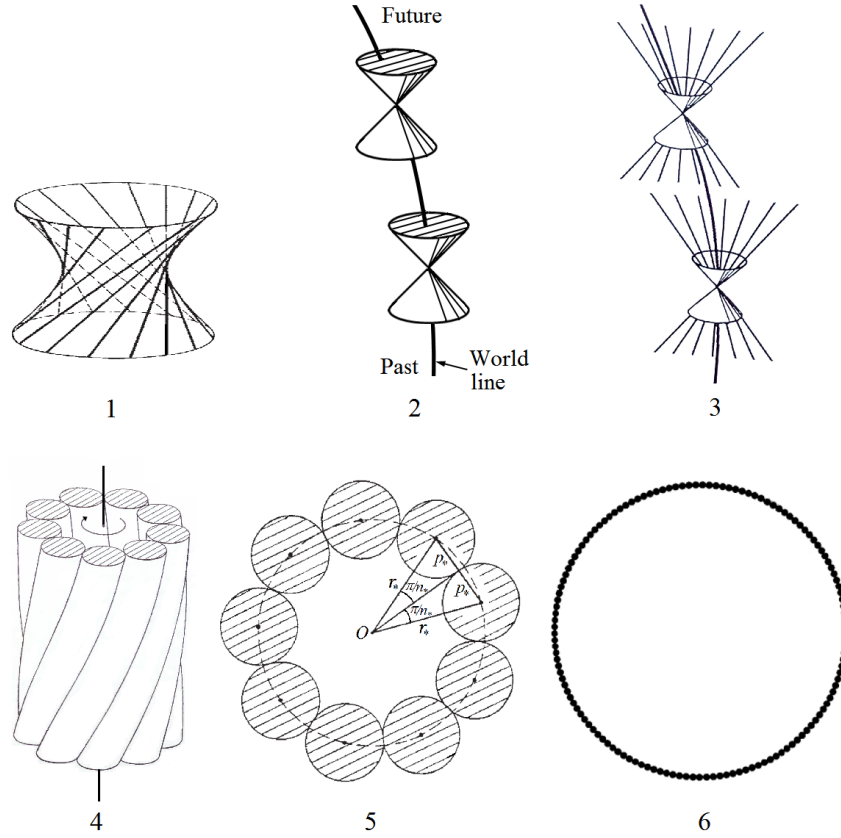


figure that bounds the particle is not part of the model). These lines are interpreted as geometric images of certain material bodies. In the case of the particle of nonzero radius, these material bodies are modeled as three-dimensional screw-shaped objects extended along time-like directions and rotating about their axes (Fig. 4). In both variants of the model, the extended objects are called *rays* (hence, the model is called the radiant model of the electron). Rays are considered non-deformable and mutually permeable. Each ray consists of n_* identical «thick» helical lines, called *spirals*. The cross-section of a ray consists of n_* identical disks, which are the cross-sections of the spirals (Figures 5 and 6). In Fig. 5, the number of disks n_* is conditional, while in Fig. 6 $n_* = 137$ (it is this value of n_* that ensures a high degree of agreement between the theoretical calculations and the experimental results).

In this model, the electromagnetic field is not an independent material entity. There is only one material entity — the electron. It extends from its center in time-like directions. The tensor of the electron's self electromagnetic field at a some point in space M is determined by the characteristics of those elements of the electron that are located at this point.

The term «field» is used in the book in the ordinary sense for mechanics as a function defined in some region of space, rather than as some material object (analogous examples: the field of temperature in the atmosphere, the field of velocities in the riverbed).

Model is *Lorentz-invariant* and satisfies *the principle of causality, the principle of locality (short-range action)*, and *the principle of superposition of fields*.

In the simplified variant of the model, named the «point» particle, to each element of the ray the antisymmetric tensor (bivector) $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$ is assigned, where $\mathbf{q}_0$ is the unit directing vector of the ray; $\mathbf{j}_0$ is the 4-velocity of the element (i.e., the velocity with respect to space M); the tensor product of vectors is denoted without a multiplication sign between them. The integral of this bivector

$$F_s(x) = a \int_{L_-} \varepsilon (\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0) dl \quad (\text{when } aN = 4\pi e) \quad (1)$$

represents the tensor of the self electromagnetic field generated by the particle at the point $x \in M$; here ε is the density of rays (it characterizes the number of rays in the vicinity of x , see Section 3 in Chapter 4, p. 317); N is the total number of rays in the particle; e is the electron charge ($e < 0$); the integrand is evaluated at the point x ; L_- is the portion of the worldline L contained inside the past light cone with vertex at x ; the integral is taken over all placements of the particle with the center on L_- (for each such placement there is a ray passing through the point x , see the figure on p. 312).

The influence of an external electromagnetic field F on the «point» particle is effected through its action on the rays of the particle and is described by law

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0 \quad \left(\text{when } a_1 = \frac{e}{m_e c^2} \right), \quad (2)$$

where $\mathbf{q}_0$ is the unit directing vector of a ray; l is the proper time of the particle, measured in units of length (natural parameter on the world line L), $l = ct_*$; t_* is the proper time of the particle, measured in units of time; m_e is the electron mass; c is the speed of light; the value of field F is taken at the center of the particle.

For $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$, law (2) coincides with the well-known in electrodynamics the equation of motion for a point charge in an electromagnetic field F ($\mathbf{i}$ is the unit tangent vector to the world line L at the particle's center).

The simplified model of the electron, named *the «point» particle*:

1) describes, in addition to the motion of the electron along its world line, also the rotation of the electron about its center (which itself moves along the world line);

2) enables the calculation of the electromagnetic field of an arbitrarily moving electron without using Maxwell's equations and Liénard–Wiechert potentials. This field exactly coincides with the field described by Maxwell's equations when the electron moves along its world line without rotation about its center. If, however, the electron rotates while moving along its world line, its self field acquires an additional contribution to the Maxwell field, wherein the magnetic component of this addition is irrotational, and the electric component is vortical, in contrast to the electric and magnetic components of the Maxwell field. This field can have a magnetic component parallel to the electron's velocity. (See formulas on pp. 362, 363, 463, 644);

3) provides clear answers to the questions:

a) «*Why does the electromagnetic field of a charge contain two components — the wave-like and the Coulombic — differing by one power of the distance r ?*» The explanation is simple. The field F_s , in accordance with (1), is proportional to the velocity of the particle's elements $\mathbf{j}_0$. Since any motion of a body can be represented as a combination of translational motion, which is the same for all elements of the body, and rotation, which is proportional to the distance of an element from the axis of rotation, this yields in the expressions for the velocity $\mathbf{j}_0$ and the field F_s two terms that differ by one power of the distance.

b) «*Why, in the case of a straight world line and a non-rotating charge, is the electromagnetic field of charge at point x as if the charge occupies a position simultaneous with x ; i.e., as though the field propagates with infinite speed?*» The point is that the final formula for the field F_s contains the bivector proportional to the bivector $\mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0$ present in (1). In this case, the velocity $\mathbf{j}_0$ is the same for all elements of the particle, so the mentioned bivector remains unchanged when any vector proportional to $\mathbf{j}_0$ is added to $\mathbf{q}_0$. This makes it possible to recalculate the field to any location of the particle on its world line, including the position simultaneous with point x . This is impossible if the world line is not straight. (See Section 10A in Chapter 4, p. 371);

c) «*Why does the value of the electric charge not undergo Lorentz transformations?*» This is because, according to (1), the charge value e is propor-

tional to the number of rays N , which does not change as the particle moves. (Analogy: if a spaceship launches with two astronauts, then no matter how fast it travels afterwards, their number will never become two and a half or one and a half.)

In the case of the particle of nonzero radius, each spiral (a «thick» helical line in Fig. 4) is represented as a bundle of helical lines called *threads* (this allows for the use of mathematical analysis). The particle's self field $F_s(x)$ is given by the formula analogous to (1), with the bivector in it replaced by the bivector $\mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}$, where $\mathbf{q}$ is a unit vector tangent to the thread, and $\mathbf{j}$ is the 4-velocity of the thread element. When calculating the field $F_s(x)$, the vectors $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ are taken at the thread element located at the point x (see (14.4) in Chapter 5, p. 535).

The fundamental law of dynamics in this case is analogous to law (2), herewith due to the nonzero radius of the particle, it makes it possible to account for the particle's self-action:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = a_1(F + F_s) \cdot \mathbf{q} \quad \left(\text{when } a_1 = \frac{e}{m_e c^2}\right), \quad (3)$$

where F is the external electromagnetic field; F_s is the particle's self field; all quantities refer to the thread element belonging to the central cross-section of the particle.

A version of the model, called *the particle of nonzero radius*, in addition to points 1–3:

4) successfully accounts for the results of the Einstein–de Haas and Stern–Gerlach experiments, which historically served as the basis for introducing the concept of electron's spin and magnetic moment;

5) provides for the existence of an intrinsic angular momentum (spin) $\overline{K}$ and an intrinsic magnetic moment $\overline{\mu}$ of the electron. These arise as a consequence of the rotation of the rays around their own axes. A calculation based on law (3) and the standard rules of mechanics demonstrated that $\overline{\mu}$ and $\overline{K}$ are related by the expression $\overline{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \overline{K}$, which is identical to the relation between the magnetic and kinetic moments of moving electrons in electrodynamics (see Chapter 5, Section 23, p. 736).

