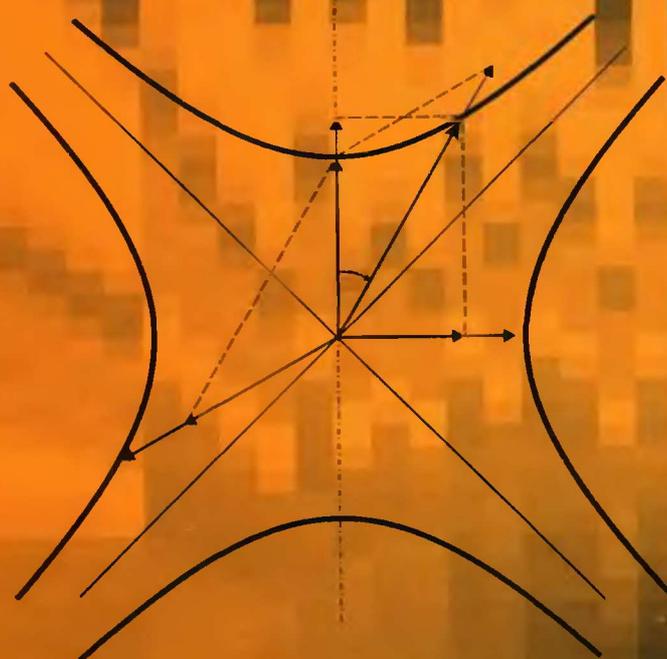


Л. С. Шихобалов

ЛУЧИСТАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Л. С. Шихобалов

ЛУЧИСТАЯ МОДЕЛЬ
ЭЛЕКТРОНА

*Дорогому
Александру Петровичу
Левину
с глубокой благодарностью
за постоянную поддержку!*
Л. Шихобалов
5.01.06



Издательство С.-Петербургского университета
2005

УДК 530.1; 530.12:531.18; 537.8

ББК 22.253

Ш65

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Жилин*
(С.-Петерб. гос. политех. ун-т),
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик*
(С.-Петерб. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Шихобалов Л. С.

Ш65 Лучистая модель электрона. — СПб.: Изд-во С.-Петерб.
ун-та, 2005. — 230 с.
ISBN 5-288-03848-1

Электрон представлен в пространстве Минковского в виде геометрического объекта, который близок к четырехмерному шару и наделен определенной структурой. Благодаря псевдоевклидовости пространства Минковского, такой объект является неограниченным и объединяет обычно различаемые между собой электрический заряд и его электромагнитное поле. Модель позволяет рассчитать напряженности электрического и магнитного полей при произвольном движении заряда, описывает спин и собственный магнитный момент электрона, а также приводит к значениям постоянной тонкой структуры и множителя Ланде, которые отличаются от их экспериментальных значений на относительные величины $2 \cdot 10^{-7}$ и $5 \cdot 10^{-6}$ соответственно.

Книга предназначена для научных сотрудников и аспирантов, интересующихся проблемами теории элементарных частиц и теории относительности.

Библиогр. 30 назв. Ил. 25.

ББК 22.253

Shikhobalov L. S. The radiant model of an electron.

An electron is modelled as such geometry object in the Minkowski space, which has form of 4-dimensional ball and has specific structure. This object is unlimited one and it joins an electric charge and charge's electromagnetic field. The model describes the electric and magnetic fields of an arbitrary moving charge. It describes the spin and the intrinsic magnetic moment of an electron also and it gives the values of the fine structure constant and of the Lande-factor, which equal to experimental ones with high precision.

ISBN 5-288-03848-1

© Л. С. Шихобалов, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. «Точечная» частица	7
2. Частица конечного радиуса	10
3. Собственное время частицы. Движение свободной частицы	21
4. Спин луча. Постоянная тонкой структуры	31
5. Спин частицы. Переориентация лучей	39
6. Операторы интегрирования по поперечному сечению луча и по центральному сечению частицы	52
7. Скорость частицы	63
8. Законы движения частицы	68
9. Частица в однородном электромагнитном поле	77
10. Действие на частицу магнитного поля	89
А. Однородное магнитное поле	90
Б. Неоднородное магнитное поле	93
11. Спин и собственный магнитный момент частицы (сравне- ние с опытными данными)	105
12. Плотность нитей	113
13. Собственное поле частицы	134
А. Собственное поле частицы вдали от ее центра	140
Б. Собственное поле вращающейся частицы	148
14. Самодействие вращающейся частицы	172
15. Радиус частицы	190
16. Собственная энергия частицы	192
17. Позитрон	203
18. Обсуждение	205
А. О стационарных электронных орбитах	205
Б. О квантовомеханических соотношениях неопределенно- стей	208
В. О реакции излучения	210

Г. О дискретности и непрерывности характеристик частицы	210
Д. О причинности и взаимодействии частиц	212
Е. О частице в псевдоримановом пространстве-времени ...	217
Ж. О моделях элементарных частиц	220
З. О физических законах и свободе воли	220
Заключение	222
Литература	226

«Знаете, было бы вполне достаточно по-настоящему понять электрон».
А. Эйнштейн, цит. по [27]

«Электрон так же неисчерпаем, как и атом, природа бесконечна. . . »
В. И. Ульянов [28]

«... теорию электрона нельзя считать законченной, поскольку ей присущи внутренние логические противоречия».
Физический энциклопедический словарь [29]

Введение

В настоящей работе в качестве базисного многообразия принято *пространство Минковского* — четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство типа $(1, 3)$ с фиксированной временной ориентацией. Условие, касающееся временной ориентации, не включаемое обычно в понятие пространства Минковского, принято здесь с целью согласования для разных объектов в этом пространстве понятий прошлого и будущего. Фиксировать временную ориентацию пространства — означает подразделить согласованным образом полы всех световых (изотропных) конусов на два вида: на полы будущего и полы прошлого. Согласованность подразделения пол означает, что при совмещении любых двух световых конусов путем параллельного сдвига одного из них обязательно совмещаются друг с другом одноименные полы. Полы будущего именуются также световыми конусами будущего, а полы прошлого — световыми конусами прошлого. Все векторы пространства Минковского подразделяются на времениподобные, пространственноподобные и изотропные. Первые имеют положительные скалярные квадраты, вторые — отрицательные, третьи — нулевые. Времениподобные векторы с началом в вершине светового конуса и концом во внутренней области конуса будущего называются ориентированными (или направленными) в сторону будущего. Противоположные к ним векторы называются ориентированными в сторону прошлого.

В дальнейшем пространство Минковского и ассоциированное с ним векторное пространство обозначаются одним символом M . Мо-

дуг (длина) вектора $\mathbf{x} \in M$ понимается как вещественное неотрицательное число $|\mathbf{x}| = \sqrt{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|}$ (точка — знак скалярного умножения). Векторы единичной длины именуется ортами. Орт \mathbf{x} называется единичным, если $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$, и мнимоединичным, если $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = -1$. Расстояние между двумя точками пространства Минковского определяется как длина вектора, соединяющего эти точки. Угол между времениподобными векторами мы обозначаем, следуя традиции, с использованием символа мнимой единицы i , например, $i\varphi$. Роль символа i здесь состоит лишь в напоминании о необходимости при оперировании этими углами применять гиперболические функции вместо тригонометрических. Мы используем значки \perp и \parallel для обозначения соответственно ортогональности и параллельности векторов, прямолинейных отрезков и подпространств. Все встречающиеся функции считаются непрерывно дифференцируемыми требуемое число раз.

Нумерация формул, теорем и рисунков — единая по всей работе и включает в себя номер раздела и номер формулы, теоремы или рисунка в этом разделе (например, теорема 9.2 — вторая теорема в разд. 9). Символ \blacksquare означает конец доказательства.

В настоящей работе термины «элементарная частица», «электрон» и им подобные обозначают объекты реального мира; *под термином «частица» понимается только строящаяся математическая конструкция.*

1. «Точечная» частица

При построении теории элементарных частиц естественно пытаться моделировать их геометрическими объектами в пространстве Минковского M . В работах [1, 2] предложена следующая модель электрона, в рамках которой его симметрия описывается группой лоренцевых преобразований, сохраняющих временную ориентацию пространства M . В этой модели электрон или, точнее, его геометрический образ, именуемый *частицей*, представляет собой совокупность времениподобных прямых, которые пересекаются в одной точке — *центре* частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Прямые, составляющие частицу, названы *лучами* и интерпретированы как геометрические образы неких реально существующих материальных объектов (рис. 1.1). Считается, что лучи движутся в пространстве M согласованным образом так, что центр частицы «заметает» в M некоторую времениподобную линию — *мировую линию* частицы. Каждому элементу луча поставлен в соответствие антисимметричный двухвалентный тензор (бивектор)

$$\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0, \quad (1.1)$$

где \mathbf{q}_0 — направляющий орт луча, ориентированный в сторону будущего; \mathbf{j}_0 — скорость элемента луча (определяемая как производная вектора перемещения элемента по натуральному параметру на мировой линии частицы); тензорное произведение векторов здесь и далее обозначено без знака умножения между сомножителями.

Вследствие движения частицы вдоль мировой линии, через каждую фиксированную точку x пространства M проходят лучи частицы от различных ее расположений на мировой линии (см. рис. 1.1). Интегрирование тензора (1.1) по всем таким расположениям частицы с весом, пропорциональным плотности лучей в окрестности x , дает обычный (максвелловский) тензор электромагнитного поля движущегося точечного заряда.

При расчете учитываются только те расположения частицы, при которых центр частицы находится в световом конусе прошлого точки x ; единственным подгоночным параметром служит скалярный множитель, пропорциональный общему числу лучей и принимаемый равным $4\pi e$, где e — заряд электрона; уравнения Максвелла не используются; дискретный набор лучей заменяется здесь континуальным их множеством подобно тому, как в макромеханике тела, состоящие из дискретной совокупности атомов, представляются сплошной средой.

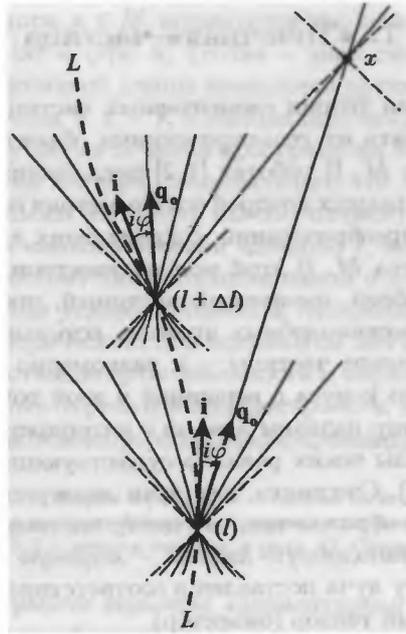


Рис. 1.1. Два положения частицы на мировой линии.

Углы $i\varphi$ между касательным ортом i к мировой линии L и направляющими ортами лучей q_0 не меняются при движении частицы (тонкие штриховые линии — световые конусы; i — мнимая единица; l — натуральный параметр на L ; x — произвольная точка пространства Минковского M).

В случае частицы конечного радиуса прямые, проходящие через центр частицы, — оси лучей; q_0 — направляющий орт оси луча.

Таким образом, данная модель соединяет в одном объекте обычно различаемые между собой электрически заряженную частицу и создаваемое ею электромагнитное поле. В рамках этой модели электрон представляет собой структуру из указанных выше лучей, которая простирается от точки, названной центром частицы, до бесконечности во всех времениподобных направлениях. Эта структура предполагается одинаковой во все моменты времени, иначе говоря, электрон рассматривается как *недеформируемый* объект, движущийся как целое в пространстве M (хотя при этом состав-

ляющие его лучи могут двигаться неодинаковым образом, поскольку произвольное добавочное движение лучей вдоль самих себя не изменяет конфигурацию частицы и не влияет на значение тензора (1.1)). Вместе с тем допускается *взаимопроникновение* лучей различных частиц, что соответствует принципу суперпозиции электромагнитных полей. В связи с тем, что в рамках данной модели частица имеет в трехмерном физическом пространстве, сопутствующем центру частицы, нулевой размер, мы называем такую частицу *«точечной»*.

2. Частица конечного радиуса

Усовершенствуем модель таким образом, чтобы она описывала *спин* электрона, то есть его собственный момент количества движения. Для этого придадим частице ненулевой размер в физическом пространстве и введем вращения лучей, воспринимаемые изнутри физического пространства как вращения, одинаковые вокруг всех направлений. Такую модернизацию модели осуществим путем усложнения строения лучей.

Итак, в дальнейшем мы будем по-прежнему называть *частицей* геометрический объект в пространстве Минковского M , представляющий собой определенную совокупность лучей. Но теперь будем полагать, что каждый *луч* есть некий винтообразный объект с времениподобной осью, который состоит из n_* штук одинаковых «толстых» винтовых линий и вращается вокруг своей оси (рис. 2.1). Дадим детальное описание этой конструкции.

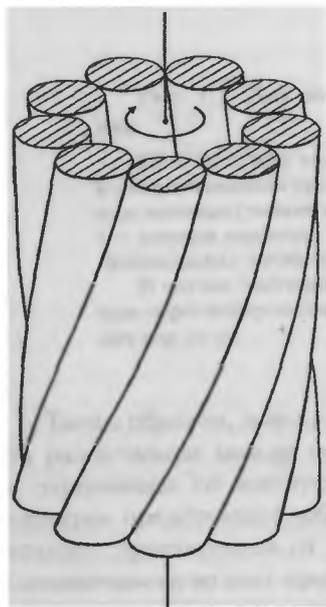


Рис. 2.1. Один из лучей частицы.

Начнем с определения осей лучей. Назовем *осями* лучей частицы времениподобные прямые, которые пересекаются в одной точке — *центре* частицы — и равномерно распределены по внутренности светового конуса этой точки. (Такое определение мы принимаем для того, чтобы при «взгляде» на частицу издали, когда внутреннее строение лучей не различимо, лучи выглядели как прямые линии, а вся частица — в точности как «точечная» частица, рассмотренная в предыдущем разделе.) Всю совокупность осей лучей назовем *остовом* частицы, а мировую линию центра частицы — *мировой линией* частицы (см. рис. 1.1).

Теперь детализируем понятие луча.

Зафиксируем некоторое расположение остова частицы в пространстве M . Пусть в этом расположении центр частицы находится в точке $O \in M$. Зададим, кроме того, какой-либо единичный времениподобный вектор \mathbf{i} , ориентированный в сторону будущего и отложенный от центра частицы (этот вектор в дальнейшем будет играть роль направляющего орта оси симметрии частицы). В соответствии с только что сказанным, оси лучей есть времениподобные прямые, проходящие через центр частицы. Обозначим символом \mathbf{q}_o направляющий орт оси произвольного луча, тоже ориентированный в сторону будущего и отложенный от центра частицы. Орт \mathbf{q}_o — свой для каждого луча, вектор \mathbf{i} — единый для всей частицы ($\mathbf{q}_o \cdot \mathbf{q}_o = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$).

В последующих разделах при описании движения частицы в пространстве M точка O будет представлять собой одну из точек мировой линии частицы, а орт \mathbf{i} при определенных типах движения частицы будет служить направляющим ортом касательной к мировой линии в точке нахождения центра частицы, как это изображено на рис. 1.1.

Введем для каждой оси луча такое содержащее ее трехмерное аффинное подпространство $C_{\mathbf{q}_o} \subset M$, для которого ассоциированным векторным пространством служит

$$\text{Lin}\{\mathbf{q}_o\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\} \quad (\text{при } \mathbf{q}_o \neq \mathbf{i}), \quad (2.1)$$

где символ $\text{Lin}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots\}$ обозначает линейную оболочку векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$; верхний значок \perp — переход к ортогональному дополнению в векторном пространстве, ассоциированном с M ; знак \oplus — прямая сумма векторных пространств. Для оси луча с направляющим ортом \mathbf{q}_o , равным \mathbf{i} , подпространство $C_{\mathbf{q}_o}$ определяется не единственным образом; такую ось исключим из рассмотрения (без ущерба для дальнейшего).

Условимся обозначать каждое аффинное (точечное) пространство и ассоциированное с ним векторное пространство единым символом. В частности, в дальнейшем символом $C_{\mathbf{q}_o}$ будем обозначать наряду с указанным аффинным подпространством еще и векторное пространство (2.1). Символом $\text{Lin}\{\mathbf{q}_o\}$ будем обозначать вместе с векторным пространством также времениподобную прямую, служащую осью луча. Запись $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ (при $\mathbf{q}_o \neq \mathbf{i}$) будем использовать для обозначения как векторного пространства, так и ортогональной к орту \mathbf{i} и к оси луча пространственноподобной плоскости, проходящей через центр частицы. Заметим, что пересечение $\text{Lin}\{\mathbf{q}_o\} \cap \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ есть центр частицы.

Зададим в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$ фигуру, состоящую из n_* штук одинаковых кругов радиуса p_* , которые касаются друг друга и центры которых располагаются вдоль окружности радиуса r_* с центром в точке O (рис. 2.2). (Для дальнейшего не имеет значения, являются круги замкнутыми множествами или открытыми, то есть содержат или не содержат они свои границы; $r_* > p_* > 0$.) Из рисунка легко видеть, что

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}. \quad (2.2)$$

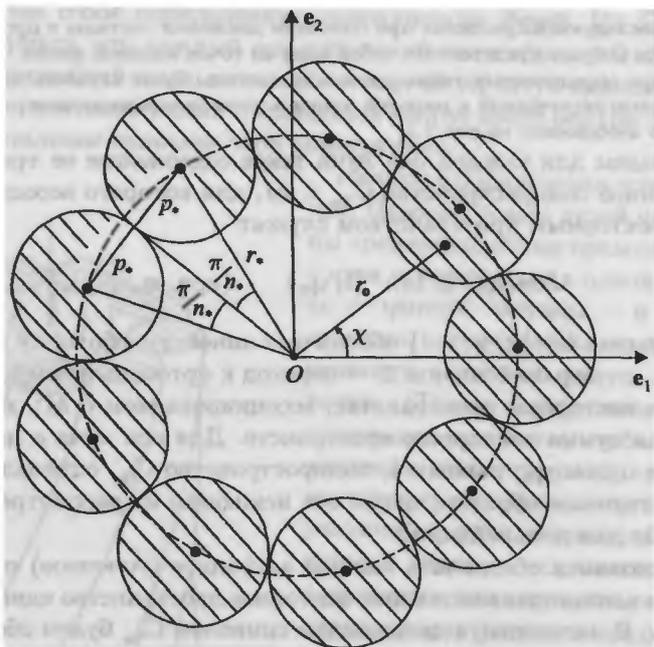


Рис. 2.2. Поперечное сечение луча.

Показанное количество кругов — условное.

Лучом с осью $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ назовем трехмерный винтообразный объект в $C_{\mathbf{q}_0}$, который «замечет» данная фигура, если придать ей винтовое движение в $C_{\mathbf{q}_0}$ вдоль оси $Lin\{\mathbf{q}_0\}$, то есть если перемещать фигуру параллельно самой себе вдоль оси $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ с одновременным вращением ее вокруг этой же оси (отметим,

что прямая $Lin\{q_0\}$ ортогональна плоскости залегания фигуры $Lin^\perp\{i, q_0\}$. При таком движении фигуры каждая ее точка «заметет» в S_{q_0} некоторую винтовую линию, которую будем называть *нитью* (рис. 2.3). Нити, порождаемые центральными точками кругов, входящих в состав фигуры, назовем *центральными нитями*. Совокупность нитей, которые порождаются всеми точками одного круга, есть та самая «толстая» винтовая линия, о которой говорилось выше; будем именовать ее, для краткости, *спиралью*. Луч состоит из n_* одинаковых спиралей (см. рис. 2.1). Сечение луча любой плоскостью, лежащей в S_{q_0} и ортогональной его оси $Lin\{q_0\}$, назовем *поперечным сечением* луча. Все такие сечения имеют вид фигуры, показанной на рис. 2.2.

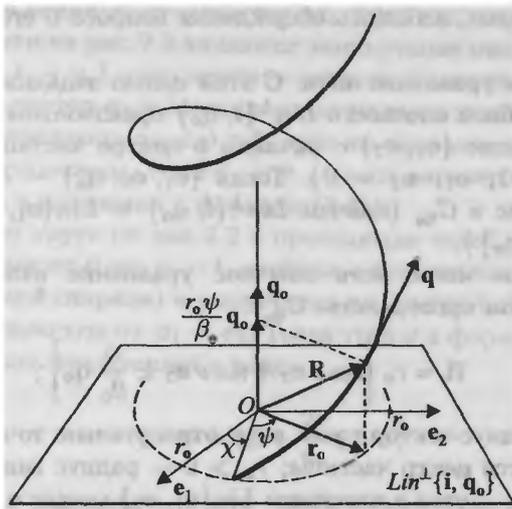


Рис. 2.3. Винтовая нить.

Итак, в качестве простейшего структурного элемента луча и тем самым всей частицы мы принимаем нить. Выше мы использовали предположение, что нити порождаются каждой точкой фигуры, показанной на рис. 2.2. В этом случае спирали, образуемые нитями, являются сплошными телами. Можно, однако, отказаться от данного предположения и считать, что лишь какие-то определенные точки каждого круга, входящего в состав упомянутой фигуры, порождают нити. В таком случае спирали будут состоять из дискретного набора нитей. Далее мы будем полагать возможными оба

этих вариантов. Более того, мы будем допускать, что распределение нитей внутри спиралей может быть как равномерным, так и неравномерным. Рассмотрение вопроса о распределении нитей внутри спиралей отложим до разд. 6. Вместе с тем будем считать, что *каждый луч частицы обладает осевой симметрией порядка n_** , то есть нити распределены внутри спиралей таким образом, что луч приходит в совмещение сам с собой при повороте вокруг своей оси (внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$) на любой угол, кратный $2\pi/n_*$. Нити разных спиралей, преобразующиеся друг в друга при таких поворотах, будем называть *соответственными нитями*. Подчеркнем, что нить — геометрическая линия. Принятие геометрической линии в качестве элементарного «кирпичика» модели позволяет, с одной стороны, дать этому объекту строгое математическое описание и, с другой стороны, избежать обсуждения вопроса о его внутреннем строении.

Выпишем уравнение нити. С этой целью зададим в пространственноподобной плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ произвольный ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ с началом в центре частицы ($\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1$; $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$). Тогда $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ — ортонормированный базис в $C_{\mathbf{q}_0}$ (причем $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $C_{\mathbf{q}_0} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$).

Уравнение нити есть обычное уравнение винтовой линии (в трехмерном пространстве $C_{\mathbf{q}_0}$):

$$\mathbf{R} = r_0 \left[\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2 \pm \frac{\psi}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right], \quad (2.3)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор точек нити относительно точки O , в которой находится центр частицы; $r_0 > 0$ — радиус винтовой линии; $\nu = \chi + \psi$; χ — угол в плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ между \mathbf{e}_1 и радиусом-вектором той точки фигуры, изображенной на рис. 2.2, которая порождает данную нить; ψ — *винтовая переменная* — угол, на который проекция радиуса-вектора \mathbf{R} на плоскость $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ поворачивается при движении конца вектора \mathbf{R} вдоль нити; $\psi \in (-\infty, +\infty)$ (ψ отсчитывается от радиуса-вектора точки фигуры, порождающей нить, то есть $\psi = 0$ при $\mathbf{R} \in Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, см. рис. 2.3); направление возрастания углов ν , χ и ψ совпадает с направлением кратчайшего поворота от \mathbf{e}_1 к \mathbf{e}_2 ; $\beta_0 > 0$ — безразмерный параметр, характеризующий шаг нити; верхний знак перед последним слагаемым в правой части уравнения отвечает случаю, когда ориентации в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и винтовой нити совпадают, нижний

знак — когда они противоположны (рис. 2.3 соответствует первому из этих случаев).

Уравнение нити (2.3) может быть записано также в эквивалентной форме:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_o \pm \frac{r_o \psi}{\beta_o} \mathbf{q}_o, \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{r}_o = r_o \cos \nu \mathbf{e}_1 + r_o \sin \nu \mathbf{e}_2; \quad (2.5)$$

векторы \mathbf{r}_o и $\pm(r_o \psi / \beta_o) \mathbf{q}_o$ — составляющие радиуса-вектора \mathbf{R} вдоль взаимно ортогональных плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ и оси луча $Lin\{\mathbf{q}_o\}$ (см. рис. 2.3), причем вектор \mathbf{r}_o пространственноподобный, а вектор $\pm(r_o \psi / \beta_o) \mathbf{q}_o$ времениподобный. Из (2.5) следует, что радиус винтовой линии $r_o = \sqrt{|\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}_o|}$ ($r_o \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ в случае, когда круги на рис. 2.2 являются замкнутыми множествами, и $r_o \in (r_* - p_*, r_* + p_*)$, если круги — открытые множества). Отметим, что если вектор \mathbf{q}_o и составляющая радиуса-вектора \mathbf{R} вдоль оси луча сонаправлены, то $\pm\psi > 0$, если же направления этих векторов противоположны, то $\pm\psi < 0$ (смысл верхнего и нижнего знаков указан в пояснении к формуле (2.3)).

Занумеруем круги на рис. 2.2 и проходящие через них спирали целыми числами от 0 до $n_* - 1$, начиная с произвольного круга (и соответствующей спирали) и увеличивая их номера в направлении кратчайшего поворота от \mathbf{e}_1 к \mathbf{e}_2 . Тогда угол ν в формулах (2.3) и (2.5) может быть представлен в виде

$$\nu = \chi + \psi = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi, \quad (2.6)$$

где ξ — номер спирали, которой принадлежит рассматриваемая нить ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); χ_0 — значение угла χ для нити, которая относится к спирали № 0 и является нитью, соответственной рассматриваемой нити; $\chi_0 \in [0, 2\pi)$. Из (2.3) и (2.6) видно, что уравнения соответственных нитей, принадлежащих разным спиральям, различаются лишь слагаемым, кратным $2\pi/n_*$, в выражении для угла ν . Отметим, что угол χ_0 играет роль фазового угла (он фиксирует угловое расположение фигуры на рис. 2.2 относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$), его величина определяется, в частности, выбором базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ и выбором той из спиралей, с которой начинается их нумерация; основные последующие результаты от угла χ_0 не зависят.

Шаг нити Π может быть найден как расстояние между любыми двумя точками нити, для которых значения винтовой переменной ψ различаются на 2π : $\Pi = |(\mathbf{R}|_{\psi=\psi_0+2\pi}) - (\mathbf{R}|_{\psi=\psi_0})|$ (ψ_0 — произвольное фиксированное значение угла ψ). При данном способе построения луча — посредством винтового движения изображенной на рис. 2.2 фигуры — все нити, принадлежащие лучу, имеют одинаковый шаг; в связи с этим будем называть величину Π также *шагом спирали*. Учитывая сказанное, получаем с помощью уравнения (2.3):

$$\Pi = \frac{2\pi r_0}{\beta_0} = \frac{2\pi r_*}{\beta}, \quad (2.7)$$

где первое выражение относится к произвольной нити (характеризующейся радиусом r_0), а второе — к центральной нити (имеющей радиус r_*); через β обозначено значение параметра β_0 для центральной нити. Из (2.7) следует, что

$$\beta_0 = \beta \frac{r_0}{r_*}. \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что параметр β_0 пропорционален радиусу нити r_0 (ибо β не зависит от r_0). Принимая во внимание, что шаг винтовой линии постоянен вдоль всей ее длины, заключаем на основании (2.7), что параметры β_0 и β не зависят от винтовой переменной ψ .

Уравнение оси луча (в двух эквивалентных формах записи) получим, если подставим в уравнение нити (2.3) чисто формальным образом значение радиуса r_0 , равное нулю, и воспользуемся зависимостями (2.7) и (2.8):

$$\mathbf{R}_0 = \pm \frac{r_* \psi}{\beta} \mathbf{q}_0; \quad \mathbf{R}_0 = \pm \frac{\Pi \psi}{2\pi} \mathbf{q}_0, \quad (2.9)$$

где \mathbf{R}_0 — радиус-вектор точек оси луча относительно точки O ; знаки в правых частях равенств задаются тем же условием, что и в (2.3).

Направляющий орт \mathbf{q} касательной к нити определим как нормированную производную $\partial \mathbf{R} / \partial (\pm \psi)$. Из уравнения (2.3), учитывая независимость величин \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{q}_0 , r_0 , χ , β_0 от винтовой переменной ψ , находим:

$$\mathbf{q} = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \pm \cos \nu \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] \quad (\text{при } \beta_0 \neq 1), \quad (2.10)$$

здесь, как и в (2.3), (2.4) и (2.9), верхние знаки отвечают случаю совпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и нити, нижние знаки отвечают случаю их несовпадения; в первом из этих случаев берется производная \mathbf{R} по $+\psi$, а во втором — по $-\psi$, это делается для того, чтобы в обоих случаях вектор \mathbf{q} был направлен в сторону будущего (точнее, чтобы его составляющая вдоль оси луча $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ была сонаправлена с \mathbf{q}_0). При $\beta_0 > 1$ нить является пространственноподобной ($\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = -1$), а при $0 < \beta_0 < 1$ — времениподобной ($\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$). Если же $\beta_0 = 1$, то нить — изотропная линия; в этом случае в качестве значения ее направляющего вектора \mathbf{q} можно использовать то же выражение (2.10), но без нормировочного множителя $\beta_0/\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}$ (при этом $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0$). Точкой приложения вектора \mathbf{q} считаем конец радиуса-вектора \mathbf{R} (см. рис. 2.3).

Итак, мы построили один из лучей частицы. Остальные составляющие частицу лучи строятся таким же способом. Для последующего важно, чтобы нити всех лучей имели *согласованные ориентации*. Под этим требованием мы подразумеваем выполнение следующих условий: а) для всех лучей базисы $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ имеют в пространстве M одинаковую ориентацию; б) для всех лучей знаки в уравнении (2.3) перед последним слагаемым в правой части одинаковы.

Будем считать, что наряду с этими условиями выполняются еще два: в) все лучи имеют одинаковое количество спиралей n_* и одинаковые радиусы r_* и p_* (иначе говоря, лучи обладают одинаковыми поперечными сечениями, показанными на рис. 2.2); г) лучи, характеризующиеся различными значениями угла между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , имеют разные шаг \mathbb{H} и параметр β , а лучи с одинаковыми значениями этого угла имеют одинаковые \mathbb{H} и β . Обратим внимание на то, что условие г) делает объективно выделенным вектор \mathbf{i} (в том смысле, что этот вектор может быть найден по заданной конфигурации частицы, образно говоря, по ее мгновенной фотографии). Действительно, из данного условия вытекает, что лучи частицы, которые характеризуются одним и тем же значением шага \mathbb{H} , одинаково наклонены по отношению к прямой, содержащей вектор \mathbf{i} . Следовательно эта прямая может быть найдена путем измерения шага \mathbb{H} для разных лучей частицы. А так как вектор \mathbf{i} , по определению, имеет единичную длину, направлен в сторону будущего и отложен от центра частицы, то заданием содержащей его прямой он определяется полностью.

Очевидно, что при соблюдении перечисленных условий симмет-

рия частицы описывается подгруппой собственных пространственных вращений группы Лоренца, сохраняющих вектор \mathbf{i} (с точностью до фазового угла χ_0 , не влияющего на последующие результаты, и в предположении, что дискретный набор осей лучей заменен континуальным их множеством). Таким образом, прямая, содержащая вектор \mathbf{i} , играет роль *оси симметрии* частицы, а сам вектор \mathbf{i} служит направляющим ортом этой оси.

Назовем *собственным физическим пространством* частицы трехмерную пространственноподобную гиперплоскость Γ_* , проходящую через центр частицы и ортогональную вектору \mathbf{i} : $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$. Сечение частицы гиперплоскостью Γ_* будем именовать *центральной сечением* частицы.

Теорема 2.1. *Центральное сечение частицы представляет собой совокупность всевозможным образом ориентированных фигур, изображенных на рис. 2.2, которые имеют единственную общую для всех них точку — центр частицы.*

Доказательство. Так как $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\} = \Gamma_*$ при любом \mathbf{q}_0 , то для каждого луча порождающая его фигура (лежащая в соответствующей плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$) содержится в Γ_* . Вместе с тем никакие иные точки лучей не принадлежат Γ_* . Последнее вытекает из следующих соображений. Согласно (2.3) $\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \pm(r_0 \psi / \beta_0) \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i}$ (ибо в силу $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ выполняется $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i} = 0$). А поскольку $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} \neq 0$ (так как \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} — времениподобные векторы), то при любом $\psi \neq 0$ оказывается $\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} \neq 0$, то есть радиус-вектор точек нити \mathbf{R} имеет ненулевую составляющую в направлении, ортогональном Γ_* . Следовательно, $\mathbf{R} \notin \Gamma_*$ при $\psi \neq 0$, а это и означает, что точки нитей, не относящиеся к упомянутым фигурам, не лежат в Γ_* . Всевозможность ориентаций указанных фигур в Γ_* обусловлена произвольностью направлений осей лучей внутри светового конуса. Вследствие всевозможности ориентаций фигур в Γ_* , центр частицы является единственной общей точкой всех фигур. ■

Обратим внимание на то обстоятельство, что у всех лучей, у которых оси лежат в одной плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (где \mathbf{q}_0 — орт оси одного из этих лучей), поперечные сечения, проходящие через центр частицы, также лежат в одной плоскости (а именно, в $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$). В связи с этим можно было бы принять, что такие лучи имеют в Γ_* одно общее сечение. Мы, однако, будем рассматривать эти сечения как разные, хотя и налагающиеся друг на друга.

Если трактовать (в грубом приближении) фигуру на рис. 2.2 как круговое кольцо ширины $2p_*$, то тогда центральное сечение частицы можно представлять себе в виде сферической оболочки в G_* со средним радиусом r_* и толщиной p_* . Можно показать, что в таком грубом приближении внешней границей частицы в M служит *псевдосфера* с пространственноподобными радиусами, описываемая уравнением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -(r_* + p_*)^2$ (здесь \mathbf{R} — радиус-вектор точек псевдосферы относительно центра частицы). Это есть линейчатая гиперповерхность, аналогичная однополостному гиперболоиду в трехмерном собственном евклидовом пространстве (рис. 2.4). Эта гиперповерхность имеет изотропные образующие и изотропный (световой) асимптотический конус.

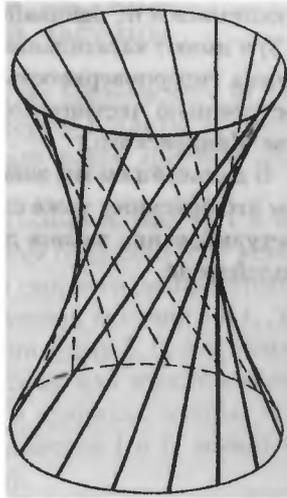


Рис. 2.4. Однополостный гиперболоид (показана одна из двух систем прямолинейных образующих).

Поскольку внешняя граница частицы близка к псевдосфере, сама частица «выглядит» извне близкой к *(псевдо)шару* в M радиуса $r_* + p_*$. Далее будет показано, что $p_* \ll r_*$, то есть радиус шара примерно равен r_* . Поэтому величину r_* будем называть *радиусом частицы*. Величину $2p_*$ назовем *толщиной спирали*.

Таким образом, следуя обычной для механики методологии, мы начали построение модели с фиксирования базисного многообразия, отражающего пространственные и временные свойства мира, и задания в этом многообразии определенного геометрического объекта, служащего образом моделируемого тела. А именно, в качестве базисного многообразия мы приняли пространство Минковского, а в качестве модели электрона — такой геометрический объект, названный частицей, который состоит из трехмерных винтообразных лучей, показанных на рис. 2.1. Лучи обладают тем свойством, что их оси пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса этой точки (см. рис. 1.1). Каждый луч образован винтовыми нитями, группи-

рующимися в n_* одинаковых спиралей. Нити задаются уравнением (2.3) и имеют касательные векторы вида (2.10). Извне частица ограничена гиперповерхностью, близкой к (псевдо)сфере, в связи с чем построенную частицу можно считать близкой к шару в пространстве Минковского.

В дальнейшем мы займемся описанием движения частицы. Начнем это описание, тоже следуя принятой в механике методологии, с постулирования закона движения частицы, свободной от внешних воздействий.

3. Собственное время частицы. Движение свободной частицы

Пусть частица движется в пространстве Минковского M таким образом, что ее центр «замечает» некоторую гладкую времениподобную линию L . Эту линию мы назвали ранее *мировой линией* частицы.

Введем на мировой линии L натуральный параметр l и параметр $t_* = l/c$, возрастающие в направлении будущего (c — константа, именуемая скоростью света и равная скорости распространения электромагнитных волн в вакууме). Значения величин l и t_* , отвечающие центру частицы при его движении вдоль L , будем называть *моментами собственного времени* частицы или просто *собственным временем* частицы (l измеряется в единицах длины, t_* — в единицах времени; начало отсчета параметров l и t_* может быть выбрано в произвольной точке линии L).

Будем считать, что *при любом движении* частицы основные ее геометрические характеристики остаются неизменными, иначе говоря, не зависят от собственного времени частицы l (или t_*). Вместе с принятыми ранее допущениями это означает выполнение следующих условий:

- радиус частицы r_* , количество спиралей в каждом луче n_* и полутолщина спиралей p_* являются константами;
- для каждого луча угол между вектором \mathbf{i} и направляющим ортом \mathbf{q}_0 оси луча не меняется при движении частицы;
- шаг спирали \mathbb{H} и параметр β зависят от угла между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , но не зависят от l , причем лучи с одинаковыми значениями этого угла имеют равные \mathbb{H} и β ;
- для каждой нити ее радиус r_0 и параметр β_0 не меняются при движении частицы (заметим, что в силу соотношения $\beta_0 = \beta r_0 / r_*$ — см. формулу (2.8) — параметр β_0 пропорционален радиусу r_0 и вместе с β зависит от угла между \mathbf{i} и \mathbf{q}_0).

Дополним сказанное допущением о том, что вводимая ниже угловая скорость ω собственного вращения лучей тоже является константой, то есть она одинакова для всех лучей и не меняется при любом движении частицы.

Далее в настоящем разделе ограничимся рассмотрением ситуации, когда на частицу не воздействуют никакие другие тела. В этом случае частицу будем именовать *свободной*. В соответствии с исходными положениями специальной теории относительности будем

считать, что мировая линия L свободной частицы *прямолинейна*. Примем, что в этом случае введенный ранее вектор \mathbf{i} представляет собой направляющий орт прямой L , ориентированный в сторону будущего и отложенный от центра частицы ($\mathbf{i} = \text{const}$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$).

Будем считать, что движение частицы вдоль мировой линии является результатом определенного движения составляющих ее лучей. А именно, положим, что в случае *свободной* частицы ось каждого луча движется относительно M поступательно и прямолинейно, а сам луч вращается вокруг своей оси внутри соответствующего подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$ (которое перемещается поступательно вдоль мировой линии); при этом движение лучей происходит таким образом, что в целом вся их конфигурация, представляющая собой частицу, повторяет себя во все моменты времени, непрерывно двигаясь вдоль L . Формализуем это допущение.

Пусть расположению частицы с центром в точке $O \in L$ отвечает момент собственного времени l . Рассмотрим еще одно расположение частицы, которому отвечает близкий момент $l + dl$. Центр частицы в новом расположении будет находиться в точке $O' \in L$, отстоящей от O на вектор $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{i} dl$ (так как \mathbf{i} — направляющий орт прямой L). В связи с тем, что в новом расположении частицы оси всех лучей проходят через точку O' и, согласно сделанному допущению, оси движутся поступательно и прямолинейно, заключаем, что каждая ось сохраняет неизменным свой направляющий вектор \mathbf{q}_0 и движется в своей плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. В этом случае перемещение оси из одного рассматриваемого расположения в другое может быть представлено в виде суммы смещения на вектор $\mathbf{i} dl$ вдоль L и некоторого смещения $q \mathbf{q}_0 dl$ вдоль самой оси (где q — безразмерный коэффициент, одинаковый для всех точек оси). Детализируя принятое выше допущение о вращении лучей, положим, что при переходе в новое расположение каждый луч поворачивается (в $C_{\mathbf{q}_0}$) вокруг своей оси на угол $(o/c)dl (= o dt_*)$, где o — одинаковая для всех лучей величина, которую будем называть *угловой скоростью собственного вращения лучей*; знак угловой скорости o выберем согласованным с заданным ранее направлением отсчета углов в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$: $o > 0$ в том случае, когда при движении частицы в сторону будущего ($dl > 0$) направление вращения луча совпадает с направлением кратчайшего поворота от \mathbf{e}_1 к \mathbf{e}_2 .

На основании сказанного заключаем, что в новом расположении

частицы радиус-вектор \mathbf{R} точек нити относительно исходной точки O может быть записан в виде

$$\mathbf{R}(l + dl) = \mathbf{i} dl + q \mathbf{q}_o dl + r_o \left[\cos\left(\nu + \frac{o}{c} dl\right) \mathbf{e}_1 + \sin\left(\nu + \frac{o}{c} dl\right) \mathbf{e}_2 \pm \frac{\psi}{\beta_o} \mathbf{q}_o \right], \quad (3.1)$$

где учтено, что в момент l радиус-вектор \mathbf{R} имеет вид (2.3).

Для конкретизации вектора скорости нити необходимо индивидуализировать ее точки. Сделаем это посредством винтовой переменной ψ : будем считать, что точки нити, которым в формулах (2.3) и (3.1) отвечают одинаковые значения ψ , являются одной и той же точкой, переместившейся из одного положения в другое. Далее точки нити будем называть ее *элементами*, чтобы отличить эти движущиеся в M фрагменты модели от неподвижных точек самого пространства M .

Скорость \mathbf{j} элементов нити при указанном способе их индивидуализации определим как частную производную $\partial \mathbf{R} / \partial l$ (при $\psi = \text{const}$). Поскольку элементы нити являются одновременно элементами луча и частицы, будем называть величину \mathbf{j} также скоростью луча и скоростью частицы. Из зависимостей (2.3) и (3.1) находим, что *свободная* частица движется относительно пространства M со скоростью

$$\mathbf{j} = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_o + r_o \frac{o}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 + \cos \nu \mathbf{e}_2], \quad (3.2)$$

где угол ν дается выражением (2.6); это значение \mathbf{j} относится к моменту l , в который центр частицы находится в точке O и радиус-вектор \mathbf{R} элементов нити имеет вид (2.3). Подчеркнем, что \mathbf{j} — безразмерная величина; в тех случаях, когда для описания движения луча нужна характеристика размерности скорости, следует брать вместо \mathbf{j} величину $c \mathbf{j} = \partial \mathbf{R} / \partial t_*$ (c — скорость света).

Если подставить в формулу для скорости нити (3.2) значение радиуса r_o , равное нулю, то эта формула перейдет в формулу для скорости оси луча (подобно тому, как при такой же формальной подстановке уравнение нити (2.3) переходит в уравнение оси луча (2.9)). Осуществляя эту подстановку, находим, что скорость оси луча \mathbf{j}_o описывается равенством

$$\mathbf{j}_o = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_o. \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что оси лучей частицы, вследствие различия векторов \mathbf{q}_o для них, движутся с разными скоростями; только в исключительном случае, когда для каких-то осей выполняется $q = 0$, их скорости \mathbf{j}_o оказываются одинаковыми и равными \mathbf{i} (рис. 3.1). Обратим внимание на то, что в частном случае, когда $q = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_o$, ось луча движется в ортогональном к себе направлении: $\mathbf{j}_o \cdot \mathbf{q}_o = 0$, а в случае $q = -1/(\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_o)$ она движется в направлении, ортогональном вектору \mathbf{i} : $\mathbf{j}_o \cdot \mathbf{i} = 0$ (здесь учтено, что $\mathbf{q}_o \cdot \mathbf{q}_o = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$).

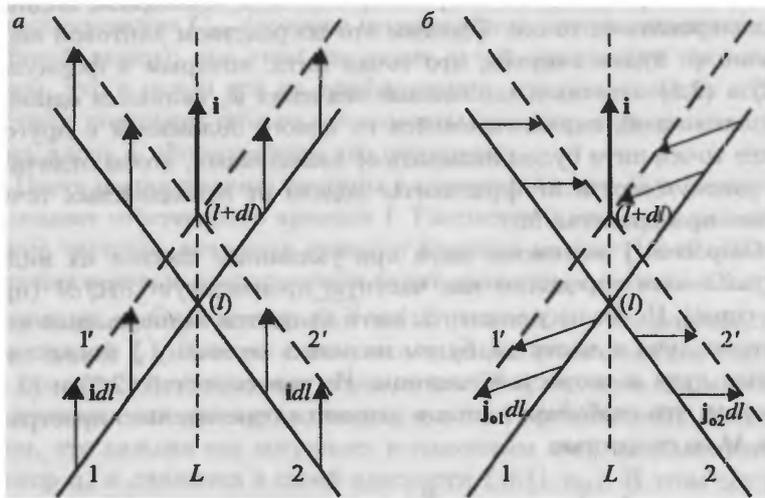


Рис. 3.1. Два варианта движения осей лучей, обеспечивающие одно и то же движение остова частицы.

Сплошные линии 1 и 2 — оси двух лучей в исходном положении; штриховые линии 1' и 2' — эти же оси в смещенном положении; тонкие стрелки — векторы перемещения осей.

Взглянем на равенство (3.2) как на самостоятельный закон движения свободной частицы, отвлекаясь от допущений, принятых в настоящем разделе в процессе его вывода (включая и допущение о прямолинейности мировой линии), и определим движение частицы, диктуемое данным законом. При этом будем полагать, что задано какое-то расположение частицы в пространстве M и что выполнены условия относительно геометрических параметров модели, сформулированные в начале раздела, в том числе условие о постоянстве угловой скорости ω .

Относительно параметра q допустим, что он принимает одно и то же значение для всех элементов каждого луча частицы и, подобно другим геометрическим параметрам модели, *не меняется при любом движении частицы* (хотя он может быть различным для разных лучей).

Дополним закон (3.2) условием, что в случае *свободной* частицы векторы \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 не меняются при ее движении. Отметим, что мы не связываем пока что вектор \mathbf{i} с мировой линией частицы, потому что последняя как раз и требует определения.

Теорема 3.1. Пусть в пространстве Минковского M имеется совокупность прямых линий, которые движутся в соответствии с законом (3.3): $\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_0$ при не меняющихся \mathbf{i} , q и \mathbf{q}_0 , где \mathbf{j}_0 — скорость элемента прямой линии; \mathbf{i} — фиксированный единичный вектор; q — скалярный параметр, одинаковый для всех точек прямой; \mathbf{q}_0 — направляющий орт прямой (q и \mathbf{q}_0 — свои для каждой прямой; время, связывающее между собой скорость и перемещение прямой, может измеряться в любой системе отсчета). Тогда:

а) каждая прямая перемещается поступательно и прямолинейно в фиксированной плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$;

б) если все прямые при каком-то расположении их в M пересекаются в одной точке, то они пересекаются в одной точке и при всех других расположениях, при этом точка их пересечения движется в M вдоль прямой линии с направляющим вектором \mathbf{i} .

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что для каждой прямой выполняется следующее: скорость \mathbf{j}_0 одинакова для всех точек прямой и не меняется при ее движении; плоскость $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ является фиксированной (неподвижной); $\mathbf{j}_0 \in Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Отсюда сразу вытекает, что каждая прямая движется поступательно и прямолинейно в фиксированной плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, что означает справедливость утверждения а).

Теперь докажем утверждение б. Пусть $O \in M$ — точка, в которой согласно условию теоремы все прямые пересекаются при некотором их расположении; l — отвечающий этому расположению прямых момент времени (измеряемый в любой системе отсчета). Тогда в момент l радиус-вектор \mathbf{R} элементов произвольной прямой относительно точки O имеет вид

$$\mathbf{R}(l) = x \mathbf{q}_0,$$

где x — натуральный параметр на рассматриваемой прямой, отсчитываемый от точки O , $x \in (-\infty, +\infty)$; \mathbf{q}_0 — направляющий орт этой прямой. В другой момент $l + dl$ (при произвольном dl) радиус-вектор \mathbf{R} становится равным

$$\mathbf{R}(l + dl) = \mathbf{R}(l) + \mathbf{j}_0 dl = \mathbf{i} dl + (x + q dl) \mathbf{q}_0,$$

где учтена независимость скорости \mathbf{j}_0 от времени и использована формула (3.3). Возьмем элемент прямой, для которого $x = -q dl$. Из предыдущего равенства вытекает, что в момент $l + dl$ этот элемент находится в точке пространства M с радиусом-вектором, равным $\mathbf{i} dl$. Поскольку такое имеет место для каждой прямой, то отсюда заключаем, что все прямые проходят в момент $l + dl$ через одну и ту же точку, отстоящую от точки O на вектор $\mathbf{i} dl$. Вследствие произвольности момента $l + dl$ и фиксированности вектора \mathbf{i} , это означает, что в любой момент времени все прямые пересекаются в одной точке, которая перемещается в M вдоль прямой линии с направляющим вектором \mathbf{i} , то есть действительно выполняется утверждение б. ■

Вернемся к рассмотрению нашей частицы. Из закона ее движения (3.2) вытекает, что оси всех ее лучей движутся в соответствии с законом (3.3). Мы допустили ранее, что движение частицы происходит при неизменных \mathbf{i} , q и \mathbf{q}_0 и что задано некоторое расположение частицы в пространстве M (последнее означает, в частности, что задано расположение осей лучей, при котором все оси пересекаются в одной точке). Поэтому на основании теоремы 3.1 заключаем, что, во-первых, оси лучей пересекаются в одной точке в течение всего движения частицы, то есть частица сохраняет свою целостность, и, во-вторых, точка пересечения осей, являющаяся центром частицы, перемещается вдоль прямой линии с направляющим вектором \mathbf{i} . Таким образом, в данном случае мировая линия частицы L является *прямолинейной*, и вектор \mathbf{i} служит ее направляющим ортом.

Отметим, что скорость центра частицы (относительно пространства M) равна \mathbf{i} . Действительно, эта скорость представляет собой, по определению, производную вектора перемещения по собственному времени частицы. А так как за промежуток собственного времени dl центр частицы смещается на вектор $\mathbf{i} dl$, то эта производная есть \mathbf{i} .

Из допущения о неизменности векторов \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 вытекает неподвижность плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Поэтому для каждого луча плос-

кость $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$, которую будем полагать перемещающейся вместе с центром частицы, остается все время параллельной самой себе. Данное обстоятельство позволяет выбирать в этой плоскости векторы базиса \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 одними и теми же во все моменты времени. Итак, можно констатировать, что рассматриваемое движение частицы характеризуется постоянством векторов \mathbf{i} , \mathbf{q}_o , \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Это позволяет считать, в частности, что для каждого луча содержащее его трехмерное подпространство $C_{\mathbf{q}_o} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ движется в M поступательно вдоль мировой линии L .

Из сказанного следует, что первые два слагаемые в правой части формулы (3.2) описывают поступательную составляющую движения луча частицы. Оставшееся же слагаемое — вектор

$$\mathbf{j}_* = r_o \frac{o}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 + \cos \nu \mathbf{e}_2] - \quad (3.4)$$

задает вращательную составляющую движения луча. Рассмотрим ее подробнее. Предположим, что поступательная составляющая движения отсутствует и луч движется согласно закону $\mathbf{j} = \mathbf{j}_*$. Поскольку луч целиком лежит в соответствующем подпространстве $C_{\mathbf{q}_o} = Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ и $\mathbf{j}_* \in C_{\mathbf{q}_o}$ (так как $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in C_{\mathbf{q}_o}$), то такое движение луча осуществляется без выхода из $C_{\mathbf{q}_o}$. Отметим, что, благодаря попарной взаимной ортогональности ортов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{q}_o , скорость \mathbf{j}_* ортогональна как оси луча, так и вектору \mathbf{r}_o , задаваемому выражением (2.5) и тоже ортогональному оси луча ($\mathbf{j}_* \cdot \mathbf{q}_o = \mathbf{j}_* \cdot \mathbf{r}_o = \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{q}_o = 0$). Пользуясь обычными формулами аналитической геометрии для трехмерного пространства, можем записать: $c\mathbf{j}_* = o\mathbf{q}_o \times \mathbf{r}_o$, где символ \times обозначает операцию векторного умножения в $C_{\mathbf{q}_o}$, согласованную с ориентацией базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$. Отсюда заключаем, что вектор $c\mathbf{j}_*$ представляет собой линейную скорость вращения луча в $C_{\mathbf{q}_o}$ вокруг оси $Lin\{\mathbf{q}_o\}$ (при угловой скорости вращения, равной o). Сделанный вывод, напомним, относится к случаю $\mathbf{j} = \mathbf{j}_*$. Очевидно, что он остается верным и в общем случае при скорости \mathbf{j} , имеющей вид (3.2), причем в этом случае вращение луча с указанной линейной скоростью происходит внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_o}$, движущегося в M поступательно вдоль мировой линии L .

Итак, закон (3.2), дополненный условием постоянства векторов \mathbf{i} и \mathbf{q}_o , устанавливает, что свободная частица движется вдоль прямой мировой линии, при этом движение каждого ее луча представляет собой композицию поступательного перемещения со

скоростью $s\mathbf{j}_o$ и вращения внутри соответствующего подпространства C_{q_o} вокруг собственной оси с угловой скоростью o и линейной скоростью $s\mathbf{j}_*$ (\mathbf{j}_o и \mathbf{j}_* описываются равенствами (3.3) и (3.4)).

В рассматриваемом случае свободной частицы, вследствие прямолинейности ее мировой линии L , собственное физическое пространство частицы $\Gamma_* = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ движется (вместе с центром частицы) таким образом, что остается все время параллельным самому себе. Будем полагать, что это движение физического пространства Γ_* осуществляется со скоростью \mathbf{j}_{Γ_*} , которая одинакова для всех его точек и совпадает со скоростью центра частицы:

$$\mathbf{j}_{\Gamma_*} = \mathbf{i}. \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) фактически есть условие индивидуализации точек физического пространства Γ_* : оно устанавливает, что если имеются два расположения гиперплоскости Γ_* , соответствующие моментам собственного времени частицы l и $l+dl$, то точки гиперплоскости Γ_* , отстоящие друг от друга на вектор $\mathbf{j}_{\Gamma_*}dl = \mathbf{i}dl$, являются одной и той же точкой, сместившейся из одного положения в другое.

Согласно теореме 2.1 центральное сечение частицы представляет собой совокупность всевозможным образом ориентированных фигур, изображенных на рис. 2.2. Каждая из фигур лежит в своей плоскости $Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, и все они имеют единственную общую точку — центр частицы. В связи с тем, что $\mathbf{j}_* \in Lin\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \Gamma_*$ и угловая скорость o одинакова для всех лучей, вращения лучей, описываемые формулой (3.4), воспринимаются изнутри физического пространства Γ_* как одинаковые вокруг всех направлений.

Примем дополнительное допущение, касающееся вращения лучей. Будем полагать, что *движение свободной частицы вдоль L происходит таким образом, что каждая нить частицы пересекает физическое пространство Γ_* все время в одной и той же его точке*. Можно сказать, что нити как бы ввинчиваются в физическое пространство Γ_* , подобно штопору в пробку, перемещая его поступательно вдоль L . Отметим, что при таком «ввинчивании» согласно принятому правилу выбора знака угловой скорости o будет $o < 0$ в случае совпадения ориентаций (в C_{q_o}) базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ и нити, и $o > 0$ при несовпадении их ориентаций.

Данное допущение устанавливает связь между параметрами o , r_* (или r_o), β (или β_o) и q . Зафиксируем некоторый момент времени l . Пусть A — элемент нити, лежащий в этот момент в Γ_* . Для

того, чтобы удовлетворить сделанному допущению, нужно, чтобы нашелся другой элемент B этой же нити, который, двигаясь со скоростью \mathbf{j} , оказался бы через промежуток времени dl в точке пространства M , отстоящей от исходного местоположения элемента A на вектор $\mathbf{i} dl$ (потому что за время dl точка физического пространства Γ_* , в которой находился в момент l элемент A , сместится, как следует из (3.5), именно на $\mathbf{i} dl$). Допустим, что $dl \rightarrow 0$. Тогда, очевидно, будет $B \rightarrow A$, поэтому можно заменить участок AB нити отрезком касательной к ней, направленным вдоль \mathbf{q} . В результате получаем векторное равенство $\mathbf{q} dx + \mathbf{j} dl = \mathbf{i} dl$, где dx — неизвестное расстояние между элементами нити A и B . Подставляя в это равенство значения \mathbf{q} и \mathbf{j} из (2.10) и (3.2), находим значение dx (которое нам не потребуется, в связи с чем мы его не выписываем), а также получаем с учетом (2.8) следующие зависимости, которые будут существенным образом использованы в дальнейшем:

$$\beta_o q = \pm \frac{o r_o}{c}; \quad \beta q = \pm \frac{o r_*}{c}. \quad (3.6)$$

Здесь верхний и нижний знаки отвечают случаям соответственно совпадения и несовпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_o}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ и рассматриваемой винтовой нити. В этих же случаях, как было отмечено, угловая скорость собственного вращения лучей o принимает соответственно отрицательное и положительное значения. Следовательно $\pm o < 0$. Ранее мы условились считать, что величины o и r_* — константы, а параметр β зависит от угла между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_o , поэтому из (3.6) вытекает, что параметр q тоже зависит от угла между \mathbf{i} и \mathbf{q}_o , причем эта зависимость такова, что $\beta q = \text{const} < 0$.

Итак, мы показали, что если верно сделанное выше допущение, касающееся пересечения нитями физического пространства Γ_* , то выполняются зависимости (3.6). Можно доказать, что справедливо и обратное заключение: если верны зависимости (3.6), то при соблюдении законов (3.2) и (3.5) каждая нить частицы пересекает физическое пространство Γ_* все время в одной и той же его точке.

В последующих разделах мы будем полагать, что зависимости (3.6) выполняются при любом характере движения частицы, а не только в рассматриваемой здесь ситуации, когда частица свободна от внешних воздействий. При этом входящие в (3.6) величины β_o , β , r_o и r_* сохраняют свой смысл, потому что они были введены до рассмотрения движения частицы. Значение величины q , также входящей в (3.6), будем находить из отмеченной зависимо-

сти $\beta q = \text{const}$ и некоторых геометрических соображений. Величину o применительно к случаю произвольного движения частицы определим аналогично тому, как она была определена ранее для случая свободной частицы: а именно, будем считать, что o есть угловая скорость вращения лучей вокруг их осей, измеряемая для каждого луча относительно соответствующего базиса $\{e_1, e_2, q_0\}$ (движение самого этого базиса в M зададим позднее). При таком определении будет по-прежнему выполняться следующее условие: при изменении собственного времени частицы на dl каждый луч частицы поворачивается вокруг своей оси $Lin\{q_0\}$ на угол $(o/c)dl$ относительно базиса $\{e_1, e_2, q_0\}$. Отсюда и из формул (2.7) и (3.6) находим, что одному полному обороту лучей, то есть повороту их на угол 2π , отвечает смещение частицы вдоль мировой линии на расстояние $|dl_{2\pi}|$, равное

$$|dl_{2\pi}| = 2\pi \frac{c}{|o|} = 2\pi \frac{r_*}{\beta|q|} = \frac{\text{III}}{|q|} \quad (\text{при } o \neq 0 \text{ и } q \neq 0). \quad (3.7)$$

На этом формулирование законов движения свободной частицы завершим. В дальнейшем будем интерпретировать рассуждения, которые привели нас к законам (3.2), (3.5) и (3.6), лишь как наводящие соображения, а именно сами законы будем полагать исходными допущениями. При этом мы откажемся от представления о том, что свободная частица обязательно движется так, как диктуют эти законы, а по причине, которая станет ясна из разд. 8, будем считать, что такое движение свободной частицы — одно из возможных. Принятое нами дополнительное условие о постоянстве векторов $\dot{\mathbf{i}}$ и \mathbf{q}_0 будем считать включенным в закон (3.2).

Таким образом, мы постулируем, что *свободная частица может двигаться в пространстве Минковского так, что выполняются законы (3.2) (при постоянных $\dot{\mathbf{i}}$ и \mathbf{q}_0), (3.5) и (3.6).*

Согласно закону (3.2) частица движется вдоль прямолинейной мировой линии, при этом движение каждого ее луча представляет собой композицию поступательного перемещения и вращения вокруг собственной оси. Законы (3.5) и (3.6) обеспечивают такое движение лучей частицы, при котором каждая нить пронизывает собственное физическое пространство частицы всегда в одной и той же его точке. Принимая во внимание, что в рамках настоящей модели указанные законы играют роль, аналогичную роли первого закона Ньютона в классической механике, будем называть движение частицы, подчиняющееся этим законам, *инерциальным*.

4. Спин луча. Постоянная тонкой структуры

Продолжим рассмотрение *свободной* частицы, причем будем считать, что ее движение является *инерциальным*. В этом случае мировая линия частицы L прямолинейна, а скорость частицы \mathbf{j} задается формулой (3.2).

Примем, что все спирали, из которых состоят лучи частицы, имеют одну и ту же массу $m_* > 0$, распределенную равномерно по их объему с плотностью ρ , причем m_* не меняется при движении частицы.

Согласно сделанному допущению масса m_* спирали конечна. Объем же спирали, из-за неограниченной протяженности луча, бесконечен. В связи с этим плотность ρ следовало бы определить (в рамках нестандартного анализа [3]) как бесконечно малое гипердействительное число. Мы не делаем этого, так как в дальнейшем используется не само значение ρ , а только условия, что $\rho = \text{const}$ и что интеграл от ρ по объему спирали равен m_* .

Момент количества движения свободной частицы относительно ее центра (движущегося вдоль L) назовем *спином частицы*. Он равен сумме моментов количества движения ее лучей. Момент количества движения луча свободной частицы, рассчитанный относительно центра частицы, будем называть *спином луча*. Итак, по определению, *спин луча* есть бивектор

$$K_* = \int_{(\Omega)} \mathbf{R} \wedge (\mathbf{j} - \mathbf{i}) c \rho d\Omega, \quad (4.1)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор элементов луча относительно центра частицы, задаваемый выражением (2.3); $(\mathbf{j} - \mathbf{i})$ — скорость элементов луча относительно центра частицы (\mathbf{j} и \mathbf{i} — скорости соответственно элементов луча и центра частицы относительно пространства Минковского M); \wedge — символ внешнего умножения векторов ($\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}$ для любых векторов \mathbf{x} и \mathbf{y}); c — скорость света (множитель c введен с целью придания величине K_* обычной размерности момента количества движения, см. комментарий к формуле (3.2)); ρ — плотность; Ω — часть подпространства S_{q_0} , занимаемая лучом; $d\Omega$ — элементарный объем множества Ω . Спин задан как бивектор, а не псевдовектор по причине четырехмерности пространства M .

Представим интеграл в (4.1) в виде суммы интегралов по отдельным спиральям, составляющим луч. Ранее отмечалось, что уравнения соответственных нитей, относящихся к разным спиральям, раз-

личаются только слагаемым, кратным $2\pi/n_*$, в выражении для угла ν . Учитывая это, преобразуем с помощью соотношений (2.3), (2.6) и (3.2) каждый из суммируемых интегралов в интеграл по спирали № 0 (с подынтегральным выражением, зависящим от номера ξ соответствующей спирали; $\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$). В результате формула (4.1) приобретет вид

$$K_* = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(\Omega_0)} r_0 \left[\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2 \pm \frac{\psi}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right] \wedge \left[q \mathbf{q}_0 + r_0 \frac{\rho}{c} (-\sin \nu \mathbf{e}_1 + \cos \nu \mathbf{e}_2) \right] c \rho d\Omega, \quad (4.2)$$

где Ω_0 — часть множества Ω , занимаемая спиралью № 0; $\nu = \chi_0 + (2\pi/n_*)\xi + \psi$.

На основании известных формул для сумм синусов и косинусов [4] можно получить:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin \nu = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin \left(\chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi + \psi \right) = 0; \quad (4.3)$$

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos \nu = 0 \quad (\text{при } n_* \geq 2),$$

здесь учтено, что χ_0 и ψ не зависят от ξ .

Из (4.2) и (4.3) находим:

$$K_* = n_* \circ \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \int_{(\Omega_0)} \rho r_0^2 d\Omega. \quad (4.4)$$

В соответствии с принятым нами способом построения луча, сечения луча плоскостями, параллельными плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, представляют собой фигуры, изображенные на рис. 2.2; эти сечения повернуты каждое на свой угол ψ относительно сечения, находящегося в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Расстояние между двумя сечениями луча, отвечающими значениям винтовой переменной ψ и $\psi + d\psi$, определяется по направлению оси луча и, как следует из (2.3) и (2.8), составляет $|(\partial \mathbf{R} / \partial \psi) \cdot \mathbf{q}_0| d\psi = (r_*/\beta) d\psi$ (при $d\psi \geq 0$). Из сказанного вытекает, что $d\Omega = (r_*/\beta) d\psi dS$, где dS — элемент площади

сечения луча. Поэтому интеграл в (4.4) может быть преобразован следующим образом:

$$\int_{(\Omega_0)} \rho r_o^2 d\Omega = \int_{(\Psi)} \int_{(S_0)} \rho r_o^2 \frac{r_*}{\beta} d\psi dS = \left(\int_{(S_0)} r_o^2 dS \right) \left(\int_{(\Psi)} \rho \frac{r_*}{\beta} d\psi \right),$$

где Ψ — множество значений переменной ψ ; S_0 — сечение спирали № 0, имеющее вид одного из кругов радиуса p_* на рис. 2.2; использованы независимость r_o и S_0 от ψ и постоянство ρ , r_* , β и Ψ вдоль S_0 .

Принимая во внимание, что масса спирали равна m_* , а площадь сечения S_0 есть πp_*^2 , можем записать:

$$m_* = \int_{(\Omega_0)} \rho d\Omega = \left(\int_{(S_0)} dS \right) \left(\int_{(\Psi)} \rho \frac{r_*}{\beta} d\psi \right) = \pi p_*^2 \int_{(\Psi)} \rho \frac{r_*}{\beta} d\psi,$$

здесь интеграл по Ω_0 преобразован так же, как преобразован аналогичный интеграл выше. Отсюда вытекает, что интеграл, стоящий справа, равен $m_*/(\pi p_*^2)$. Подставляя это его значение в предыдущую цепочку равенств, находим:

$$\int_{(\Omega_0)} \rho r_o^2 d\Omega = \frac{m_*}{\pi p_*^2} \int_{(S_0)} r_o^2 dS. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$K_* = n_* m_* o \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \frac{1}{\pi p_*^2} \int_{(S_0)} r_o^2 dS,$$

где, напомним, r_o — расстояние от центра фигуры, показанной на рис. 2.2, до точек круга № 0, по которому производится интегрирование. Вводя на круге S_0 полярные координаты, нетрудно показать, что участвующий здесь интеграл равен $\pi p_*^2 r_*^2 [1 + (1/2)(p_*/r_*)^2]$. Подстановка сюда значения отношения p_*/r_* из (2.2), завершает преобразования. Итак, находим окончательно, что *спин луча* равен

$$K_* = n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \quad (4.6)$$

Обратим внимание на то, что спин луча K_* не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ и не изменяется с течением

времени. В самом деле, при рассматриваемом инерциальном движении свободной частицы векторы \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 не меняются. Следовательно, различные расположения плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ в пространстве M параллельны друг другу. Известно, что параллельные плоскости характеризуются следующим свойством. Бивекторы, образованные из векторов произвольных их ортонормированных базисов, принимают значения, которые для всех базисов одной ориентации одинаковы, а для базисов разных ориентаций различаются только знаком. Отсюда вытекает с учетом принятого в разд. 3 правила задания знака угловой скорости o , что при фиксированном направлении вращения луча в M величина $(\text{sign } o)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ и не меняется с течением времени. На основании этого и сделанных ранее допущений о постоянстве входящих в (4.6) параметров луча заключаем, что спин луча K_* не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и остается неизменным при движении частицы. Таким образом, спин луча K_* представляет собой константу, определяемую только параметрами самого луча.

Введем в собственном физическом пространстве частицы Γ_* вектор \mathbf{o} , дополняющий векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ до ортонормированного правоориентированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$ ($\mathbf{o} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1$; $\mathbf{o} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{o} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$).

Отметим, что понятия «правоориентированный» и «левоориентированный» в абстрактном пространстве условны: не имеется объективных оснований считать, что свойством правоориентированности обладают базисы именно какого-то одного типа (и соответственно свойством левоориентированности базисы другого типа). Однако разбиение множества базисов на право- и левоориентированные может быть произведено однозначным образом при сопоставлении модели с объектами физической реальности. Поскольку для базисов из физического пространства Γ_* такое сопоставление может быть реализовано, мы полагаем, что утверждение о правоориентированности базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$ является корректным.

Пусть \varkappa — псевдотензор Леви—Чивита над Γ_* (трехвалентный совершенно антисимметричный единичный псевдотензор). Он имеет в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$ вид

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{o} - \mathbf{e}_1\mathbf{o}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{o}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{o} + \mathbf{o}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{o}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad (4.7)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_* : $\Delta = 1$ в любом базисе той же ориентации, что и ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$, и $\Delta = -1$ в любом базисе противоположной ориентации.

С помощью формулы (4.7) можно доказать, что для любого антисимметричного двухвалентного тензора (бивектора) B над Γ_* вы-

полняется равенство

$$B = \frac{1}{2} B \cdot \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{\varkappa}, \quad (4.8)$$

где двоеточие — знак бискалярного умножения; принятый нами порядок выполнения скалярного и бискалярного умножений тензоров иллюстрируется следующим примером:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z} \cdot \cdot \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = \\ &= (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{x}\boldsymbol{w} \end{aligned}$$

для произвольных векторов \boldsymbol{x} , \boldsymbol{y} , \boldsymbol{z} , \boldsymbol{u} , \boldsymbol{v} , \boldsymbol{w} .

Благодаря тому, что $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \Gamma_*$, величину K_* , задаваемую выражением (4.6), можно трактовать как тензор над собственным физическим пространством частицы Γ_* . В силу трехмерности Γ_* можно ввести с помощью равенства (4.8) псевдовектор $\bar{K}_* \in \Gamma_*$, связанный с K_* зависимостями

$$\bar{K}_* = -\frac{1}{2} K_* \cdot \cdot \boldsymbol{\varkappa}; \quad K_* = -\bar{K}_* \cdot \boldsymbol{\varkappa}. \quad (4.9)$$

Псевдовектор \bar{K}_* будем называть, как и K_* , *спином луча*. Из (4.6), (4.9) имеем:

$$\bar{K}_* = n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \Delta \boldsymbol{o}, \quad (4.10)$$

где учтено, что в соответствии с (4.7) псевдовектор $\Delta \boldsymbol{o}$ равен

$$\Delta \boldsymbol{o} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) \cdot \cdot \boldsymbol{\varkappa}. \quad (4.11)$$

Заметим, что присутствие знаков минус в правых частях равенств (4.9) и (4.11) обусловлено отрицательной определенностью метрической формы в физическом пространстве Γ_* .

Спин луча \bar{K}_* , выражаемый формулой (4.10), как легко убедиться, совпадает с моментом количества движения фигуры на рис. 2.2 при вращении ее в своей плоскости залегания вокруг центральной точки с угловой скоростью o (при условии, что каждый из составляющих фигуру кругов имеет массу m_* , равномерно распределенную по его поверхности).

Действительно, момент количества движения (кинетический момент) фигуры на рис. 2.2 относительно ее центра O равен сумме кинетических моментов

кругов, образующих фигуру. В соответствии с известными положениями механики кинетический момент каждого круга может быть представлен в виде суммы двух величин: кинетического момента центра масс круга относительно той же точки O (рассчитанного в предположении, что вся масса m_* круга находится в центре масс) и кинетического момента круга относительно его центра масс. Поскольку при равномерном распределении массы по поверхности круга центр масс круга совпадает с его геометрическим центром, первый из указанных моментов равен $m_*or_*^2\Delta o$, второй равен $(1/2)m_*or_*^2\Delta o$. Суммируя кинетические моменты всех n_* кругов, образующих фигуру, получаем с учетом (2.2) требуемую формулу (4.10). Отметим, что если бы масса каждого круга была целиком сосредоточена в его центре, то в (4.10) слагаемое внутри скобок, содержащее синус, отсутствовало бы.