6) leads to a new definition of the fine-structure constant α and yields its numerical value with an accuracy of $1 \cdot 10^{-7}$. The constant α is computed from a simple formula derived from the laws of mechanics and depends on only one integer parameter of the model $n_* = 137$. The probability that this agreement is not coincidental is 0.99997 (see Chapter 5, Eqs. (4.2) and (4.3) and the subsequent text, p. 418);

7) leads to the conclusion that the self-interaction of the electron is the cause of its so-called anomalous magnetic moment. The point is that when

an electron rotates under the influence of an external magnetic field, the magnetic component of the electron's self field contributes additively to its rotation. By accounting for this additional contribution, the description of the effect achieves an accuracy of $2 \cdot 10^{-7}$. The coefficient responsible for this accuracy (approximately 1.00116) depends solely on the model's integer parameter $n_* = 137$ (see formula (19.128), the second formula in (19.129), and the subsequent text, p. 694). This effect is unrelated to the electron's magnetic moment; that is why its generally accepted name «the anomalous magnetic moment of the electron» incorrectly reflects the nature of the phenomenon. Explaining this effect does not require the traditionally invoked hypothesis of virtual particles, which do not obey the laws of physics and are fundamentally unobservable;

8) describes the electron rest energy, $E_0 = m_e c^2$, as the kinetic energy of the electron relative to Minkowski space. Half of this energy is associated with the translational motion of the particle's rays, while the other half is associated with their rotation around their own axes. Both halves of the energy are computed using the conventional formula for kinetic energy: $\frac{1}{2}mv^2$ (with $m = m_e$ and $v = c$). The energy E_0 is independent of the choice of reference frame, as it is defined relative to Minkowski space (see Chapter 5, Section 21, p. 726);

9) leads to the conclusion that a system comprising a sufficiently large number of electrons can, after being set into rotation by an external magnetic field and upon the field's removal, sustain this rotation through its own magnetic fields. Such a system of electrons generates a persistent magnetic field around itself (see Chapter 5, Section 9, p. 458);

10) describes the positron as the electron moving backwards in time in Minkowski space. Indeed, let us reverse the direction of the 4-velocity $\mathbf{j}_0$ in equation (1) and extract the minus sign from the integral:

$$F_s(x) = e \frac{4\pi}{N} \int_{L_-} \varepsilon(\mathbf{q}_0(-\mathbf{j}_0) - (-\mathbf{j}_0)\mathbf{q}_0) dl = (-e) \frac{4\pi}{N} \int_{L_-} \varepsilon(\mathbf{q}_0\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0\mathbf{q}_0) dl; \quad (4)$$

the first expression corresponds to the electron with charge e moving backwards in time, while the second corresponds to the positron with charge $-e$, moving in the conventional direction of time (see Chapter 5, Section 22, p. 733);

11) avoids the divergences inherent in the standard theory of the electron (due to the nonzero particle radius);

12) introduces an objective time scale in our world, which is defined by the process of the particle's rays' intrinsic rotation (with a frequency of approximately $6 \cdot 10^{19}$ Hz; see formula (23.9) in Chapter 5, p. 737). It can be

stated that the rotation of the rays governs the rate of the passage of time in our world. Due to this process, it becomes possible to consider time not only as a passive parameter (“time-as-a-parameter”) but also as a phenomenon linked to a specific physical process (“time-as-a-phenomenon”).

Moreover, the book provides:

13) the proof of the formulas

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \varkappa, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa, \quad (6)$$

which relate an electromagnetic field tensor F to its electric $\mathbf{E}$ and magnetic $\overline{H}$ components; here the dot denotes the scalar multiplication; two-dots is biskalar multiplication; $\boldsymbol{\tau}$ is the unit directing vector of the time axis T ; $\varkappa$ is three-valent Levi-Civita pseudotensor over the three-dimensional physical space I ; $\{T, I\}$ is an arbitrary inertial reference frame in space M (the time axis T is fixed relative to M , the physical space I moves translationally along the axis T , $I \perp T$); F is a tensor over M ; $\mathbf{E}$ and $\overline{H}$ are vector and pseudovector in I . The tensor F , like any tensor, is independent of the reference frame. Its components $\mathbf{E}$ and $\overline{H}$ depend on the reference frame. Formulas (5) and (6), thanks to their coordinate-free form, allow efficiently solving dynamic tasks of an electron’s motion under the action of the electromagnetic field F of various kinds. (See Theorem 4.1 in Chapter 4 and the following text, p. 324);

14) the general formula for the tensor (operator) that ensures the motion of the «point» particle along a given worldline L with simultaneously rotating the particle about its center (see formula (18.8) in Chapter 3, p. 239);

15) the general formula describing the velocity of an element of the «point» particle as the particle moves along the given worldline L and simultaneously rotates about its center (see (5.43) in Chapter 4, p. 342).

16) the proof that the Coulomb field of the atomic nucleus, in addition to the electron’s orbital motion around the nucleus, also causes the electron to rotate about its own center with an angular velocity given by formula (20.39) from Chapter 3 (p. 258); this formula is repeated in Chapter 4 (see (13.14), p. 397);

17) the proof that the difference between the energy levels $2p_{3/2}$ and $2p_{1/2}$ in the hydrogen atom is explained by the rotation of the orbital electron under the action of the nucleus’ electric field (rather than by the Larmor precession of electron’s spin, as is commonly assumed). When self-interaction of the rotating electron is taken into account, the model

describes this effect with an accuracy of $5 \cdot 10^{-4}$ (see Chapter 3, Section 20, pages 261–263 or Chapter 4, Section 13, pages 398–400);

18) the solution to the problem of the rotation of an orbital electron under the action of Lorentz boosts. The problem was solved using the method developed by E. Wigner in his 1939 paper. An inaccuracy was identified in that paper, which caused the angular velocity of the electron's rotation, as calculated from its formulas, to disagree with the angular velocity calculated using the Fermi-Walker method. After correcting this inaccuracy, the electron's angular velocity according to Wigner coincides with the angular velocity given by the Fermi-Walker transport (see Chapter 3, Section 21, p. 263);

19) the proof that the electron rotation known as Thomas precession or Wigner rotation is absent in the atom, as it requires an external influence on the electron that is not realized in the atom (see Chapter 3, Section 21, p. 263);

20) the explanation for the Einstein-Podolsky-Rosen effect without resorting to the conventional references to “quantum nonlocality” or “direct interparticle interaction” — that is, to telekinesis (see p. 749);

21) the explanation for the results of the double-slit experiment without invoking the assumption that an electron passes through both slits simultaneously (see p. 752);

22) the hypotheses, based on the radiant model of the electron, concerning:

a) the potential for establishing information transfer along the particle's rays in both temporal directions (from the past to the future and back; see p. 751);

b) the possibility that cosmological effects associated with an apparent mass deficit in the Universe may be explained by the fact that the mass of electrons (and, possibly, the mass of other elementary particles) is concentrated not in the vicinity of their centers, but is distributed along the rays emanating from the centers in timelike directions (see p. 757).

Furthermore, the inaccuracies present in the modern theory of the electron are rectified in the book:

α) it eliminates from the electron theory the unscientific notion that electron spin, being a mechanical characteristic, “has no classical interpretation” [65] (see item 5 above);

β) it eliminates from the electron theory the anti-scientific concept of the existence of so-called virtual particles, which do not obey the laws of physics and are fundamentally unobservable [30] (in everyday terms, such objects are called demons) (see item 7 above);

γ) an inaccuracy in the well-known 1939 paper by E. P. Wigner, which addresses the problem of the rotation of an orbital electron under the action of Lorentz boosts, has been corrected (see item 18 above). Attention is drawn to the fact that as early as 1913, L. Föppl and P. Daniell were the first to derive the relativistic expression for the angle of rotation of a coordinate system whose origin moves along a circular trajectory under the action of Lorentz boosts. Therefore, it is historically justified to refer to Wigner rotation as *Föppl–Daniell rotation* (see Chapter 3, Section 21, p. 263);

δ) it has been proven that the energy level difference between the $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ states in the hydrogen atom is explained not by the Larmor precession of the electron's spin, as is commonly believed, but by the rotation of the electron under the influence of the atomic nucleus' electric field (see item 17 above);

ε) the interpretation of the physical process underlying electron paramagnetic resonance has been corrected. Specifically, the “flipping” of electron spins results from a resonance that occurs when the frequency of the alternating magnetic field coincides with the frequency of nutation of the rotating electrons, not with the frequency of spin precession, as is commonly assumed (see p. 455);

ζ) the use of the mathematically inadmissible procedure of renormalization, employed in quantum field theory, has been eliminated (due to modeling the electron as a ball of non-zero radius).

The model predicts a novel effect — the presence of a previously unaccounted constituent of the intrinsic field of a rotating electron, which is additional to the Maxwellian field. It has been proven that the magnetic part of this constituent is the cause of the so-called anomalous magnetic moment of the electron (see items 2 and 7 above). This effect can be experimentally verified using conventional methods of electromagnetic field measurement.

The model is based on the principles of mechanics, linear algebra, special relativity, and electrodynamics. It is rigorously formalized mathematically. All proofs are provided. The necessary background from mechanics, linear algebra, and special relativity is presented in Chapters 1–3.

The model can be extended to the case of the pseudo-Riemannian spacetime of General Relativity (see p. 755).

The method of constructing the electron model can be applied to building models of other elementary particles (see p. 758).

This model represents a development of one of the directions in causal mechanics (the theory of the physical properties of time), developed by N. A. Kozyrev (see Section 4 in the “Additional Literature” index).

Appendix 1 (p. 774) presents a novel derivation of the Heisenberg uncertainty relations, based on the postulates of Kozyrev's causal mechanics. The quantities Δx and Δt turn out to be inaccuracies inherent in the used concept of the "collision point" of elementary particles, rather than being properties of the particles themselves. Consequently, the uncertainty relations do not preclude the attribution of definite trajectories to elementary particles. Furthermore, in this context, the pair of quantities ΔE and Δt has a meaning analogous to that of the pair Δx and Δp , contrary to the interpretation held in quantum physics.

Appendix 2 (p. 783) provides a novel derivation of the *CPT*-theorem of quantum field theory, based on an analysis of the symmetry of a particle-antiparticle system in 4-dimensional spacetime.

The main results have been published in works [45–62]. They can be accessed on the author's personal page on the website of *The Institute for Time Nature Explorations named A. P. Levich* [63] and on my website <https://shikhobalov.nethouse.ru/>.

Thus, the constructed electron model in the form of a *Lorentz-invariant ball* describes the properties of electrons with high accuracy. This is not surprising, as it follows with near inevitability from the symmetry of Maxwell's equations and the laws of mechanics, linear algebra, and geometry. It would be surprising if, on the contrary, this model failed to describe the properties of electrons. What is truly surprising, however, is that over the more than 120 years since the creation of the special theory of relativity — which was developed precisely to describe electrodynamics — theoretical physicists have not even attempted to examine this simplest and most obvious model of the electron.

What other simplest non-point-like model of an electron could there even be?