На основании формулы (4.10) можем записать:

$$\frac{|\overline{K}_*|}{m_*|o|r_*^2} = n_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \quad (\text{при } o \neq 0), \quad (4.12)$$

где $|\overline{K}_*| = \sqrt{|\overline{K}_* \cdot \overline{K}_*|}$; учтено, что $m_* > 0$ и $r_* > 0$.

В связи с тем, что мы рассматриваем нашу частицу в качестве модели электрона, величины в левой части равенства (4.12) могут быть интерпретированы как фундаментальные постоянные. Они имеют различные физические размерности, но в данном сочетании образуют безразмерную величину (что вытекает из безразмерности правой части равенства). В физике известна безразмерная фундаментальная константа, характеризующая электромагнитное взаимодействие элементарных частиц. Это — постоянная тонкой структуры α . Естественно попытаться выразить полученную безразмерную величину или равную ей правую часть выражения (4.12) через α .

Оказывается, что если принять

$$n_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) = \alpha^{-1}, \quad (4.13)$$

то при известном экспериментальном значении $\alpha^{-1} \approx 137,0359895$ [5] из этого равенства следует:

$$n_* = 137 \quad (4.14)$$

с относительной погрешностью $2 \cdot 10^{-7}$. Напомним, что n_* есть число спиралей, образующих луч (см. рисунки 2.1, 2.2 и 4.1). Тот факт, что для n_* получено целочисленное значение со столь высокой точностью, является существенным доводом в пользу справедливости модели.



Рис. 4.1. Поперечное сечение луча частицы при $n_* = 137$.

В дальнейшем будем рассматривать соотношение (4.14) (понимаемое как точное равенство) в качестве постулата модели. При этом зависимость (4.13) приобретает смысл определения *постоянной тонкой структуры* α . Из (4.13) и (4.14) находим: $\alpha \approx 0,00729735177$, что совпадает с экспериментальным значением α , равным $0,00729735308$ [5], с относительной погрешностью, меньшей $2 \cdot 10^{-7}$.

Отметим, что в (4.13) выражение в скобках, определяющее дробную часть числа α^{-1} , зависит от вида фигуры на рис. 4.1 и распределения массы по объему луча. Например, если бы масса каждой спирали луча была целиком сосредоточена вдоль ее центральной нити (то есть если бы плотность ρ имела δ -образный вид), то в (4.13) на месте этого выражения стояла бы единица. Если бы сама фигура, задающая поперечное сечение луча, была другой, то указанное выражение тоже было бы иным. Маловероятно, что при каком-либо другом поперечном сечении луча, имеющим столь же простой вид, как фигура на рис. 4.1, можно получить подобную точность при вычислении α .

На основании (2.2) и (4.14) имеем:

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{137} \approx \frac{\pi}{137} r_* \approx \frac{1}{44} r_*. \quad (4.15)$$

Из (4.15) видно, что $p_* \ll r_*$. Данным неравенством мы уже воспользовались ранее, когда назвали радиусом частицы величину r_* , а не величину $r_* + p_*$. В дальнейшем это неравенство будет неоднократно использовано для упрощения расчетов.

Итак, каждый луч частицы обладает спином \bar{K}_* вида (4.10), обусловленным собственным вращением луча с угловой скоростью ω .

При задаваемом равенством (4.14) количестве спиралей, составляющих луч, наша модель приводит к значению постоянной тонкой структуры α , которое с высокой точностью соответствует экспериментальному. Обратим внимание на то, что здесь постоянная α выражается только через одну целочисленную характеристику частицы n_* , тогда как до сих пор в физике эта постоянная не имела независимого определения и всегда вводилась как безразмерная комбинация других фундаментальных констант — заряда электрона e , постоянной Планка \hbar и скорости света c :

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{в системе СГС}). \quad (4.16)$$

5. Спин частицы. Переориентация лучей

Симметрия рассматриваемой частицы, как отмечалось, описывается подгруппой собственных пространственных вращений группы Лоренца, сохраняющих вектор \mathbf{i} (с точностью до угла χ_0 и в предположении, что дискретный набор осей лучей заменен непрерывным их множеством). Поэтому центральное сечение частицы, то есть сечение частицы гиперплоскостью $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, имеет симметрию, задаваемую группой собственных вращений пространства Γ_* . Это означает, что для каждого луча частицы, обладающего спином вида (4.10), найдется луч, спин которого имеет то же по модулю значение, но направлен в противоположную сторону. Так как такие спины компенсируют друг друга, то следовательно можно констатировать, что в целом спин всей частицы равен нулю.

Тем не менее настоящая модель позволяет ввести ненулевой спин частицы. Действительно, до сих пор мы рассматривали вращение луча частицы, которое происходит только внутри трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$. Однако, вследствие четырехмерности пространства Минковского M , поворот луча вокруг его оси может совершаться и с выходом из $C_{\mathbf{q}_0}$. Далее будет показано, что такой поворот луча на угол π приводит к переориентации луча, то есть к преобразованию правозакрученных спиралей, составляющих луч, в левозакрученные (и наоборот) с одновременным изменением направления вращения луча внутри $C_{\mathbf{q}_0}$ на противоположное. Тем самым этот поворот ведет к изменению знака спина луча. Поэтому, если допустить, что некоторые лучи частицы меняют свою ориентацию, в то время как другие лучи остаются без изменений, то сумма спинов всех лучей может оказаться уже не равной нулю. А это и означает, что спин частицы может быть отличным от нуля.

Формализуем высказанные соображения.

Зафиксируем некоторое расположение частицы в пространстве M и рассмотрим произвольный ее луч. Пусть \mathbf{q}_0 — направляющий орт оси этого луча, и пусть, как и ранее, \mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный базис в $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (\mathbf{i} и \mathbf{q}_0 — времениподобные векторы, направленные в сторону будущего; \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — пространственноподобные векторы; все они отложены от центра частицы).

Введем ряд величин, которые потребуются нам в дальнейшем.

Пусть $i\varphi$ — угол между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 (i — мнимая единица). Как известно, этот угол может быть определен с точностью до

знака равенством

$$\cos(i\varphi) = \text{ch } \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0, \quad (5.1)$$

где учтено, что $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1$. Будем считать, что $\varphi > 0$ ($\varphi \neq 0$, так как мы исключили из рассмотрения случай $\mathbf{q}_0 = \mathbf{i}$).

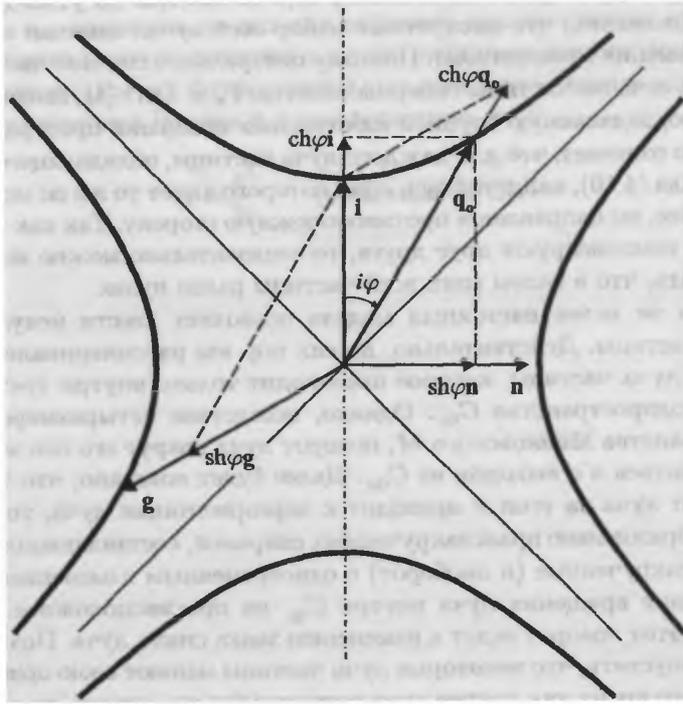


Рис. 5.1. Векторы \mathbf{g} и \mathbf{n} в псевдоевклидовой плоскости $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Векторы \mathbf{g} и \mathbf{n} ортогональны соответственно векторам \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} ; гиперболы — псевдоокружности единичного и мнимоединичного радиусов; тонкие прямые линии — сечение светового конуса плоскостью $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$; штрих-пунктирная прямая — ось симметрии частицы; показаны составляющие векторов \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , входящие в правые части равенств (5.4) и (5.5).

Зададим в $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ два вектора (рис. 5.1):

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i} - \frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0; \quad (5.2)$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\text{ch } \varphi}{\text{sh } \varphi} \mathbf{i} + \frac{1}{\text{sh } \varphi} \mathbf{q}_0, \quad (5.3)$$

здесь $\text{sh } \varphi \neq 0$ в силу $\varphi \neq 0$. На основании (5.1) и равенства $\text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = 1$, учитывая, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} &= -1; & \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}_0 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_2 = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= -1; & \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из свойств векторов $\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{i}$ вытекает, что $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$ и $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ представляют собой ортонормированные базисы в пространстве M ; их началом считаем центр частицы. Отсюда же следует, что $\mathbf{g} \perp C_{\mathbf{q}_0}$ и $\mathbf{n} \in \Gamma_*$ (так как $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$). Согласно (5.2) и (5.3) имеем

$$\mathbf{i} = \text{ch } \varphi \mathbf{q}_0 + \text{sh } \varphi \mathbf{g}; \quad (5.4)$$

$$\mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}, \quad (5.5)$$

см. рис. 5.1. Векторы \mathbf{g} и \mathbf{n} введены специально, чтобы выполнялись равенства (5.4) и (5.5).

В дальнейшем подразумевается, что все рассматриваемые линейные операторы (двухвалентные тензоры) определены над векторным пространством, ассоциированным с пространством Минковского (это векторное пространство, напомним, мы обозначаем тем же символом M , что и само пространство Минковского). Кроме того, подразумевается, что любой линейный оператор A действует на произвольный вектор $\mathbf{x} \in M$ по правилу $A(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Отметим, что в этом случае композиция линейных операторов совпадает с их скалярным произведением (при условии, что операторы трактуются как двухвалентные тензоры и порядок выполнения скалярного умножения соответствует указанному в пояснении к формуле (4.8)). Переход к транспонированному (сопряженному) оператору обозначается далее верхним значком t .

Единичный или *тождественный оператор* I (он же *единичный, метрический* или *фундаментальный тензор*) имеет в базисах $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$ и $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ вид:

$$I = \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{g} \mathbf{g} = \mathbf{i} \mathbf{i} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{n} \mathbf{n}. \quad (5.6)$$

Диады $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{g} \mathbf{g}$ и $\mathbf{n} \mathbf{n}$ участвуют здесь со знаками минус по причине отрицательной определенности метрической формы в пространственноподобных гиперплоскостях $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{q}_0\}$ и $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\} = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\} = \Gamma_*$.

Тот факт, что тензор I вида (5.6) действительно является единичным и метрическим, вытекает из выполнения для любых $x, y \in M$ следующих зависимостей:

$$I \cdot x = x \cdot I = x; \quad x \cdot I \cdot y = x \cdot y.$$

Первая из этих зависимостей легко проверяется путем подстановки в нее разложений вектора x по рассматриваемым базисам. Вторая зависимость получается из первой посредством скалярного умножения средней и правой частей первой зависимости на вектор y .

Теперь перейдем к описанию операции переориентации луча. Сразу же отметим, что для нас будет представлять интерес не сам развивающийся во времени процесс переориентации, а только начальная и конечная конфигурации луча, подвергающегося переориентации. В связи с этим, ради упрощения выкладок, мы будем задавать операторы поворота и переориентации луча как преобразующие луч при фиксированном расположении частицы в M , то есть как действующие как бы мгновенно.

Напомним, что вращение в плоскости характеризуется неподвижной точкой, в трехмерном пространстве — неподвижной точкой или прямой, в четырехмерном пространстве — неподвижной точкой, прямой или плоскостью. Обычно в этих случаях говорят о *вращении вокруг* соответственно *точки, прямой* или *плоскости*.

Оператор поворота на угол γ вокруг плоскости $Lin\{q_0, e_1\}$ (иначе говоря, оператор поворота с инвариантной плоскостью $Lin\{e_2, g\}$) может быть представлен равенством

$$P_\gamma = q_0 q_0 - e_1 e_1 - \cos \gamma e_2 e_2 + \sin \gamma e_2 g - \sin \gamma g e_2 - \cos \gamma g g, \quad (5.7)$$

где угол γ отсчитывается в плоскости $Lin\{e_2, g\}$ и возрастает в направлении кратчайшего поворота от e_2 к g . То, что оператор (5.7) действительно осуществляет поворот на угол γ вокруг $Lin\{q_0, e_1\}$, легко проверяется путем рассмотрения его действия на произвольный вектор $x \in M$ (при использовании разложения x по базису $\{q_0, e_1, e_2, g\}$). Заметим, что в соответствии с (5.6), (5.7) $P_\gamma = I$ при любом γ , кратном 2π . Оператор P_γ является ортогональным, так как $P_\gamma \cdot P_\gamma^T = P_\gamma^T \cdot P_\gamma = I$ при всяком γ . Это означает, что P_γ представляет собой преобразование Лоренца. Более того, P_γ , как можно показать, относится к так называемым ограниченными преобразованиями Лоренца, которые не меняют временную и пространственную ориентации в M . Оператор P_γ , подчеркнем, свой для каждого луча, потому что различным лучам отвечают различные векторы q_0, e_1, e_2, g .

Оператор P_γ , действуя на векторы базиса $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}\}$, переводит этот базис в $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, \cos \gamma \mathbf{e}_2 + \sin \gamma \mathbf{g}, -\sin \gamma \mathbf{e}_2 + \cos \gamma \mathbf{g}\}$. Если угол γ изменять непрерывным образом от нуля до π , то исходный базис, поворачиваясь непрерывно вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$, преобразуется в итоге в базис $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{g}\}$. Последний имеет в M ту же ориентацию, что и исходный базис. Однако внутри подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$ ситуация в отношении ориентации будет иной. Базис этого пространства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в процессе такого преобразования сначала выйдет своим вторым вектором из $C_{\mathbf{q}_0}$ (так как $P_\gamma \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \gamma \mathbf{e}_2 + \sin \gamma \mathbf{g}$ и $\mathbf{g} \perp C_{\mathbf{q}_0}$), но затем, при $\gamma = \pi$, снова окажется в $C_{\mathbf{q}_0}$. При этом он превратится в базис $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, имеющий противоположную ориентацию. Аналогичным образом и другие трехмерные геометрические объекты в $C_{\mathbf{q}_0}$ меняют свою ориентацию при повороте вокруг $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$ на угол π . В том числе это произойдет с содержащимся в $C_{\mathbf{q}_0}$ лучом: винтовые нити, составляющие луч, превратятся из правозакрученных в левозакрученные (или наоборот, если вначале они были левозакрученными). Детализируем это преобразование луча.

Назовем оператор P_γ вида (5.7) при $\gamma = \pi$ *оператором переориентации луча* и обозначим его через P :

$$P = \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{g} \mathbf{g}. \quad (5.8)$$

Оператор P , как и P_γ , свой для каждого луча. Очевидно, что внутри трехмерного $C_{\mathbf{q}_0}$ этот оператор играет роль оператора зеркального отражения в плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$. Важно, однако, что осуществляемая им переориентация луча может быть произведена, как следует из сказанного выше, посредством *непрерывного вращения* луча (вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$, с промежуточным выходом из $C_{\mathbf{q}_0}$). Это обстоятельство позволяет считать, что подобная трансформация, в принципе, возможна и с материальными прообразами лучей, если таковые существуют. Далее будем рассматривать действие оператора P лишь на соответствующий луч (имеющий направляющий орт оси \mathbf{q}_0), точнее, на его векторные характеристики. Подчеркнем, что при осуществлении переориентации луча не происходит изменения других лучей. Луч, подвергшийся действию оператора P , будем называть *переориентированным*. Характеристики такого луча будем помечать штрихами. Иллюстрацией к процессу переориентации луча служит рис. 5.2.

Заметим, что переориентация луча может быть осуществлена с помощью поворота его на угол π не только вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$, как описа-

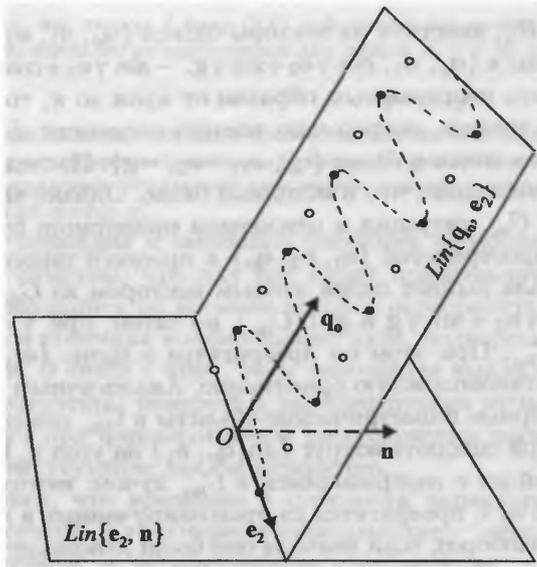


Рис. 5.2. Сечение нити гиперплоскостью $Lin\{q_0, e_2, n\}$.

Темные кружки — сечение нити; штриховая кривая — проекция нити на плоскость $Lin\{q_0, e_2\}$; светлые кружки — сечение этой же нити после переориентации луча. Сама нить лежит в гиперплоскости $C_{q_0} = Lin\{e_1, e_2, q_0\}$, пересекающейся с $Lin\{q_0, e_2, n\}$ только по плоскости $Lin\{q_0, e_2\}$. При переориентации луча вектор q_0 остается неизменным, вектор e_2 меняет направление на противоположное. Рисунок относится к нити, для которой в ее уравнении (2.3) выполняется $\chi = \pi/2$ (так как один из темных кружков, изображающих сечение нити, лежит на прямой, проходящей через центр частицы и направленной вдоль вектора e_2).

но выше, но и вокруг любой плоскости $Lin\{q_0, e\}$, где $e \in Lin\{e_1, e_2\}$. Мы рассматриваем поворот именно вокруг плоскости $Lin\{q_0, e_1\}$ лишь для определенности и некоторого упрощения последующих формул.

Радиус-вектор элементов нити \mathbf{R} и направляющий орт касательной к нити \mathbf{q} , выражаемые зависимостями (2.3) и (2.10), преобразуются оператором Π в векторы

$$\mathbf{R}' = \Pi \cdot \mathbf{R} = r_0 \left[\cos \nu e_1 - \sin \nu e_2 \pm \frac{\psi}{\beta_0} q_0 \right]; \quad (5.9)$$

$$\mathbf{q}' = \Pi \cdot \mathbf{q} = \frac{\beta_0}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \mp \cos \nu \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta_0} \mathbf{q}_0 \right], \quad (5.10)$$

где \mathbf{q}' — касательный вектор к нити в ее точке с радиусом-вектором \mathbf{R}' ; эти формулы задают разложения векторов \mathbf{R}' и \mathbf{q}' по исходному (не преобразованному) базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ подпространства $S_{\mathbf{q}_0}$.

Из сравнения формул (5.9), (5.10) с формулами (2.3), (2.10) видно, что при действии оператора Π винтовая нить действительно меняет свою ориентацию. Вместе с тем ни радиус нити r_0 , ни параметр β_0 , ни шаг нити Π при этом не изменяются. Не меняется и направляющий вектор оси луча \mathbf{q}_0 , ибо $\mathbf{q}'_0 = \Pi \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0$. Все это свидетельствует о том, что остов частицы, состоящий из осей лучей, а также ось симметрии частицы остаются неизменными при переориентации луча. Вместе с ними остаются неизменными направляющий орт \mathbf{i} оси симметрии частицы и собственное физическое пространство частицы $\Gamma_* = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$.

Еще раз обратим внимание на то, что мы рассматриваем действие оператора Π только на соответствующий луч и не применяем его к другим лучам. Условимся не применять оператор Π также к вектору \mathbf{n} . Благодаря этому и вследствие неизменности векторов \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} при действии оператора Π , формулы (5.3) и (5.5) выполняются как до, так и после переориентации луча. Вместе с тем будем полагать, что вектор \mathbf{g} подвергается преобразованию при переориентации луча: $\mathbf{g}' = \Pi \cdot \mathbf{g}$. Такое допущение мы принимаем в связи с тем, что вектор \mathbf{g} дополняет «скрепленный» с лучом базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ подпространства $S_{\mathbf{q}_0}$ до базиса пространства M и поэтому его самого естественно считать как бы «скрепленным» с лучом. Так как в результате действия оператора Π вектор \mathbf{g} меняет знак ($\mathbf{g}' = -\mathbf{g}$), то формулы (5.2) и (5.4) теряют силу после переориентации луча.

Неизменность вектора \mathbf{n} нам нужна для того, чтобы этот вектор, лежащий в плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, всегда был направлен по отношению к прямой $Lin\{\mathbf{i}\}$ в сторону той же полуплоскости, что и вектор \mathbf{q}_0 , как показано на рис. 5.1. Принятое же допущение об изменении вектора \mathbf{g} при переориентации луча не имеет большого значения, потому что этот вектор участвует в последующем изложении только неявным образом в составе выражения (5.8) для оператора Π , которое не изменяется при смене знака \mathbf{g} .

Отметим, что вектор \mathbf{o} , введенный в предыдущем разделе, может только знаком отличаться от вектора \mathbf{n} , так как каждый из них дополняет векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ до ортонормированного базиса в Γ_* .

Но вектор \mathbf{o} , в отличие от \mathbf{n} , изменяет свое направление на противоположное при переориентации луча. Это объясняется тем, что вектор \mathbf{o} , по определению, задается таким образом, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$ был правоориентированным в Γ_* . А поскольку при переориентации луча вектор \mathbf{e}_1 не меняется, а \mathbf{e}_2 преобразуется в $-\mathbf{e}_2$, то для сохранения правоориентированности базиса вектор \mathbf{o} должен поменять знак (при этом преобразованный базис имеет вид $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{o}'\} = \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{o}\}$).

Рассмотрим движение переориентированного луча.

Мы задали выше операторы поворота и переориентации луча как действующие в условиях фиксированного расположения частицы в пространстве M . Это означает, что они никак не связаны с движением частицы в M , и следовательно у нас нет основания полагать, что скорость луча \mathbf{j} преобразуется обязательно каким-то определенным образом (например, подобно вектору \mathbf{R} , по правилу $\mathbf{j}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{j}$). Поэтому закон движения переориентированного луча должен быть введен как независимый постулат.

Принимая во внимание, что ось луча не претерпевает изменения при действии оператора \mathbf{P} , будем считать, что ось луча продолжает двигаться после переориентации луча с той же скоростью \mathbf{j}_0 вида (3.3), с какой она двигалась до переориентации. В отношении же вращательной составляющей скорости луча \mathbf{j}_* , задаваемой формулой (3.4), положим, что она преобразуется при переориентации луча в соответствии с правилом $\mathbf{j}'_* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{j}_*$.

Допущение относительно скорости \mathbf{j}_* мы принимаем, пользуясь следующей аналогией. Известно, что в двумерной плоскости ориентация может быть задана фиксированием направления вращения в ней. Возьмем часы и положим их на поверхность стола циферблатом кверху. При взгляде на них сверху мы увидим стрелки часов вращающимися, как принято говорить, по ходу часовой стрелки. Известно, что ни при каком перемещении вращающегося двумерного тела, осуществляемом внутри самой плоскости, невозможно изменить направление его вращения относительно плоскости на противоположное. Однако это можно сделать, если вращающееся тело повернуть на 180° вокруг какой-либо оси, лежащей в той же плоскости (при этом тело временно выйдет из плоскости, но затем снова окажется в ней). Поступим таким образом с рассматриваемыми часами: перевернем их циферблатом вниз. Если бы корпус часов был прозрачным, то мы увидели бы теперь, что стрелки вращаются в противоположном направлении. Однако, разумеется, механизм ча-

сов обеспечивает вращение стрелок всегда в одну и ту же сторону по отношению к корпусу часов. Пользуясь аналогией с этим примером, мы принимаем, что в исследуемом нами случае вращающегося луча его переориентация (осуществляемая посредством поворота на угол π вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$) происходит, образно говоря, вместе с «механизмом», поддерживающим вращение луча. И поэтому вращение луча совершается всегда одинаковым образом по отношению к «корпусу» луча, роль которого выполняет в данном случае базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$. В такой ситуации вращательная составляющая скорости луча имеет компоненты в преобразованном базисе $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{q}'_0\} = \{P \cdot \mathbf{e}_1, P \cdot \mathbf{e}_2, P \cdot \mathbf{q}_0\}$ точно такие же, какие до переориентации она имела в исходном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$. А это и означает, что \mathbf{j}_* преобразуется при переориентации луча в соответствии с правилом $\mathbf{j}'_* = P \cdot \mathbf{j}_*$. (Заметим, что базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{q}'_0\}$ является, как и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, ортонормированным, благодаря ортогональности оператора P .)

Итак, мы постулируем, что составляющие \mathbf{j}'_0 и \mathbf{j}'_* скорости переориентированного луча имеют вид

$$\mathbf{j}'_0 = \mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_0; \quad \mathbf{j}'_* = P \cdot \mathbf{j}_* = r_0 \frac{0}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 - \cos \nu \mathbf{e}_2], \quad (5.11)$$

здесь использованы формулы (3.3), (3.4) и (5.8). Отсюда получаем для скорости переориентированного луча \mathbf{j}' следующее выражение:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}'_0 + \mathbf{j}'_* = \mathbf{i} + q \mathbf{q}_0 + r_0 \frac{0}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 - \cos \nu \mathbf{e}_2]. \quad (5.12)$$

Формула (5.12), как и аналогичная формула (3.2) для скорости \mathbf{j} непереориентированного луча, относится к случаю инерциального движения свободной частицы.

Обратим внимание на то обстоятельство, что так как скорость оси луча не меняется при переориентации луча ($\mathbf{j}'_0 = \mathbf{j}_0$), то движение остова частицы в пространстве M не зависит от того, подвергаются или нет переориентации какие-либо лучи частицы. Это означает, что вне зависимости от наличия или отсутствия у частицы переориентированных лучей мировая линия свободной частицы, движущейся инерциально, имеет вид, указанный в разд. 3. Она представляет собой прямую линию с направляющим вектором \mathbf{i} , причем скорость центра частицы равна \mathbf{i} .

Из принятого выше выражения для величины \mathbf{j}'_* вытекает, что скорость вращения переориентированного луча противоположна

первоначальной. Чтобы убедиться в этом, сравним скорости вращения луча в исходном и преобразованном состояниях в одной и той же точке пространства. Подставив в равенство $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ значения радиусов-векторов из (2.3) и (5.9), получаем: $\sin \nu = 0$. При таком условии из (3.4) и второй из зависимостей (5.11) находим, что вращательные составляющие скорости луча \mathbf{j}_* и \mathbf{j}'_* равны одна $(r_0 \omega/c)\mathbf{e}_2$, а другая $-(r_0 \omega/c)\mathbf{e}_2$, то есть они действительно противоположны.

Скорость \mathbf{j}' описывает движение переориентированного луча относительно пространства M . Нам далее потребуется скорость луча относительно центра частицы. Введем для нее обозначение $(\mathbf{j} - \mathbf{i})'$. На основании (5.12), учитывая, что центр частицы движется в M со скоростью \mathbf{i} , имеем:

$$(\mathbf{j} - \mathbf{i})' = q \mathbf{q}_0 + r_0 \frac{\omega}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 - \cos \nu \mathbf{e}_2]. \quad (5.13)$$

Заметим, что в соответствии с (3.2) и (5.8) выполняется $(\mathbf{j} - \mathbf{i})' = \Pi \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{i})$.

Найдем спин переориентированного луча. Он может быть вычислен путем подстановки в формулу (4.1) значений радиуса-вектора \mathbf{R}' и скорости $(\mathbf{j} - \mathbf{i})'$ из равенств (5.9) и (5.13) и последующих преобразований этой формулы, аналогичных проведенным в разд. 4. Однако результат можно получить, не проводя этих преобразований. Дело в том, что поскольку \mathbf{R}' и $(\mathbf{j} - \mathbf{i})'$ отличаются от \mathbf{R} и $(\mathbf{j} - \mathbf{i})$, выражаемых зависимостями (2.3) и (3.2), лишь наличием знака минус перед вектором \mathbf{e}_2 , то и результат вычисления спина будет различаться только знаком при \mathbf{e}_2 от значения спина, описываемого формулой (4.6). А так как, согласно этой формуле, спин K_* непереориентированного луча пропорционален \mathbf{e}_2 , то следовательно спин K'_* переориентированного луча равен величине K_* с противоположным знаком. Отсюда вытекает, что спин \bar{K}'_* , выраженный в форме псевдовектора, тоже отличается только знаком от задаваемой формулой (4.10) величины \bar{K}_* (этот же вывод вытекает, конечно, и из упомянутого ранее факта изменения знака вектора \mathbf{o} при переориентации луча). Таким образом, спин переориентированного луча равен

$$\bar{K}'_* = -n_* m_* \omega r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*}\right) \Delta \mathbf{o}, \quad (5.14)$$

где вектор \mathbf{o} имеет то же значение, что и в (4.10), то есть относится к состоянию луча до переориентации.

Вычислим теперь спин всей частицы. В соответствии с определением, данным в разд. 4, он равен сумме спинов составляющих частицу лучей.

Согласно теореме 2.1 центральное сечение частицы, то есть сечение частицы ее собственным физическим пространством $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, представляет собой совокупность всевозможным образом ориентированных фигур, показанных на рис. 2.2. Эти фигуры суть сечения различных лучей гиперплоскостью Γ_* . Векторами, ортогональными (в Γ_*) к таким сечениям, служат векторы \mathbf{o} . Будем считать, что все они имеют начало в центре частицы, который служит общей точкой всех сечений. Симметрия центрального сечения частицы (до переориентации лучей), как указывалось в начале раздела, описывается группой собственных вращений пространства Γ_* . Поэтому концы векторов \mathbf{o} равномерно распределены по единичной сфере с центром в центре частицы. Отсюда сразу вытекает, что среднее значение векторов \mathbf{o} по центральному сечению частицы равняется нулю. На основании этого вывода и зависимостей (4.10), (5.14) заключаем, что частица имеет нулевой спин как при отсутствии переориентации лучей, так и в том случае, когда все ее лучи подверглись переориентации. Вместе с тем очевидно, что частица может иметь ненулевой спин, если переориентации подверглась только часть лучей частицы.

Максимальное по модулю значение спина частицы мы получим при выполнении следующего условия.

Условие переориентации лучей. Пусть ровно половина лучей частицы является переориентированной, в то время как другая половина лучей сохраняет свою ориентацию. Причем эти два множества лучей характеризуются тем, что концы векторов \mathbf{o} для них находятся на противоположных полусферах окружающей центр частицы единичной сферы. (Эта сфера принадлежит собственному физическому пространству частицы Γ_* ; под \mathbf{o} понимается вектор, относящийся к состоянию луча до его переориентации.)

Найдем спин частицы для этого случая. Введем орт нормали \mathbf{k} к плоскости раздела указанных полусфер ($\mathbf{k} \in \Gamma_*$; $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1$). Условимся направлять вектор \mathbf{k} от центра частицы в сторону той полусферы, которой принадлежат концы векторов \mathbf{o} лучей, не подверг-

шихся переориентации. В этом случае векторы \mathbf{o} таких лучей образуют с \mathbf{k} углы, лежащие в промежутке $[0, \pi/2)$, а векторы \mathbf{o} переориентированных лучей образуют с \mathbf{k} углы из промежутка $(\pi/2, \pi]$. Относительно лучей, векторы \mathbf{o} которых образуют с \mathbf{k} угол $\pi/2$, мы не будем уточнять, какие из них подверглись переориентации, а какие нет, что не повлияет на последующие результаты.

Пусть общее количество лучей, составляющих частицу, равно N . Тогда при равномерном распределении концов векторов \mathbf{o} по единичной сфере, на единицу площади поверхности сферы приходится $N/(4\pi)$ концов векторов \mathbf{o} . Интегрируя векторы \mathbf{o} с таким весом по каждой полусфере, находим, что сумма всех векторов \mathbf{o} , отвечающих непереориентированным лучам, равна $(N/4)\mathbf{k}$, а сумма всех векторов \mathbf{o} для переориентированных лучей равна $-(N/4)\mathbf{k}$. Используя этот результат, на основании (4.10) и (5.14) получаем для спина частицы \bar{K} значение

$$\bar{K} = \frac{1}{2} N n_* m_* o r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right) \Delta \mathbf{k}, \quad (5.15)$$

здесь, повторим, N — общее число лучей, образующих частицу; n_* — количество спиралей, из которых состоит каждый луч (согласно (4.14) $n_* = 137$); m_* — масса спирали; o — угловая скорость собственного вращения луча (это вращение осуществляется вокруг оси луча внутри своего для каждого луча трехмерного подпространства C_{q_0}); r_* — радиус частицы; Δ — единичный псевдоскаляр в собственном физическом пространстве частицы Γ_* ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах); $\mathbf{k} \in \Gamma_*$ — орт нормали к плоскости, которая отделяет множество векторов \mathbf{o} переориентированных лучей от множества векторов \mathbf{o} непереориентированных лучей. При выводе формулы (5.15) учтено, что величины n_* , m_* , o и r_* , в соответствии с принятыми ранее допущениями, одинаковы для всех лучей. С помощью зависимости, аналогичной второй из зависимостей (4.9), спин частицы может быть выражен также в виде бивектора $K = -\bar{K} \cdot \varkappa$ (\varkappa — псевдотензор Леви—Чивита над Γ_*).

Входящее в (5.15) произведение $N n_* m_*$, в предположении аддитивности массы, равно массе частицы, которую обозначим через m :

$$m = N n_* m_*. \quad (5.16)$$

Из (5.15) и (5.16) следует, что спин частицы пропорционален ее массе.

Подчеркнем, что спин частицы имеет значение (5.15) только в случае переориентации половины лучей частицы, причем осуществленной в соответствии с принятым выше условием. Если же переориентации подвергнуто большее или меньшее число лучей или закон распределения переориентированных лучей отличен от указанного, то, как нетрудно убедиться, спин частицы принимает меньшее по модулю значение. При отсутствии переориентации, а также в случае переориентации всех лучей, спин частицы, как отмечалось, равен нулю. Важно, что для любого заданного направления в Γ_* можно произвести переориентацию лучей так, что спин частицы будет ориентирован именно в этом направлении; причем такая переориентация лучей может быть осуществлена путем непрерывного вращения лучей (вокруг соответствующих плоскостей $Lin\{\mathbf{q}_0, \mathbf{e}_1\}$) при неподвижном остове частицы.

Понятия спина частицы и спина луча введены в настоящем и предыдущем разделах применительно к случаю свободной частицы, движущейся инерциально. Эти характеристики частицы определяются собственным вращением лучей вокруг их осей. В разд. 3 мы приняли допущение о неизменности угловой скорости такого вращения лучей при любом движении частицы. Поэтому в случае произвольного движения частицы те составляющие кинетических моментов луча и частицы, которые обусловлены собственным вращением лучей, принимают фиксированные значения, равные найденным выше значениям величин \bar{K}_* и \bar{K} . Это означает, что данные величины отражают определенные свойства частицы при любом ее движении. В связи с этим в дальнейшем будем называть величины \bar{K}_* (или K_*) и \bar{K} (или K) спином луча и спином частицы при любом движении частицы.

6. Операторы интегрирования по поперечному сечению луча и по центральному сечению частицы

В дальнейшем нам потребуется интегрировать некоторые характеристики нитей по поперечному сечению луча и по центральному сечению частицы. Введем операторы, реализующие эти процедуры.

Зафиксируем произвольное расположение частицы в пространстве M и рассмотрим какой-либо ее луч. Пусть S — одно из поперечных сечений луча. Такое сечение, напомним, имеет вид фигуры, показанной на рис. 2.2 и 4.1; оно, вместе с самим лучом, лежит в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$ (где \mathbf{q}_0 — направляющий орт оси луча), причем плоскость сечения ортогональна вектору \mathbf{q}_0 . При интегрировании характеристик нитей по сечению S нужно знать закон, по которому распределены вдоль сечения точки пересечения с ним нитей луча. Зададим этот закон.

Очевидно, вполне можно допустить, что указанные точки пересечения распределены вдоль S равномерно. Между тем имеется основание рассмотреть и иной закон распределения этих точек. Действительно, при расчете спина луча в разд. 4 мы использовали допущение о равномерности распределения массы спирали по ее объему. Благодаря такому допущению, мы получили значение постоянной тонкой структуры α , которое с высокой точностью совпало с экспериментальным. Воспользуемся этим же допущением для конкретизации интересующего нас закона распределения точек пересечения нитей с сечением S .

Представляется оправданным предположить, что масса спирали пропорциональна длине составляющих ее винтовых нитей. Однако нити, вследствие различия у них параметров β_0 , имеют разные длины. В самом деле, элемент длины нити есть $\sqrt{|d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}|}$ (\mathbf{R} — радиус-вектор точек нити). Поэтому на основании равенства (2.3) (или равенства (5.9) в случае переориентированного луча) с учетом зависимостей (2.6) и (2.7) заключаем, что длина нити, приходящаяся на один шаг спирали, составляет

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \right|} d\psi = \frac{2\pi r_*}{\beta} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} = \text{Ш} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}. \quad (6.1)$$

Этот же результат легко получить с помощью рис. 6.1, пользуясь аналогом теоремы Пифагора для псевдоевклидовой плоскости. Из

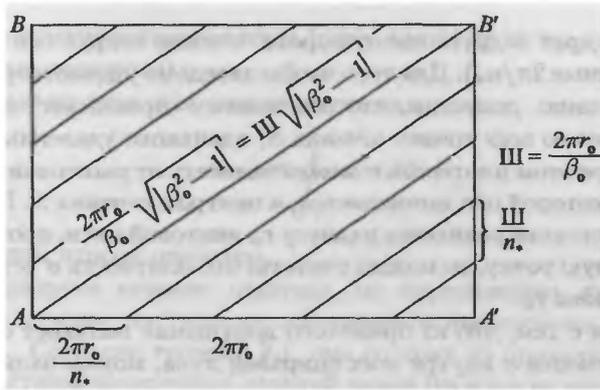


Рис. 6.1. Развертка цилиндрической поверхности, на которой располагаются винтовые нити радиуса r_0 .

Изображены соответственные нити, принадлежащие разным спиральям луча (всего таких нитей n_* штук; показанное их количество — условное). Линия AB , по которой произведен разрез цилиндрической поверхности, параллельна направляющему орту оси луча \mathbf{q}_0 . Линии AA' и BB' лежат в плоскостях, ортогональных вектору \mathbf{q}_0 . Представлен участок поверхности, соответствующий одному шагу нитей III .

(6.1) вытекает, что нити действительно имеют различные длины (ибо шаг III всех нитей луча одинаков, а параметр β_0 , согласно (2.8), пропорционален радиусу винтовой нити r_0). Следовательно, для того, чтобы распределение массы по объему спирали было равномерным, распределение нитей внутри спирали должно быть неравномерным, компенсирующим неодинаковость их длин. При этом и распределение точек пересечения нитей с сечением S тоже будет неравномерным.

Введем плотность σ точек пересечения нитей с сечением S , определив ее условием, что число точек пересечения, приходящееся на элемент площади dS сечения S , равно σdS . Пусть N_* — количество нитей, содержащихся в одной спирали луча. Напомним, что каждый луч состоит из n_* одинаковых спиралей, занумерованных нами целыми числами от 0 до $n_* - 1$. Это означает, что всего луч содержит $n_* N_*$ нитей. Таково же общее число точек пересечения нитей с сечением S . В разд. 2 было постулировано, что каждый луч обладает осевой симметрией порядка n_* . Следовательно, плотность σ должна быть одинаковой во всех спиральях луча (точнее говоря, она должна быть одинаковой в точках сечения S , которые

переходят друг в друга при повороте сечения вокруг оси луча на углы, кратные $2\pi/n_*$. Для того чтобы заведомо удовлетворить этому требованию, допустим, что плотность σ принимает одно и то же значение во всех точках сечения S , одинаково удаленных от его центра. При этом плотность σ может зависеть от расстояния между точкой, в которой она вычисляется, и центром сечения S . Поскольку это расстояние равняется радиусу r_0 винтовой нити, проходящей через данную точку, то можно считать, что плотность σ есть функция величины r_0 .

В связи с тем, что из принятого допущения вытекает одинаковость плотности σ внутри всех спиралей луча, можем записать:

$$\int_{(S)} \sigma dS = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \sigma dS = n_* \int_{(S_0)} \sigma dS = n_* N_*, \quad (6.2)$$

где S_ξ — сечение спирали № ξ , лежащее в S , в частности, S_0 — сечение спирали № 0 (каждое такое сечение является одним из кругов радиуса p_* на рис. 2.2).

Выпишем для плотности σ выражения, отвечающие равномерному и неравномерному распределениям вдоль S рассматриваемых точек пересечения. Будем помечать символ σ индексом 1 в случае равномерного распределения вдоль S точек пересечения и индексом 2 в случае такого распределения этих точек, при котором одинаковым элементам площади сечения S отвечают равные суммарные длины пересекающих их нитей. В тех ситуациях, когда конкретный вид плотности не имеет значения, будем пользоваться символом σ без индекса. Принимая во внимание, что сечение S состоит из n_* одинаковых кругов радиуса p_* , нетрудно показать с учетом выражений (6.1) и (6.2), что

$$\sigma_1 = \frac{N_*}{\pi p_*^2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_*}{J_0} \frac{1}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} \quad \text{при} \quad J_0 = \int_{(S_0)} \frac{dS}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}, \quad (6.3)$$

здесь σ_1 является константой на S , а σ_2 зависит от r_0 в силу зависимости от r_0 параметра β_0 . В дальнейшем будем считать, что распределение нитей внутри спиралей луча и, следовательно, плотность σ точек пересечения нитей с поперечным сечением луча не изменяются при любом движении частицы.

Введем обозначения: $\langle \dots \rangle$ — оператор интегрирования по поперечному сечению луча S ; $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ — оператор интегрирования по

центральному сечению частицы (здесь многоточия заменяют интегрируемые величины).

Первый из этих операторов имеет вид

$$\langle \dots \rangle = \int_{(S)} \dots \sigma dS. \quad (6.4)$$

Зададим второй оператор.

Центральное сечение частицы, по определению, представляет собой сечение частицы ее собственным физическим пространством Γ_* . Согласно теореме 2.1, оно состоит из проходящих через центр частицы поперечных сечений лучей (каждое из которых имеет вид фигуры, изображенной на рис. 2.2). Это означает, что оператор $\langle \dots \rangle$ фактически есть оператор интегрирования по всем таким сечениям лучей. В связи с тем, что каждому лучу частицы соответствует свой направляющий орт оси \mathbf{q}_0 , интегрирование по всем указанным сечениям лучей может быть произведено путем интегрирования по одному из сечений и последующего интегрирования по всем векторам \mathbf{q}_0 .

Оси всех лучей частицы, согласно определению, пересекаются в одной точке — центре частицы — и равномерно распределены по внутренности светового конуса, имеющего вершиной данную точку. При этом все направляющие орты \mathbf{q}_0 осей лучей имеют началом центр частицы. Следовательно, концы векторов \mathbf{q}_0 равномерно распределены по единичной псевдосфере (имеющей времениподобные радиусы и центр в центре частицы), точнее, по той из двух ее пол, которая находится внутри светового конуса будущего. Из этого вытекает, что интегрирование по множеству векторов \mathbf{q}_0 может быть сведено к интегрированию по указанной поле единичной псевдосферы. С учетом изложенного выше отсюда заключаем, что оператор $\langle \dots \rangle$ может быть представлен в виде суперпозиции оператора $\langle \dots \rangle$ (примененного к сечениям лучей, лежащим в Γ_*) и оператора интегрирования по упомянутой поле единичной псевдосферы.

Уравнение псевдосферы с времениподобными радиусами, имеющей центр в центре частицы, есть

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2,$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор точек псевдосферы относительно центра частицы; R — радиус псевдосферы ($R > 0$). Такая псевдосфера представляет собой аналог двуполостного гиперboloида в трехмерном

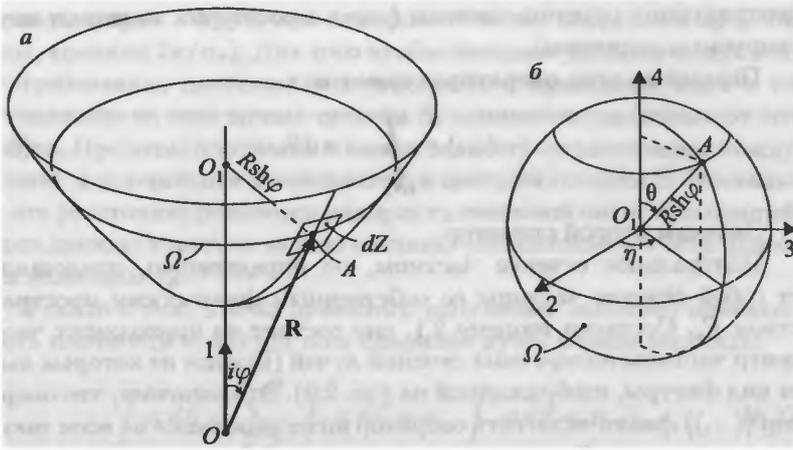


Рис. 6.2. *a* — одна из пол псевдосферы, описываемой уравнением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R^2$ (с центром в точке O); *б* — сечение этой полу, выделяемое условием постоянства угла $i\varphi$ между некоторой времениподобной прямой, проходящей через O , и радиусом-вектором \mathbf{R} точек полу.

Рисунок *a* дан с понижением размерности на единицу (поэтому изображенная на рисунке *б* сфера Ω имеет на рисунке *a* вид окружности); R — радиус псевдосферы; $R \operatorname{sh} \varphi$ — радиус сферы Ω ; φ, θ, η — угловые координаты на поле псевдосферы; каждый из символов O_1 и A обозначает на рисунках *a* и *б* одну и ту же точку; векторы, занумерованные цифрами от 1 до 4, образуют ортогональный базис пространства Минковского.

собственно евклидовом пространстве (рис. 6.2). Элемент площади dZ этой гиперповерхности равен

$$dZ = R^3 \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta, \quad (6.5)$$

здесь φ, θ, η — угловые координаты на псевдосфере (эта тройка координат своя для каждой полу псевдосферы); угол $i\varphi$ отсчитывается от произвольной времениподобной прямой, проходящей через центр частицы; θ и η — обычные сферические координаты на двумерной сфере радиуса $R \operatorname{sh} \varphi$, выделяемой на поле псевдосферы условием $\varphi = \operatorname{const}$ ($\varphi \in [0, +\infty)$; $\theta \in [0, \pi]$; $\eta \in [0, 2\pi)$; см. рис. 6.2). Площадь каждой из пол псевдосферы равна

$$Z = \int_{(Z)} dZ = 4\pi R^3 \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi, \quad (6.6)$$

где символ Z обозначает как саму полу псевдосферы, так и ее площадь (предел в правой части выражения, строго говоря, равен бесконечности, однако это не препятствует получению в дальнейшем с помощью выражения (6.6) конечных величин).

В связи с тем, что нас интересует единичная псевдосфера, точнее, та ее пола, на которой располагаются концы векторов \mathbf{q}_0 , далее под Z будем понимать именно эту полу (одновременно Z будет обозначать ее площадь). Поскольку данная пола имеет единичный радиус, следует положить в выписанных формулах $R = 1$.

Пусть общее число лучей, составляющих частицу, равно N . Тогда при равномерном распределении концов векторов \mathbf{q}_0 по рассматриваемой полу Z единичной псевдосферы на элемент ее площади dZ приходится $(N/Z) dZ$ концов векторов \mathbf{q}_0 .

На основании сказанного заключаем, что оператор интегрирования по центральному сечению частицы может быть представлен в следующем виде:

$$\langle \langle \dots \rangle \rangle = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \dots \rangle_* dZ, \quad (6.7)$$

где оператор $\langle \dots \rangle$ задается формулой (6.4); звездочка при символе $\langle \dots \rangle$ означает, что интегрирование проводится по поперечному сечению луча, лежащему в собственном физическом пространстве частицы Γ_* ; элемент площади dZ и сама площадь Z рассматриваемой полу псевдосферы описываются выражениями (6.5) и (6.6) при $R = 1$.

Применим введенные операторы к направляющим ортам касательных к нитям \mathbf{q} .

Сначала подействуем на векторы \mathbf{q} оператором $\langle \dots \rangle$, иначе говоря, проинтегрируем векторы \mathbf{q} по поперечному сечению луча S :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \rangle &= \int_{(S)} \mathbf{q} \sigma dS = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \mathbf{q} \sigma dS = \int_{(S_0)} \sigma \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \mathbf{q} dS = \\ &= \mathbf{q}_0 n_* \int_{(S_0)} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS, \end{aligned} \quad (6.8)$$

здесь первое равенство записано на основании определения (6.4) оператора $\langle \dots \rangle$; второе равенство базируется на представлении се-

чения S в виде объединения непересекающихся сечений S_ξ отдельных спиралей, составляющих луч ($\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$); в третьем равенстве каждый из суммируемых интегралов сведен к интегралу по сечению S_0 спирали №0, при этом использованы, во-первых, одинаковость плотности σ вдоль всех сечений S_ξ и, во-вторых, тот факт, что выражения (2.10) для векторов \mathbf{q} , относящихся к соответственным нитям разных спиралей, различаются только номером спирали ξ (входящим в зависимость (2.6) для угла ν); в четвертом равенстве применены формулы (2.10), (4.3) и учтено, что направляющий орт оси луча \mathbf{q}_0 является общим для всех нитей луча. Формула (6.8) справедлива не только в случае непереориентированного луча, но и в случае переориентированного луча, в чем легко убедиться, если в проведенных преобразованиях воспользоваться вместо выражения (2.10) выражением (5.10).

Теперь применим к векторам \mathbf{q} оператор $\langle\langle \dots \rangle\rangle$, то есть найдем интеграл от векторов \mathbf{q} по центральному сечению частицы. В качестве переменных интегрирования будем использовать угловые координаты φ, θ, η , упомянутые выше.

Условимся отсчитывать угол $i\varphi$ от оси симметрии частицы (эта ось, напомним, проходит через центр частицы и направлена вдоль вектора \mathbf{i}). Поскольку при таком условии угол $i\varphi$ совпадает с задаваемым формулой (5.1) углом между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , то вектор \mathbf{q}_0 может быть представлен в виде (5.5).

С помощью зависимостей (6.7), (6.8), (6.5) (при $R = 1$) и (5.5) получаем

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle &= \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \mathbf{q} \rangle_* dZ = \\ &= \frac{N n_*}{Z} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}) \left(\int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \times \\ &\times \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где S_{0*} — сечение спирали №0, лежащее в Γ_* . В связи с тем, что зависимости (5.5) и (6.8) выполняются как для непереориентированного луча, так и для переориентированного луча, выражение (6.9) также относится к обоим типам лучей.

В выражении (6.9) от переменных θ и η зависит, помимо величин, входящих в элемент площади dZ , только вектор \mathbf{n} . Из формулы (5.5) и рис. 5.1 видно, что величина $\text{sh } \varphi \mathbf{n}$ представляет собой составляющую вектора \mathbf{q}_0 вдоль собственного физического пространства частицы $\Gamma_* = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, причем \mathbf{n} — направляющий орт этой составляющей. Вследствие равномерности распределения концов векторов \mathbf{q}_0 по поле Z единичной псевдосферы, концы векторов \mathbf{n} оказываются равномерно распределенными по единичной сфере в Γ_* . Поэтому интеграл от \mathbf{n} по данной сфере (к которому в (6.9) сводится двойной интеграл от \mathbf{n} по переменным θ и η) равен нулевому вектору. Учитывая это и пользуясь зависимостью (6.6) (при $R = 1$), можем привести выражение (6.9) к виду

$$\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = \mathbf{i} N n_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \text{ch } \varphi \text{sh}^2 \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi}, \quad (6.10)$$

здесь отношение пределов двух функций (при $\Phi \rightarrow +\infty$) заменено на предел отношения этих функций. Выражение (6.10), как и выражение (6.9), справедливо независимо от того, испытали лучи переориентацию или нет.

Предел функции, стоящей в знаменателе формулы (6.10), как отмечалось, равен бесконечности. Вследствие этого, замена отношения пределов функций пределом их отношения не является вполне корректным преобразованием с точки зрения классического математического анализа. Тем не менее мы будем полагать это преобразование допустимым. Заметим, что в рамках нестандартного анализа [3] отмеченную некорректность, по-видимому, можно «обойти», если принять, что Φ есть некоторое бесконечно большое гипердействительное число. В этом случае предельные переходы в числителе и знаменателе окажутся ненужными, и поэтому производить такое некорректное преобразование просто не потребуется.

Выражение (6.10) содержит в знаменателе функцию, предел которой при $\Phi \rightarrow +\infty$ равен бесконечности. Следовательно правая часть этого выражения будет иметь конечное значение тогда и только тогда, когда при $\Phi \rightarrow +\infty$ функция, стоящая в числителе, будет представлять собой бесконечно большую величину того же порядка, что и функция, находящаяся в знаменателе. Нетрудно убедиться в том, что это условие будет выполнено, если в числителе под знаками интегралов будет присутствовать множитель, который при $\varphi \rightarrow -\infty$ является бесконечно малой величиной порядка $1/\text{ch } \varphi$ или $1/\text{sh } \varphi$ ($\text{ch } \varphi \approx \text{sh } \varphi$ при $\varphi \rightarrow +\infty$). Такое имело бы место, если, на-

пример, выполнялось бы $\beta_o = \text{ch } \varphi$ или $\beta_o = \text{sh } \varphi$. Мы, однако, не можем ни одно из этих равенств считать верным, так как они не учитывают наличие вытекающей из (2.8) зависимости параметра β_o от радиуса винтовой нити r_o .

Между тем, если бы равенство $\beta_o = \text{ch } \varphi$ все же выполнялось, то при любых φ было бы $\beta_o > 1$ ($\beta_o \neq 1$, ибо мы исключили из рассмотрения случай $\varphi = 0$). При таком β_o , как следует из пояснения к формуле (2.10), нити являются пространственноподобными линиями. Если бы выполнялось равенство $\beta_o = \text{sh } \varphi$, то при всех φ из бесконечного интервала $(\text{Arsh } 1, +\infty)$ нити также были бы пространственноподобными. Но при значениях φ , относящихся к конечному интервалу $(0, \text{Arsh } 1)$, они были бы времениподобными, а при $\varphi = \text{Arsh } 1$ — изотропными. Естественно предположить, что все нити, составляющие частицу, имеют один тип. В связи с тем, что равенство $\beta_o = \text{ch } \varphi$ обеспечивает выполнение этого условия и, кроме того, придает рассматриваемому нами выражению, стоящему справа в (6.10), конечное значение, будем считать, что зависимость β_o от φ , хотя и не описывается в точности функцией $\text{ch } \varphi$, но близка к ней. Принимая во внимание сказанное, сделаем следующие допущения.

Будем полагать, что, во-первых, все нити частицы являются пространственноподобными линиями (отсюда вытекает, что при любых r_o и φ выполняется неравенство $\beta_o > 1$), во-вторых, параметр β_o принимает (для разных нитей) все возможные значения из интервала $(1, +\infty)$ и, в-третьих, параметр β_o пропорционален функции $\text{ch } \varphi$. С помощью этих допущений, учитывая соотношение (2.8) и тот факт, что $\inf r_o = r_* - p_*$, находим

$$\beta_o = \frac{\text{ch } \varphi}{1 - \frac{p_*}{r_*}} \frac{r_o}{r_*}; \quad \beta = \frac{\text{ch } \varphi}{1 - \frac{p_*}{r_*}}. \quad (6.11)$$

Заметим, что для вывода этих формул вместо первых двух допущений достаточно было бы принять, что $\inf \beta_o = 1$. Мы воспользовались допущениями, сформулированными выше, лишь по причине их большей наглядности.

Произведем оценку величины β_o . Так как $r_* - p_* \leq r_o \leq r_* + p_*$ и $p_* \ll r_*$, то на основании первого из равенств (6.11) получаем

$$\text{ch } \varphi \leq \beta_o \leq \text{ch } \varphi \frac{1 + \frac{p_*}{r_*}}{1 - \frac{p_*}{r_*}} \approx \text{ch } \varphi \left(1 + 2 \frac{p_*}{r_*} \right), \quad (6.12)$$

где правое выражение записано в линейном по p_*/r_* приближении. Из зависимости $r_*(1 - p_*/r_*) \leq r_o \leq r_*(1 + p_*/r_*)$ и равенств (6.11) вытекает, что если пренебречь величиной p_*/r_* в сравнении с единицей, то будет $r_o = r_*$ и $\beta_o = \beta = \text{ch } \varphi$.

Покажем, что выполнение первого из равенств (6.11) обеспечивает конечность величины $\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle$.

Обозначим через Q выражение, стоящее множителем при векторе \mathbf{i} в формуле (6.10). С помощью соотношений (6.2) и (6.12) находим, что этот множитель лежит в следующих пределах:

$$Nn_*N_* \geq Q \geq Nn_*N_* \frac{1 - \frac{p_*}{r_*}}{1 + \frac{p_*}{r_*}} \underset{\frac{p_*}{r_*} \ll 1}{\approx} Nn_*N_* \left(1 - 2 \frac{p_*}{r_*}\right), \quad (6.13)$$

где в правой части учтены члены только до первой степени по p_*/r_* . Отметим, что если пренебречь величиной p_*/r_* по сравнению с единицей, то в соответствии с (6.10) и (6.13) будет выполнено равенство

$$\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = Nn_*N_* \mathbf{i}, \quad (6.14)$$

здесь Nn_*N_* — общее количество нитей, составляющих частицу; \mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы.

Приведенная оценка (6.13) множителя Q показывает, что величина $\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle$, описываемая выражением (6.10), имеет конечное значение. Поскольку эта оценка основана на предельных значениях (6.12) параметра β_o , которые вытекают из первого из равенств (6.11), то, следовательно, данное равенство действительно обеспечивает конечность величины $\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle$. В дальнейшем будем полагать оба равенства (6.11) выполненными, хотя в явном виде они будут использованы только в заключительной части работы при расчете количественных характеристик частицы.

В разд. 16, на основании энергетических соображений, будет показано, что, возможно, параметр β имеет значение

$$\beta = \frac{\text{ch } \varphi}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*}\right)^2}} = \sqrt{\alpha n_*} \text{ch } \varphi, \quad (6.15)$$

а не значение (6.11); здесь использованы выражение (2.2) и определение постоянной тонкой структуры α (4.13). Из равенства $\beta_o = (r_o/r_*)\beta$ вытекает, что в этом случае параметр β_o тоже принимает значение, отличное от (6.11).

Однако пока что мы будем считать выполненными все-таки равенства (6.11). Если же возникнет необходимость перейти от них к зависимости (6.15) для β и соответствующей зависимости для β_o , то это всегда можно будет сделать путем формальной замены множителя $(1 - p_*/r_*)^{-1}$ на множитель $\sqrt{\alpha n_*}$ в равенствах (6.11) и в вытекающих из них выражениях.

Отметим, что при выполнении (6.15) величина $\langle\langle q \rangle\rangle$, задаваемая равенством (6.10), имеет, как и требуется, конечное значение (потому что параметр β_0 пропорционален $\text{ch } \varphi$). Однако для сохранения пространственноподобности всех нитей частицы необходимо, чтобы в данном случае угловая координата φ удовлетворяла условию

$$\varphi > \text{Arch} \frac{r_*}{\sqrt{\alpha n_*} (r_* - p_*)}.$$

Дело в том, что только при этом условии, благодаря $\beta_0 = (r_0/r_*)\beta$ и $\inf r_0 = r_* - p_*$, будет $\beta_0 > 1$ для всех нитей. При возможности пренебречь величиной p_*/r_* по сравнению с единицей выражения (6.11) и (6.15) приводят к одному и тому же соотношению $\beta_0 = \beta = \text{ch } \varphi$.

7. Скорость частицы

В разд. 3 мы сформулировали законы, которым подчиняется инерциальное движение свободной частицы в пространстве Минковского M . Согласно этим законам оси лучей частицы перемещаются поступательно и прямолинейно, а сами лучи вращаются вокруг своих осей внутри соответствующих трехмерных подпространств S_{q_0} . Движение лучей происходит согласованным образом так, что в целом их конфигурация, образующая частицу, повторяет себя во все моменты времени, непрерывно перемещаясь вдоль прямолинейной мировой линии L . Причем в данном случае линия L совпадает с осью симметрии частицы, направляющим ортом которой служит вектор \mathbf{i} .

Таким образом, можно говорить о том, что свободная частица, движущаяся инерциально, представляет собой «недеформируемый» объект и что она перемещается вдоль прямолинейной L «поступательно» (кавычки здесь указывают на определенную условность применения этих понятий к объекту, состоящему из движущихся по-разному частей).

Представление о воздействии на частицу других объектов, очевидно, может быть введено в модель в виде эффекта нарушения инерциального характера движения частицы.

Сразу же оговоримся, что мы будем считать выполненными условия, сформулированные в начале разд. 3, согласно которым при любом движении частицы ее геометрические параметры и угловая скорость собственного вращения лучей остаются неизменными. Будем также считать выполненным принятое в разд. 6 условие о неизменности распределения нитей внутри спиралей луча при движении частицы. В дальнейшем все эти условия будем полагать включенными в понятие «недеформируемости» частицы и под частицей будем понимать именно «недеформируемую» частицу.

С учетом данного ограничения воздействие окружающих объектов на частицу может проявляться в следующем:

а) движение частицы вдоль мировой линии L , даже в случае прямолинейной L , может не быть «поступательным», то есть частица может при этом вращаться;

б) мировая линия L , даже оставаясь прямолинейной, может не совпадать с осью симметрии частицы, иначе говоря, направление движения частицы может оказаться отличным от задаваемого вектором \mathbf{i} ;

в) мировая линия L может быть не прямолинейной;
 г) может происходить дополнительное вращение лучей вокруг их осей с выходом из $C_{\mathbf{q}_0}$ (в разд. 5 было показано, что поворот луча на угол π при таком вращении приводит к переориентации луча).

О перечисленных эффектах будем говорить далее как о различных типах движения частицы, и будем называть движения этих типов, а также произвольные их комбинации, *неинерциальными* движениями.

Движение частицы типа г, в соответствии со сказанным в разд. 5, мы не будем описывать подробно, потому что нас интересует только тот его результат, который заключается в переориентации лучей. Мы учтем этот результат тем, что при анализе движения частицы будем принимать во внимание, что лучи частицы могут быть переориентированными.

Зададим скорость частицы для ее движений типов а–в или их комбинаций.

Рассмотрим два близкие расположения частицы в пространстве M , отвечающие моментам собственного времени частицы l и $l + dl$. Пусть центр частицы находится при этих расположениях соответственно в точках O и O' мировой линии L . В линейном по dl приближении имеет место равенство $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{i}_L(l) dl$, где \mathbf{i}_L — направляющий орт касательной к линии L в точке O , ориентированный в сторону будущего. Здесь мы учли, что касательная к мировой линии L может не совпадать с осью симметрии частицы, а сама линия L может быть не прямолинейной, в связи с чем в общем случае $\mathbf{i}_L \neq \mathbf{i}$ и $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}_L(l)$.

Будем считать, что при расположении частицы с центром в точке O радиус-вектор \mathbf{R} элементов нити относительно O имеет вид (2.3):

$$\mathbf{R}(l) = r_0 \left[\cos \nu \mathbf{e}_1(l) + \sin \nu \mathbf{e}_2(l) \pm \frac{\psi}{\beta_0} \mathbf{q}_0(l) \right], \quad (7.1)$$

где учтено, что векторы \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{q}_0 являются в общем случае функциями собственного времени частицы.

Допустим, что при движении частицы каждый ее луч движется как недеформируемое тело. В этом случае перемещение луча частицы при ее переходе из одного рассматриваемого расположения в другое может быть произведено (при малом dl) путем последовательного выполнения таких операций: поворачивания луча

вокруг точки O вместе с триэдром $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ (обеспечивающего переход триэдра из состояния $\{\mathbf{e}_1(l), \mathbf{e}_2(l), \mathbf{q}_o(l)\}$ в состояние $\{\mathbf{e}_1(l+dl), \mathbf{e}_2(l+dl), \mathbf{q}_o(l+dl)\}$), поступательного смещения луча на вектор $\mathbf{i}_L(l)dl$ вдоль мировой линии L , поступательного смещения луча на вектор $q\mathbf{q}_o(l+dl)dl$ вдоль его оси и, наконец, поворачивания луча (внутри C_{q_o}) вокруг его собственной оси на угол $(o/c)dl$ относительно триэдра $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$. При таком движении луча радиус-вектор \mathbf{R} элементов нити относительно исходной точки O будет иметь в момент $l+dl$ значение

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(l+dl) = & \mathbf{i}_L(l)dl + q\mathbf{q}_o(l+dl)dl + r_o \left[\cos\left(\nu + \frac{o}{c}dl\right) \mathbf{e}_1(l+dl) + \right. \\ & \left. + \sin\left(\nu + \frac{o}{c}dl\right) \mathbf{e}_2(l+dl) \pm \frac{\psi}{\beta_o} \mathbf{q}_o(l+dl) \right]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Скорость элементов нити \mathbf{j} есть, согласно определению, данному в разд. 3, частная производная $\partial\mathbf{R}/\partial l$ (при $\psi = \text{const}$). Вычисляя эту производную с помощью (7.1) и (7.2), находим, что элемент нити с радиусом-вектором (2.3) (или (7.1)) движется по отношению к пространству M со скоростью

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \mathbf{i}_L + q\mathbf{q}_o + r_o \frac{o}{c} [-\sin\nu \mathbf{e}_1 + \cos\nu \mathbf{e}_2] + \\ & + r_o \left[\cos\nu \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \sin\nu \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \pm \frac{\psi}{\beta_o} \frac{d\mathbf{q}_o}{dl} \right], \end{aligned} \quad (7.3)$$

где все величины относятся к моменту l собственного времени частицы; угол ν задается выражением (2.6); верхний знак перед последним слагаемым, как и в (2.3), отвечает случаю, когда ориентации в C_{q_o} триэдра $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ и винтовой нити совпадают, нижний знак — когда они противоположны; производные по l здесь — субстанциональные, то есть вычисляемые для индивидуальных точек нити (чтобы подчеркнуть этот факт, мы обозначили их символом полной производной d/dl). Скорость \mathbf{j} — величина безразмерная; при необходимости использовать для описания движения частицы характеристику размерности скорости, следует брать вместо \mathbf{j} величину $c\mathbf{j} = \partial\mathbf{R}/\partial t_*$, где $t_* = l/c$. Далее, как и прежде, будем называть скорость элементов нити \mathbf{j} также скоростью луча и скоростью частицы. Формула (7.3) задает скорость непереориентированного луча.

Скорость \mathbf{j}' переориентированного луча находим аналогичным способом, используя для радиуса-вектора \mathbf{R} значение (5.9) вместо (2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' = & \mathbf{i}_L + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{0}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 - \cos \nu \mathbf{e}_2] + \\ & + r_0 \left[\cos \nu \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} - \sin \nu \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \pm \frac{\psi}{\beta_0} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \right]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Скорость оси луча \mathbf{j}_0 получим, подставляя в (7.3) или (7.4) значение радиуса $r_0 = 0$ и учитывая, что в соответствии с (2.8) $r_0/\beta_0 = r_*/\beta$:

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i}_L + q\mathbf{q}_0 \pm \frac{r_*\psi}{\beta} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl}. \quad (7.5)$$

Формулы (7.3)–(7.5) относятся к расположению частицы, при котором радиус-вектор \mathbf{R} элементов нити описывается выражением (7.1). Мы будем использовать их применительно именно к этому случаю. Формулы, справедливые для произвольных расположений частицы, имеют более громоздкий вид (на это указывает уже более громоздкий вид формулы (7.2) по сравнению с (7.1)).

Для перехода от формул (7.3)–(7.5) к более общим формулам нужно, во-первых, включить в выражение (2.6) для угла ν дополнительное слагаемое, описывающее собственное вращение лучей, и, во-вторых, учесть, что индивидуальные точки осей лучей, которые при рассматриваемом расположении частицы находятся в точке O пространства M , «разбегаются» в разных направлениях от точки O при перемещении частицы в другое положение. (Последнее непосредственно вытекает из формулы (7.5), согласно которой все эти точки движутся при $q \neq 0$ с разными скоростями; в данной формуле им отвечает значение винтовой переменной $\psi = 0$.)

Для дальнейшего удобно придать зависимостям (7.3) и (7.4) статус исходных посылок модели, а рассуждения, положенные в их основу, интерпретировать как наводящие соображения. Итак, далее будем полагать зависимости (7.3) и (7.4) постулируемыми *законами движения частицы*.

Движение частицы, диктуемое законами (7.3) и (7.4), происходит таким образом, что оси всех лучей частицы, пересекаясь в одной точке в рассматриваемый момент времени l , продолжают пересекаться в одной точке и в близкие моменты, при этом точка пересечения движется в пространстве M в направлении вектора \mathbf{i}_L . Мы именуем точку пересечения осей лучей центром частицы, а линию L , вдоль которой происходит ее движение, мировой линией

частицы. В соответствии со сказанным эта линия имеет касательный вектор \mathbf{i}_L . (Здесь близкими к моменту времени l считаются такие моменты $l + dl$, для которых можно пренебречь изменениями величин \mathbf{i}_L , q и \mathbf{q}_o за промежуток времени dl ; при таком условии указанный результат вытекает из пункта *б* теоремы 3.1 с учетом формулы (7.5) и того факта, что для центра частицы выполняется $\psi = 0$.)

Первые два слагаемые в правых частях законов (7.3) и (7.4) задают поступательную составляющую движения луча. Выражение, содержащее множитель $r_o o/c$, описывает собственное вращение луча внутри соответствующего подпространства $C_{\mathbf{q}_o} = \text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$. Это вращение луча осуществляется вокруг его оси с угловой скоростью o относительно триэдра $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$. Мы полагаем, что угловая скорость o одинакова для всех лучей и не меняется при любом движении частицы. Оставшееся выражение, содержащее производные векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{q}_o по переменной l , задает вращение луча как целого (вместе с подпространством $C_{\mathbf{q}_o}$) вокруг центра частицы.

Благодаря тому, что мы допускаем возможность выполнения неравенства $\mathbf{i}_L \neq \mathbf{i}$, законы (7.3) и (7.4) позволяют описать тип *б* движения частицы. Наличие же в этих законах выражения, содержащего производные векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{q}_o по l , как будет видно из последующего, дает возможность описать типы *а* и *в* движения частицы. Тип *г* движения частицы учтен тем, что мы задали законы движения как для непереориентированного луча, так и для переориентированного луча. Отметим, что при $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$ и равенстве нулю производных по l от векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{q}_o законы (7.3) и (7.4) переходят в законы инерциального движения свободной частицы (3.2) и (5.12).

Таким образом, мы постулировали, что движение частицы происходит в соответствии с законами (7.3) и (7.4). Дополним их допущением о том, что при любом движении частицы выполняются зависимости (3.6); они позволяют выразить величину q , входящую в эти законы, через другие характеристики частицы. Однако законы (7.3) и (7.4), даже вместе с (3.6), еще не дают полного описания движения частицы. Из (7.3) и (7.4) видно, что требуется задать также вектор \mathbf{i}_L и производные $d\mathbf{e}_1/dl$, $d\mathbf{e}_2/dl$ и $d\mathbf{q}_o/dl$. Это будет сделано в следующих разделах.