Translated into English
using DeepSeek AI and
Google Translate

Faculty of Mathematics and Mechanics
of Saint Petersburg State University.
The Institute for Time Nature Explorations named A. P. Levich

USSR	—	Russia
Leningrad		Saint Petersburg
1988		2025

ЛИТЕРАТУРА

1. Демельт Х. Эксперименты с покоящейся изолированной субатомной частицей // Успехи физических наук. — 1990. — Т. 160, вып. 12. — С. 129.
2. Ильинъ Вл. Матеріализмъ и эмпириокритицизмъ. — М.: «Звено», 1909. — Гл. 5, разд. 2. — [Вл. Ильинъ — псевдоним В. И. Ульянова].
3. Физический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Электрон». — С. 876–877.
4. Жилин П. А. Реальность и механика // Труды XXIII школы-семинара «Анализ и синтез нелинейных колебательных систем» / Институт проблем машиноведения РАН. — СПб., 1996. — С. 7.
5. Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. — London, 1687. — Рус. перев.: Ньютон И. Математические начала натуральной философии: Перев. с лат. А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 690 с. — (Серия «Классики науки»).
6. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper // Annalen der Physik. — 1905. — Band 17, No. 10. — S. 891–921. — Рус. перев.: Эйнштейн А. К электродинамике движущегося тела // Принцип относительности: Сборник работ по специальной теории относительности / Составитель А. А. Тяпкин. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 95–117.
7. Minkowski H. Raum und Zeit // Physikalische Zeitschrift. — 1909. — Band 10, No. 3. — S. 104–111. — Рус. перев.: Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности: Сборник работ по специальной теории относительности / Составитель А. А. Тяпкин. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 167–180. — [Текст доклада, сделанного 21 сентября 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в г. Кельне].

8. *Маркс К.* Капитал: критика политической экономии. Т. 3. Книга III: Процесс капиталистического производства, взятый в целом. Ч. 2. Отдел 7: Доходы и источники. Гл. 48: Трехчленная формула. Разд. III / Под ред. Ф. Энгельса // *Маркс К., Энгельс Ф.* Сочинения. — 2-е изд. — Т. 25. Ч. 2. — М.: Гос. изд-во политич. лит-ры, 1962. — С. 384.
9. *Мамчур Е. А.* [Цитата из доклада «Нужна ли физикам философия?» на конференции «Философия физики: актуальные проблемы». — М., Моск. гос. университет им. М. В. Ломоносова, 17 июня 2010 г.].
10. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. — С. 265 (рис. 85).
11. *Малыкин Г. Б.* Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения // Успехи физических наук. — 2006. — Т. 176, № 8. — С. 865–882.
12. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 664 с.
13. *Thomas L. H.* The motion of the spinning electron // Nature. — 1926. — Vol. 117, No. 2945. — P. 514.
14. *Thomas L. H.* The kinematics of an electron with an axis // The Philosophical Magazine. Serie 7. — 1927. — Vol. 3, No. 13. — P. 1–22.
15. *Wigner E. P.* On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Annals of Mathematics. — 1939. — Vol. 40, No. 1. — P. 149–204.
16. *Wigner E. P.* Relativistic invariance of quantum-mechanical equations // Helvetica Physica Acta [Швейцарский физический журнал]. — 1956. — Band 29, Heft 4 [Supplementum 4]: Fünfzig Jahre Relativitätstheorie [The 50th anniversary of Relativity Theory]. — S. 210–226. — (Reprinted in [18]). — Рус. перев.: *Вигнер Е.* Этюды о симметрии: Перев. с англ. / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: Мир, 1971. — С. 246–261.
17. *Wigner E. P.* Relativistic invariance and quantum phenomena // Reviews of Modern Physics. — 1957. — Vol. 29, Number 3. — P. 255–268. — (Reprinted in [18]). — Рус. перев.: *Вигнер Е.* Этюды о симметрии: Перев. с англ. / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: Мир, 1971. — С. 59–90.

18. *Wigner E. P.* Symmetries and Reflections: Scientific Essays. — Bloomington–London: Indiana University Press, 1970. — Рус. перевод.: *Вигнер Е.* Этюды о симметрии: Перев. с англ. / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: Мир, 1971. — 320 с.
19. *Föppel L., Daniell P.* Zur Kinematik des Born'schen starren Körpers // Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. — 1913. — Heft 4. — S. 519–529.
20. *Fermi E.* Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea araria // Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Roma). — 1922. — Vol. 31, No. 1. — P. 21–23, 51–52, 101–108. — Рус. перевод.: *Ферми Э.* О явлениях, происходящих вблизи от мировой линии // *Энрико Ферми.* Научные труды. Том 1. — М.: Наука, 1971. — С. 64–71. — (Серия: Классики науки).
21. *Walker A. G.* Relative coordinates // Proceedings of the Royal society of Edinburgh. — 1932. — Vol. 52. — P. 345.
22. *Рутыс В. И.* О различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса // Успехи физических наук. — 2007. — Т. 177, № 1. — С. 105–112.
23. *Математическая энциклопедия.* Т. 1 / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: «Советская энциклопедия», 1977. — 1152 стлб.
24. *Davis M.* Applied nonstandard analysis. — N. Y.; L.: John Wiley & Sons, 1977. — Рус. перевод.: *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980. — 240 с.
25. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 504 с. — (Теоретическая физика; Т. 2).
26. *Zyla P. A. et al.* (Particle Data Group) Review of particle physics // Progress of Theoretical and Experimental Physics. — 2020. — Vol. 2020, Issue 8, 083C01. — P. 137. — <https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-phys-constants.pdf>
27. *Физические величины:* Справочник / А. П. Бабичев и др. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.
28. *Окунь Л. Б.* Физика элементарных частиц. — 2-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — С. 17.

29. *Zyla P. A. et al.* (Particle Data Group) Review of particle physics // Progress of Theoretical and Experimental Physics. — 2020. — Vol. 2020, Issue 8, 083C01. — P. 1101. — <https://pdg.lbl.gov/2020/tables/rpp2020-sum-leptons.pdf>
30. *Физический* энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Виртуальные частицы». — С. 78.
31. *Goldstein H.* Classical mechanics. — Cambridge: Addison-Wesley Press, 1950. — Рус. перев.: *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. — С. 193.
32. *Демельт Х.* Эксперименты с покоящейся изолированной субатомной частицей // Успехи физических наук. — 1990. — Т. 160, вып. 12. — С. 129–139.
33. *Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.* Магнитные поля в астрофизике. — Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. — 384 с.
34. *Dwight H. B.* Tables of integrals and other mathematical data. — N.Y.: The Macmillan Company, 1961. — Formulas 420.3, 420.4. — Рус. перев.: *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — Формулы 420.3, 420.4.
35. *Козырев Н. А., Насонов В. В.* О некоторых свойствах времени, обнаруженных астрономическими наблюдениями // Проявление космических факторов на Земле и звездах. — М.; Л., 1980. — С. 76–84. — (Проблемы исследования Вселенной; Вып. 9). — Переиздано в [77].
36. *Козырев Н. А.* Астрономическое доказательство реальности четырехмерной геометрии Минковского // Проявление космических факторов на Земле и звездах. — М.; Л., 1980. — С. 85–93. — (Проблемы исследования Вселенной; Вып. 9). — Переиздано в [77].
37. *Лаврентьев М. М., Еганова И. А., Медведев В. Г., Олейник В. К., Фоминых С. Ф.* О сканировании звездного неба датчиком Козырева // Доклады Академии наук. — 1992. — Т. 323, № 4. — С. 649–652.

38. Акимов А. Е., Ковальчук Г. У., Медведев В. Г., Олейник В. К., Пу-
гач А. Ф. Предварительные результаты астрономических наблю-
дений неба по методике Н. А. Козырева. — Киев, 1992. — 17 с. —
(Препринт / Главная астрономическая обсерватория Академии
наук Украины; № ГАО-92-5Р).
39. *Философский энциклопедический словарь*. — М.: Советская энцик-
лопедия, 1983. — Статья «Причинность». — С. 531–533.
40. Bunge M. Causality: The place of the causal principle of modern
science. — Cambridge: Harvard University Press, 1959. — Рус. пер.:
Бунге М. Причинность: Место принципа причинности в современ-
ной науке. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 512 с.
41. Демуцкий В. П., Половин Р. В. Концептуальные вопросы кван-
товой механики // Успехи физических наук. — 1992. — Т. 162,
№ 10. — С. 93–180.
42. Демьянов В. В. Эксперименты, поставленные с целью выявления
принципиальных отличий дифракции и интерференции волн и
электронов. —
https://ether-noo.narod.ru/diffraction_ru.pdf
43. Synge J. L. Relativity: the general theory. — Amsterdam: North-
Holland Publishing Company, 1960. — Рус. перев.: Синг Дж. Л.
Общая теория относительности / Под ред. А. З. Петрова. — М.:
Изд-во иностр. лит-ры, 1963. — Предисловие. — С. 8, 9.
44. Александров А. Д. Теория относительности как теория абсолют-
ного пространства-времени // Философские вопросы современ-
ной физики / Под ред. И. В. Кузнецова и М. Э. Омеляновского. —
М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 269–323. — Переиздано в книге:
Александров А. Д. Проблемы науки и позиция ученого: Статьи и
выступления. — Л.: Наука. Ленингр. отдел., 1988. — С. 120–169.
45. Шихобалов Л. С. Новый взгляд на электродинамику // Вестник
Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, меха-
ника, астрономия. — 1997. — Вып. 3 (№ 15). — С. 109–114. —
<https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/qs0437ryn6swoo8sw80w8okkc88ckg>¹

¹Для того, чтобы перейти к статье, нужно скопировать ссылку,
вставить ее в адресную строку браузера и нажать Enter. Или зайти на сайт
<https://shikhobalov.nethouse.ru/>, прокрутить вниз и открыть нужную статью.

46. *Shikhobalov L. S.* Electrodynamics reexamined // Saint Petersburg University Mechanics Bulletin (New York, Allerton Press). — 1997. — Vol. 15, No. 3. — 7 p. — (English translation of the article [45]). — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/j532cif8994coo8wo80ck8k44ogoks> ²
47. *Шихобалов Л. С.* О строении физического вакуума // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1999. — Вып. 1 (№ 1). — С. 118–129. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/m47c086jxz4woc4wkwwgws048wcw8k> ³
48. *Шихобалов Л. С.* Электрон как четырехмерный шар в пространстве Минковского // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 2005. — Вып. 4. — С. 128–132, 147. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/c45d719azegw4wossskwsos0kkskw>
49. *Шихобалов Л. С.* Лучистая модель электрона. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2005. — 230 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/ov9308gvgz4o8gogw08c8c088gw000>
50. *Шихобалов Л. С.* Модель электрона в виде четырехмерного шара в пространстве Минковского. — 2012. — 21 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/roj8seszn1tcswwgkg0wksgwkos0w8g>
51. *Shikhobalov L. S.* Electron model in the form of four-dimensional ball in Minkowski space. — 2012. — 20 p. — (English translation of the article [50]). — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/20hn4nuhgkn48gk00scc88k80cow08> ²
52. *Шихобалов Л. С.* Вращение Вигнера и прецессия Томаса: геометрический подход. — 2018. — 55 с. — <http://hdl.handle.net/11701/9226>
<https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/22aja8lzt7oskokooc0gow88wgs8k>

² To read the article, copy the link, paste it into your browser's address bar and press Enter. Or, visit <https://shikhobalov.nethouse.ru/> and scroll down to find the article.