8. Законы движения частицы

В работе [1] при рассмотрении «точечной» частицы был исследован тип *в* движения частицы. А именно, было предположено, что воздействие на частицу других объектов проявляется лишь в искривлении ее мировой линии. Этот эффект был интерпретирован как изменение касательного орта \mathbf{i}_L к мировой линии L при движении частицы вдоль L . И в качестве *уравнения движения «точечной» частицы* было принято следующее простейшее (линейное по вектору \mathbf{i}_L) уравнение:

$$\frac{d\mathbf{i}_L}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}_L, \quad (8.1)$$

здесь l — собственное время частицы; a_1 — скалярный множитель, зависящий только от характеристик частицы; F — линейный оператор (двухвалентный тензор), задающий воздействие на частицу и не зависящий от свойств частицы; значения величин \mathbf{i}_L и F берутся в центре частицы. При F , равном тензору электромагнитного поля, и при

$$a_1 = \frac{e}{mc^2} \quad (8.2)$$

уравнение (8.1) совпадает с известным уравнением движения электрически заряженного точечного тела в электромагнитном поле [6] (e — электрический заряд тела, m — его масса, c — скорость света). Поскольку мы трактуем «точечную» частицу как модель электрона (см. разд. 1), то далее будем считать, что в уравнении (8.1) коэффициент a_1 имеет значение (8.2) при e и m , равных соответственно заряду и массе электрона.

Зададим уравнение движения частицы ненулевого радиуса.

В нашей модели элементарными «кирпичиками», составляющими частицу, являются винтовые нити, причем подразумевается, что они служат математическими образами неких фрагментов материального мира. Поэтому представляется последовательным описать воздействие на частицу окружающих объектов как действие их именно на винтовые нити. Пользуясь аналогией с уравнением движения «точечной» частицы (8.1), зададим *уравнение движения нити* в виде

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = a_1 W \cdot \mathbf{q}, \quad (8.3)$$

где все величины относятся к элементу (точке) нити, принадлежащему центральному сечению частицы. Здесь \mathbf{q} — направляющий орт касательной к нити; l — собственное время частицы (натуральный параметр на мировой линии L частицы, увеличивающийся в направлении будущего); $d\mathbf{q}/dl$ — субстанциональная производная, то есть производная, вычисляемая для индивидуальной точки нити; a_1 — скалярный множитель, определяемый только свойствами данной частицы (полагаем его одинаковым для всех нитей и не зависящим от l ; мы не конкретизируем пока что его значение, но в дальнейшем покажем, что он имеет вид (8.2)); W — двухвалентный тензор, характеризующий воздействие на частицу. Уравнение (8.3) свое для каждой нити.

Тензор W не может быть произвольным. Это связано с тем, что вектор \mathbf{q} , по определению, имеет фиксированную длину и поэтому никакое воздействие на частицу не должно приводить к изменению его длины. Вследствие $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{q}|^2 = \text{const}$, имеем: $\mathbf{q} \cdot (d\mathbf{q}/dl) = (1/2)[d(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})/dl] = 0$. Отсюда с учетом (8.3) находим: $\mathbf{q} \cdot W \cdot \mathbf{q} = 0$. Принимая во внимание, что векторы \mathbf{q} , отвечающие разным нитям частицы, имеют, вообще говоря, разные направления, потребуем, чтобы равенство $\mathbf{q} \cdot W \cdot \mathbf{q} = 0$ выполнялось для любых векторов \mathbf{q} из пространства Минковского M . Это требование удовлетворяется, как нетрудно доказать, тогда и только тогда, когда тензор W является *антисимметричным* ($W^T = -W$). Отметим, что при антисимметричном тензоре W преобразование пространства M вида (8.3) является лоренцевым (этот результат вытекает из теоремы 9.1, приведенной в следующем разделе).

В рамках настоящей модели можно указать три источника воздействия на частицу. Во-первых, частица может испытывать воздействие со стороны окружающих ее объектов. Тензорную характеристику этого воздействия обозначим через F . Во-вторых, источником воздействия может служить сама рассматриваемая частица при тех ее расположениях в M , которые отвечают другим моментам времени. В самом деле, благодаря времениподобности мировой линии частицы, центр частицы всегда находится в области пространства M , занятой лучами этой же частицы при других ее расположениях в M (см. рис. 1.1). Это означает, что частица непосредственно контактирует со своими же расположениями в M , отвечающими другим моментам времени, поэтому воздействие частицы на себя действительно возможно. Такое воздействие на частицу будем называть *самодействием* частицы. Тензорную характеристику само-

действия обозначим символом F_s . Отметим, что при «взгляде» из данного местонахождения частицы невозможно различить, находится ли в другом месте пространства M сама данная частица или иная такая же частица. Следовательно, воздействие частицы на себя должно быть аналогичным воздействию на нее со стороны других объектов, поэтому самодействие частицы может быть описано тем же способом, что и внешнее воздействие. Третьим источником воздействия на частицу служит та причина, которая поддерживает «недеформируемость» частицы и ее движение вдоль мировой линии (включая собственное вращение лучей вокруг их осей с угловой скоростью ω). Тензорную характеристику этого воздействия обозначим через G .

Введенные тензорные величины могут принимать, вообще говоря, разные значения в разных точках области пространства M , занимаемой частицей, поэтому будем именовать их полями и дадим им следующие индивидуальные названия: F — *внешнее поле*, F_s — *собственное поле* частицы, G — *внутреннее поле*. Будем считать, что эти величины являются двухвалентными антисимметричными тензорами над M и что их вклады в тензор W суммируются: $W = F + F_s + G$. С учетом данной зависимости уравнение движения нити (8.3) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = a_1(F + F_s + G) \cdot \mathbf{q}, \quad (8.4)$$

где все величины, как и в (8.3), относятся к элементу нити, принадлежащему центральному сечению частицы. В последующих разделах в роли внешнего поля F будем рассматривать электромагнитное поле, создаваемое окружающими частицу объектами. Собственное поле частицы F_s определим в разд. 13. О внутреннем поле G скажем чуть ниже в настоящем разделе.

Мы будем исследовать движение частицы, пользуясь не непосредственно уравнением (8.4), а двумя уравнениями, которые выведем на его основе. К первому уравнению придем посредством интегрирования обеих частей уравнения (8.4) по поперечному сечению луча, лежащему в центральном сечении частицы. Второе уравнение получим путем интегрирования обеих частей уравнения (8.4) по всему центральному сечению частицы.

Итак, подействуем на обе части уравнения (8.4) введенным в разд. 6 оператором интегрирования по поперечному сечению луча $\langle \dots \rangle$. Условимся при использовании этого оператора производить

интегрирование для всех моментов времени по одному и тому же сечению луча (поперечное сечение луча индивидуализируется фиксированием значения винтовой переменной ψ в рассматриваемых уравнениях). При таком условии, как можно доказать, оператор $\langle \dots \rangle$ и оператор d/dl взяты субстанциональной производной по l коммутируют. Учитывая это и принимая во внимание линейность оператора $\langle \dots \rangle$, получаем:

$$\frac{d}{dl} \langle \mathbf{q} \rangle_* = a_1 \langle F \cdot \mathbf{q} \rangle_* + a_1 \langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle_* + a_1 \langle G \cdot \mathbf{q} \rangle_*, \quad (8.5)$$

где оператор $\langle \dots \rangle$ задается формулой (6.4); звездочка при символе $\langle \dots \rangle$ означает, что интегрирование проводится по поперечному сечению луча, лежащему в рассматриваемый момент времени l в центральном сечении частицы.

Заметим, что поперечное сечение луча, которое в некоторый момент времени принадлежит центральному сечению частицы, может не принадлежать ему в другой момент времени. Это объясняется тем, что при движении частицы ее центральное сечение и указанное поперечное сечение луча движутся в общем случае не одинаково. А именно, центральное сечение частицы перемещается вдоль мировой линии L , точнее говоря, оно движется со скоростью, поступательная составляющая которой равняется касательному орту \mathbf{i}_L к линии L . Поперечное же сечение луча (образованное индивидуальными элементами нитей), как видно из (7.3) или (7.4), перемещается таким образом, что поступательная составляющая его скорости при $q \neq 0$ не совпадает с \mathbf{i}_L .

Скажем несколько слов о внутреннем поле G . Это — характеристика того воздействия на частицу, которое препятствует деформированию частицы и обеспечивает ее движение вдоль мировой линии. У нас не имеется никаких данных, которые позволили бы указать явный вид величины G . Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в теоретической механике при описании движения абсолютно твердого тела. Там тоже характеристики внутренних взаимодействий, удерживающих тело в недеформируемом состоянии, не указываются. Они и не могут быть выяснены в значительной мере именно вследствие самого допущения о недеформируемости тела.

Учитывая это, поступим аналогично тому, как в подобной ситуации принято поступать в теоретической механике. В этой науке при выводе уравнения движения тела принимается (со ссылкой на третий закон Ньютона), что сумма всех внутренних сил, действующих в теле, равна нулю. Допустим и мы, что суммарное воздействие внутреннего поля на каждый луч равно нулю, иначе говоря,

примем в качестве постулата, что

$$\langle G \cdot \mathbf{q} \rangle_* = 0. \quad (8.6)$$

При выполнении постулата (8.6) уравнение (8.5) упрощается:

$$\frac{d}{dl} \langle \mathbf{q} \rangle_* = a_1 \langle F \cdot \mathbf{q} \rangle_* + a_1 \langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle_*. \quad (8.7)$$

С помощью соотношений (6.4) и (6.8) это уравнение может быть приведено к виду

$$\left(n_* \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 \int_{(S_*)} F \cdot \mathbf{q} \sigma dS + a_1 \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS, \quad (8.8)$$

где использован тот факт, что выражение в левой части, заключенное в скобки, не зависит от l ; S_* — поперечное сечение луча, принадлежащее центральному сечению частицы; S_{0*} — сечение спирали №0, лежащее в S_* ; n_* — количество спиралей в одном луче частицы; σ — плотность точек пересечения нитей с поперечным сечением луча; β_0 — безразмерный параметр, входящий в уравнение нити (2.3) и удовлетворяющий первому из равенств (6.11); \mathbf{q}_0 — направляющий орт оси луча; другие обозначения те же, что в (8.3) и (8.4).

Принимая во внимание, что уравнение (8.8) описывает изменение во времени направляющего орта оси луча \mathbf{q}_0 , будем называть это уравнение, а также эквивалентное ему уравнение (8.7), *законом движения оси луча*.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Участвующая в уравнении (8.8) производная $d\mathbf{q}_0/dl$ — субстанциональная, то есть она вычисляется для фиксированной (индивидуальной) точки оси луча. Такая точка, как видно из (7.5), движется иначе, чем центр частицы. Однако в связи с тем, что направляющий орт оси луча \mathbf{q}_0 имеет одно и то же значение вдоль всей оси, а сама ось всегда проходит через центр частицы, то при рассмотрении производной $d\mathbf{q}_0/dl$ не имеет значения, вычисляется она для фиксированной точки оси луча или же для центра частицы. Учитывая данное обстоятельство и принимая во внимание равенство левых частей уравнений (8.7) и (8.8), будем трактовать производные $d\mathbf{q}_0/dl$ и $d\langle \mathbf{q} \rangle_*/dl$ как вычисляемые для центра частицы.

Теперь подействуем на обе части уравнения (8.4) оператором интегрирования по центральному сечению частицы $\langle\langle \dots \rangle\rangle$. Пользуясь определением (6.7) этого оператора и учитывая, что операторы $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ и d/dl коммутируют, а величины N и Z в (6.7) не зависят от l , можем записать для левой части уравнения (8.4):

$$\begin{aligned} \langle\langle \frac{d\mathbf{q}}{dl} \rangle\rangle &= \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \frac{d\mathbf{q}}{dl} \rangle_* dZ = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \frac{d}{dl} \langle \mathbf{q} \rangle_* dZ = \\ &= \frac{d}{dl} \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \langle \mathbf{q} \rangle_* dZ = \frac{d}{dl} \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где при вынесении оператора d/dl за знак интеграла по Z производная $d\langle \mathbf{q} \rangle_*/dl$ трактуется как вычисляемая для центра частицы. Из (8.9) вытекает, что операторы $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ и d/dl коммутируют. На основании (8.4) и (8.9) в силу линейности оператора $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ получаем:

$$\frac{d}{dl} \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = a_1 \langle\langle F \cdot \mathbf{q} \rangle\rangle + a_1 \langle\langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle\rangle + a_1 \langle\langle G \cdot \mathbf{q} \rangle\rangle. \quad (8.10)$$

Из формул (6.7) и (8.6) вытекает равенство

$$\langle\langle G \cdot \mathbf{q} \rangle\rangle = \mathbf{0}. \quad (8.11)$$

Вследствие (8.11), уравнение (8.10) упрощается:

$$\frac{d}{dl} \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = a_1 \langle\langle F \cdot \mathbf{q} \rangle\rangle + a_1 \langle\langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle\rangle. \quad (8.12)$$

Данное уравнение с помощью (6.4), (6.7) и (6.10) может быть преобразовано к форме

$$\begin{aligned} &\left(N n_* \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \int_{(S_{0*})} \frac{\sigma}{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}} dS \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} \right) \frac{d\mathbf{i}}{dl} = \\ &= a_1 \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \int_{(S_*)} F \cdot \mathbf{q} \sigma dS dZ + a_1 \int_{(Z)} \frac{N}{Z} \int_{(S_*)} F_s \cdot \mathbf{q} \sigma dS dZ, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где учтено, что выражение, заключенное в скобки, не зависит от l ; N — общее число лучей, составляющих частицу; \mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы, ориентированный в сторону будущего; Z — одна из пол единичной псевдосферы (ее площадь, тоже обозначаемая через Z , выражается формулой (6.6) при $R = 1$); φ — угловая координата на поле Z , отсчитываемая от точки пересечения Z с осью симметрии частицы; остальные обозначения те же, что в законе (8.8).

В связи с тем, что уравнение (8.13) описывает изменение со временем направляющего орта оси симметрии частицы \mathbf{i} , назовем это уравнение, как и равносильное ему уравнение (8.12), *законом движения оси симметрии частицы*. Для тех типов движения частицы, при которых вектор \mathbf{i} совпадает с касательным ортом к мировой линии частицы L ($\mathbf{i} = \mathbf{i}_L$), будем называть уравнение (8.13), как и (8.12), также *законом движения центра частицы*.

Сделаем несколько замечаний, касающихся введенных законов.

А. В соответствии с исходными положениями модели векторы \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 имеют единичные длины, а углы между ними, как и углы между всеми осями лучей частицы, не меняются при движении частицы. Поэтому законы движения частицы должны обеспечивать выполнение этих условий. Мы, однако, не будем проверять соблюдение данного требования в общем случае, а сделаем это при рассмотрении частных случаев движения частицы.

Б. Из определения (6.7) оператора $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ (с учетом коммутирования оператора d/dl с операторами $\langle \dots \rangle$ и $\langle\langle \dots \rangle\rangle$) вытекает, что закон (8.12) является следствием закона (8.7). Значит, можно считать закон (8.13) следствием закона (8.8). Вместе с тем все эти законы представляют собой следствия постулированного нами уравнения (8.3), дополненного условием (8.6). Отметим, что обратный переход от законов (8.12) и (8.13) к законам (8.7) и (8.8), а также переход от (8.7) и (8.8) к уравнению (8.3) невозможны из-за применения при прямых переходах процедуры интегрирования.

В. Введенные законы выполняются независимо от того, испытали какие-либо лучи частицы переориентацию или нет (так как использованные при их выводе формулы (6.8) и (6.10) верны для непереориентированных и для переориентированных лучей).

Г. Производные по l в этих законах вычисляются для центра частицы, а в исходном уравнении (8.3) — для индивидуальной точки нити.

Согласно рассматриваемым законам, движение частицы зави-

сит как от внешнего поля F , так и от собственного поля частицы F_s . При этом из (8.8) и (8.13) видно, что в случае ненулевого поля F_s производные $d\mathbf{q}_o/dl$ и $d\mathbf{i}/dl$ могут быть отличными от нуля даже при отсутствии воздействия на частицу других объектов, то есть в случае свободной частицы. Так как при не равных нулю $d\mathbf{q}_o/dl$ и $d\mathbf{i}/dl$ векторы \mathbf{q}_o и \mathbf{i} изменяются с течением времени, то, согласно изложенному в разд. 3, такое движение частицы не является инерциальным. Таким образом, свободная частица, подчиняющаяся указанным законам, вообще говоря, может двигаться неинерциальным образом (по крайней мере, до тех пор, пока $\langle F_s \cdot \mathbf{q} \rangle_*$ не обратится в нуль). Именно учитывая данное обстоятельство, мы приняли в конце разд. 3 постулат о движении свободной частицы в такой формулировке, которая допускает возможность ее неинерциального движения.

Законы (8.8) и (8.13) принимают существенно более простую форму в ситуации, когда величинами порядка p_*/r_* можно пренебречь по сравнению с единицей. В этом случае в силу (6.12) выполняется $\beta_o = \text{ch } \varphi$. Тогда интеграл по S_{0*} в левых частях уравнений (8.8) и (8.13) оказывается равным $N_*/\text{sh } \varphi$, см. (6.2) (N_* — количество нитей в одной спирали луча). В правых частях уравнений каждый из интегралов по сечению S_* равен сумме n_* интегралов по кругам, образующим сечение S_* . В рассматриваемом приближении функции $F \cdot \mathbf{q}$ и $F_s \cdot \mathbf{q}$, стоящие под знаками этих интегралов, могут быть заменены на каждом из кругов их значениями в центре круга и вынесены за знаки интегралов (в предположении их гладкости на S_*). Остающиеся интегралы от плотности σ , вследствие одинакового строения спиралей, образующих луч, имеют одно и то же значение, которое, в соответствии с (6.2), равно N_* . В результате указанных упрощений, дополненных некоторыми очевидными преобразованиями, уравнения (8.8) и (8.13) приобретают следующий вид:

$$\frac{n_*}{\text{sh } \varphi} \frac{d\mathbf{q}_o}{dl} = a_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} + a_1 \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F_s \cdot \mathbf{q})_{\xi}; \quad (8.14)$$

$$n_* \frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 \int_{(Z)} \frac{1}{Z} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_{\xi} dZ + a_1 \int_{(Z)} \frac{1}{Z} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F_s \cdot \mathbf{q})_{\xi} dZ, \quad (8.15)$$

Здесь суммирование ведется по всем n_* кругам, составляющим сечение S_* ; индекс ξ при функции означает, что берется значение

функции в центре круга № ξ ; величины dZ и Z задаются формулами (6.5), (6.6) при $R = 1$; учтено, что

$$\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\Phi} \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi d\varphi}{\int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} = 1.$$

Уравнения (8.14) и (8.15) будем называть соответственно *приближенным законом движения оси луча* и *приближенным законом движения оси симметрии частицы*. При $\mathbf{i} = \mathbf{i}_L$ последнее уравнение будем называть также *приближенным законом движения центра частицы*.

Итак, в настоящем и предыдущем разделах представлены уравнения (7.3) и (7.4), задающие скорость движения элементов нити, и уравнения (8.8) и (8.13), выражающие скорости изменения векторов \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} . Для полного описания движения частицы к ним нужно добавить, как указано в разд. 7, зависимости (3.6), а также уравнения, описывающие функцию $\mathbf{i}_L(l)$ и производные de_1/dl и de_2/dl (их мы введем позже). Все эти уравнения и зависимости будем именовать *законами движения частицы*.

Заметим, что мы не включаем в число этих законов уравнение движения собственного физического пространства частицы Γ_* , как сделали это в разд. 3 при описании инерциального движения свободной частицы. Дело в том, что при рассмотрении неинерциального движения частицы бывает удобным в разных случаях задавать движение гиперплоскости Γ_* по-разному даже при одном и том же движении самой частицы. Например, при описании вращения частицы вокруг прямолинейной мировой линии L можно с равным основанием принять как то, что физическое пространство Γ_* вращается вместе с частицей, так и то, что оно не вращается, а движется вдоль L поступательно (при этом будет иметь место вращение частицы относительно Γ_*). При рассмотрении же инерциального движения частицы в разд. 3 мы конкретизировали закон движения собственного физического пространства частицы с единственной целью — обосновать с его помощью зависимости (3.6). Затем мы постулативно распространили действие этих зависимостей на все случаи движения частицы. А так как эти зависимости не включают в себя характеристик движения гиперплоскости Γ_* , то нет необходимости в дальнейшем фиксировании закона движения Γ_* .

9. Частица в однородном электромагнитном поле

Естественно ожидать, что неинерциальное движение частицы определяется главным образом воздействием окружающих объектов, тогда как самодействие частицы вносит в ее движение лишь небольшие коррективы.

Проанализируем движение частицы, обусловленное только действием окружающих объектов. Для исключения влияния самодействия частицы пренебрежем в законах движения собственным полем частицы F_s , то есть положим

$$F_s = \widehat{0}, \quad (9.1)$$

где $\widehat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор.

В настоящем разделе мы ограничимся анализом движения *остова* частицы (состоящего из осей лучей), а детали движения самих лучей рассматривать не будем. При этом мы исследуем лишь случай, когда внешнее поле F является *однородным* вдоль центрального сечения частицы.

Вследствие однородности внешнего поля, тензор F может быть вынесен в законах (8.7) и (8.12) из-под знаков операторов $\langle \dots \rangle$ и $\langle\langle \dots \rangle\rangle$, после чего эти законы с учетом условия (9.1) приобретают, соответственно, вид

$$\frac{d}{dl} \langle \mathbf{q} \rangle_* = a_1 F \cdot \langle \mathbf{q} \rangle_*; \quad \frac{d}{dl} \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle = a_1 F \cdot \langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle.$$

Подставим сюда значения $\langle \mathbf{q} \rangle_*$ и $\langle\langle \mathbf{q} \rangle\rangle$, вытекающие из формул (6.8) и (6.10). Учитывая, что в (6.8) и (6.10) множители, стоящие при векторах \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} , не зависят от l , вынесем эти множители за знаки производных и сократим их. В результате получим следующие уравнения:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0; \quad (9.2)$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{i}, \quad (9.3)$$

здесь, напомним, \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} — направляющие орты соответственно оси луча и оси симметрии частицы; l — собственное время частицы; a_1 — положительный коэффициент; F — внешнее поле — антисимметричный тензор, характеризующий воздействие на частицу

окружающих объектов; значения всех величин берутся в центре частицы.

Для описания движения остова частицы нет необходимости использовать законы (7.3) и (7.4), задающие скорость элементов нити, а достаточно применить закон движения оси луча (7.5):

$$\mathbf{j}_o = \mathbf{i}_L + q\mathbf{q}_o \pm \frac{r_*\psi}{\beta} \frac{d\mathbf{q}_o}{dl}. \quad (9.4)$$

Входящая в закон (9.4) величина $\pm r_*\psi/\beta$, как видно из уравнения оси луча (2.9), представляет собой натуральный параметр на оси луча, отсчитываемый от центра частицы и возрастающий в направлении будущего. С учетом этого из (9.4) заключаем, что движение остова частицы будет полностью определено (при заданном начальном расположении частицы), если конкретизировать величины \mathbf{i}_L , q , \mathbf{q}_o и $d\mathbf{q}_o/dl$. Параметр q может быть выражен с помощью второй из зависимостей (3.6) через r_* , β и o . Вектор \mathbf{q}_o и его производная $d\mathbf{q}_o/dl$ могут быть найдены путем решения уравнения (9.2). Остается задать вектор \mathbf{i}_L — направляющий орт касательной к мировой линии частицы L .

Примем в качестве постулата, что вектор \mathbf{i}_L совпадает с направляющим ортом оси симметрии частицы \mathbf{i} :

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{i}. \quad (9.5)$$

Это равенство означает, что ось симметрии частицы в каждый момент времени является касательной к мировой линии L . При выполнении (9.5) вектор \mathbf{i}_L может быть найден из решения уравнения (9.3).

Мы не считаем, что равенство (9.5) обязательно выполняется при любых движениях частицы, но пока что ограничимся рассмотрением именно такого случая движения частицы.

Итак, на основании вышесказанного можно заключить, что для определения движения остова частицы нужно исследовать уравнения (9.2) и (9.3). Этим мы сейчас и займемся. В соответствии с принятой в разд. 8 терминологией будем называть уравнение (9.2) *законом движения оси луча*, а уравнение (9.3) при выполнении (9.5) — *законом движения центра частицы*.

Начнем с уточнения значения коэффициента a_1 в этих уравнениях. Остов частицы, как следует из содержания разд. 1 и 2, совпадает с «точечной» частицей, поэтому уравнение движения «точечной» частицы (8.1) должно выполняться и для рассматриваемого нами

остова частицы. Из сравнения уравнений (8.1) и (9.3) с учетом равенства (9.5) видно, что данное требование будет выполнено, если в (9.3) коэффициенту a_1 придать значение, которое он имеет в (8.1). Учитывая это, положим, что в уравнениях (9.2) и (9.3) коэффициент a_1 принимает то же значение (8.2), что и в уравнении (8.1):

$$a_1 = \frac{e}{m_e c^2}, \quad (9.6)$$

где e и m_e — заряд и масса электрона; c — скорость света.

В связи с тем, что мы рассматриваем нашу частицу в качестве модели электрона, припишем ей скалярную характеристику, равную заряду электрона. Назовем эту характеристику *электрическим зарядом* или просто *зарядом* частицы и будем обозначать той же буквой e , что и заряд электрона ($e < 0$). Кроме того, примем, что введенная равенством (5.16) масса частицы m равна массе электрона: $m = m_e$. Тогда можно считать, что в формуле (9.6) на месте величин e и m_e стоят заряд и масса частицы. В разд. 13 мы покажем, что заряд частицы пропорционален количеству ее лучей.

Законы (9.2) и (9.3) могут быть записаны в эквивалентных формах:

$$\mathbf{q}_0 + d\mathbf{q}_0 = (I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{q}_0; \quad \mathbf{i} + d\mathbf{i} = (I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{i}, \quad (9.7)$$

где I — единичный тензор. Здесь, как в (9.2) и (9.3), величины \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} относятся к центру частицы, поэтому они являются функциями собственного времени частицы: $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0(l)$ и $\mathbf{i} = \mathbf{i}(l)$. Будем считать эти функции дифференцируемыми. Известно, что для любой дифференцируемой функции $f(x)$ выполняется равенство $f(x + dx) = f(x) + df(x) + o(dx)$. Поэтому левые части выражений (9.7) равняются в линейном по dl приближении соответственно величинам $\mathbf{q}_0(l + dl)$ и $\mathbf{i}(l + dl)$. А так как в правых частях этих выражений стоят величины $\mathbf{q}_0(l)$ и $\mathbf{i}(l)$, то следовательно данные выражения описывают изменение векторов \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} с течением времени. Отсюда вытекает, что определяемый законами (9.2) и (9.3) характер движения частицы зависит от свойств оператора

$$(I + a_1 dl F) : \quad \mathbf{x} \mapsto (I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + d\mathbf{x},$$

действующего на векторах пространства Минковского M (здесь $d\mathbf{x} = a_1 dl F \cdot \mathbf{x}$).

Приведем две теоремы, которые потребуются нам в дальнейшем (обозначения в них мы максимально приблизим к принятым выше).

Теорема 9.1. Пусть V — вещественное векторное пространство со скалярным умножением векторов; I — единичный тензор над V ; F — двухвалентный тензор над V ; a_1, dl — ненулевые вещественные числа ($I, F \in V \otimes V$; $a_1, dl \in R$). Оператор

$$(I + a_1 dl F): V \longrightarrow V, \quad \mathbf{x} \longmapsto (I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} \quad (9.8)$$

является ортогональным в линейном по dl приближении тогда и только тогда, когда F — антисимметричный тензор.

Здесь подразумевается, что число dl столь мало, что при рассмотрении действия данного оператора на векторы пространства V величинами второго и более высоких порядков по dl можно пренебречь.

Доказательство. Пользуясь определением тензора F^T , сопряженного (транспонированного) к тензору F ($F \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot F^T$ для любого $\mathbf{x} \in V$), а также свойствами ассоциативности и дистрибутивности операции скалярного умножения, находим для произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} + d\mathbf{y}) &= [(I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{x}] \cdot [(I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{y}] = \\ &= [\mathbf{x} \cdot (I + a_1 dl F)^T] \cdot [(I + a_1 dl F) \cdot \mathbf{y}] = \\ &= \mathbf{x} \cdot [(I + a_1 dl F^T) \cdot (I + a_1 dl F)] \cdot \mathbf{y} = \\ &= \mathbf{x} \cdot [I + a_1 dl(F + F^T) + (a_1 dl)^2 F^T \cdot F] \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

После отбрасывания малых второго порядка по dl имеем:

$$(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} + d\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + a_1 dl \mathbf{x} \cdot (F + F^T) \cdot \mathbf{y}.$$

Ортогональность оператора означает, по определению, что он не изменяет скалярные произведения векторов. Из последнего соотношения вытекает, что необходимым и достаточным условием ортогональности рассматриваемого оператора $I + a_1 dl F$ является выполнение равенства $a_1 dl \mathbf{x} \cdot (F + F^T) \cdot \mathbf{y} = 0$ при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Вследствие отличия от нуля чисел a_1, dl и благодаря невырожденности операции скалярного умножения, это условие выполняется в том и только том случае, когда $F + F^T$ есть нулевой тензор, то есть когда $F^T = -F$. Отсюда заключаем, что критерием ортогональности оператора $I + a_1 dl F$ (в линейном по dl приближении) действительно служит антисимметричность тензора F . ■

Применительно к пространству Минковского теорема 9.1 означает, что любой антисимметричный тензор F осуществляет по правилу (9.8) бесконечно малое преобразование Лоренца (при $dl \rightarrow 0$)

и, наоборот, всякое бесконечно малое преобразование Лоренца реализуется посредством некоторого антисимметричного тензора.

Бесконечно малым называется такое преобразование векторного пространства V , которое осуществляется линейным оператором вида $I + \lambda\Phi$ при $\lambda \rightarrow 0$ (здесь $\Phi \in V \otimes V$, $\lambda \in R$).

Известно, что группа Лоренца состоит из четырех связанных компонент. Та из них, которая содержит единичный оператор I , именуется ограниченной группой Лоренца. Операторы этой группы характеризуются тем, что не меняют временную и пространственную ориентации в M . Принимая во внимание, что в пространстве M оператор $I + a_1 dl F$ при антисимметричном F и малом dl является лоренцевым, а также учитывая непрерывную зависимость этого оператора от параметра dl и совпадение его с единичным оператором I при $dl = 0$, заключаем, что он принадлежит компоненте единицы группы Лоренца. Следовательно, данный оператор относится к ограниченным преобразованиям Лоренца.

Теорема 9.2. Пусть M — пространство Минковского; $\tau \in M$ — единичный времениподобный вектор; \varkappa — псевдотензор Леви-Чивита над трехмерным подпространством $Lin^\perp\{\tau\}$, ортогональным к τ . Тогда любой двухвалентный антисимметричный тензор F над M может быть представлен в виде

$$F = F \cdot \tau\tau - \tau F \cdot \tau + \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa \cdot \varkappa, \quad (9.9)$$

где двоеточие — символ бискалярного умножения.

Формула (9.9) является обобщением приведенной в разд. 4 формулы (4.8). Порядок выполнения скалярного и бискалярного умножений тензоров иллюстрируется таким примером:

$xyz \cdot \cdot uvw = xy \cdot (z \cdot u)vw = (z \cdot u)xy \cdot vw = (z \cdot u)x(y \cdot v)w = (z \cdot u)(y \cdot v)xw$
 (x, y, z, u, v, w — произвольные векторы). Тензорное произведение векторов и тензоров обозначено без символа умножения между сомножителями.

Схема доказательства. Вводим в пространстве M ортонормированный базис, который включает в себя единичный вектор τ и три любых взаимно ортогональных мнимоединичных вектора, принадлежащих гиперплоскости $Lin^\perp\{\tau\}$. Затем выражаем тензор F и псевдотензор \varkappa через векторы базиса. И, наконец, подставляя эти значения F и \varkappa в формулу (9.9) и выполняя умножение тензоров в согласии с указанным порядком, убеждаемся в справедливости теоремы. ■

В дальнейшем мы будем неоднократно задавать в пространстве Минковского M инерциальную систему отсчета. Приведем ее определение.

В классической механике под системой отсчета понимают совокупность часов и трехмерной системы координат, связанных с материальным телом, по отношению к которому изучается движение других тел. В специальной теории относительности, где движение тел описывается как происходящее внутри четырехмерного пространства Минковского, показаниям часов ставится в соответствие временная координата, отсчитываемая вдоль времениподобных координатных линий в M . А указанной трехмерной системе координат ставится в соответствие трехмерная сетка пространственноподобных координатных линий, ортогональных времениподобным координатным линиям (напомним, что две линии ортогональны, если ортогональны касательные векторы к ним в точке их пересечения). При этом такая сетка линий — своя для каждого момента времени, и все они смещены относительно друг друга вдоль времениподобных координатных линий. Вместе все времениподобные и пространственноподобные координатные линии задают систему координат в пространстве M . В связи с тем, что весь набор трехмерных сеток пространственноподобных координатных линий параметризован временной переменной, он может быть интерпретирован как одна такая сетка линий, движущаяся в M в направлении, задаваемом времениподобными координатными линиями. Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение. Система отсчета в пространстве Минковского M это есть совокупность неподвижных относительно M времениподобных координатных линий и трехмерной сетки ортогональных к ним и движущихся вдоль них пространственноподобных координатных линий. Трехмерная гиперповерхность, содержащая пространственноподобные координатные линии и движущаяся вместе с ними в M , называется **физическим пространством**.

Каждая точка физического пространства движется вдоль некоторой времениподобной координатной линии. Поскольку такая линия ортогональна к физическому пространству, то можно говорить о том, что физическое пространство движется в ортогональном к себе направлении. (Линия ортогональна к гиперповерхности, если в точке их пересечения касательный вектор к линии ортогонален

всем касательным векторам к гиперповерхности.)

Использование в теории относительности представления о трехмерном физическом пространстве обусловлено тем обстоятельством, что мы можем проводить физические исследования только внутри него (точнее, внутри его прообраза в реальном мире). Дело в том, что, как показывает опыт, невозможно измерить непосредственно будущие или прошлые значения характеристик физической системы, находящейся в данный момент времени в данном месте.

Основу теории относительности составляет положение о том, что пространственные и временные свойства мира могут быть описаны с помощью единого четырехмерного многообразия (каковым является, в частности, пространство Минковского). Это положение, как показано в физике, верно отражает объективную реальность. Следовательно, вполне вероятно, что в реальном мире существует некий прообраз этого пространственно-временного многообразия. Но тогда в нем уже исходно присутствуют все прошлые, настоящие и будущие состояния всех тел, и поэтому измерение прошлых и будущих состояний физической системы в принципе должно быть возможным. Однако пока что осуществить его не удастся.

Из всех систем отсчета, которые могут быть заданы в пространстве Минковского, наиболее удобными при решении многих задач являются инерциальные системы отсчета.

Определение. Система отсчета в пространстве Минковского называется *инерциальной*, если ее времениподобные координатные линии представляют собой параллельные прямые, а трехмерная сетка ортогональных к ним пространственноподобных координатных линий движется вдоль них поступательно.

В связи с тем, что у инерциальной системы отсчета все времениподобные координатные линии прямолинейны и параллельны между собой, а конкретная конфигурация пространственноподобных координатных линий зачастую не имеет значения, такая система отсчета фактически представляет собой пару $\{T, G\}$, где T — времениподобная прямая, неподвижная относительно M и именуемая осью времени; G — физическое пространство, которое в данном случае представляет собой гиперплоскость, ортогональную к прямой T и движущуюся вдоль T поступательно.

Удобство использования инерциальных систем отсчета связано с тем обстоятельством, что они (и только они) порождают в пространстве M такие системы координат, в которых временная и пространственные координаты любой точки пространства M могут быть найдены путем ортогонального проецирования этой точки соответственно на ось времени T и на физическое пространство G

(при расположении Γ в M , отвечающем любому моменту времени).

Укажем еще одно важное свойство инерциальных систем отсчета.

Каждому материальному телу, размерами которого можно пренебречь, соответствует в пространстве Минковского M фиксированная *мировая линия*. При движении в M физического пространства точка пересечения с ним мировой линии прочерчивает в физическом пространстве некоторую кривую. Эта кривая называется *траекторией* материального тела, и именно ее мы определяем в опыте (точнее, в опыте определяется прообраз траектории в реальном мире). В общем случае конфигурация траектории и конфигурация мировой линии могут быть совершенно различными, что объясняется возможным вращением или деформированием физического пространства при его движении в M . Например, на фотографии звездного неба, снятой с длительной выдержкой, звезды выглядят в виде дуг окружностей с общим центром, находящимся вблизи Полярной звезды. Эти дуги есть изображения траекторий, которые звезды «прочерчивают» в нашем физическом пространстве. Мировые же линии звезд на таких промежутках времени являются с высокой точностью прямолинейными. Различие в конфигурациях траекторий и мировых линий звезд обусловлено в данном случае вращением нашего физического пространства, «скрепленно» с вращающейся Землей.

Важным свойством *инерциальных* систем отсчета является то, что в них прямолинейным мировым линиям соответствуют прямолинейные траектории (или траектории в виде точек, если мировые линии ортогональны физическому пространству). И только в таких системах отсчета траектории материальных тел совпадают с ортогональными проекциями мировых линий на физическое пространство. Это объясняется тем, что в инерциальных системах отсчета и только в них физическое пространство движется в M прямолинейно и поступательно (при этом направление его движения, как и во всех системах отсчета, ортогонально к нему).

Вернемся к рассмотрению нашей частицы.

Движение частицы, как отмечалось, зависит от свойств оператора $I + a_1 dl F$, где F — внешнее поле. Вследствие антисимметричности F из теоремы 9.1 вытекает, что этот оператор является лоренцевым в линейном по dl приближении. Поэтому движение частицы, подчиняющееся законам (9.7) (или эквивалентным им зако-

нам (9.2) и (9.3)), происходит с сохранением длин векторов \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} , углов между вектором \mathbf{i} и осями лучей частицы, а также углов между всеми осями лучей. Более того, в соответствии со сказанным ранее оператор $I + a_1 dl F$ относится к ограниченным преобразованиям Лоренца, то есть он не меняет временную и пространственную ориентации в пространстве M . Все это свидетельствует о том, что остов частицы движется в M как недеформируемая конструкция (хотя составляющие его оси лучей, как видно из (9.4), движутся в общем случае не одинаковым образом).

Будем считать, что данный оператор действует не только на векторы \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} , но вообще на все векторы, связанные с частицей. Благодаря лоренцевости, он обеспечивает движение каждого луча частицы как недеформируемого объекта. При этом векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , входящие в уравнение нити (2.3) и закон ее движения (7.3), подчиняются уравнениям, аналогичным уравнениям (9.2) и (9.3):

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{e}_1; \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{e}_2.$$

Эти уравнения нужны для детального описания движения лучей частицы (с использованием закона движения нити (7.3) или (7.4)). Но здесь мы их применять не будем, так как нас интересует движение только остова частицы. Отметим лишь, что если внешнее поле отсутствует ($F = \hat{0}$), то из этих уравнений и уравнений (9.2), (9.5) и (7.3) вытекает, что частица движется в соответствии с законом (3.2), как это и должно быть в случае свободной частицы.

Зафиксируем некоторый момент l_0 собственного времени частицы. Пусть в этот момент центр частицы находится в точке O мировой линии L . Обозначим: $\tau = \mathbf{i}(l_0)$. Вследствие условия (9.5) вектор τ является касательным ортом к линии L в точке O , направленным в сторону будущего. Введем в пространстве M инерциальную систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени $T = \text{Lin}\{\tau\}$ и физическим пространством $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\tau\}$. (Вдоль оси T измеряется координатное время, вдоль Γ — пространственные координаты; гиперплоскость Γ движется с течением времени поступательно вдоль оси T в направлении, указываемом вектором τ .) В рассматриваемый момент l_0 гиперплоскость Γ совпадает с собственным физическим пространством частицы Γ_* , а ось времени T совпадает с касательной к мировой линии L в центре частицы. Учитывая это свойство системы отсчета $\{T, \Gamma\}$, будем называть ее *мгновенной сопутствующей частице инерциальной системой отсчета*. Заметим, что в

другие моменты времени может быть $\Gamma \neq \Gamma_*$. Чтобы подчеркнуть отличие Γ от Γ_* , будем добавлять к названию физического пространства Γ прилагательное «координатное».

Согласно теореме 9.2 внешнее поле F может быть представлено в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ в виде

$$F = \mathbf{E}\tau - \tau\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \varkappa, \quad (9.10)$$

где

$$\mathbf{E} = F \cdot \tau; \quad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \varkappa; \quad (9.11)$$

\varkappa — псевдотензор Леви-Чивита над Γ . Благодаря антисимметричности F , имеем $\tau \cdot F \cdot \tau = 0$, поэтому $\tau \cdot \mathbf{E} = 0$. Из $\Gamma \perp T$ вытекает, что $\varkappa \cdot \tau = \widehat{0}$ (где $\widehat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор), поэтому $\overline{H} \cdot \tau = 0$. Следовательно $\mathbf{E}, \overline{H} \in \Gamma$.

Если F — тензор электромагнитного поля, то вектор \mathbf{E} и псевдовектор \overline{H} , определяемые формулами (9.11), представляют собой соответственно *напряженность электрического поля* и *напряженность магнитного поля*. Согласно формулам (9.11) величины F , \mathbf{E} и \overline{H} имеют одинаковые физические размерности.

Такое определение напряженностей \mathbf{E} и \overline{H} соответствует их определению, принятому в системе СГС. Мы применяем в настоящей работе именно систему СГС, а не СИ, по той причине, что при использовании СИ, где величинам \mathbf{E} и \overline{H} приписываются разные размерности, потребовалось бы вводить в данные формулы дополнительный размерный коэффициент. Отметим, что формулы (9.10) и (9.11) справедливы для любой инерциальной системы отсчета, а не только для системы отсчета, сопутствующей частице.

В дальнейшем будем считать, что внешнее поле F есть электромагнитное поле, создаваемое окружающими частицу объектами, в связи с чем будем называть его также *внешним электромагнитным полем*. (Поле, порождаемое самой частицей, мы пока что не учитываем — см. (9.1).)

Запишем *закон движения центра частицы* (9.3) применительно к рассматриваемому моменту времени l_0 . Для этого подставим в (9.3) значение тензора F из (9.10). Учитывая, что в момент l_0 выполняется $\dot{\mathbf{i}} = \tau$, и пользуясь равенствами $\tau \cdot \tau = 1$, $\mathbf{E} \cdot \tau = 0$, $\varkappa \cdot \tau = \widehat{0}$, получаем

$$\frac{d\dot{\mathbf{i}}}{dl} = a_1 \mathbf{E}, \quad (9.12)$$

где величины $\dot{\mathbf{i}}$ и \mathbf{E} относятся к центру частицы. Отсюда вытекает, что движение центра частицы определяется только электрической составляющей поля F в мгновенной сопутствующей частице

инерциальной системе отсчета. В частности, согласно (9.5) и (9.12) мировая линия L частицы прямолинейна ($\dot{\mathbf{i}}_L(l) = \text{const}$) тогда и только тогда, когда в центральном сечении частицы во все моменты времени $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. В этом случае мировая линия L совпадает с осью времени T . Если же в течение какого-то промежутка времени в центральном сечении частицы $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, то соответствующий участок мировой линии L отличен от прямолинейного.

Теперь обратимся к *закону движения оси луча*, воспользовавшись его формой записи, задаваемой первым из выражений (9.7). В связи с тем, что оси лучей равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в центре частицы, вся их совокупность, образующая остов частицы, представляет собой четырехмерную конструкцию, не имеющую выделенных направлений. Поэтому движение частицы определяется тем, как входящий в (9.7) оператор $I + a_1 dl F$ преобразует всё векторное пространство, ассоциированное с M . Исследуем по отдельности воздействия на частицу электрической и магнитной составляющих поля F .

Допустим вначале, что внешнее поле F имеет в системе отсчета $\{T, G\}$ только электрическую составляющую. Это означает в соответствии с (9.10), что

$$F = \mathbf{E}\tau - \tau\mathbf{E} \quad (\bar{H} = \bar{0}). \quad (9.13)$$

Оператор $I + a_1 dl F = I + a_1 dl(\mathbf{E}\tau - \tau\mathbf{E})$, как легко убедиться, переводит любой вектор, принадлежащий псевдоевклидовой плоскости $Lin\{\tau, \mathbf{E}\}$, в вектор, лежащий в этой же плоскости. Вместе с тем данный оператор оставляет неизменным любой вектор из пространственноподобной плоскости $Lin^\perp\{\tau, \mathbf{E}\}$. С учетом того, что оператор $I + a_1 dl F$, как отмечалось, является ограниченным преобразованием Лоренца, отсюда следует, что он осуществляет вращение вокруг плоскости $Lin^\perp\{\tau, \mathbf{E}\}$. Можно сказать также, что это есть вращение с инвариантной плоскостью $Lin\{\tau, \mathbf{E}\}$. В теории относительности вращение, характеризующееся инвариантной псевдоевклидовой плоскостью, называется *гиперболическим вращением*, или *бустом*. Таким образом, при тензоре F вида (9.13) движение частицы, описываемое законом (9.2) (или первым из законов (9.7)), есть буст. Согласно (9.5) и (9.12) такое движение частицы сопровождается искривлением ее мировой линии, что означает, как известно, придание частице ускорения.

Теперь предположим, что поле F имеет в системе отсчета $\{T, G\}$

только магнитную составляющую:

$$F = \bar{H} \cdot \varkappa \quad (\mathbf{E} = \mathbf{0}). \quad (9.14)$$

В этом случае оператор $I + a_1 dl F = I + a_1 dl \bar{H} \cdot \varkappa$ оставляет неподвижной псевдоевклидову плоскость $Lin\{\tau, \Delta \bar{H}\}$ и сохраняет инвариантной, то есть смещает лишь вдоль самой себя ее ортогональное дополнение — пространственноподобную плоскость $Lin^\perp\{\tau, \Delta \bar{H}\}$ (это доказывается подстановкой в данный оператор разложения псевдотензора \varkappa по любому ортогональному базису $\{\Delta \bar{H}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \subset \Gamma$; здесь при псевдовекторе \bar{H} поставлен множителем единичный псевдоскаляр Δ , чтобы получить истинный вектор $\Delta \bar{H}$). Такого типа ограниченное преобразование Лоренца называется в теории относительности *пространственным вращением*. Следовательно закон (9.2) при тензоре F вида (9.14) задает пространственное вращение частицы вокруг плоскости $Lin\{\tau, \Delta \bar{H}\}$ (иначе говоря, это есть вращение с инвариантной плоскостью $Lin^\perp\{\tau, \Delta \bar{H}\}$). В данном случае мировая линия частицы L , как следует из (9.5) и (9.12) (при $\mathbf{E} = \mathbf{0}$), является прямолинейной и совпадает с осью времени T .

Итак, если частица подвергается действию только однородного электрического поля, то она испытывает гиперболическое вращение (буст). При этом ее мировая линия искривляется, то есть частица приобретает ускорение. Если же на частицу воздействует одно лишь однородное магнитное поле, то частица получает пространственное вращение, а ее мировая линия остается прямолинейной. Согласно классификации движений, приведенной в разд. 7, это есть, соответственно, типы v и a движения частицы. Подчеркнем, что в обоих случаях электрическое и магнитное поля должны вычисляться в каждый момент времени в мгновенной сопутствующей частице инерциальной системе отсчета. В том случае, когда внешнее электромагнитное поле F имеет вид (9.10), реализуется комбинация таких движений.

В следующем разделе мы продолжим рассмотрение воздействия на частицу магнитного поля.

10. Действие на частицу магнитного поля

Исследование воздействия на частицу магнитного поля имеет особое значение, потому что именно результаты магнитных измерений послужили Дж. Уленбеку и С. Гаудсмицу в 1925 г. основанием для введения представления о наличии у электрона собственных кинетического и магнитного моментов. Эксперименты по воздействию на вещество магнитного поля были проведены к тому времени в двух постановках: при одной использовалось однородное магнитное поле (опыт Эйнштейна—де Хааза, 1915 г.), при другой — существенно неоднородное поле (опыт Штерна—Герлаха, 1922 г.).

Применим нашу модель к описанию результатов обоих типов опытов.

Вновь, как и в разд. 9, будем полагать выполненными условия $F_s = \hat{0}$ и $i_L = i$. По-прежнему будем считать выделенным момент l_0 собственного времени частицы, при котором центр частицы находится в точке O мировой линии L . И, как и ранее, воспользуемся отвечающей моменту l_0 мгновенной сопутствующей частице инерциальной системой отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени $T = Lin\{\tau\}$ и физическим пространством $\Gamma = Lin^\perp\{\tau\}$, где $\tau = i(l_0)$ (вследствие $i_L = i$, вектор τ является касательным ортом к L в точке O).

В настоящем разделе нас будут интересовать в основном характеристики движения частицы, относящиеся к моменту l_0 . В этот момент собственное физическое пространство частицы Γ_* и координатное физическое пространство Γ совпадают ($\Gamma = Lin^\perp\{\tau\} = Lin^\perp\{i(l_0)\} = \Gamma_*|_{l=l_0}$). Поэтому в момент l_0 центральное сечение частицы лежит в Γ . А так как движение частицы, согласно законам (8.8) и (8.13), зависит от значений поля F только в точках центрального сечения частицы, то мы будем задавать пространственное распределение поля F именно внутри физического пространства Γ . Для определенности будем считать, что поле F не изменяется со временем (в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$).

Пусть тензор внешнего электромагнитного поля F имеет в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ только магнитную составляющую. Это означает в соответствии с формулой (9.10), что

$$F = \overline{H} \cdot \varkappa, \quad (10.1)$$

где \overline{H} — псевдовектор напряженности магнитного поля ($\overline{H} \in \Gamma$); \varkappa — псевдотензор Леви-Чивита над Γ . В связи с тем, что в законах движения частицы (8.8) и (8.13) используются значения поля

F исключительно в точках центрального сечения частицы, достаточно, чтобы зависимость (10.1) выполнялась именно в этих точках. Мы допускаем, что напряженность магнитного поля \bar{H} может быть неоднородной функцией, но в дальнейшем ограничимся учетом только первых ее производных по пространственным координатам. Итак, пусть в физическом пространстве Γ выполняется

$$\bar{H} = \bar{H}_o + \mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H})_o, \quad (10.2)$$

где \bar{H}_o и $(\nabla \bar{H})_o$ — постоянные псевдовектор и псевдотензор, равные значениям соответственно поля \bar{H} и градиента поля \bar{H} в точке O ; ∇ — набла-оператор в Γ ; \mathbf{r} — радиус-вектор точек физического пространства Γ относительно точки $\Gamma \cap T$ (в момент t_o точка $\Gamma \cap T$ совпадает с точкой O ; $\mathbf{r} \in \Gamma$).

Благодаря тому, что правые части законов движения частицы (8.8) и (8.13) являются линейными функциями по F (при $F_s = \hat{0}$), воздействие на частицу магнитного поля \bar{H} вида (10.2) может быть описано как сумма воздействий полей \bar{H}_o и $\mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H})_o$, первое из которых является однородным в точках центрального сечения частицы, а второе зависит от пространственных координат этих точек. Учитывая данный факт, рассмотрим по отдельности воздействия на частицу таких полей.

А. Однородное магнитное поле

Допустим, что на частицу действует только *однородное* магнитное поле \bar{H} , не меняющееся со временем (индекс o , фигурирующий в (10.2), опускаем). Тогда согласно (10.1) поле F тоже является однородным, поэтому здесь применимы результаты разд. 9. Из них вытекает, что в данном случае мировая линия L частицы прямолинейна и совпадает с осью времени T , а сама частица вращается вокруг плоскости $Lin\{\tau, \Delta \bar{H}\}$.

Рассчитаем *угловую скорость* такого вращения частицы.

Начнем с того, что разложим направляющий орт оси луча \mathbf{q}_o на составляющие \mathbf{q}_T и \mathbf{q}_Γ , принадлежащие соответственно оси времени T и физическому пространству Γ :

$$\mathbf{q}_o = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma; \quad \mathbf{q}_T = (\tau\tau) \cdot \mathbf{q}_o; \quad \mathbf{q}_\Gamma = (I - \tau\tau) \cdot \mathbf{q}_o, \quad (10.3)$$

здесь $\tau\tau$, $I - \tau\tau$ — операторы (тензоры) проецирования на ось T и на гиперплоскость Γ .

Операторы $\tau\tau$ и $I - \tau\tau$ действительно являются проекторами, так как $(\tau\tau) \cdot (\tau\tau) = \tau\tau$ и $(I - \tau\tau) \cdot (I - \tau\tau) = I - \tau\tau$, где учтено, что $\tau \cdot \tau = 1$. Принадлежность векторов \mathbf{q}_T и \mathbf{q}_Γ соответственно подпространствам T и Γ доказывается следующим образом: $\mathbf{q}_T = (\tau\tau) \cdot \mathbf{q}_0 = \tau(\tau \cdot \mathbf{q}_0) \in \text{Lin}\{\tau\} = T$; $\tau \cdot \mathbf{q}_\Gamma = \tau \cdot [(I - \tau\tau) \cdot \mathbf{q}_0] = [\tau \cdot (I - \tau\tau)] \cdot \mathbf{q}_0 = (\tau - \tau) \cdot \mathbf{q}_0 = 0$, из чего вытекает, что $\mathbf{q}_\Gamma \in \text{Lin}^\perp\{\tau\} = \Gamma$.

В силу однородности поля \bar{H} мы можем воспользоваться для описания движения оси луча законом (9.2):

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = a_1 F \cdot \mathbf{q}_0.$$

Подставим в этот закон разложение (10.3) вектора \mathbf{q}_0 и значение (10.1) поля F . Тогда получаем с учетом равенства $\varkappa \cdot \mathbf{q}_T = \hat{0}$ (вытекающего из того, что псевдотензор \varkappa определен над Γ , $\mathbf{q}_T \in T$ и $\Gamma \perp T$):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} &= \frac{d\mathbf{q}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_T + a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_\Gamma = \\ &= a_1 \bar{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_\Gamma = -a_1 \bar{H} \times \mathbf{q}_\Gamma, \end{aligned} \quad (10.4)$$

где \times — знак векторного умножения в Γ ($\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{x} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$).

Умножим скалярно крайние выражения цепочки равенств (10.4) на тензор $\tau\tau$. Пользуясь постоянством τ , определим вектора \mathbf{q}_T (см. (10.3)) и взаимной ортогональностью векторов $\tau \in T$ и $\bar{H} \times \mathbf{q}_\Gamma \in \Gamma$, можем записать:

$$(\tau\tau) \cdot \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = \frac{d[(\tau\tau) \cdot \mathbf{q}_0]}{dl} = \frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = -a_1 (\tau\tau) \cdot (\bar{H} \times \mathbf{q}_\Gamma) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = 0. \quad (10.5)$$

Из (10.4) и (10.5) находим:

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = -a_1 \bar{H} \times \mathbf{q}_\Gamma. \quad (10.6)$$

В рассматриваемом случае, как отмечалось, мировая линия частицы L совпадает с осью времени T . Следовательно собственное время частицы $t_* = l/c$ равняется с точностью до постоянного слагаемого отсчитываемому вдоль оси T координатному времени t (c — скорость света). Значит, $dl = c dt$.

Выпишем относящийся к данному случаю закон (9.12), характеризующий движение центра частицы, и законы (10.5) и (10.6), описывающие движение оси луча. С учетом $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ и $dl = c dt$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{0}; \quad (10.7)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dt} = \mathbf{0}; \quad (10.8)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (10.9)$$

где

$$\bar{\omega} = -a_1 c \bar{H} = -\frac{e}{m_e c} \bar{H} \quad (\bar{\omega} \in \Gamma), \quad (10.10)$$

здесь использовано значение (9.6) коэффициента a_1 : $a_1 = e/(m_e c^2)$, e и m_e — заряд и масса электрона. В разд. 9 мы приняли, что частица обладает зарядом и массой, равными e и m_e , поэтому можно считать, что в формуле (10.10) стоят заряд и масса частицы.

Уравнения (10.7)–(10.9) приводят к следующим выводам относительно движения частицы под действием *однородного* магнитного поля. Уравнение (10.7) (с учетом условий $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}(l_o)$) свидетельствует о том, что в данном случае мировая линия частицы L является прямолинейной и совпадает с осью времени T (об этом уже говорилось в разд. 9). Заметим, что совпадение L с T означает неподвижность центра частицы относительно физического пространства Γ . Уравнение (10.8) показывает, что временные составляющие \mathbf{q}_T направляющих ортов \mathbf{q}_o осей лучей не изменяются. Из уравнения (10.9) следует, что пространственные составляющие \mathbf{q}_Γ ортов \mathbf{q}_o вращаются в Γ (без изменения длины) с угловой скоростью $\bar{\omega}$. Эта скорость, как видно из (10.10), одинакова для всех лучей частицы. А поскольку центр частицы остается неподвижным относительно Γ и $\bar{\omega} \parallel \bar{H}$, то рассматриваемое движение частицы представляется изнутри трехмерного физического пространства Γ как *вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вида (10.10) вокруг оси, проходящей через центр частицы и параллельной \bar{H}* . С позиции объемлющего пространства M мы имеем, в согласии со сказанным ранее, пространственное вращение частицы, характеризующееся неподвижной псевдоевклидовой плоскостью $Lin\{\boldsymbol{\tau}, \Delta\bar{H}\}$. Сравнение этого результата с опытными данными будет проведено в разд. 11.

Теперь исследуем, каким образом воздействует на частицу *неоднородное* магнитное поле. Итак, пусть в физическом пространстве Γ магнитное поле \bar{H} имеет вид второго слагаемого в выражении (10.2):

$$\bar{H} = \mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H}), \quad (10.11)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точек физического пространства Γ относительно точки $\Gamma \cap T$ ($\mathbf{r} \in \Gamma$; T — ось времени); ∇ — набла-оператор в Γ ; $\nabla \bar{H}$ — фиксированный псевдотензор, равный значению градиента поля \bar{H} в центре частицы (индекс \circ , которым помечен $\nabla \bar{H}$ в (10.2), опускаем).

Далее нас будет интересовать движение только *центра частицы*. Принимая во внимание, что опыты по воздействию на частицу неоднородного магнитного поля дают количественные результаты с невысокой точностью, мы воспользуемся для описания движения центра частицы приближенным законом (8.15). Напомним, что он отвечает ситуации, когда величинами порядка p_*/r_* можно пренебречь в сравнении с единицей (геометрически это означает возможность пренебречь толщиной спиралей, составляющих лучи частицы, по сравнению с радиусом частицы). Дальнейшие рассуждения относятся к расположению частицы в пространстве M , соответствующему моменту l_\circ , когда центр частицы находится в точке O мировой линии L и собственное физическое пространство частицы Γ_* совпадает с координатным физическим пространством Γ . В этот момент точка $\Gamma \cap T$ совпадает с O , а центральное сечение частицы лежит в Γ .

Вычислим входящую в закон (8.15) сумму

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_\xi = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} (\mathbf{r} \cdot (\nabla \bar{H}) \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q})_\xi, \quad (10.12)$$

здесь учтены выражения (10.1) и (10.11); значения всех величин относятся к центрам кругов, образующих сечение луча S_* (это сечение лежит в центральном сечении частицы и имеет вид фигуры, показанной на рис. 2.2); ξ — номер круга; \mathbf{q} — направляющий орт касательной к нити.

Винтовые нити, проходящие через центры кругов и названные нами центральными, имеют радиус $r_\circ = r_*$ и параметр $\beta_\circ = \beta$, при-

чем элементам этих нитей, находящимся в центрах кругов, соответствует значение винтовой переменной $\psi = 0$ (см. разд. 2). Учитывая это и приравнивая радиус-вектор \mathbf{r} центра круга радиусу-вектору \mathbf{R} того элемента винтовой нити, который находится в данном центре, получаем на основании формул (2.3), (2.10), (5.9) и (5.10) следующие значения величин \mathbf{r} и \mathbf{q} для центров кругов:

$$\mathbf{r} = r_* [\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2]; \quad (10.13)$$

$$\mathbf{r}' = r_* [\cos \nu \mathbf{e}_1 - \sin \nu \mathbf{e}_2]; \quad (10.14)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \pm \cos \nu \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \right]; \quad (10.15)$$

$$\mathbf{q}' = \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left[\mp \sin \nu \mathbf{e}_1 \mp \cos \nu \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \right], \quad (10.16)$$

где штрихом помечены величины, относящиеся к случаю переориентированного луча; угол ν в соответствии с (2.6) (при $\psi = 0$) имеет вид

$$\nu = \chi_0 + \frac{2\pi}{n_*} \xi. \quad (10.17)$$

С помощью известных формул для сумм синусов и косинусов [4] можно получить:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin^2 \nu = \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \cos^2 \nu = \frac{n_*}{2}; \quad (10.18)$$

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \sin \nu \cos \nu = 0 \quad (\text{при } n_* \geq 3),$$

здесь подразумевается, что величина ν задана выражением (10.17), в котором χ_0 не зависит от ξ .

Векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , фигурирующие в (10.13)–(10.16), в рассматриваемый момент времени l_0 лежат в координатном физическом пространстве Γ (так как $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \Gamma_*$ и $\Gamma_*|_{l=l_0} = \Gamma$). Зададим в Γ мнимое единичный вектор \mathbf{o} , дополняющий эти векторы до ортонормированного правоориентированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$. Началом вектора \mathbf{o} , как и началом базиса, считаем точку O , в которой в момент

l_0 находится центр частицы. (Вектор \mathbf{o} совпадает с так же обозначенным вектором пространства Γ_* , введенным в разд. 4.) Псевдотензор Леви-Чивита \varkappa над Γ имеет в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$ такой же вид (4.7), какой имеет обозначенный тем же символом псевдотензор Леви-Чивита над Γ_* :

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{o} - \mathbf{e}_1\mathbf{o}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{o}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{o} + \mathbf{o}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{o}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad (10.19)$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ (совпадающий с так же обозначенным псевдоскаляром в Γ_*): $\Delta = 1$ в любом базисе той же ориентации, что и ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$, и $\Delta = -1$ в любом базисе противоположной ориентации.

Набла-оператор ∇ , действующий в физическом пространстве Γ , задается в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}\}$ выражением

$$\nabla = -\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} - \mathbf{o} \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (10.20)$$

здесь x^1, x^2, x^3 — координаты вдоль осей с направляющими ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}$ соответственно; знаки минус перед векторами базиса обусловлены отрицательной определенностью метрической формы в Γ .

Именно такие знаки обеспечивают обычный вид формул с участием набла-оператора, например:

$$\nabla \mathbf{r} = I_\Gamma; \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = \frac{\partial H^1}{\partial x^1} + \frac{\partial H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial H^3}{\partial x^3},$$

где $\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор точек пространства Γ относительно начала базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$; $I_\Gamma = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ — единичный тензор над Γ ($I_\Gamma \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \in \Gamma$); $\bar{\mathbf{H}} = H^1\mathbf{e}_1 + H^2\mathbf{e}_2 + H^3\mathbf{e}_3$ — произвольное векторное или псевдовекторное поле в Γ ($H^i = H^i(x^1, x^2, x^3)$, $i = 1, 2, 3$).

Теперь мы можем вычислить сумму (10.12). Если подставить в (10.12) значения величин \mathbf{r} , \mathbf{q} и \varkappa из (10.13)–(10.16) и (10.19), воспользоваться постоянством $\nabla \bar{\mathbf{H}}$ и \varkappa , а также применить формулы (4.3), (10.18), (10.20) и уравнение Максвелла $\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0$, то можно получить следующие выражения, относящиеся соответственно к непереориентированному и переориентированному лучам:

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})_\xi = \pm \Delta r_* \frac{n_*}{2} \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} (\nabla \bar{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{o}, \quad (10.21)$$

$$\sum_{\xi=0}^{n_*-1} (F \cdot \mathbf{q})'_\xi = \mp \Delta r_* \frac{n_*}{2} \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} (\nabla \bar{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{o}, \quad (10.22)$$

где, как и ранее, верхние знаки отвечают случаю совпадения ориентаций в $C_{\mathbf{q}_0}$ триэдра $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и рассматриваемой винтовой нити (в ее состоянии до переориентации луча), нижние знаки отвечают случаю несовпадения этих ориентаций; под \mathbf{o} понимается вектор, относящийся к состоянию луча до его переориентации.

Повторим, что мы ведем речь о расположении частицы в пространстве M , соответствующем моменту l_0 , поэтому все величины, зависящие от времени, в том числе векторы \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , относятся к моменту l_0 .

Рассматриваемый нами закон движения частицы (8.15) содержит интеграл от найденной суммы по поле Z единичной псевдосферы. Возьмем в качестве переменных интегрирования в этом интеграле те же угловые координаты φ, θ и η , которые были использованы в разд. 6. Напомним, что $i\varphi$ есть угол между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , θ и η — обычные сферические координаты на двухмерной сфере, выделяемой на поле Z условием $\varphi = \text{const}$ (см. рис. 6.2), $\theta \in [0, \pi]$, $\eta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, +\infty)$ ($\varphi \neq 0$ по принятой ранее договоренности). Поскольку указанная двухмерная сфера лежит в гиперплоскости, параллельной физическому пространству Γ , то величинам θ и η можно придать также роль сферических координат в Γ (для этого достаточно ортогонально спроецировать на Γ соответствующие координатные линии, принадлежащие указанной сфере, и затем очевидным образом достроить в Γ всю сетку координатных линий).

Докажем, что двухмерная сфера, выделяемая на поле Z условием $\varphi = \text{const}$, действительно лежит в гиперплоскости, параллельной Γ .

Радиусами-векторами точек этой сферы относительно центра частицы служат векторы \mathbf{q}_0 . Их же радиусами-векторами относительно некоторой точки A , которая отстоит от центра частицы на вектор $\text{ch } \varphi \mathbf{i}$, являются векторы $\mathbf{q}_0 - \text{ch } \varphi \mathbf{i}$ (точка A — одна и та же для всех точек сферы в силу условия $\varphi = \text{const}$). Учитывая, что согласно (5.1) $\text{ch } \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$, можем записать:

$$(\mathbf{q}_0 - \text{ch } \varphi \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i} - \text{ch } \varphi \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \text{ch } \varphi - \text{ch } \varphi = 0.$$

Отсюда вытекает, что при всех \mathbf{q}_0 векторы $\mathbf{q}_0 - \text{ch } \varphi \mathbf{i}$ (имеющие общее начало A) ортогональны \mathbf{i} . А так как эти векторы являются радиусами-векторами элементов рассматриваемой сферы относительно точки A , то, следовательно, данная сфера принадлежит гиперплоскости, проходящей через точку A и ортогональной вектору \mathbf{i} . Эта гиперплоскость параллельна гиперплоскости Γ , ибо $\Gamma \perp \mathbf{i}$. Значит, указанная двухмерная сфера в самом деле лежит в гиперплоскости, параллельной Γ . ■

Согласно одному из допущений, принятых в начале разд. 3, параметр β зависит от угла между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 , причем для лучей с одинаковыми значениями этого угла он принимает одина-

ковые значения. Следовательно, если в качестве угловых координат вектора \mathbf{q}_0 принять переменные φ , θ и η , то параметр β будет зависеть только от одной из них — от переменной φ . Вектор \mathbf{o} , наоборот, не будет зависеть от φ , что объясняется следующим. Этот вектор, по определению, дополняет орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 до ортонормированного базиса в Γ . Сами же \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 представляют собой орты некоторого базиса в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (см. разд. 2). Данная плоскость является одной и той же при любом значении угла $i\varphi$ между \mathbf{i} и \mathbf{q}_0 и фиксированных θ и η (потому что ортогональная к ней плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ есть координатная плоскость, отвечающая фиксированным значениям θ и η). Следовательно орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 не зависят от φ , а это и влечет независимость от φ вектора \mathbf{o} .

Таким образом, в правых частях выражений (10.21) и (10.22) параметр β зависит только от переменной φ , а вектор \mathbf{o} — только от переменных θ и η (остальные величины являются константами). Так как мы рассматриваем случай, когда величинами порядка p_*/r_* можно пренебречь по сравнению с единицей, то согласно (6.11) можно положить

$$\beta = \text{ch } \varphi. \quad (10.23)$$

Центральное сечение частицы (в ее состоянии до переориентации лучей), как отмечалось, является симметричным относительно произвольных пространственных вращений. Состоит центральное сечение частицы из сечений лучей, нормальными к которым в физическом пространстве Γ служат векторы \mathbf{o} . Следовательно концы векторов \mathbf{o} разных лучей равномерно распределены по единичной сфере в Γ , имеющей центр в центре частицы. Поэтому вектор \mathbf{o} может быть задан как радиус-вектор точек этой сферы. Ранее было сказано, что величинам θ и η , от которых зависит вектор \mathbf{o} , можно придать роль угловых переменных сферической системы координат в Γ . Построим такую систему координат. Для этого зафиксируем в Γ произвольный мнимоединичный вектор \mathbf{k} и введем некоторый ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\} \subset \Gamma$ с началом в точке O . От его ортов и будем отсчитывать угловые переменные θ и η в соответствии с обычным правилом задания сферической системы координат. Тогда при трактовке вектора \mathbf{o} как радиуса-вектора точек указанной сферы переменная θ представляет собой угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{o} ($\theta \in [0, \pi]$), а переменная η есть угол между вектором \mathbf{k}_1 и проекцией \mathbf{o} на плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$, отсчитываемый от \mathbf{k}_1 в направлении к \mathbf{k}_2 ($\eta \in [0, 2\pi]$).

В этом случае вектор \mathbf{o} имеет в базисе $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}\}$ вид

$$\mathbf{o} = \sin \theta \cos \eta \mathbf{k}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{k}_2 + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (10.24)$$

Примем следующее условие переориентации лучей частицы, которое обобщает аналогичное условие, сформулированное в разд. 5.

Условие переориентации лучей. *Зафиксируем наряду с вектором \mathbf{k} число $\theta_0 \in [0, \pi]$. Лучи, для которых вектор \mathbf{o} образует с вектором \mathbf{k} угол $\theta \in [0, \theta_0)$, сохраняют свою ориентацию, а лучи, для которых $\theta \in (\theta_0, \pi]$, являются переориентированными.*

Относительно лучей с углом $\theta = \theta_0$ мы не уточняем, какие из них переориентированы, а какие нет, что не влияет на дальнейшие результаты. При $\theta_0 = \pi$ ни один из лучей не подвергается переориентации, а при $\theta_0 = 0$ все лучи являются переориентированными. В принятом условии под \mathbf{o} понимается вектор, относящийся к состоянию луча до его переориентации. Условие из разд. 5 является частным случаем данного условия при $\theta_0 = \pi/2$.

Подставим в закон (8.15) найденные суммы (10.21) и (10.22), учитывая при этом принятое условие переориентации лучей. Затем воспользуемся выражениями (10.23) и (10.24) для параметра β и вектора \mathbf{o} , а также выражениями (6.5) и (6.6) (при $R = 1$) для величин dZ и Z . Тогда, принимая во внимание постоянство $\nabla \bar{H}$ и равенство $F_s = \hat{0}$, получаем уравнение

$$n_* \frac{d\mathbf{i}}{dl} = \pm a_1 \Delta r_* \frac{n_*}{2} \frac{1}{4\pi} \left(\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} \right) (\nabla \bar{H}).$$

$$\cdot \left[\int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} - \int_{\theta_0}^{\pi} \int_0^{2\pi} \right] (\sin \theta \cos \eta \mathbf{k}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{k}_2 + \cos \theta \mathbf{k}) \sin \theta d\theta d\eta, \quad (10.25)$$

здесь отношение пределов двух функций заменено, как и в разд. 6, на предел их отношения, применена формула $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$ и учтено принятое в разд. 2 условие согласованности ориентаций всех нитей частицы (благодаря которому оказывается возможным вынести знаки \pm за символы интегралов).