³ Для того, чтобы перейти к статье, нужно скопировать ссылку, вставить ее в адресную строку браузера и нажать Enter. Или зайти на сайт <https://shikhobalov.nethouse.ru/>, прокрутить вниз и открыть нужную статью.

-
53. *Шихобалов Л. С.* Вращение электрона магнитным полем. — 2018. — 12 с. — <https://dspace.spbu.ru/handle/11701/10369>
<https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/crjt1ky6inswgksw84w40gk0s4gso4>
54. *Шихобалов Л. С.* Вращение движущегося электрона электрическим полем. — 2018. — 25 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/evbjudlrvk0840840wk4c004owwck>
55. *Шихобалов Л. С.* Вращение электрона с учетом самодействия. — 2018. — 7 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/r9yh8wrh4w00k8k4g0swkcg8wsksw8>
56. *Шихобалов Л. С.* О векторной и псевдовекторной компонентах тензора электромагнитного поля. — 2023. — 8 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/si4e5vg1tus4ws4s0ggw8kkckckgo>
57. *Шихобалов Л. С.* Время: субстанция или реляция?.. Нет ответа // Вестник Санкт-Петербургского отделения Российской Академии естественных наук. — 1997. — № 1 (4). — С. 369–377. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/rjo4m2jlee8g08wgco0wsc08k0okws>
58. *Шихобалов Л. С.* О некоторых изъянах современной модели электрона и возможности их устранения // Философия физики: актуальные проблемы. Материалы научной конференции 17–18 июня 2010 г. — М.: ЛЕНАРД (URSS), 2010. — С. 177–180. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/9ljvkh1ri5gko04swg048c8k0w4g44>
59. *Шихобалов Л. С.* Квантовомеханические соотношения неопределенностей как следствие постулатов причинной механики Н. А. Козырева; силы в причинной механике // Изучение времени: концепции, модели, подходы, гипотезы и идеи: Сб. научн. трудов / Под ред. В. С. Чуракова. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005. — С. 126–156. — (Библиотека времени; Вып. 2). — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/4024dblf0ry8sw8k4gcswkco0s84g4>
60. *Shikhobalov L. S.* Quantum-mechanical uncertainty relations as a consequence of the postulates of N. A. Kozyrev's causal mechanics; forces in causal mechanics // On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 2: The “active” properties of time according to N. A. Kozyrev / Editor A. P. Levich. — Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World

- Scientific, 1996. — P.109–134. — (Series on advances in mathematics for applied sciences; Vol. 39). — (English translation of the article [59]). — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/arirrzkogq0o00o4gckssc4oooogsc> ⁴
61. *Шихобалов Л. С.* Что может дать субстанциональная концепция времени? // «Причинная механика» Н. А. Козырева сегодня: pro et contra: Сб. научн. работ / Под ред. В. С. Чуракова. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2004. — С. 9–66. — (Библиотека времени; Вып. 1). — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/695m4fjvqg4ksgswg8kocs8w0gwsk>
62. *Shikhobalov L. S.* What can be obtained from the substantial conception of time? // On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 2: The “active” properties of time according to N. A. Kozyrev / Editor A. P. Levich. — Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1996. — P.174–221. — (Series on advances in mathematics for applied sciences; Vol. 39). — (English translation of the article [61]). — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/gdjyp5e12lck4kocgo0ooc04kg4w4g> ⁴
63. *Институт исследований природы времени (ИИПВ).* — <http://www.chronos.msu.ru/ru/rindex> ⁵
64. *Толковый словарь русского языка.* В 4-х т. / Под ред. Д. Н. Ушакова. — М.: Гос. изд-во иностр. и национальных словарей, 1935–1940. — Статья «Мистика». — Т. 2. — Стлб. 228.
65. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. — § 36. — С. 215.
66. *Физический энциклопедический словарь.* — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Спин-орбитальное взаимодействие». — С. 714.
67. *Penrose R., Rindler W.* Two-spinor calculus and relativistic fields. — Cambridge: Cambridge University Press, 1986. — Рус. перев.: *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. — М.: Мир, 1987. — С. 67.

⁴ To read the article, copy the link, paste it into your browser's address bar and press Enter. Or, visit <https://shikhobalov.nethouse.ru/> and scroll down to find the article.

⁵ Сайт, работавший 25 лет, закрыт в августе 2025 года.

68. *Dirac P. A. M.* The Requirements of Fundamental Physical Theory // *European Journal of Physics*. — 1984. — Vol. 5. — P. 65 – 67. — Рус. перев.: *Дирак П. А. М.* Воспоминания о необычайной эпохе: Сборник статей / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — С. 63.
69. *Dirac P. A. M.* Там же.
70. *Dirac P. A. M.* Directions in physics. — N.Y.: John Wiley & Sons, 1978. — Рус. перев.: *Дирак П. А. М.* Воспоминания о необычайной эпохе: Сборник статей / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — С. 152.
71. *Kuhn T.* The Structure of Scientific Revolutions. — Chicago: The University of Chicago Press, 1970. — Рус. перев.: *Кун Т.* Структура научных революций. — М.: АСТ Ермак, 2003. — С. 50.
72. *Бройль Л. де.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. (С критическими замечаниями автора.): Пер. с франц. — М.: Мир, 1986. — 342 с.
73. *Козырев Н. А.* Избранные труды. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1991. — 447 с. —
<https://archive.org/details/B-001-004-536-ALL/mode/2up>
<https://disk.yandex.by/d/GLkONrMhBC7WD> ⁶
74. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — § 16. — С. 67–68. — (Теоретическая физика; Т. 3).
75. *Физический энциклопедический словарь.* — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Теорема *CPT*». — С. 744.
76. *Бальмонт К. Д.* Мировая тюрьма // *Бальмонт К. Д.* Избранное. — М.: Художественная литература, 1980. — С. 203.
77. *Время и звезды: к 100-летию Н. А. Козырева.* — СПб.: Нестор-История, 2008. — 790 с. — https://lib.rmvoz.ru/sites/default/files/fail/kozyrev_vremya_i_zvezdy.pdf ⁶

⁶ Если гиперссылка не работает, нужно скопировать ссылку, вставить ее в адресную строку браузера и нажать Enter.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

При написании глав 1–3, посвященных методологии механики, математическому аппарату и основам теории относительности, были использованы литературные источники. Они перечислены ниже в разделах 1–3 (ссылки даны в алфавитном порядке, за исключением работ И. Ньютона, А. Эйнштейна и Г. Минковского, поставленных, по праву, на первые места). В связи с тем, что настоящая работа является развитием одного из направлений причинной механики, в разделе 4 приведены некоторые публикации по этой теме.

1. Литература по механике (к главе 1)

Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. — London, 1687. — Рус. перев.: *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии: Перев. с лат. А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 690 с. — (Серия «Классики науки»).

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — 3-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 472 с.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1. — 6-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. — 468 с.

Жилин П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. — СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. политехн. ун-та, 2003. — 340 с.

Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 536 с.

Розенталь И. Л. Механика как геометрия. — М.: Наука, 1990. — 94 с. — (Серия «Наука и технический прогресс»).

Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. — 4-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 528 с.

Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. — Baltimore (USA): The John Hopkins University, 1972. — Рус. перев.: *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

2. Литература по теории тензоров и геометрии пространства Минковского (к главе 2)

Вакуленко А. А. Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. — 64 с.

Вакуленко А. А. Тензорные функции. — Дополнение к книге: *Курбатова Г. И., Филиппов В. Б.* Элементы тензорного исчисления. — СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1998. — С. 197–222.

Волков А. Е., Волкова Н. А., Шихобалов Л. С. Тензоры второго ранга. — СПб., 2020. — 46 с. — <http://hdl.handle.net/11701/17189>⁷

Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — 2-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 304 с.

Курбатова Г. И., Филиппов В. Б. Элементы тензорного исчисления. — СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1998. — 233 с.

Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — Приложение 1. Основы тензорной алгебры. — С. 799–838.

Победра Б. Е. Лекции по тензорному анализу. — 3-е изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 264 с.

Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 664 с.

Сазанов А. А. Четырехмерный мир Минковского. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 224 с.

Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. — 4-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — Глава 2. § 4. Элементы тензорного исчисления. — С. 48–64.

Шихобалов Л. С. Основы тензорной алгебры. — СПб., 2018. — 118 с. — <http://hdl.handle.net/11701/9211>⁷

⁷ Если гиперссылка не работает, нужно скопировать ссылку, вставить ее в адресную строку браузера и нажать Enter.

3. Литература по специальной теории относительности (к главе 3)

Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper // Annalen der Physik. — 1905. — Band 17, No. 10. — S. 891–921. — Рус. перев.: *Эйнштейн А.* К электродинамике движущегося тела // Принцип относительности: Сборник работ по специальной теории относительности. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 95–117.

Minkowski H. Raum und Zeit // Physikalische Zeitschrift. — 1909. — Band 10. — S. 104. — Рус. перев.: *Минковский Г.* Пространство и время // Принцип относительности: Сборник работ по специальной теории относительности. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 167–180. — [Текст доклада, сделанного 21 сентября 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в г. Кельне].

Александров А. Д. Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени // Философские вопросы современной физики. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 269–323. — Переиздано в книге: *Александров А. Д.* Проблемы науки и позиция ученого: Статьи и выступления. — Л.: Наука. Ленинградское отделение, 1988. — С. 120–169.

Козлов С. Е. Математические основы специальной теории относительности и пространство Лобачевского. — СПб., 1995. — 68 с.

Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — 2-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — Часть 2. § 12. Пространство Минковского. — С. 171–180.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 504 с. — (Теоретическая физика; Т. 2).

Ожунь Л. Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // Успехи физических наук. — 1989. — Т. 158, вып. 3. — С. 511–530.

Осипов В. Ф. Структура пространства-времени. В 3 ч. — СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. — Часть 1. — 1995. — 327 с.; Часть 2. — 1995. — 352 с.; Часть 3. — 2003. — 347 с.

Поляхов Н. Н. Что привнесли теория относительности и квантовая механика в классическую механику / Институт проблем механики АН СССР; ЛГУ. — Препринт № 330. — М., 1988. — 40 с.

Рашиевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 664 с.

Сазанов А. А. Четырехмерный мир Минковского. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 224 с.

Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — 2-е изд. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 564 с.