В правой части уравнения (10.25) предел равен единице, а слагаемые, содержащие векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , при интегрировании по η обращаются в нули. Поэтому после взятия всех интегралов и некоторых

очевидных преобразований уравнение (10.25) приобретает форму

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \pm \frac{1}{4} \Delta a_1 r_* \sin^2 \theta_o (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k}. \quad (10.26)$$

Отметим, что уравнение (10.26) удовлетворяет требованию сохранения длины вектора \mathbf{i} . Действительно, на основании этого уравнения имеем: $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = 2\mathbf{i} \cdot (d\mathbf{i}/dl) = \dots \mathbf{i} \cdot [(\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k}]$, где скалярный множитель заменен многоточием. Вследствие $(\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k} \in \Gamma$ и $\mathbf{i} \perp \Gamma$ (в момент l_o) из выписанного выражения вытекает, что $d(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})/dl = 0$. А это и означает сохранение длины вектора \mathbf{i} .

В рассматриваемый момент времени l_o система отсчета $\{T, \Gamma\}$ служит мгновенной сопутствующей частице инерциальной системой отсчета. Следовательно, в момент l_o центр частицы покоится относительно физического пространства Γ . В специальной теории относительности известно выражение для силы \mathbf{f} , действующей на тело в инерциальной системе отсчета [6]. Эта сила в момент, когда тело покоится, равна (в наших обозначениях)

$$\mathbf{f} = m_e c^2 \frac{d\mathbf{i}_L}{dl}, \quad (10.27)$$

где в качестве массы тела мы приняли массу электрона m_e .

Поскольку у нас $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$, то из (10.26) и (10.27) следует:

$$\mathbf{f} = \pm \frac{1}{4} \Delta e r_* \sin^2 \theta_o (\nabla \bar{H}) \cdot \mathbf{k} \quad (\mathbf{f} \in \Gamma),$$

здесь для a_1 использовано значение (9.6): $a_1 = e/(m_e c^2)$. В приведенной формуле все величины, за исключением \bar{H} , не зависят от пространственных координат, поэтому можно внести их под знак градиента. Тогда действующая на частицу сила \mathbf{f} примет вид

$$\mathbf{f} = \nabla (\bar{H} \cdot \bar{\mu}_{\theta_o})_+, \quad (10.28)$$

где

$$\bar{\mu}_{\theta_o} = \mp \frac{1}{4} e r_* \sin^2 \theta_o \Delta \mathbf{k} \quad (\bar{\mu}_{\theta_o} \in \Gamma); \quad (10.29)$$

индекс $+$ при скалярном произведении векторов или псевдовекторов означает переход к положительно определенной метрической форме в Γ : $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})_+ = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ (при этом $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})_+ \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$).

Переход в Γ к положительно определенной метрической форме произведен для удобства сопоставления результатов настоящего исследования с опытными данными, потому что последние представляются всегда в виде, предполагающем именно положительную определенность метрической формы в физическом пространстве. Такой переход допустим только при условии, что все рассматриваемые векторы и псевдовекторы принадлежат физическому пространству.

Максимальное по модулю значение псевдовектора $\bar{\mu}_{\theta_0}$, которое обозначим через $\bar{\mu}$, достигается при $\theta_0 = \pi/2$ и составляет

$$\bar{\mu} = \mp \frac{1}{4} e r_* \Delta \mathbf{k} \quad (\bar{\mu} \in \Gamma), \quad (10.30)$$

здесь e — заряд электрона; r_* — радиус частицы; \mathbf{k} — вектор, участвующий в принятом выше условии переориентации лучей частицы; Δ — псевдоскаляр в физическом пространстве Γ , равный в право- и левоориентированных базисах соответственно единице и минус единице (так что $\Delta \mathbf{k}$ — псевдовектор). Верхний знак в (10.30), как и в предыдущих выражениях, отвечает случаю, когда ориентации всех винтовых нитей, образующих частицу, и ориентации соответствующих триэдров $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ совпадают (в состоянии частицы до переориентации лучей), нижний знак отвечает случаю, когда эти ориентации не совпадают.

В связи с тем, что мы рассматриваем нашу частицу в качестве модели реального объекта (электрона), найденное значение силы \mathbf{f} не должно зависеть от используемых базисов. Между тем, в соответствии с указанным смыслом двойных знаков, правые части формул (10.29) и (10.30) меняют знаки при изменении ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскостях $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Покажем, что в действительности сила \mathbf{f} и псевдовектор $\bar{\mu}_{\theta_0}$ при этом не изменяются.

Согласно принятому в разд. 2 условию, все лучи частицы имеют одинаковую ориентацию базисов $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$. Поэтому изменение ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в плоскостях $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ может быть произведено только одновременно для всех лучей. Осуществим такую переориентацию. Тогда все векторы \mathbf{o} поменяют свои направления на противоположные, так как каждый из них, по определению, дополняет соответствующие векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 до ортонормированного правоориентированного базиса в Γ . Вследствие этого для всех лучей частицы изменятся значения углов θ , входящих в условие переориентации лучей. А именно, непереориентированным лучам частицы, которым ранее соответствовали углы $\theta \in [0, \theta_0]$, теперь будут отвечать углы $\theta \in (\pi - \theta_0, \pi]$, а переориентированным лучам будут соответствовать вместо углов $\theta \in (\theta_0, \pi]$ углы $\theta \in [0, \pi - \theta_0]$. В связи с этим в формуле (10.25) изменятся пределы интегрирования по переменной θ , что приведет к изменению знака правой части формулы (10.26). Тогда поменяют знаки и правые части формул (10.29) и (10.30). А это вместе с переменной их знаков, обусловленной изменением ориентации триэдров $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, даст в итоге значения силы \mathbf{f} и псевдовектора $\bar{\mu}_{\theta_0}$, совпадающие с исходными. ■

Итак, если частица находится в *неоднородном* магнитном поле и выполняется принятое условие переориентации лучей, то на ча-

стицу действует сила \mathbf{f} вида (10.28). Эта сила имеет наибольшее по модулю значение (при фиксированном $\nabla\bar{H}$), когда $\theta_o = \pi/2$ и $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$.

Согоставим два псевдовектора — введенный выше псевдовектор $\bar{\mu}_{\theta_o}$ и спин частицы \bar{K} , вычисленный в разд. 5. Спин \bar{K} , напомним, есть та часть кинетического момента частицы, которая обусловлена собственным вращением лучей вокруг их осей с угловой скоростью o .

В связи с тем, что в рассматриваемый момент времени l_o собственное физическое пространство частицы Γ_* и координатное физическое пространство Γ совпадают, можно отождествить векторы $\mathbf{o}, \mathbf{k} \in \Gamma$, использованные в настоящем разделе, с векторами $\mathbf{o}, \mathbf{k} \in \Gamma_*$ из разд. 5. При расчете как спина \bar{K} , так и величины $\bar{\mu}_{\theta_o}$ мы интегрировали вектор \mathbf{o} по одной и той же единичной сфере, окружающей центр частицы. Различие состояло лишь в том, что в разд. 5 мы предположили, что угол между векторами \mathbf{o} и \mathbf{k} , отделяющий переориентированные лучи от непереориентированных, равен $\pi/2$, а здесь мы допустили, что этот угол принимает некоторое значение $\theta_o \in [0, \pi]$. Если такое же допущение сделать при вычислении спина, то, как нетрудно убедиться, для спина получится значение, отличающееся от значения (5.15), найденного в разд. 5, только дополнительным множителем $\sin^2 \theta_o$. Обозначая это значение спина через \bar{K}_{θ_o} и учитывая соотношение (5.16) для массы частицы m , имеем:

$$\bar{K}_{\theta_o} = \frac{1}{2} m o r_*^2 \sin^2 \theta_o \Delta \mathbf{k}, \quad (10.31)$$

где мы пренебрегли величиной $(1/2) \sin^2(\pi/n_*)$ по сравнению с единицей (так как в силу (2.2) эта величина равна $(1/2)(p_*/r_*)^2$, а мы пренебрегаем величинами порядка p_*/r_* в сравнении с единицей).

В разд. 9 мы положили, что масса частицы равна массе электрона m_e :

$$m = m_e. \quad (10.32)$$

Рассмотрим вторую из зависимостей (3.6):

$$\beta q = \pm \frac{o r_*}{c}. \quad (10.33)$$

Здесь, согласно (10.23), $\beta = \text{ch } \varphi$. Вместе с тем правая часть равенства (10.33) не зависит от φ и имеет отрицательное значение (см.

пояснение к формуле (3.6)). Следовательно, параметр q должен быть обратно пропорциональным $\operatorname{ch} \varphi$ и отрицательным.

Учитывая это, примем в качестве постулата, что при любом движении частицы для всех ее лучей выполняется равенство

$$q = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad (10.34)$$

где φ или, точнее, $i\varphi$ — угол между направляющим ортом оси симметрии частицы \mathbf{i} и направляющим ортом оси луча \mathbf{q}_o . Данный постулат представляется оправданным с геометрической точки зрения, потому что он обеспечивает достаточно простой характер движения частицы. В случае инерциального движения частицы оси всех ее лучей перемещаются поступательно в направлениях, ортогональных к вектору \mathbf{i} (это вытекает из формул (3.3) и (5.1) и отмечалось нами в пояснении к формуле (3.3)). При неинерциальном движении частицы к указанному поступательному движению осей лучей добавляется вращение их вокруг центра частицы (это следует из формулы (7.5) при учете равенства $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$).

На основании (10.23), (10.33) и (10.34) заключаем, что

$$or_* = \mp c. \quad (10.35)$$

С помощью равенств (10.32) и (10.35) выражение (10.31) преобразуется к виду

$$\overline{K}_{\theta_o} = \mp \frac{1}{2} m_e c r_* \sin^2 \theta_o \Delta k. \quad (10.36)$$

Спин \overline{K}_{θ_o} достигает наибольшего по модулю значения при $\theta_o = \pi/2$. Это значение, которое мы обозначим прежним символом \overline{K} , составляет

$$\overline{K} = \mp \frac{1}{2} m_e c r_* \Delta k. \quad (10.37)$$

Заметим, что данная формула может быть получена также с помощью равенств (5.15), (5.16), (10.32) и (10.35) (при пренебрежении величиной $(1/2) \sin^2(\pi/n_*)$).

Сравнивая формулу (10.29) с формулой (10.36), а также (10.30) с (10.37), находим:

$$\overline{\mu}_{\theta_o} = \frac{e}{2m_e c} \overline{K}_{\theta_o}; \quad \overline{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \overline{K}. \quad (10.38)$$

Зависимость, подобная зависимостям (10.38), имеет место в электродинамике между магнитным и кинетическим моментами движущихся электронов. Учитывая этот факт и то обстоятельство, что термин «спин электрона» есть синоним термина «собственный кинетический момент электрона», будем называть величину $\bar{\mu}_{\theta_0}$ (включая ее максимальное значение $\bar{\mu}$) *собственным магнитным моментом частицы*; эта величина задается равенствами (10.28), (10.29) и удовлетворяет зависимостям (10.38).

Теперь рассмотрим частицу, все лучи которой находятся в исходном, *непереориентированном* состоянии. Из (10.28), (10.29) и принятого условия переориентации лучей вытекает, что в данном случае $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Выберем произвольный орт $\mathbf{k} \in \Gamma$ и разобьем все множество лучей частицы на два подмножества. К одному отнесем те лучи, векторы \mathbf{o} которых образуют с \mathbf{k} углы из промежутка $[0, \pi/2)$, к другому — лучи, векторы \mathbf{o} которых образуют с \mathbf{k} углы из $(\pi/2, \pi]$ (лучи, для которых указанный угол равен $\pi/2$, могут быть включены в любое из подмножеств). Проанализируем воздействие градиентного магнитного поля на эти два подмножества лучей. Нетрудно показать с помощью выкладок, аналогичных приведенным выше, что такое поле действует на эти два подмножества лучей силами, которые равны между собой по модулю, но противоположны по направлению. Таким образом, хотя в рассматриваемом случае результирующая сила, действующая на всю частицу, равна нулю, тем не менее к двум «половинкам» частицы приложены силы, которые из-за их противоположной направленности стремятся разорвать частицу.

Допустим, что под влиянием напряжения, создаваемого в частице этими силами, может происходить переориентация лучей частицы. Такое допущение оправдано тем обстоятельством, что если подвергнуть переориентации лучи одного из указанных подмножеств, то на обе «половинки» частицы уже будут действовать силы, имеющие одно направление, и напряжение, стремящееся разорвать частицу, исчезнет.

Вследствие произвольности вектора \mathbf{k} возможны различные варианты разбиения множества лучей частицы на два подмножества. Однако среди них имеется предпочтительный. В самом деле, каждая из сил, действующих на «половинки» частицы, как можно показать, равна по модулю половине силы (10.28) при $\bar{\mu}_{\theta_0} = \bar{\mu}$. Из (10.28) и (10.30) вытекает, что эти силы принимают наибольшие по модулю

значения и, следовательно, создают в частице наибольшее напряжение в том случае, когда вектор \mathbf{k} параллелен \bar{H} . В связи с этим можно ожидать, что переориентации подвергнутся лучи именно такой «половинки» частицы, для которой выполняется условие $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$. А поскольку таких «половинок» две и они одинаковы, то каждая из них имеет равный шанс оказаться переориентированной. На основании сказанного сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза о переориентации лучей частицы. *Если на частицу действует неоднородное магнитное поле \bar{H} , то половина ее лучей подвергается переориентации, тогда как другая половина лучей остается непереориентированной. Эти две половины лучей характеризуются тем, что у одной из них векторы \mathbf{o} образуют с \bar{H} углы, лежащие в промежутке $[0, \pi/2]$, а у другой — углы из промежутка $[\pi/2, \pi]$. При этом любая из половин лучей может оказаться переориентированной с равной вероятностью.*

В результате такой переориентации лучей на частицу будет действовать сила \mathbf{f} , выражаемая зависимостью (10.28) при $\bar{\mu}_{\theta_0} := \bar{\mu}$:

$$\mathbf{f} = \nabla(\bar{H} \cdot \bar{\mu})_+, \quad (10.39)$$

где собственный магнитный момент частицы $\bar{\mu}$ описывается формулой (10.30) при $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$. В этом случае спин частицы \bar{K} принимает значение (10.37) с тем же вектором \mathbf{k} , что и в (10.30). Отметим, что при переориентации разных «половинок» частицы, указанных в гипотезе, вектор \mathbf{k} имеет противоположные направления.

В следующем разделе мы сопоставим найденное значение силы \mathbf{f} с результатами опытов.

В рамках настоящей модели, по-видимому, можно отказаться от использования данной гипотезы и вывести условие, приводящее к переориентации лучей, непосредственно из исходных положений модели. Для этого нужно рассмотреть переориентацию лучей как процесс, развивающийся во времени, а не как мгновенное изменение состояния лучей, что было сделано для упрощения выкладок в разд. 5. Однако такое исследование выходит за рамки настоящей работы, поэтому мы придали условию переориентации лучей статус гипотезы (даже не обсуждая степень неоднородности поля \bar{H} , требуемую для реализации этого процесса). Заметим, что, согласно принятой гипотезе, неоднородность поля \bar{H} является условием, достаточным для осуществления переориентации лучей, но не обязательно необходимым. Иначе говоря, мы не исключаем того, что переориентация лучей может происходить и в результате каких-то других причин.

11. Спин и собственный магнитный момент частицы (сравнение с опытными данными)

Резюмируем результаты предыдущего раздела о воздействии магнитного поля на частицу. Напомним, что через \overline{H} мы обозначаем псевдовектор напряженности внешнего магнитного поля в мгновенной сопутствующей частице инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ (T — ось времени, Γ — трехмерное физическое пространство). Все рассматриваемые в настоящем разделе векторные и псевдовекторные величины принадлежат Γ .

Однородное магнитное поле \overline{H} вызывает пространственное вращение частицы, которое изнутри физического пространства Γ воспринимается как вращение частицы вокруг оси, параллельной \overline{H} и проходящей через центр частицы. Угловая скорость вращения $\overline{\omega}$ имеет вид (10.10)

$$\overline{\omega} = -\frac{e}{m_e c} \overline{H}, \quad (11.1)$$

где e и m_e — заряд и масса электрона; c — скорость света.

Неоднородное магнитное поле приводит к двум эффектам. Во-первых, согласно принятой в разд. 10 гипотезе оно вызывает переориентацию (по определенному правилу) половины лучей частицы. И, во-вторых, оно порождает действующую на частицу силу \mathbf{f} , которая при такой переориентации лучей, в соответствии с (10.39), равна

$$\mathbf{f} = \nabla(\overline{H} \cdot \overline{\mu})_+, \quad (11.2)$$

здесь

$$\overline{\mu} = \mp \frac{1}{4} e r_* \Delta \mathbf{k} \quad (11.3)$$

собственный магнитный момент частицы (см. (10.30)); ∇ — набл-оператор в Γ ; индекс $+$ означает использование в Γ положительно определенной метрической формы; r_* — радиус частицы; Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах); \mathbf{k} — мнимое единичный вектор, параллельный \overline{H} .

При выполнении упомянутой гипотезы спин частицы \overline{K} имеет значение (10.37)

$$\overline{K} = \mp \frac{1}{2} m_e c r_* \Delta \mathbf{k}. \quad (11.4)$$

Спин \bar{K} и собственный магнитный момент частицы $\bar{\mu}$ связаны вторым из равенств 10.38):

$$\bar{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \bar{K}. \quad (11.5)$$

Присутствие в формулах (11.3) и (11.4) двойных знаков обусловлено чисто математической причиной. А именно, необходимостью учета двух возможных ориентаций базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в подпространствах $S_{\mathbf{q}_0}$ — совпадающей и не совпадающей с ориентацией составляющих частицу винтовых спиралей. В связи с тем, что рассматриваемая частица, как мы полагаем, служит математической моделью реальных объектов (электронов), можно условиться выбирать базисы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ всегда той же ориентации, что и ориентация прообразов спиралей, из которых состоит реальный моделируемый объект. Тогда в формулах (11.3) и (11.4) останутся только верхние знаки. Вместе с тем в этих формулах присутствует вектор \mathbf{k} , который определен только с точностью до знака, так как из налагаемых на него условий $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1$ и $\mathbf{k} \parallel \bar{H}$ следует, что $\mathbf{k} = \pm \bar{H}/|\bar{H}|$ (при $|\bar{H}| \neq 0$). Это означает, что при любой ориентации базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ существуют два возможных значения $\bar{\mu}$ и \bar{K} , различающиеся между собой знаком (причем знаки в (11.3) и (11.4) должны быть всегда одинаковыми, чтобы выполнялось равенство (11.5)).

Приведем известные экспериментальные данные, касающиеся свойств электронов.

Разумеется, заключения о свойствах электронов, делаемые на основе опытных данных, носят косвенный характер: невозможно напрямую померить ни действующую на электрон силу, ни угловую скорость его вращения. Такие заключения всегда базируются на определенных априорных теоретических посылках.

В 1925 г. Дж. Уленбек и С. Гаудсмит дали интерпретацию результатов опытов по воздействию на электроны магнитного поля, которая является с тех пор общепринятой в атомной физике [7, 8]. Они постулировали, что электрон наряду с зарядом и массой обладает двумя псевдовекторными характеристиками — собственным кинетическим моментом (спином) \bar{K} и собственным магнитным моментом $\bar{\mu}$, причем величины \bar{K} и $\bar{\mu}$ удовлетворяют четырем законам, аналогичным тем, которые в классической механике и электродинамике выполняются для кинетического и магнитного моментов, характеризующих движение электронов.

Один из этих законов выражает применительно к \overline{K} теорему моментов классической механики:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{N}, \quad (11.6)$$

где \overline{N} — главный момент приложенных к электрону внешних сил.

Второй закон конкретизирует значение момента сил \overline{N} при действии на электрон однородного магнитного поля \overline{H} :

$$\overline{N} = \overline{\mu} \times \overline{H}. \quad (11.7)$$

Третий закон устанавливает пропорциональность собственных магнитного и кинетического моментов электрона:

$$\overline{\mu} = \gamma_* \overline{K}. \quad (11.8)$$

Причем Дж. Уленбек и С. Гаудсмит приняли, что коэффициент пропорциональности γ_* должен быть найден из эксперимента. Обратим внимание на то обстоятельство, что в электродинамике магнитный и кинетический моменты движущихся электронов (в том числе их орбитальные магнитный и кинетический моменты) тоже пропорциональны между собой. Но при этом в соответствии с определениями этих моментов коэффициент пропорциональности γ между ними имеет строго фиксированное значение, равное

$$\gamma = \frac{e}{2m_e c}. \quad (11.9)$$

Коэффициенты γ и γ_* носят название *магнитомеханического* (или *гиромагнитного*) отношения.

Четвертым законом, использованным упомянутыми авторами, служит выражение для силы \mathbf{f} , действующей на электрон со стороны неоднородного магнитного поля:

$$\mathbf{f} = \nabla(\overline{H} \cdot \overline{\mu})_+, \quad (11.10)$$

здесь ∇ — набла-оператор в трехмерном физическом пространстве, причем метрическая форма в этом пространстве считается положительно определенной (что отмечено нами значком + при скалярном произведении псевдовекторов).

Допущения (11.6)–(11.8) приводят к уравнению

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{K}, \quad (11.11)$$

где

$$\bar{\omega} = -\gamma_* \bar{H}. \quad (11.12)$$

Из (11.11) и (11.12) следует, что при действии на электрон магнитного поля \bar{H} спин электрона \bar{K} вращается (прецессирует) с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси, параллельной \bar{H} . Этот эффект именуется *прецессией Лармора*, а модуль угловой скорости прецессии $|\bar{\omega}|$ — *ларморовой частотой*. Авторы данной концепции предположили, что именно величина $\bar{\omega}$ определяется в опытах по воздействию на электроны однородного магнитного поля.

Наиболее точные современные эксперименты, в которых исследуется воздействие на электроны *однородного* магнитного поля \bar{H} , базируются на методе электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Эти эксперименты приводят к результатам, которые в атомной физике принято интерпретировать как выполнение соотношения

$$\bar{\omega} \approx -1,00116 \frac{e}{m_e c} \bar{H}, \quad (11.13)$$

где учтено, что заряд электрона $e < 0$ [8]. Уточним, что измеряемой величиной в методе ЭПР является частота вспомогательного, перпендикулярного к \bar{H} слабого периодического магнитного поля. Однако в предположении, что имеет место ларморова прецессия электронов, делается заключение о том, что при совпадении этой частоты с ларморовой наступает резонанс, в результате которого прецессирующие электронные спины «перевертываются», что и приводит к наблюдаемому макроскопическому эффекту. Поэтому регистрируемое в опыте резонансное значение частоты вспомогательного поля отождествляется с ларморовой частотой. Отметим, что хотя в этих опытах определяется не сам псевдовектор $\bar{\omega}$, а лишь его модуль, тем не менее на основании принятой концепции и результатов опыта Эйнштейна–де Хааза (согласно которым угловая скорость вращения образца параллельна и однонаправлена с напряженностью действующего на образец магнитного поля) формулу (11.13) записывают именно в приведенной полной векторной форме.

Экспериментальное значение коэффициента γ_* , как видно из (11.12) и (11.13), составляет

$$\gamma_* \approx 1,00116 \frac{e}{m_e c}. \quad (11.14)$$

Во времена разработки излагаемой концепции коэффициент γ_* определялся из опыта Эйнштейна–де Хааза и считался равным

$$\gamma_* \approx \frac{e}{m_e c}. \quad (11.15)$$

Данный результат свидетельствует о том, что предложенная Дж. Уленбеком и С. Гаудсмитом концепция не соответствует положениям электродинамики, ибо согласно этим положениям коэффициент пропорциональности между магнитным и кинетическим моментами обязательно должен иметь значение (11.9), которое примерно в два раза меньше значения (11.14). Тем не менее авторы концепции, оставив в силе все заимствованные из механики и электродинамики законы, дополнили их представлением о том, что собственные магнитный и кинетический моменты электрона — $\vec{\mu}$ и \vec{K} — имеют особую природу, не объяснимую с позиции механики и электродинамики, причем в законе (11.8), связывающем эти величины, коэффициент γ_* принимает именно экспериментальное значение (11.15).

Воздействие на электроны *неоднородного* магнитного поля изучалось в опыте Штерна–Герлаха. Дж. Уленбек и С. Гаудсмит предположили, что наблюдающееся в этом опыте движение электронов обусловлено действием на них силы \mathbf{f} вида (11.10). Из (11.10) следует, что сила \mathbf{f} определяется величиной проекции μ_H собственного магнитного момента $\vec{\mu}$ электрона на направление магнитного поля \vec{H} ($\mu_H = (\vec{\mu} \cdot \vec{H})/|\vec{H}|$ при $|\vec{H}| \neq 0$). Расчет, проведенный на основании результатов опытов, показал, что

$$\mu_H \approx \pm \mu_B, \quad (11.16)$$

где $\mu_B = |e|\hbar/(2m_e c)$ — магнетон Бора; \hbar — постоянная Планка; для примерно половины участвующих в опыте электронов величина μ_H имеет один знак, для остальных электронов — другой знак.

Из зависимостей (11.8), (11.15) и (11.16) вытекает, что проекция K_H спина электрона \vec{K} на направление магнитного поля \vec{H} может принимать два значения: $K_H \approx \mp \hbar/2$. Учитывая это, Дж. Уленбек и С. Гаудсмит постулировали, что выполняется точное равенство

$$K_H = \mp \frac{\hbar}{2}. \quad (11.17)$$

В настоящее время на основании постулируемых равенств (11.8)

и (11.17) и экспериментальной зависимости (11.14) делается заключение о том, что

$$\mu_H \approx \pm 1,00116 \mu_B, \quad (11.18)$$

где числовой коэффициент тот же, что в (11.13) и (11.14) [8]. Отличие (11.16) от (11.18) принято объяснять невысокой точностью результатов, получаемых в опыте Штерна—Герлаха.

Изложенная концепция спина и собственного магнитного момента электрона, предложенная Дж. Уленбеком и С. Гаудсмитом, послужила в свое время исходной посылкой при построении атомной физики.

В современной квантовой электродинамике существование спина электрона рассматривается как следствие постулированного П. А. М. Дираком в 1928 г. уравнения для волновой функции электрона, а небольшое отличие собственного магнитного момента электрона от магнетона Бора (см. (11.18)) объясняется взаимодействием электрона с виртуальными частицами. Нужно отметить, однако, что такой подход к описанию спина и собственного магнитного момента электрона обладает принципиальными недостатками. Они заключаются в следующем.

Волновая функция, характеризующая состояние электрона, представляет собой спинор. В частности, в нерелятивистском приближении, когда уравнение Дирака переходит в уравнение Паули, этот спинор есть элемент двумерного комплексного унитарного пространства. Последнее существенно отличается от пространства Минковского. В нем, к примеру, поворот вектора на угол 2π приводит к изменению знака вектора, а не оставляет его без изменения, как это должно быть в соответствии с геометрией пространства Минковского. Поэтому использование указанного унитарного пространства в качестве базисного многообразия теории представляет собой отход от положений специальной теории относительности.

Не может считаться удовлетворительным и допущение о существовании виртуальных частиц. Дело в том, что для согласования теории с результатами опытов требуется, чтобы эти частицы не подчинялись обычному релятивистскому соотношению между энергией, импульсом и массой и чтобы они были принципиально ненаблюдаемыми объектами. Поэтому использование в теории представления о таких частицах вносит в нее элемент мистики.

Сравним результаты, полученные нами, с указанными выше экспериментальными данными.

В рамках нашей модели воздействие на частицу однородного магнитного поля приводит к вращению частицы с угловой скоростью $\bar{\omega}$, описываемой выражением (11.1). Этот результат согласуется с экспериментальной зависимостью (11.13) с относительной погрешностью для $|\bar{\omega}|$, равной приблизительно 0,1%. Сразу же отметим, что учет самодействия частицы, которым мы до сих пор пренебрегали, приводит к значению $\bar{\omega}$, существенно лучше согласующемуся с экспериментальным (см. разд. 14).

Влияние неоднородного магнитного поля проявляется в действии на частицу силы \mathbf{f} вида (11.2) при двух различающихся знаком значениях проекции μ_H собственного магнитного момента частицы на направление магнитного поля ($\mu_H = (\bar{\mu} \cdot \bar{H}/|\bar{H}|)_+$; см. (11.3)). Такой результат полностью соответствует данным опыта Штерна–Герлаха. Вытекающее из этих данных значение проекции μ_H совпадает с ее значением (11.16), найденным Дж. Уленбеком и С. Гаудсмитом (потому что формула (11.2) идентична использованной этими авторами формуле (11.10)).

Отметим, что с помощью (11.3) и (11.16) может быть найден радиус частицы r_e . Мы посвятим обсуждению радиуса частицы разд. 15.

Согласие полученных нами результатов с экспериментальными данными свидетельствует о том, что *построенная математическая конструкция, названная частицей, действительно может служить моделью электрона.*

Остановимся на отличиях нашей модели электрона от традиционной модели.

В атомной физике электрон считается точечным объектом. Бесструктурность электрона-точки не позволяет рассчитать его спин и собственный магнитный момент, в связи с чем эти характеристики вводятся постулативным образом. В нашей модели электрон представлен геометрическим объектом, имеющим конечные размеры. Благодаря этому спин и собственный магнитный момент электрона оказываются параметрами, вычисляемыми по обычным правилам механики и электродинамики.

В атомной физике значение магнитомеханического отношения принимается примерно в два раза большим, чем это должно быть согласно положениям электродинамики (ср. (11.9) и (11.14)). В нашей же модели, как следует из (11.5), магнитомеханическое отношение имеет обычное значение (11.9).

Согласно нашей модели проекция K_H спина частицы \bar{K} на направление магнитного поля \bar{H} равна

$$K_H \approx \mp \hbar, \quad (11.19)$$

это равенство вытекает из зависимости (11.5) и экспериментального значения μ_H (11.16). Данное значение величины K_H в два раза превосходит значение (11.17), принимаемое в атомной физике. Следует отметить, что в настоящее время не существует методов прямого экспериментального измерения спина электрона, поэтому

нельзя установить, какое из значений величины K_H , — (11.17) или (11.19) — лучше соответствует реальности.

В атомной физике величина $\bar{\omega}$, о которой шла речь выше, трактуется как угловая скорость прецессии спина электрона \bar{K} под действием магнитного поля \bar{H} . В нашей модели $\bar{\omega}$ имеет смысл угловой скорости вращения самой частицы. Современное состояние экспериментальной техники не позволяет установить напрямую, какая из этих интерпретаций величины $\bar{\omega}$ ближе к истине. Это связано с тем, что измеряемой величиной в методе ЭПР, как отмечалось, является частота вспомогательного переменного магнитного поля, и лишь априорные теоретические посылки позволяют связать ее с теми или иными характеристиками электронов.

В рамках нашей модели может быть дано следующее объяснение результатов опытов, базирующихся на методе ЭПР. Действующее на электроны однородное магнитное поле приводит к вращению электронов. Вспомогательное слабое магнитное поле, ортогональное к основному полю, вызывает прецессию и нутацию вращающихся электронов. При периодическом изменении вспомогательного поля с частотой, равной частоте нутации, наступает резонанс, в результате которого происходит рост амплитуды нутации и в итоге «перевертывание» электронных спинов. Это и наблюдается в опыте в виде определенного макроскопического эффекта. А так как при сферически симметричном теле частота нутации, как известно [9], равна частоте вращения тела, то регистрируемая в опыте резонансная частота совпадает с искомой частотой вращения электронов.

Наша модель, как показано в разд. 4, дает возможность вычислить с высокой точностью постоянную тонкой структуры α , причем у нас эта величина полностью определяется одной целочисленной характеристикой частицы — числом спиралей n_* в луче частицы. В атомной же физике константа α вводится как безразмерная комбинация других, размерных, фундаментальных констант: $\alpha = e^2/(\hbar c)$, и не имеет определения, не связанного с этой формулой.

Отметим, что результаты, которые в настоящем разделе мы сопоставили с опытными данными, получены в пренебрежении самодействием частицы и конечностью толщины спиралей, образующих лучи частицы. Учет этих факторов будет произведен в разд. 14.

12. Плотность нитей

Лучи, составляющие частицу, расходятся от ее центра во всех времениподобных направлениях. Поэтому чем дальше от центра частицы (внутри светового конуса) находится точка пространства Минковского, тем меньше нитей частицы проходит вблизи нее. Введем величину — плотность нитей, количественно характеризующую этот эффект. Она потребуется нам при расчете собственного поля частицы F_s .

Выберем одно из положений частицы в пространстве Минковского и далее в настоящем разделе будем рассматривать только его.

Нити частицы, напомним, представляют собой винтовые линии радиусов $r_o \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ (r_* — радиус частицы; p_* — полутолщина спирали; см. рис. 2.1–2.3). Зафиксируем некоторое значение радиуса нитей r_o и некоторое приращение радиуса dr_o такие, что $0 < dr_o \ll p_*$, $[r_o, r_o + dr_o] \subset [r_* - p_*, r_* + p_*]$, и далее будем вести речь только о нитях с радиусами из промежутка $[r_o, r_o + dr_o]$. В последующем, после нахождения вклада этих нитей в поле F_s , мы проинтегрируем результат по всем значениям $r_o \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$.

Пусть x — произвольная точка пространства Минковского M . Возьмем какую-либо область в M объема V , содержащую x . Обозначим через A суммарную длину находящихся в этой области участков нитей частицы с радиусами из заданного промежутка $[r_o, r_o + dr_o]$. Понятно, что A является функцией от x , r_o , dr_o и V .

Определение. Величину

$$\varepsilon = \varepsilon(x, r_o, dr_o) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{A}{V} \quad (12.1)$$

назовем *плотностью нитей* в окрестности точки $x \in M$ (или в точке x).

Плотность нитей ε есть скалярная неотрицательная характеристика частицы, имеющая размерность m^{-3} ; в число ее аргументов, наряду с указанными в (12.1), могут входить также параметры частицы — количество лучей и нитей, величины r_* , p_* и другие. Говоря упрощенно, ε — это суммарная длина рассматриваемых нитей, приходящаяся на единицу объема малой области, содержащей x . В приведенном определении, конечно, следовало бы потребовать, чтобы предел в (12.1) не зависел от выбора области, содержащей x ,

и от способа стягивания области в точку x . Мы, однако, не будем проверять выполнение этого требования, а ограничимся расчетом величины ε лишь для одного специального вида области и специального способа стягивания ее в точку x .

Подчеркнем, что вклад в величину ε дают только такие нити частицы, которые относятся к выбранному расположению частицы в M и имеют радиусы из фиксированного промежутка $[r_0, r_0 + dr_0] \subset [r_* - p_*, r_* + p_*]$ при $0 < dr_0 \ll p_*$. Если вблизи точки x таких нитей нет, то $\varepsilon = 0$. Покажем, что здесь выполняется неравенство $dr_0 \ll r_0$.

В самом деле, зависимость (4.15) влечет $p_* \ll r_*$, поэтому $2p_* < r_*$ и, значит, $p_* < r_* - p_*$. Отсюда и из $r_0 \geq r_* - p_*$, $dr_0 \ll p_*$ вытекает $dr_0 \ll p_* < r_* - p_* \leq r_0$, что и дает $dr_0 \ll r_0$. ■

Всё последующее содержание настоящего раздела посвящено расчету плотности нитей ε и выводу ряда вспомогательных формул, которые потребуются нам в дальнейшем.

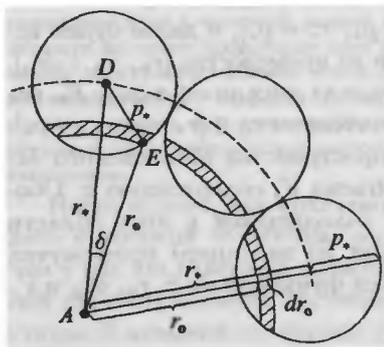


Рис. 12.1. Фрагмент поперечного сечения луча.