Pauli W. Theory of relativity. — Pergamon Press, 1958. — Рус. перев.: *Паули В.* Теория относительности. — 2-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 336 с. — (Библиотека теоретической физики).

Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. — Cambridge University Press, 1984. — Рус. перев.: *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. — М.: Мир, 1987. — 528 с.

Synge J. L. Relativity: the general theory. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960. — Рус. перев.: *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. — 432 с.

4. Литература по причинной механике

Первая публикация Н. А. Козырева по причинной механике (теории физических свойств времени):

Козырев Н. А. Причинная или несимметричная механика в линейном приближении. — Пулково, 1958. — 90 с. —

<https://ivanik3.narod.ru/Kozyrev/Statji/Kozyrev1958-022.pdf>

Все труды ученого по причинной механике переизданы в сборниках:

Козырев Н. А. Избранные труды. — Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1991. — 447 с. —

<https://archive.org/details/B-001-004-536-ALL/mode/2up>

<https://disk.yandex.by/d/GLkONrMhBC7WD>

Время и звезды: к 100-летию Н. А. Козырева. — СПб.: Нестор-История, 2008. — С. 100–140. —

https://lib.rmvoz.ru/sites/default/files/fail/kozyrev_vremya_i_zvezdy.pdf

Указатель публикаций Н. А. Козырева:

Список трудов Н. А. Козырева // Время и звезды: к 100-летию Н. А. Козырева. — СПб.: Нестор-История, 2008. — С. 141–151. —

https://lib.rmvoz.ru/sites/default/files/fail/kozyrev_vremya_i_zvezdy.pdf

Издания, которые целиком или в значительной части содержат работы, анализирующие и развивающие представления Н. А. Козырева о времени:

On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 2: The “active” properties of time according to N. A. Kozyrev / Editor A. P. Levich. — Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1996. — X + 228 p. — (Series on advances in mathematics for applied sciences; Vol. 39).

Galilean Electrodynamics. — 2000. — Vol. 11. — Special Issues 1 (Spring 2000). — P. 1–20; Special Issues 2 (Fall 2000). — P. 21–40.

«Причинная механика» Н. А. Козырева сегодня: pro et contra: Сб. научн. работ / Под ред. В. С. Чуракова. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2004. — 164 с. — (Библиотека времени; Вып. 1).

Изучение времени: концепции, модели, подходы, гипотезы и идеи: Сб. научн. трудов / Под ред. В. С. Чуракова. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005. — 262 с. — (Библиотека времени; Вып. 2).

Время и звезды: к 100-летию Н. А. Козырева. — СПб.: Нестор-История, 2008. — 790 с. —
https://lib.rmvoz.ru/sites/default/files/fail/kozyrev_vremya_i_zvezdy.pdf

Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Под ред. М. М. Лаврентьева, В. Н. Самойлова. — Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2010. — 288 с. — (Избранные труды VII Сибирской междисциплинарной конференции «Математические проблемы физики пространства-времени сложных систем», посвященной 100-летию доклада Г. Минковского «Пространство и время» (ФПВ-2008), Новосибирск, 21–24 сентября 2008 г.; Вып. 7).

Википедия. Статья «Причинная механика».

Колтовой Н. А. Персональный сайт. Книга 5 Часть 2-03. Козырев Н.А. <https://koltovoi.nethouse.ru>
<https://disk.yandex.ru/d/8EYTCT4n3LCzRN>

Шихобалов Л. С. Три этапа развития теории времени. (Расширенный текст доклада 20.09.22 ИИПВ). — 2022. — 51 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/oi2unxy32zkks0s4swogwc4sgwko8o>⁸

⁸Для того, чтобы перейти к статье, нужно скопировать ссылку, вставить ее в адресную строку браузера и нажать Enter. Или зайти на сайт <https://shikhobalov.nethouse.ru/>, прокрутить вниз и открыть нужную статью.

Книги, посвященные применению причинной механики в метеорологии, геофизике и в физике квантовой информации:

Арушанов М., Л., Горячев А. М. Эффекты причинной механики в метеорологии. — Ташкент: Изд-во САНИГМИ, 2003. — 103 с.

Korotaev S. M. Causality and reversibility in irreversible time. — Scientific Research Publishing (USA), 2011. — 117 p.

Коротаев С. М., Морозов А. Н. Нелокальность диссипативных процессов — причинность и время. М.: Физматлит. — 2018. — 216 с.

Обзор и библиография работ, посвященных анализу, развитию и применению причинной механики:

Шихобалов Л. С. Причинная механика Н. А. Козырева в развитии. — 2011. — 61 с. — <https://s2.siteapi.org/57fae581ca644b1/docs/89bdx7sa33sw04gs040084cwwowcg8>

Биографические сведения о Н. А. Козыреве:

Википедия. Статья «Козырев, Николай Александрович».

World Who's Who in Science. A biographical dictionary of notable scientists from antiquity to the present. — Chicago: Marquis Who's Who, Inc., 1968. — P. 965.

Колчинский И. Г., Корсунь А. А., Подригес М. Г. Астрономы: Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1977. — С. 124–125, 343; 2-е изд. — 1986. — С. 157–158, 417.

Dobbins T. A., Sheehan W. Kozyrev N. A. // The biographical encyclopedia of astronomers / Editor-in-Chief T. Hockey. — Springer, 2007. — Vol. 1. — P. 654–655.

Дадаев А. Н. Николай Александрович Козырев. К 100-летию со дня рождения // Время и звезды: к 100-летию Н. А. Козырева. — СПб.: Нестор-История, 2008. — С. 3–89.

Dadaev A. N. Nikolai A. Kozyrev (1908–1983) — discoverer of lunar volcanism (on the 100th anniversary of his birth) // Progress in Physics. — 2009 (July). — Vol. 3. — P. L3–L14.

Норильский (Щеглов) С. А. Время и звезды Николая Козырева. Заметки о жизни и деятельности российского астронома и астрофизика. — Тула: Гриф и К, 2013. — 148 с.

Видеофильм о Н. А. Козыреве:

Зныкин П. А. Возвращение Козырева. — <https://disk.yandex.ru/i/xxJMJ3n2W55ppA?uid=7107024>

Предметный указатель

- Аберрация 214
— годовичная 215
— света 214, 221
Абсолютное пространство-время 760
Абсолютный базис 574
Активное преобразование 166, 185, 185
Аннигиляция 228
Аномальный магнитный момент 368, 379, 405, 447, 453, 454
Антисимметричный тензор 23, 99, 324 и др.
Античастица 228
Асимптотическая гиперповерхность 94, 305, 306
Асимптотический конус 306
Ассоциированное пространство 36, 68, 187
Атом 222
— водорода 261
Аффинное пространство 36
- Базис 17, 18
— абсолютный 574
— биортогональный 29
— взаимный 29, 30, 189, 283
— диадный 28, 189
— дуальный 29
— левоориентированный 34, 320, 321, 322
— левый 34
— неподвижный 249, 251, 292
— ортонормированный 91, 129, 189, 426 и др.
— правоориентированный 34, 320, 321, 322
— правый 34
- Базис смешанный 30, 32
— сопровождающий 239, 251, 393
— сопряженный 29
— тензорный 28
Базисное пространство 12, 109, 305
Базисы одинаково ориентированные 34
— противоположно ориентированные 34
— различно ориентированные 34
Безмассовая материальная точка 109, 158
Бивектор 24, 309, 310
Билинейность скалярного умножения 16
Биортогональный базис 29
Бискалярное умножение тензоров 22, 321
Близнецов парадокс 112, 147
Бора магнетон 446, 724 и др.
Буст 52, 68, 185, 188 и др.
- Валентность тензора 19
Вектор 15
— времениподобный 69, 102
— единичный 16, 69
— изотропный 16, 37, 69 и др.
— касательный к нити 497
— массы 115, 116
— мнимоединичный 16, 69
— направленный в сторону будущего 102
— — — — — прошлого 102
— нулевой 16, 70, 102
— ориентированный в сторону будущего 102
— — — — — прошлого 102

- Вектор ортогональный поверхности 540
 — переориентации 612, 714
 — пространственноподобный 69
 Векторная составляющая антисимметричного тензора 324, 363
 Векторное произведение 322, 342
 — — двойное 323–324
 — пространство 15
 — умножение 234, 242
 Векторы коллинеарные 69
 — ортогональные 16, 69
 — параллельные 69
 Вершина угла 178
 Вещественное евклидово пространство 36
 — линейное пространство 15
 Взаимный базис 29, 30, 189, 283
 Взаимодействие «точечных» частиц 307, 405
 — частиц 745
 — элементарных частиц 222
 Вигнера вращение 263, 264, 265, 269, 303
 Винтовая переменная 467
 — нить 463, 466
 Вириальный парадокс 757
 Виртуальная частица 313
 Внешняя область светового конуса 72
 Внутренность светового конуса 71
 Воздействие 150, 229, 307, 308
 Волновая часть поля 369
 Вращение 77, 78
 — вектора 59, 60, 68, 78
 — Вигнера 263, 264, 265, 269, 303
 — вокруг оси 79
 — — плоскости 79, 426
 — — центра 79
 — гиперболическое 240, 343, 369
 — пространственное 240, 343
 — спина 264, 265
 — тела 235
 — частицы 377, 394
 Вращение электрона магнитным полем 241, 243, 388, 390
 — — электрическим полем 245, 256, 259, 261, 263, 390
 Времени замедление 170, 173
 Времениподобная линия 70
 — прямая 80
 Времениподобный 69, 101, 111
 — вектор 69, 102
 Временная координата 130
 — ориентация вектора 102
 — — пространства M 109
 — субстанция 786
 Время 110, 355, 786
 — координатное 124, 355
 — лабораторное 124
 — собственное 110, 114, 199
 — — частицы 314, 316, 327, 412
 Второй закон Ньютона 139, 230, 231
 Вырожденное скалярное умножение 89
 Галилея закон инерции 128, 132
 — преобразование 176
 — принцип относительности 128
 Гейзенберга соотношения неопределенностей 774, 780, 781
 Геометрия Евклида 14
 — Лобачевского 14
 — Римана 14
 Гиперболический косинус 38, 58, 177, 179, 180, 186
 — поворот 52, 68, 185, 188, 190 и др.
 — синус 58, 179, 180, 186
 — тангенс 179, 180, 186
 Гиперболическое вращение 240, 343, 369
 — движение 199, 201
 Гиперболоид двуполостный 46, 92, 317
 — однополостный 46, 92, 306, 412
 Гипердействительное число 355
 Гиперплоскость 37, 71, 90, 125, 127

- Гиперплоскость изотропная 90
 — одновременных событий 130
 — пространственноподобная 73
 Гиперповерхность 37, 71, 135
 — асимптотическая 94, 305, 306
 — линейчатая 96, 306
 Гипотеза о переориентации лучей частицы 722
 Гиромагнитное отношение 446
 Гладкая линия 70, 84, 85
 Годичная абберация 215
 Градиент 640, 708
 Грама матрица 32
 Графики гиперболических функций 186
 Группа 26, 187
 — Лоренца 27, 72, 167, 187, 188, 198, 199, 305, 314, 425 и др.
 — — общая 72, 187
 — — ограниченная 72, 187, 188 и др.
 — ортогональная 27, 72, 187
 — Пуанкаре 187, 188, 198
 — симметрии 198
 — $\mathcal{O}$ 27, 187
 Групповая операция 27

 Движение гиперболическое 199, 201
 — материальной точки 111, 143
 — — — под действием тензора (оператора) 340
 — — — прямолинейное 149
 — — — равномерное 149
 — — — равноускоренное 200
 — тела инерциальное 150
 — — поступательное 127
 — частицы 316, 371
 — — под действием тензора (оператора) 341
 Двоеточие 22, 233
 Двойное векторное произведение 324
 — скалярное умножение тензоров 22
 Двуполостный гиперboloид 46, 92
 Двухвалентный тензор 23, 25, 26, 28, 106
 Двухпараметрическая формула 299
 Двухщелевой эксперимент 752, 753, 754
 Детерминант тензора 32
 Дефект массы 118
 Диада 19
 Диадный базис 28, 189
 Дивергенция 640
 Динамика 229
 — материальной точки 235
 Длина вектора 16, 68
 — окружности в псевдоевклидовой плоскости 56, 57
 Доплера эффект 218, 220, 221
 — — поперечный 221
 — — продольный 220
 Допущение о континуальности 568
 Дуальный базис 29

 Евклида геометрия 14
 Евклидова плоскость 37, 38
 Евклидово пространство 36, 37
 Единичный вектор 16, 69, 309
 — оператор 426
 — псевдоскаляр 35, 233, 320, 332
 — тензор 24, 31, 189, 283, 321, 426
 — элемент группы 27
 Естественная параметризация линии 110

 Закон воздействия 308, 315
 — движения 229
 — динамики основной (в теории относительности) 238, 241, 260, 380, 381, 402 и др.
 — — частицы ненулевого радиуса 522
 — инерции (алгебраический) 17
 — — в специальной теории относительности 150
 — — Галилея 128, 132
 — Кулона 391
 — Ньютона второй 139, 230, 231
 — Ньютона первый 128
 — Ньютона третий 140

- Закон сложения скоростей 208, 211, 213
 — сохранения 4-импульса 116, 120, 222, 223
 Законы движения частицы 519
 Замедление времени 170, 173
 Замена векторов в тензоре 33
 Заряд электрический 365, 379 и др.
 — электрона 367, 368, 370
 Зарядовое сопряжение 783
 Зеркальная асимметрия мира 199
- Идеальная линейка 126
 Идеальные часы 126
 Излома точка 70
 Изоморфизм 25
 Изоморфные пространства 25
 Изотропная гиперплоскость 90
 — линия 70
 — материальная точка 109, 158
 — прямая 38, 71, 80, 306
 Изотропное подпространство 89
 Изотропность пространства 198, 199
 Изотропный вектор 16, 37, 69 и др.
 — конус 46, 71, 94, 305
 — импульс 116
 — поворот 188, 190, 195, 197
 Импульс 151, 152, 153, 157, 218, 229
 Инвариантная плоскость 188, 284, 291, 292
 Инвариантный математический объект 18, 35
 Инверсия 78, 188
 — светового конуса 76
 Индекс суммирования 29
 — немой 29
 Индивидуализация элементов нити 472
 Инерциальная система координат 129
 — — отсчета 127, 132, 136 и др.
 — — — исходная 299
 — — — мгновенно сопутствующая 200, 260
- Инерциальное движение тела 150
 Инерции закон (алгебраический) 17
 — — в специальной теории относительности 150
 — — Галилея 128, 132
 Инфинитезимальный тензор 236, 237
 Исследователь 126, 127
 Исходная система отсчета 299
- Канонический математический объект 18, 35
 Касательный к нити вектор 497
 Квантование магнитного поля 725
 Квантовая механика 158, 224
 Кинематика 114, 229
 Классическая механика 109, 118, 123, 135, 137, 141, 142 и др.
 Классический радиус электрона 244
 Ковариантные компоненты тензора 33
 Коллинеарные векторы 69
 Компоненты тензора 28
 — — ковариантные 33
 — — контравариантные 33
 Комптон-эффект 222
 Комптона формула 224
 — эффект 222
 Комптоновская длина волны 224
 Комптоновское рассеяние 222
 Константа c 111, 115, 121, 124
 Контравариантные компоненты тензора 33
 Конус асимптотический 306
 — изотропный 46, 71, 94, 305
 — световой 46, 71, 94, 96, 98 и др.
 Координата временная 130
 — пространственная 130
 Координаты тензора 28
 Кориолиса теорема 139
 Кососимметричный тензор 23, 99
 Красное смещение 220
 Критерий 99
 — антисимметричности тензора 99, 101, 106

- Кронекера символ 30, 189, 283
 Кулона закон 391
 Кусочно-гладкая линия 70
- Ланде множитель 454
 Лармора прецессия 260
 Ларморовская прецессия 244, 260, 390, 403, 404, 453
 Леви-Чивита псевдотензор 232, 233, 320, 321 и др.
 Левоориентированный базис 34, 320, 321, 322
 Левый базис 34
 Лиенара-Вихерта потенциалы 370
 Линейка 124, 126
 — идеальная 126
 Линейная зависимость векторов 17
 — независимость векторов 17
 — оболочка векторов 410, 465
 Линейное пространство 15, 28
 — — вещественное 15
 — — тривиальное 17
 — — $V \otimes V$ 23, 28
 Линейный оператор 25, 26
 Линейчатая гиперповерхность 96, 306
 — поверхность 96
 Линия времениподобная 70
 — гладкая 70, 84, 85
 — изотропная 70
 — кусочно-гладкая 70
 — мировая 109, 125, 144 и др.
 — — частицы 307, 314, 346
 — пространственноподобная 70
 Лобачевского геометрия 14
 Лоренц-инвариантность 73
 Лоренца группа 27, 72, 167, 187, 188, 198, 199, 305, 314, 425 и др.
 — — общая 72, 187
 — — ограниченная 72, 187, 188 и др.
 — преобразование 160, 166, 167, 176, 183, 185, 292
 — сила 234, 244
 — формулы 166, 183, 247
- Луч частицы 310, 314, 316, 407, 409, 412 и др.
 Лучистая модель электрона 367, 404
- Магнетизм электронов 458
 Магнетон Бора 446, 724
 Магнитный момент частицы 721
 — — электрона 244, 405, 446
 — — — аномальный 368, 379, 405, 447, 453, 454
 — — — орбитальный 244
 — — — собственный 244, 446
 Магнитомеханическое отношение 446
 Максвелла уравнения 370, 404
 Масса 109, 118, 119, 151, 154
 Материальная система отсчета 125, 126, 128, 132
 — точка 109, 114 и др.
 — — безмассовая 109, 158
 — — изотропная 109, 158
 — — неподвижная 149
 — — покоящаяся 149
 — — светоподобная 109, 158
 Материальное тело 12, 14, 109, 305
 Матрица Грама 32
 — компонент тензора 29
 — тензора 29
 Мгновенно сопутствующая инерциальная система отсчета 200, 260
 Межзвездная связь 751
 Методология механики 12, 14, 305
 Метрика 39, 187
 — псевдоевклидова 39
 — собственно евклидова 39
 Метрическая форма 18, 37
 — — отрицательно определенная 37, 365
 — — положительно определенная 37, 365
 Метрический тензор 24, 321, 426
 Механика 12, 114, 127
 — квантовая 158, 224
 — классическая 109, 118, 123, 135, 137, 141, 142 и др.

- Минковского пространство 10, 13, 18, 37 и др.
 Мир Птолемея 773
 — Фейнмана 773
 Мировая линия 109, 125, 144 и др.
 — — частицы 307, 314, 346, 356, 412
 Мистика 766
 Мнимая единица 178
 Мнимоединичный вектор 16, 69
 Множество V_+ 103
 Множитель Ланде 454
 Модель атома Н. Бора 262
 — электрона 9, 10, 14, 228, 306, 307, 310, 367, 380, 404 и др.
 — — в ОТО 755
 — — лучистая 367, 404
 — — ненулевого радиуса 405
 — — точечная 9, 304
 — — «точечная» 307, 310, 311
 Модуль вектора 16, 68
 Момент импульса 414
 — кинетический 414
 — количества движения 414
 — угловой 414
 Набла 708
 Направление от прошлого к будущему 110
 Напряженность магнитного поля 10, 232, 234, 324, 365, 370
 — электрического поля 10, 232, 234, 324, 365, 370
 Натуральный параметр 110
 Невырожденность скалярного умножения 16, 23, 89
 Недостатки классической механики 142
 — теории относительности 142
 — точечной модели электрона 304
 — «точечной» модели электрона 405
 Неинерциальная система отсчета 132, 134
 Немой индекс 29
 Неопределенностей соотношения 774, 780, 781
 Неравенство треугольника (в псевдоевклидовой плоскости) 81
 — — обратное 82, 118
 Неразложимый тензор 20
 Несовершенство теории электрона 260
 Нестандартный анализ 355
 Неточность в работах Е. Вигнера 265, 268, 274, 303
 Нити соответственные 480
 Нить 466
 — винтовая 463, 466
 Нормаль к гиперплоскости 90
 Нулевой вектор 16, 70, 102
 — тензор 20
 — элемент линейного пространства 15
 Ньютона закон второй 139, 230, 231
 Ньютона закон первый 128
 Ньютона закон третий 140
 Обратимый тензор 24
 Обратное неравенство треугольника 82, 118
 Обратный тензор 24, 26
 — элемент группы 27
 Обращение времени 783
 Общая группа Лоренца 72, 187
 — теория относительности 13, 14, 142
 Ограниченная группа Лоренца 72, 187, 188 и др.
 Одинаковая временная ориентация векторов 102
 Одинаково ориентированные базисы 34
 Однополостный гиперboloид 46, 92, 306, 413
 Однородность пространства 198, 199
 Окружность 43
 — в псевдоевклидовой плоскости 44, 45, 55
 — в собственно евклидовой плоскости 41, 44, 45

- Оператор единичный 426
 — линейный 25, 26
 — набла 708
 — ортогональный 26, 72
 — переориентации луча 431
 — поворота 40, 50, 52
 — поворота луча 429
 — проецирования 210, 242
 — пространственного поворота 426
 — сопряженный 425
 — тождественный 426
 — транспонированный 425
 Операция бискалярного умножения тензоров 22, 321
 — групповая 27
 — двойного скалярного умножения тензоров 22
 — полискалярного умножения тензоров 22
 — свёртывания тензора 24
 — скалярного умножения векторов 15, 68
 — — — диады на вектор 21, 22
 — — — тензоров 21, 321
 — сложения тензоров 20
 — — элементов линейного пространства 15
 — тензорного умножения векторов 19, 21
 — — — тензоров 20, 21
 — транспонирования тензора 23
 — трискалярного умножения тензоров 22, 321
 — умножения элемента линейного пространства на число 15
 Определитель тензора 32
 Опыт Штерна–Герлаха 454, 724
 Орбитальная угловая скорость 247, 257
 Орбитальный магнитный момент 244
 Ориентации несовпадающие 467
 — одинаковые 467
 — противоположные 467
 Ориентации совпадающие 467
 — согласованные 481
 Ориентация временная вектора 102
 — — пространства M 109
 — пространства 34
 Орт 16, 69
 — мнимоединичный 16, 69
 Ортогональная группа 27, 72, 187
 Ортогональные векторы 16, 69
 — подпространства 69
 Ортогональный оператор 26, 72
 — тензор 26, 72, 187, 237
 Ортонормированный базис 91, 129, 189, 426 и др.
 Основной закон динамики (в теории относительности) 238, 241, 260, 380, 381, 402 и др.
 Остов частицы 407, 410, 412, 485
 Ось (луча частицы) 410
 — вращения 79, 572
 — времени 127, 371
 — поворота 79
 Относительности принцип 128
 — теория 13, 14, 108, 111, 118, 123, 126 и др.
 — — общая 13, 14, 142
 — — специальная 13, 107, 109 и др.
 Отражение 188
 Отставание движущихся часов 170
 Парадокс 112
 — близнецов 112, 147
 Параллельные векторы 69
 — подпространства 69
 Параметр натуральный 110
 Параметризация линии естественная 110
 Пассивное преобразование 166, 183
 Первый закон Ньютона 128
 Переводная константа c 111
 Перенос векторов по Ферми–Уолкеру 257, 265, 266, 269, 303, 396
 Пифагора теорема (для псевдоевклидовой плоскости) 80, 113

- Планка постоянная 446
 Плоскость вращения 383
 — евклидова 37, 38
 — инвариантная 188, 284, 291, 292
 — пространственноподобная 188
 — псевдоевклидова 37, 38, 40 и др.
 — собственно евклидова 40, 41, 54, 55, 59
 Плотность дислокаций 317
 — лучей 311, 317, 319, 345 и др.
 — нитей 536
 Поверхность линейчатая 96
 Поворот векторов 40
 — вокруг оси 79
 — — плоскости 79
 — — центра 79
 — гиперболический 52, 68, 185, 188, 190 и др.
 — изотропный 188, 190, 195, 197
 — пространства 78
 — пространственный 188, 190 и др.
 — псевдоевклидовой плоскости 44
 — собственно евклидовой плоскости 40
 Поворотная ось симметрии 79
 Подпространства ортогональные 69
 — параллельные 69
 Подпространство изотропное 89
 — инвариантное 426
 — неподвижное 426
 Позитрон 10, 228, 315, 733, 734
 Покоя энергия 153, 154
 Пола будущего 101, 109
 — конуса 71, 73, 101
 — прошлого 101, 109
 — сферы 318, 319
 Поле 313
 — собственное 315, 344, 346 и др.
 — физическое 313
 — электромагнитное 232, 241, 245, 365, 368, 379
 Полиада 19
 Полилинейность тензорного произведения 20
 Полискалярное умножение тензоров 22
 Постоянная Планка 446
 — тонкой структуры 262, 399, 418, 774, 775
 Постулаты специальной теории относительности 110, 141, 150, 152, 157, 158
 Поступательное движение тела 127
 Потенциалы Лиенара–Вихерта 370
 Правило бискалярного умножения тензоров 321, 696
 — выбора знака 467
 — замены векторов в тензоре 33
 — использования матриц вместо тензоров 32
 — скалярного умножения диад 190
 — — — тензоров 21, 321
 — трискалярного умножения тензоров 321
 Правоориентированный базис 34, 320, 321, 322
 Правый базис 34
 Преобразование 188
 — активное 166, 183, 185
 — времени 783
 — Галилея 176
 — Лоренца 160, 166, 167, 176, 183, 185, 292
 — пассивное 166, 183
 Прецессия Лармора 260
 — ларморовская 244, 260, 390, 403, 404, 453
 — спина 265
 — Томаса 263, 264, 269, 303
 — томасовская 260
 Принцип близкодействия 309, 315, 405
 — относительности Галилея 128
 — причинности 309, 315, 405, 747
 — суперпозиции полей 310, 315, 405
 Присоединенное пространство 36
 Причинная механика Козырева 774
 Причинно-следственное звено 774

- Причинности принцип 309, 315, 405, 747
 Причинность 747
 Проектор 210, 242
 Произведение векторов векторное 322, 342
 — — скалярное 15
 — — тензорное 19
 — двойное векторное 323–324
 — тензоров скалярное 21
 — — тензорное 20
 Пространства изоморфные 25
 Пространственная инверсия 783
 — координата 130
 Пространственно-временная субстанция 762, 783, 784, 786
 Пространственное вращение 240, 343
 Пространственноподобная гиперплоскость 73
 — линия 70
 — плоскость 188
 — прямая 80
 Пространственноподобный 69, 101
 — вектор 69
 Пространственный поворот 188, 190, 291 и др.
 Пространство ассоциированное 36, 68, 187
 — аффинное 36
 — базисное 12, 109, 305
 — билинейных форм 25
 — векторное 15
 — вещественное 15, 36
 — двухвалентных тензоров 25, 26, 28
 — евклидово 36, 37
 — линейное 15, 28
 — — вещественное 15
 — — тривиальное 17
 — линейных операторов 25
 — Минковского 10, 13, 18, 37 и др.
 — присоединенное 36
 — псевдоевклидово 36, 46, 306
 — пространство с отрицательно определенной метрической формой 18
 — — положительно определенной метрической формой 18
 — собственно евклидово 36, 37, 46
 — тензоров второго ранга 20, 23
 — — ранга r 20, 33
 — точечно-векторное 36
 — тривиальное 17
 — физическое 124, 126, 127 и др.
 — M 68
 — V 15
 — V_+ 103
 — $V^{\otimes 1}$ 20
 — $V^{\otimes r}$ 20
 — $V \otimes V$ 23
 — $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ 20
 Пространство-время 13, 316
 — — абсолютное 760
 Противоположно ориентированные базисы 34
 Противоположные временные ориентации векторов 102
 Противоположный элемент линейного пространства 15
 Прямая времениподобная 80
 — изотропная 38, 45, 71, 80, 306
 — пространственноподобная 80
 Псевдовектор 35
 — единичный 35
 Псевдовекторная составляющая антисимметричного тензора 324, 363
 Псевдоевклидова плоскость 37, 38, 40 и др.
 Псевдоевклидово пространство 36, 46, 306
 Псевдоскаляр единичный 35, 233, 320, 332, 366
 Псевдосфера 91
 Псевдотензор 35
 — Леви-Чивита 232, 233, 320, 321
 Пуанкаре группа 187, 188, 198

- Равноускоренное движение 200
 Радиус сферы 91, 305
 — частицы 413, 457, 724
 — электрона 457
 — — классический 244, 457
 Разделение (распад) материальных точек 116
 Различно ориентированные базы 34
 Разложение тензора по базису 28
 Разложимый тензор 20
 Размерность пространства 17, 36
 Разность уровней энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ 261, 263, 398, 400, 405
 Ранг тензора 19
 Распад материальных точек 116
 Рассеяние 222, 223
 — комптоновское 222
 Расстояние 37, 69
 Расширение Вселенной 220
 Реакция излучения 743
 Релятивистский эффект 157
 Римана геометрия 14
 Рождение пары электрон–позитрон 228
 Ротор 640

 Самодействие 150
 — частицы 645, 743
 — электрона 448, 453, 455
 Самоподдерживающееся магнитное поле 462
 Самосопряженный тензор 23, 99
 Света скорость 111, 154, 156 и др.
 Световой 69, 101
 — конус 46, 71, 94, 96, 98 и др.
 — — будущего 101, 109, 356
 — — прошлого 101, 109, 356
 Светоподобная материальная точка 109, 158
 Свёртывание тензора 24
 Сигнатура пространства 17, 18, 36, 37
 Сила 140, 141, 229
 Сила внешняя 229
 — внутренняя 229
 — действия 140
 — Лоренца 234, 244
 — противодействия 140
 Символ Кронекера 30, 189, 283
 Симметричность скалярного умножения 16
 Симметричный тензор 23, 99
 Симметрия пространства 198, 199
 Система координат 124
 — — инерциальная 129
 — отсчёта 123, 124, 125, 126 и др.
 — — инерциальная 127, 132, 136 и др.
 — — исходная 299
 — — материальная 125
 — — мгновенно сопутствующая 200, 260
 — — неинерциальная 132, 134
 Скалярное произведение векторов 15, 68
 — — тензоров 21
 — умножение векторов 15, 68
 — — диады на вектор 21, 22
 — — тензоров 21, 22, 321
 Скалярный квадрат вектора 16, 68
 Скорость 327
 — луча 472
 — материальной точки 114, 115, 119
 — — — относительно пространства M 114, 115
 — — — системы отсчета 145, 282, 299
 — нити 472, 495
 — оси луча 472, 496
 — переориентированного луча 482
 — света 111, 154, 156 и др.
 — системы отсчета 162, 282
 — «точечной» частицы 342, 345, 357
 — угловая 60, 63, 243 и др.
 — — условная 362, 364
 — центра частицы 495
 — частицы 472, 485
 След тензора 24, 32

- Слияние материальных точек 116
 Сложение тензоров 20
 — элементов линейного пространства 15
 Смешанный базис 30, 32
 Собственная энергия луча 727
 — — частицы 726, 729, 731
 Собственно евклидова плоскость 40, 41, 54, 55, 59
 — евклидово пространство 36, 37, 46
 Собственное время 110, 114, 199
 — — частицы 314, 315, 316, 327
 — поле частицы 315, 344, 346, 535
 — физическое пространство частицы 314, 331, 412
 Собственный магнитный момент 244, 446
 — — — частицы 721, 736
 Соглашение о суммировании 29
 Соединение материальных точек 116
 Сокращение движущегося тела 170
 Соответственные нити 480
 Соотношения неопределенностей 774, 780, 781
 Сопровождающий базис 239, 251, 393
 Сопряженный базис 29
 — тензор 23, 26, 99
 Сопутствующая система отсчета 200
 Специальная теория относительности 13, 107, 109 и др.
 Спин луча 414, 415, 417, 445 и др.
 — переориентированного луча 435
 — частицы (ненулевого радиуса) 407, 421, 445 и др.
 — электрона 244, 398, 405, 406, 446
 — элементарной частицы 263
 Спина прецессия 265
 Спираль 412
СРТ-теорема 783, 785
 Стационарные электронные орбиты 740
 «Столкновение» материальных точек 776
 Стороны угла 178
 Суперпозиция бустов 297
 — электромагнитных полей 367
 Сфера 91, 93, 94, 96, 305
 — нулевого радиуса 306, 307
 — с времениподобным радиусом 91
 — с пространственноподобным радиусом 91, 305
 Тахион 159
 Телекинез 769
 Телепатия 769
 Тело материальное 12, 14, 109, 305
 — отсчета 124
 Тензор 19, 235
 — антисимметричный 23, 99, 310, 324 и др.
 — второго ранга 19, 23
 — двухвалентный 23, 25, 26, 28
 — единичный 24, 31, 189, 283, 426
 — инфинитезимальный 236, 237
 — кососимметричный 23, 99
 — метрический 24, 321, 426
 — неразложимый 20
 — нулевой 20
 — обратимый 24
 — обратный 24, 26
 — ортогональный 26, 72, 187, 237
 — первого ранга 19
 — поворота 40, 41, 46, 50, 52, 68
 — проецирования 210, 242
 — разложимый 20
 — ранга r 19
 — самосопряженный 23, 99
 — симметричный 23, 99
 — сопряженный 23, 26, 99, 425
 — транспонированный 23, 99, 425
 — третьего ранга 19
 — угловой скорости 62, 64
 — фундаментальный 24, 426
 — четвертого ранга 19
 — электромагнитного поля 232, 324
 Тензорное произведение векторов 19
 — умножение векторов 19, 21
 — — тензоров 20, 21

- Тензорный базис 28
 Теорема *CPT* 783, 785
 — о векторной и псевдовекторной составляющих антисимметричного тензора 324
 — — скорости материальной точки нулевой массы 156
 — — — «точечной» частицы 342
 — — собственном поле «точечной» частицы 346
 — — среднем значении (обобщенная) 630
 — — суперпозиции бустов 297
 — об ограниченности скорости материальной точки 146
 — — операторе пространственного поворота 426
 — Кориолиса 139
 — Пифагора (для псевдоевклидовой плоскости) 80, 113
 — — (для собственно евклидовой плоскости) 82
 Теория относительности 13, 14, 108, 111, 118, 123, 126 и др.
 — — общая 13, 14, 142
 — — специальная 13, 107, 109 и др.
 — физическая 12, 13, 142
 Тип пространства 17, 36, 37
 Тожественный оператор 426
 Томаса прецессия 263, 264, 269, 303
 Томасовская прецессия 260
 Тонкая структура уровней энергии 261, 398
 Тонкой структуры постоянная 262, 399, 418
 Точечная модель электрона 9, 304
 «Точечная» модель электрона 307, 310, 311 и др.
 — частица 305, 307, 310 и др.
 Точно-векторное пространство 36
 Точка возврата 70
 — излома линии 70
 — материальная 109, 114 и др.
 — наблюдения 344, 358, 364
 Траектория материальной точки 131, 132, 145, 246
 — частицы 356, 371
 Трансляция 188, 198
 Транспонирование тензора 23
 Транспонированный тензор 23, 99, 425
 Третий закон Ньютона 140
 Трехпараметрическая формула 299
 Трехточие 22
 Тривиальное линейное пространство 17
 Трискалярное умножение тензоров 22, 321
 Угловая скорость 60, 63, 243 и др.
 — — луча 412, 485
 — — условная 362, 364
 Угол абберации 215, 217
 — между векторами 38, 54, 177, 283, 352
 — — прямыми 39, 178
 Умножение (групповая операция) 27
 — векторов векторное 234
 — — скалярное 15, 68
 — — тензорное 19, 21
 — диады на вектор скалярное 21, 22
 — тензоров бискалярное 22, 321
 — — двойное скалярное 22
 — — полискалярное 22
 — — скалярное 21, 321
 — — тензорное 20, 21
 — — трискалярное 22, 321
 — элемента линейного пространства на число 15
 Уравнение винтовой линии 429
 — — нити 470, 493
 — движения 233, 238, 240, 380, 402
 — — оси луча 523
 — — — — приближенное 525
 — — частицы 315, 379
 — — — ненулевого радиуса 524
 — — — — приближенное 525
 — — электрона 240

- Уравнение нити 467, 470
 — окружности в псевдоевклидовой плоскости 44, 55
 — — в собственно евклидовой плоскости 44, 55
 — оси луча 470, 493
 — нити 470
 — расхода массы фотонной ракеты 119, 121
 — светового конуса 71, 306
 — сферы 91, 305, 317
 — энергии 232
 Уравнения Максвелла 370, 404
 Уровни энергии $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ 261, 263, 398, 400, 405
 Ускорение материальной точки относительно пространства M 118, 119
 — — — системы отсчета 200, 230
 — мгновенное 200
 — тела 235
 — центра частицы 358
 — центростремительное 248
 Условие движения частицы 473
 — переориентации лучей 444, 612
 — — — обобщенное 714
 Условия согласованности ориентаций лучей 481, 495
 Условная угловая скорость 362, 364
- Физика 766
 Физическая теория 12, 13, 142
 Физическое поле 313
 — пространство 124, 126, 127 и др.
 — — частицы 314, 412 и др.
 Форма метрическая 18, 37, 365
 Формула двухпараметрическая 299
 — Комптона 224
 — сложения скоростей 208, 211, 213
 — трехпараметрическая 299
 Формулы Лоренца 166, 183, 247
 Фотон 119, 218, 225, 228 и др.
 Фотонная ракета 120, 121
 Фундаментальный тензор 24, 426
- Ход времени 774
- Центр вращения 79
 — окружности 43
 — поворота 40, 79
 — сферы 305
 — частицы 307, 314, 407, 410, 412
 Центральное сечение частицы 413, 645
 Центростремительное ускорение 248
- Частица 10, 307, 313, 315, 412 и др.
 — виртуальная 313
 — ненулевого радиуса 406, 407, 410, 412, 414 и др.
 — свободная 483
 — «точечная» 305, 307, 310, 406 и др.
 — элементарная 10, 13, 315
 Часы 124, 126
 — идеальные 126
 Четырехмерный шар 413
 Число гипердействительное 355
- Шаг винтовой нити 468
 — луча 468
 — спирали 468
 Шар 305, 412
 — четырехмерный 412
 Штерна–Герлаха опыт 454, 724
- Эйнштейна–Подольского–Розена эффект 749
 Электрическая постоянная 365
 Электрический заряд 365, 379 и др.
 Электромагнитное поле 232, 241, 245, 365, 368, 379
 Электрон 13, 222, 225, 228, 241, 244, 245, 261, 263, 264 и др.
 см. также Модель электрона
 Элемент группы единичный 27
 — — обратный 27
 — линейного пространства 15
 — — — нулевой 15
 — — — противоположный 15

- Элемент луча 310, 314
 — частицы 310, 314
 Элементарная частица 10, 13, 315
 Энантиоморфные модификации геометрических объектов 34
 Энергии уравнение 232
 Энергия 151
 — и импульс материальной точки 152, 157, 158, 218, 234
 — покоя 153, 154
 Эффект Доплера 218, 220, 221
 — — поперечный 221
 — — продольный 220
 — замедления времени 173
 — Комптона 222

 4-винт 194, 284, 288
 4-импульс 115, 157 и др.
 4-скорость 115, 314, 327, 342 и др.

 c — скорость света
 M — пространство Минковского
 T — ось времени
 τ — направляющий орт оси времени
 Γ — физическое пространство ($\Gamma \perp T$)
 $\{T, \Gamma\}$ — система отсчета в M
 i — мнимая единица
 $\mathbf{i}$ — единичный вектор, касательный к мировой линии
 $\mathbf{q}_0$ — единичный направляющий вектор оси луча
 $C_{\mathbf{q}_0}$ — трехмерное подпространство, содержащее луч с ортом оси $\mathbf{q}_0$
 N — количество лучей, образующих частицу
 n_* — количество спиралей в луче
 m_* — масса спирали
 o — угловая скорость вращения луча
 p_* — радиус спирали
 r_* — радиус частицы

 CPT -теорема 783, 785
 g -фактор 454
 α — постоянная тонкой структуры
 $\varkappa$ — псевдотензор Леви-Чивита

 e — заряд электрона ($e < 0$)
 $\mathbf{F}$ — тензор электромагнитного поля
 $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля (вектор)
 $\overline{H}$ — напряженность магнитного поля (псевдовектор)

 V — векторное пространство
 $V^{\otimes r} = V \otimes \dots \otimes V$ — множество всех тензоров ранга r
 $Lin\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — линейная оболочка векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$
 $Lin^\perp\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — ортогональное дополнение к $Lin\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$
 $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — плоскость, содержащая векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$
 $\mathcal{O}$ — ортогональная группа векторного пространства

 $\perp$ — символ ортогональности векторов, отрезков и подпространств
 $\parallel$ — символ параллельности векторов или отрезков
 $\times$ — векторное умножение в Γ
 $\otimes$ — тензорное умножение
 $\wedge$ — внешнее умножение векторов ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$)
 ∇ — оператор набла (градиент) в Γ
 Δ — единичный псевдоскаляр в Γ
 Δ — символ приращения (некоторой величины или функции)
 $\triangle$ — символ треугольника
 $\diamond$ — символ, имеющий три возможных значения ($\diamond = -1, 0, 1$)
 $\bullet$ — символ, смысл которого указан на с. 579, 650, 708

Научное издание

Лаврентий Семёнович Шихобалов

Электрон

Оригинал-макет подготовлен Л. С. Шихобаловым

e-mail: laur3@yandex.ru