Пусть S — поперечное сечение луча частицы (рис. 12.1). Точки пересечения с S нитей, имеющих радиусы из рассматриваемого промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, заполняют в этом сечении n_* одинаковых участков кругового кольца с внутренним радиусом r_0 и шириной dr_0 (на рис. 12.1 эти участки заштрихованы; n_* — число кругов радиуса p_* , составляющих сечение луча). Обозначим площадь одного такого участка через dS , а общее количество нитей, пересекающих все участки, через N_{r_0} . Так

как каждая нить пересекает сечение S в одной точке, то выполняется равенство

$$N_{r_0} = n_* \sigma dS, \quad (12.2)$$

где σ — плотность точек пересечения нитей с поперечным сечением луча, введенная в разд. 6; учтено, что $\sigma = \text{const}$ на всех указанных участках кругового кольца (благодаря этому, в правой части равенства (12.2) отсутствует интеграл по данным участкам).

Условие о том, что $\sigma = \text{const}$ на указанных участках кольца, вытекает из следующего. В разд. 6 было сделано допущение о том,

что плотность σ одинакова во всех точках сечения S , равноудаленных от его центра. Из этого следует, что плотность σ зависит только от расстояния между точкой, в которой она вычисляется, и центром сечения S . А так как это расстояние равняется радиусу винтовой нити, пересекающей S в данной точке, то σ фактически является функцией радиуса нити. При этом неравенство $dr_o \ll r_o$ позволяет считать, что для всех нитей с радиусами из $[r_o, r_o + dr_o]$ плотность σ принимает одно и то же значение $\sigma(r_o)$, что и означает ее постоянство на всех указанных участках кольца.

Введем обозначения: A — центр сечения S ; D — центр одного из кругов радиуса p_* , образующих сечение S ; E — точка пересечения границы этого круга с внутренней границей упомянутого кругового кольца; δ — угол между отрезками AD и AE (см. рис. 12.1).

Плоскость, в которой лежит сечение S , наделена отрицательно определенной метрической формой (так как она ортогональна времениподобной оси луча). Такая плоскость отличается от собственно евклидовой плоскости лишь знаком скалярных произведений векторов, поэтому геометрические свойства фигур в ней удовлетворяют обычным теоремам планиметрии и тригонометрии. На основании теоремы косинусов, примененной к треугольнику ADE , имеем

$$\delta = \arccos \frac{r_*^2 + r_o^2 - p_*^2}{2r_* r_o}. \quad (12.3)$$

При $dr_o \ll r_o$ и $dr_o \ll p_*$ площадь dS каждого из заштрихованных на рис. 12.1 участков кругового кольца может быть представлена в виде

$$dS = 2\delta r_o dr_o. \quad (12.4)$$

Подставляя это значение dS в (12.2), получаем

$$N_{r_o} = \tilde{N}_{r_o} dr_o \quad \text{при} \quad \tilde{N}_{r_o} = 2n_* \sigma \delta r_o. \quad (12.5)$$

Формулы (12.3) и (12.5) позволяют найти количество нитей N_{r_o} как функцию от r_o и dr_o , если известна плотность σ точек пересечения нитей с поперечным сечением луча и известны характеристики частицы n_* , r_* и p_* .

Из (12.5) с учетом (12.4) и (6.2) находим, что

$$\int_{(r_o)} \tilde{N}_{r_o} dr_o = \int_{(r_o)} 2n_* \sigma \delta r_o dr_o = n_* \int_{(S_o)} \sigma dS = n_* N_*, \quad (12.6)$$

здесь первые два интеграла берутся по всем значениям r_0 ; третий интеграл может быть взят по любому из кругов радиуса p_* , составляющих поперечное сечение луча S (мы выбрали круг S_0 , чтобы воспользоваться формулой (6.2)); N_* — количество нитей, содержащихся в одной спирали луча; $n_* N_*$ — общее число нитей в каждом луче частицы. По смыслу величины N_{r_0} интеграл в левой части (12.6) представляет собой суммарное количество нитей, пересекающих сечение S . А так как это количество есть общее число нитей в луче частицы, то равенство левой и правой частей выражения (12.6) является очевидным.

Отметим, что величина dS имеет в выражениях (6.2) и (12.6) несколько разные смыслы. В (6.2) dS — элемент площади сечения S , здесь же dS — площадь заштрихованного на рис. 12.1 участка кругового кольца. Однако, благодаря упомянутому ранее условию о том, что $\sigma = \text{const}$ на всех участках кругового кольца, интеграл $\int \sigma dS$ в (12.6) не изменится, если в нем величине dS придать тот же смысл, что и в (6.2).

Для упрощения последующих выкладок пренебрежем зазорами между рассматриваемыми участками кольца, заштрихованными на рис. 12.1, и допустим, что точки пересечения нитей с поперечным сечением луча распределены равномерно по всей поверхности кругового кольца, имеющего внутренний радиус r_0 и ширину dr_0 . В этом случае сами нити равномерно распределены по цилиндрическому слою внутреннего радиуса r_0 и толщины dr_0 , ось которого совпадает с осью луча (этот цилиндрический слой лежит в своем для каждого луча трехмерном подпространстве C_{q_0}). Подчеркнем, что сделанное допущение не изменяет общего числа точек пересечения, равного количеству нитей N_{r_0} .

При таком допущении плотность указанных точек пересечения имеет на поверхности кольца значение $\sigma' = n_* \sigma \delta / \pi$. Действительно, общее число точек пересечения, принадлежащих кольцу, равно N_{r_0} , причем, согласно сделанному допущению, $\sigma' = \text{const}$ вдоль кольца. Поэтому можем записать: $N_{r_0} = \sigma' dS'$, где dS' — площадь кольца. Отсюда и из выражения (12.5), учитывая, что $dS' = 2\pi r_0 dr_0$ (при $dr_0 \ll r_0$), получаем именно указанное значение плотности σ' .

Примем допущение, которое при вычислении характеристик частицы позволяет заменить операцию суммирования операцией интегрирования.

Допущение о континуальности множества осей лучей и множества нитей. Будем считать, что совокупность осей лучей и совокупность нитей, из которых состоит луч, являются континуальными множествами. Иначе говоря, допустим, что:

а) оси лучей частицы непрерывно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в центре частицы (в этом случае каждая времениподобная прямая, проходящая через центр частицы, является осью некоторого луча; напомним, что, согласно сделанному в начале построения модели допущению, оси лучей распределены по внутренности светового конуса равномерно);

б) винтовые нити каждого луча частицы, имеющие один и тот же радиус, непрерывно заполняют цилиндрическую поверхность того же радиуса, ось которой совпадает с осью луча (эта поверхность принадлежит соответствующему подпространству S_{q_0} ; вследствие упомянутой выше равномерности распределения нитей луча по цилиндрическому слою распределение нитей по указанной цилиндрической поверхности тоже является равномерным).

Допущением а мы фактически уже пользовались ранее, когда вели речь о симметрии частицы и когда производили интегрирование по всем направляющим ортам осей лучей.

Рассмотрим лучи частицы, оси которых наклонены по отношению к оси симметрии частицы на один и тот же угол $i\varphi$ ($\varphi > 0$). Построим для каждого из этих лучей цилиндрическую поверхность (в соответствующем S_{q_0}) радиуса r_0 с осью, совпадающей с осью луча. Совокупность всех таких цилиндрических поверхностей, как можно доказать, образует в пространстве Минковского M линейчатую гиперповерхность, сечения которой гиперплоскостями, ортогональными оси симметрии частицы, являются сферами, а сечения ее плоскостями, содержащими ось симметрии частицы, являются гиперболами.

Эти свойства гиперповерхности позволяют трактовать ее как аналог однополостного гиперboloида в трехмерном собственно евклидовом пространстве. Нужно, однако, иметь в виду, что данная гиперповерхность отличается от гиперboloида двумя существенными чертами. Во-первых, она имеет на единицу большую размерность, и, во-вторых, через каждую ее точку проходят не две прямые образующие, как у гиперboloида, а бесконечное множество образующих (все они лежат на конической поверхности с вершиной в этой точке).

Теперь построим такие гиперповерхности для всех углов $i\varphi$ ($0 < \varphi < +\infty$) при фиксированном радиусе r_0 . Можно доказать, что эти гиперповерхности заполняют в пространстве M такую его часть, которая включает в себя множество точек центрального сечения частицы, находящихся на расстоянии r_0 от центра частицы,

трального сечения частицы (см. рис. 12.2). Согласно вышесказанному найдется луч частицы, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x .

Пусть центр частицы при рассматриваемом ее расположении находится в точке O мировой линии L и пусть этому расположению отвечает момент l собственного времени частицы. Введем в пространстве M систему отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, проходящей через точку O , и с ортогональным оси T координатным физическим пространством $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ (\mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы; см. рис. 12.2). Зададим на оси T координатное время — натуральный параметр, возрастающий в направлении будущего, таким образом, чтобы его значение в точке O совпало с l . Тогда точке x , зафиксированной нами, будет отвечать момент l_x координатного времени, больший l , так как эта точка находится в будущем относительно центрального сечения частицы.

Каждому моменту координатного времени соответствует свое положение гиперплоскости Γ в пространстве M , причем все они параллельны между собой. Нас будут интересовать два положения гиперплоскости Γ , при одном из которых она проходит через точку O , при другом — через точку x . Обозначим их соответственно Γ_l и Γ_{l_x} (см. рис. 12.2 и 12.3).

Теорема 12.1. *Сечение любого луча частицы гиперплоскостью, ортогональной оси симметрии частицы, является поперечным сечением луча.*

Доказательство. Луч частицы с направляющим ортом оси \mathbf{q}_0 , по определению, лежит в $C_{\mathbf{q}_0} = \text{Lin}\{\mathbf{q}_0\} \oplus \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (см. разд. 2). Гиперплоскость, о которой идет речь в теореме, есть $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$. $C_{\mathbf{q}_0}$ и Γ представляют собой трехмерные подпространства четырехмерного пространства Минковского. Они не параллельны и не совпадают, потому что $\mathbf{q}_0 \in C_{\mathbf{q}_0}$ и $\mathbf{q}_0 \notin \Gamma$ ($\mathbf{q}_0 \notin \Gamma$, ибо \mathbf{q}_0 , будучи времениподобным вектором, не может быть ортогональным времениподобному вектору \mathbf{i}). Известно, что в четырехмерном пространстве два трехмерных подпространства, которые не параллельны и не совпадают, пересекаются по двумерной плоскости. В данном случае такой плоскостью является $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$, так как $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$ и $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\} = \Gamma$. Следовательно, сечение луча гиперплоскостью Γ лежит в $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. А поскольку $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \perp \mathbf{q}_0$, то это сечение действительно является поперечным сечением луча. ■

го луча, имеющие радиус r_0 , располагаются на цилиндрической поверхности, которая имеет радиус r_0 и ось, совпадающую с осью луча (эта поверхность содержится, как и весь луч, в трехмерном подпространстве S_{q_0}). Поэтому точка x тоже лежит на этой цилиндрической поверхности. Соединим точки A и x прямолинейным отрезком. Так как отрезок Ax находится в сечении луча гиперплоскостью Γ_x , то, согласно следствию к теореме 12.1, $Ax \perp OA$. Отсюда и из того, что точка x лежит на указанной цилиндрической поверхности, вытекает, что $|Ax| = r_0$. Построим образующую этой цилиндрической поверхности, проходящую через x ; она параллельна оси луча OA . Пусть z — точка пересечения ее с Γ_l . Введем плоскость, проходящую через параллельные прямые xz и OA . Поскольку $\Gamma_l \parallel \Gamma_x$, то Γ_l и Γ_x пересекают эту плоскость по параллельным прямым. Следовательно, четырехугольник $OAxz$, лежащий в этой плоскости, — параллелограмм. Поэтому $|Oz| = |Ax| = r_0$ и $Oz \perp OA$ (так как $Ax \perp OA$). На рис. 12.3 прямая ab — еще одна образующая указанной цилиндрической поверхности; темные кружки на xz и ab — элементы нити, проходящей через x (из-за трехмерности картинки, вся цилиндрическая поверхность вместе с находящимися на ней винтовыми нитями не может быть изображена на этом рисунке). В следующем разделе мы докажем, что через точку x проходят винтовые нити радиуса r_0 , принадлежащие и другим лучам частицы.

Все точки гиперплоскости Γ_l имеют временную координату l , а все точки гиперплоскости Γ_x — временную координату $l_x > l$, поэтому расстояние между точками $O = \Gamma_l \cap T$ и $C = \Gamma_x \cap T$ равно

$$|OC| = l_x - l > 0. \quad (12.7)$$

Введем обозначения: $r = |Cx|$, $r_A = |CA|$, $Q = |OA|$. В соответствии со сказанным ранее область пространства M , которой принадлежит точка x и которая занята винтовыми нитями радиуса r_0 , имеет внутреннюю границу в виде цилиндрической гиперповерхности радиуса r_0 с осью, совпадающей с осью симметрии частицы (см. рис. 12.2). Поэтому точка x находится от оси симметрии на расстоянии, заведомо большем r_0 . А так как ось симметрии совпадает с осью времени T и расстояние от x до T есть r , то это означает, что

$$r > r_0. \quad (12.8)$$

Рассмотрим треугольник OCA на рис. 12.3. В нем $OC \perp CA$ (так

как $OC \subset T$, $CA \subset \Gamma_{l_x}$ и $T \perp \Gamma_{l_x}$, а угол между сторонами OC и OA равен углу $i\varphi$ между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_o . Поэтому с учетом (12.7) имеем:

$$Q = |OA| = (l_x - l) \operatorname{ch}^{-1} \varphi, \quad (12.9)$$

$$r_A = |CA| = (l_x - l) \operatorname{th} \varphi. \quad (12.10)$$

Теперь рассмотрим треугольник CAx . Так как $CAx \subset \Gamma_{l_x}$, $\Gamma_{l_x} \perp T$ и $OC \subset T$, то $Ax \perp OC$. Ранее было показано, что $Ax \perp OA$ и $|Ax| = r_o$. Из $Ax \perp OC$ и $Ax \perp OA$ вытекает, что отрезок Ax ортогонален плоскости треугольника OCA . Значит $Ax \perp CA$, и, следовательно, треугольник CAx прямоугольный. На основании теоремы Пифагора (выполняющейся в Γ_{l_x}) с учетом $|Ax| = r_o$ заключаем, что

$$r_A = \sqrt{r^2 - r_o^2}, \quad (12.11)$$

это выражение определено в силу (12.8).

Из (12.10) и (12.11) находим:

$$l_x - l = \frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{\operatorname{th} \varphi}, \quad (12.12)$$

здесь $\operatorname{th} \varphi > 0$, так как $\varphi > 0$. Из (12.12) вытекает, что $\varphi = \operatorname{Arth}(\sqrt{r^2 - r_o^2} / (l_x - l))$. Таким образом, угловая переменная φ однозначно выражается через радиус винтовой нити r_o и параметры r и $l_x - l$, определяющие взаимное расположение частицы и точки x . А поскольку эти величины фиксированы, то отсюда заключаем, что все лучи, нити которых радиуса r_o проходят через точку x , характеризуются тем, что их оси наклонены по отношению к оси симметрии частицы на один и тот же угол $i\varphi$.

С помощью выражений (12.8) и (12.12), учитывая, что $\sup(\operatorname{th} \varphi) = 1$, получаем следующее ограничение на взаимное расположение частицы и точки x :

$$r_o < r < \sqrt{(l_x - l)^2 + r_o^2}. \quad (12.13)$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что выполнение этого ограничения является необходимым условием для того, чтобы через точку x , находящуюся в будущем относительно центрального сечения частицы, проходила винтовая нить частицы радиуса r_o .

Докажем, что выполнение данного ограничения является и достаточным условием для этого.

Доказательство. В координатах $r - (l_x - l)$ равенство $r = r_0$ задает прямую, которая служит левой границей изображенного на рис. 12.2 сечения области, содержащей нити радиуса r_0 . А зависимость $r^2 - (l_x - l)^2 = r_0^2$, вытекающая из равенства $r = \sqrt{(l_x - l)^2 + r_0^2}$, задает гиперболу, которая является правой границей сечения. Следовательно, выполнение ограничения (12.13) означает, что точка x находится внутри самой области. А так как через каждую точку данной области проходит винтовая нить радиуса r_0 , то некоторая такая нить проходит и через точку x . Значит, выполнение ограничения (12.13) действительно является условием, достаточным для того, чтобы через точку x проходила нить радиуса r_0 . ■

Ограничение на взаимное расположение частицы и точки x может быть записано также в следующей форме, вытекающей из (12.8) и (12.12):

$$r > r_0 \quad \text{и} \quad l \in \left(-\infty, l_x - \sqrt{r^2 - r_0^2} \right). \quad (12.14)$$

При $l_x > l$ ограничение (12.13) эквивалентно (12.14).

Наша частица симметрична относительно произвольных вращений, сохраняющих вектор \mathbf{i} . Гиперплоскость Γ_{l_x} тоже симметрична относительно таких вращений, так как $\Gamma_{l_x} \perp \mathbf{i}$. Вследствие этого, оси лучей, образующие с вектором \mathbf{i} один и тот же угол, пересекают Γ_{l_x} в точках сферы с центром в точке $C = \Gamma_{l_x} \cap T$ (ибо $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$). В частности, оси лучей, которые образуют с \mathbf{i} такой же угол $i\varphi$, как и показанная на рис. 12.3 ось OA , пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках сферы радиуса $r_A = |CA|$ с центром в C . При этом винтовые нити всех таких лучей, имеющие радиус r_0 , пересекают Γ_{l_x} в точках сферы радиуса $r = |Cx|$ с центром в C (в самом деле, сечение луча гиперплоскостью Γ_{l_x} , как может быть доказано с помощью теоремы 12.1, ортогонально отрезку, соединяющему C с центром сечения; а так как этот центр есть точка пересечения оси луча с Γ_{l_x} , то расстояние от C до центра сечения равно r_A ; поэтому расстояние от C до точек пересечения Γ_{l_x} с нитями радиуса r_0 равно $\sqrt{r_A^2 + r_0^2}$, из чего с учетом (12.11) и следует, что данное расстояние есть r).

Рассмотрим лучи частицы, оси которых образуют с вектором \mathbf{i} углы в промежутке от $i\varphi$ до $i(\varphi + d\varphi)$ при $0 < d\varphi \ll \varphi$. Точки пересечения осей этих лучей с Γ_{l_x} заполняют в Γ_{l_x} сферический слой

внутреннего радиуса r_A и некоторой толщины dr_A . Нити таких лучей, имеющие радиус r_0 , пересекают Γ_{i_x} в точках сферического слоя внутреннего радиуса r и толщины dr (рис. 12.4). Выразим величины dr_A и dr через приращение $d\varphi$ угловой переменной φ .

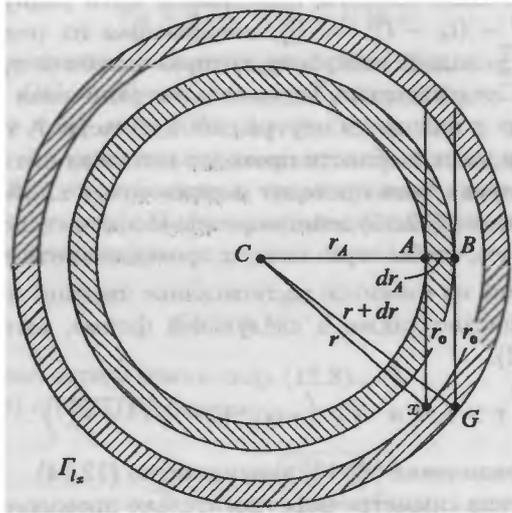


Рис. 12.4. Сферические слои в гиперплоскости Γ_{i_x} : внутренний образован точками пересечения гиперплоскости Γ_{i_x} с осями лучей, наклоненными по отношению к оси симметрии частицы на углы от $i\varphi$ до $i(\varphi + d\varphi)$; внешний слой состоит из точек пересечения Γ_{i_x} с винтовыми нитями радиуса r_0 этих лучей.

Рисунок дан с понижением размерности на единицу.

С этой целью продолжим радиус CA внутренней границы первого из указанных сферических слоев до пересечения с внешней границей слоя. Пусть B — точка пересечения (см. рис. 12.4). Так как CB — радиус внешней границы слоя, то $|CB| = r_A + dr_A$. Точка B является одновременно точкой пересечения с Γ_{i_x} оси некоторого луча, которая наклонена по отношению к \mathbf{i} на угол $i(\varphi + d\varphi)$. Можно показать, что у этого луча имеется винтовая нить радиуса r_0 , которая пересекает Γ_{i_x} в точке G , находящейся в плоскости треугольника CAx на расстоянии r_0 от B ; при этом $BG \perp CB$ (по причине, подобной той, по которой $Ax \perp CA$). Для такого луча

выполняются равенства, аналогичные (12.10) и (12.11):

$$\begin{aligned} r_A + dr_A &= (l_x - l) \operatorname{th}(\varphi + d\varphi); \\ r_A + dr_A &= \sqrt{(r + dr)^2 - r_0^2}. \end{aligned}$$

На основании этих равенств и выражений (12.10)–(12.12) находим, что имеют место следующие зависимости (в линейном по $d\varphi$ приближении):

$$dr_A \Big|_{r_{x-l}^0} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi; \quad (12.15)$$

$$dr \Big|_{r_{x-l}^0} = \frac{r^2 - r_0^2}{r \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi} d\varphi, \quad (12.16)$$

где справа от вертикальной черты указаны величины, считающиеся постоянными; учтено, что $r > r_0 > 0$ и $\varphi > 0$. Эти зависимости могут быть получены также из формул (12.10)–(12.12) путем вычисления дифференциалов dr_A и dr при постоянных r_0 и $l_x - l$. Из (12.16) и неравенств $r > r_0 > 0$, $\operatorname{sh} \varphi > \varphi$, $\operatorname{ch} \varphi > 1$ (при $\varphi > 0$) и $0 < d\varphi \ll \varphi$ вытекает, что $0 < dr \ll r$.

Теперь перейдем непосредственно к вычислению плотности нитей ε в окрестности точки x .

Рассмотрим сферический слой в Γ_x с центром в точке C , который имеет внутренний радиус r и толщину dr и о котором шла речь выше (см. рис. 12.4). Его объем есть $v = 4\pi r^2 dr$ (при $0 < dr \ll r$). Построим четырехмерный цилиндрический слой высоты dl_x , основанием которого служит этот (трехмерный) сферический слой ($dl_x > 0$). Объем V такого цилиндрического слоя равен

$$V = v dl_x = 4\pi r^2 dr dl_x. \quad (12.17)$$

Сечение данного цилиндрического слоя плоскостью, проходящей через точку x и ось симметрии частицы, показано заштрихованным прямоугольником на рис. 12.2. Нижнее основание слоя лежит в гиперплоскости Γ_x , верхнее основание — в гиперплоскости Γ_{x+dl_x} , параллельной Γ_x и отстоящей от Γ_x на dl_x .

Можно было бы задать этот цилиндрический слой таким образом, чтобы точка x находилась на его срединной линии (в центре заштрихованного на рис. 12.2 прямоугольника). Но мы поступили здесь аналогично тому, как в математическом анализе задается числовой промежуток при исследовании функций. Там при описании поведения функции в окрестности значения

a аргумента традиционно рассматривается промежуток изменения аргумента $[a, a + da]$, для которого число a служит левой границей, а не промежуток $[a - da/2, a + da/2]$, у которого число a — его середина. Аналогичным образом и мы задали цилиндрический слой так, чтобы точка x располагалась на его границе, а именно на внутреннем нижнем ребре, как показано на рис. 12.2.

Возьмем винтовую нить радиуса r_o , которая проходит через точку x , и найдем длину ее участка, содержащегося в построенном цилиндрическом слое.

Уравнение нити (2.3) при подстановке в него значения (5.5) вектора \mathbf{q}_o принимает вид

$$\mathbf{R} = r_o \left[\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2 \pm \frac{\psi}{\beta_o} (\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}) \right], \quad (12.18)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор элементов нити относительно центра частицы. Разложим радиус-вектор \mathbf{R} на составляющие \mathbf{R}_T и \mathbf{R}_Γ , направленные соответственно вдоль оси T и гиперплоскости Γ . Учитывая, что $T = \operatorname{Lin}\{\mathbf{i}\}$, $\Gamma = \operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ и что векторы \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{n} ортогональны вектору \mathbf{i} , имеем на основании (12.18):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_\Gamma;$$

$$\mathbf{R}_T = \pm \frac{r_o \psi}{\beta_o} \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}; \quad (12.19)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma = r_o \left[\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2 \pm \frac{\psi}{\beta_o} \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n} \right]. \quad (12.20)$$

Отметим, что в случае переориентированного луча уравнение нити имеет вид (5.9). Оно отличается от использованного выше уравнения (2.3) только знаком вектора \mathbf{e}_2 . Поэтому в случае переориентированного луча выражение для вектора \mathbf{R}_T совпадает с (12.19), а выражение для \mathbf{R}_Γ отличается от (12.20) лишь знаком при слагаемом, содержащем \mathbf{e}_2 . Из последующего будет видно, что такое изменение вектора \mathbf{R}_Γ не влияет на значение плотности нитей ε .

Рассматриваемая винтовая нить входит в цилиндрический слой в точке x , лежащей на его внутреннем нижнем ребре. Далее будет показано, что она может выходить из слоя только либо через его верхнее основание, либо через внешнюю боковую границу. Найдем длину участка нити, заключенного в слое, для обеих этих возможностей, и затем по минимальному значению длины определим, какая из указанных возможностей реализуется в действительности.

В дальнейшем будем считать, что в точках входа и выхода винтовая переменная принимает соответственно значения ψ и $\psi + d\psi$.

Случай 1. *Нить, входящая в цилиндрический слой в точке x , выходит из слоя через его верхнее основание* (мы как бы удаляем боковые границы слоя и рассматриваем всю четырехмерную область пространства M , заключенную между параллельными гиперплоскостями Γ_{l_x} и $\Gamma_{l_x+dl_x}$; см. рис. 12.2).

В этом случае точки входа и выхода имеют временные координаты l_x и l_x+dl_x соответственно, следовательно вектор \mathbf{R}_T принимает в данных точках значения

$$\mathbf{R}_T(\psi) = (l_x - l)\mathbf{i} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}_T(\psi + d\psi) = (l_x + dl_x - l)\mathbf{i}.$$

Отсюда и из (12.19) находим:

$$d\psi = \pm \frac{\beta_0}{r_0 \operatorname{ch} \varphi} dl_x = \pm \frac{\beta}{r_* \operatorname{ch} \varphi} dl_x, \quad (12.21)$$

где использовано равенство (2.8). Заметим, что из (12.21) и (6.11) вытекает, что $d\psi$ не зависит от r , r_0 и φ .

Случай 2. *Нить, входящая в цилиндрический слой в точке x , выходит из него через внешнюю боковую границу* (здесь мы как бы убираем верхнее и нижнее основания слоя и рассматриваем цилиндрический слой, неограниченно протяженный вдоль оси T).

В данном случае вектор \mathbf{R}_T удовлетворяет следующим условиям в точках входа и выхода нити:

$$|\mathbf{R}_T(\psi)| = r; \quad |\mathbf{R}_T(\psi + d\psi)| = r + dr.$$

С помощью этих равенств и выражения (12.20) можно получить (в линейном по $d\psi$ приближении):

$$d\psi = \frac{\beta_0^2 r}{r_0^2 \psi \operatorname{sh}^2 \varphi} dr = \pm \frac{\beta r}{r_* \operatorname{sh} \varphi \sqrt{r^2 - r_0^2}} dr, \quad (12.22)$$

где во втором равенстве использованы формула (2.8) и соотношение $\pm(r_0 \psi / \beta_0) \operatorname{sh} \varphi = \sqrt{r^2 - r_0^2}$, вытекающее из (12.12), (12.19) и из выписанной выше зависимости $\mathbf{R}_T(\psi) = (l_x - l)\mathbf{i}$.

Отметим, что двойные знаки в формулах (12.18)–(12.22) имеют тот же смысл, что и в уравнении нити (2.3), а именно верхний знак отвечает случаю, когда ориентации в $C_{\mathbf{q}_0}$ базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ и

винтовой нити совпадают, нижний знак — когда они не совпадают. В первом случае для элементов нити, находящихся в цилиндрическом слое, выполняются неравенства $\psi > 0$ и $d\psi > 0$, во втором случае — неравенства $\psi < 0$ и $d\psi < 0$, причем в обоих случаях $\pm\psi > 0$ и $\pm d\psi > 0$ (все эти неравенства являются следствием нахождения точки x в будущем относительно центра частицы, а также следствием условия $dl_x > 0$ и принятого в разд. 2 направления возрастания винтовой переменной ψ).

Два рассмотренных случая выхода нити из цилиндрического слоя — единственно возможные.

В самом деле, две оставшиеся возможности — выход нити из слоя через его нижнее основание и через внутреннюю боковую границу, очевидно, могут быть описаны теми же приведенными выше зависимостями при $dl_x = 0$ или $dr = 0$ соответственно. В обоих случаях, как вытекает из (12.21) и (12.22), выполняется равенство $d\psi = 0$. А так как точки нити индивидуализированы именно значениями винтовой переменной ψ , то последнее равенство означает, что нет других точек нити, помимо точки входа ее в слой, которые принадлежали бы указанным частям границы слоя. Таким образом, действительно нить, входящая в цилиндрический слой в точке x , может выходить из слоя только либо через его верхнее основание, либо через внешнюю боковую границу.

Длина λ участка нити, который заключен между элементами нити со значениями винтовой переменной ψ и $\psi + d\psi$, равна (при малом $d\psi$)

$$\lambda = \sqrt{|d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}|} = \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \right|} |d\psi| = \frac{r_*}{\beta} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|} |d\psi|, \quad (12.23)$$

здесь использованы выражение (2.3) (или (5.9) в случае переориентированного луча) и формулы (2.6) и (2.8).

На основании зависимостей (12.21)–(12.23) приходим к следующему результату, который выполняется как для непереориентированного, так и для переориентированного луча (потому что эти зависимости остаются в силе при перемене знака вектора \mathbf{e}_2 в выражении (12.20)).

В случае 1, когда нить выходит из цилиндрического слоя через его верхнее основание, длина содержащегося в слое участка нити

составляет

$$\lambda = \frac{\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}{\operatorname{ch} \varphi} dl_x. \quad (12.24)$$

В случае 2, когда нить выходит из цилиндрического слоя через его внешнюю боковую границу, длина находящегося в слое участка нити равна

$$\lambda = \frac{r\sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}{\operatorname{sh} \varphi \sqrt{r^2 - r_0^2}} dr. \quad (12.25)$$

В последующем нам потребуется устремить к нулю объем построенного цилиндрического слоя. Однако в связи с тем, что внутренний радиус слоя r фиксирован, устремление объема слоя к нулю может быть произведено только за счет устремления к нулю его поперечных размеров. При такой процедуре поперечные размеры слоя dl_x и dr должны рассматриваться как эквивалентные бесконечно малые величины. Примем поэтому, что $dl_x = dr$ (данное допущение корректно, так как высота слоя dl_x была ограничена ранее только условием $dl_x > 0$). При таком допущении из (12.24) и (12.25) находим, что в случае 1 длина участка нити меньше, чем в случае 2 (ибо $\operatorname{sh} \varphi < \operatorname{ch} \varphi$ и $\sqrt{r^2 - r_0^2} < r$). Это означает, что реализуется случай 1: нить выходит из цилиндрического слоя через его верхнее основание. Поэтому в дальнейшем будем использовать для описания длины рассматриваемого участка нити выражение (12.24).

Напомним, что мы анализируем лучи частицы, оси которых наклонены по отношению к вектору \mathbf{i} на углы от $i\varphi$ до $i(\varphi + d\varphi)$, где $0 < d\varphi \ll \varphi$. Подсчитаем количество таких лучей.

В начале построения модели мы приняли, что оси лучей частицы равномерно распределены по внутренности светового конуса с вершиной в центре частицы. Вследствие этого концы направляющих ортов \mathbf{q}_0 осей лучей равномерно распределены по единичной псевдосфере, описываемой уравнением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 1$, точнее, по той из двух ее пол, которая находится внутри светового конуса будущего (\mathbf{R} — радиус-вектор точек псевдосферы относительно центра частицы). Элемент dZ площади этой полу и сама ее площадь Z задаются выражениями (6.5) и (6.6) при $R = 1$:

$$dZ = \operatorname{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta; \quad Z = 4\pi \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi, \quad (12.26)$$

где φ, θ, η — угловые координаты точек псевдосферы; $\varphi \in (0, +\infty)$; $\theta \in [0, \pi]$; $\eta \in [0, 2\pi)$ (см. рис. 6.2). Угол $i\varphi$ отсчитывается от оси симметрии частицы; значение $\varphi = 0$ мы исключили из рассмотрения.

Общее число лучей, составляющих частицу, равно N . Благодаря равномерности распределения концов векторов \mathbf{q}_0 по рассматриваемой поле псевдосферы, на элемент ее площади dZ приходится $(N/Z)dZ$ концов векторов \mathbf{q}_0 . Подставляя в данное выражение величины Z и dZ из (12.26) и интегрируя его по всем углам θ и η , находим, что интересующее нас количество лучей, оси которых образуют с вектором \mathbf{i} углы от $i\varphi$ до $i(\varphi + d\varphi)$, равно

$$\frac{N}{\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi} \text{sh}^2 \varphi d\varphi. \quad (12.27)$$

Каждый из рассматриваемых лучей содержит N_{r_0} винтовых нитей с радиусами из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$. Вследствие $dr_0 \ll r_0$ можно положить в расчетах, что все эти нити имеют радиус r_0 и потому все они пересекают построенный цилиндрический слой. Примем, что участки этих нитей, находящиеся внутри слоя, имеют одинаковые длины, равные найденному выше значению λ (мы пренебрегаем здесь различием длин участков, связанным с тем, что нити входят в слой через разные точки его границы). Тогда на основании (12.24) и (12.27) заключаем, что суммарная длина L всех таких участков нитей составляет

$$L = \frac{NN_{r_0} \sqrt{|\beta_0^2 - 1|}}{\text{ch} \varphi \left(\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi \right)} \text{sh}^2 \varphi d\varphi dl_x. \quad (12.28)$$

Для нахождения плотности нитей ε в окрестности точки x нужно задать область, характеристики которой фигурируют в формуле (12.1). Возьмем в качестве этой области часть построенного цилиндрического слоя, которая заключена между двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии частицы и пересекающими слой вблизи точки x по разные стороны от нее. Процедура устремления объема области к нулю может быть произведена в таком случае путем устремления к нулю угла между этими плоскостями и устремления к нулю поперечных размеров слоя dl_x и dr . Отметим,

что при вычислении ε по формуле (12.1) не имеет значения, является цилиндрический слой открытым или замкнутым множеством, так как нити частицы не проходят по границе слоя, а пересекают ее. Не имеет значения также тот факт, что точка x принадлежит границе выбранной области, а не ее внутренности, как об этом говорится при введении понятия плотности нитей (причина такого выбора взаимного расположения точки x и цилиндрического слоя объяснена ранее).

Обратим внимание на следующее обстоятельство.

Рассматриваемый цилиндрический слой обладает той же осью симметрии, что и частица, поэтому распределение нитей внутри него является одинаковым вдоль всего слоя. Значит, если вырезать из слоя некоторую часть двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии, то суммарная длина участков нитей, содержащихся внутри этой части, окажется пропорциональной ее объему. Следовательно, в формуле (12.1) дробь, стоящая под знаком предела, не изменится, если заменить указанную ранее часть слоя любой другой большей или меньшей его частью. В том числе вместо указанной части слоя может быть взят вообще весь цилиндрический слой.

Учитывая сказанное, будем понимать под величинами L и V в формуле (12.1), характеристики, относящиеся ко всему рассматриваемому цилиндрическому слою. В таком случае не требуется вводить плоскости, рассекающие слой, а процедура устремления объема области к нулю сводится к устремлению к нулю только поперечных размеров слоя dl_x и dr (при неизменном внутреннем радиусе слоя r , так как r есть фиксированное расстояние между точкой x и осью симметрии частицы; напомним, что $dl_x = dr$). Итак, с помощью формул (12.1), (12.5), (12.16), (12.17) и (12.28) получаем искомую *плотность нитей* ε в окрестности точки x , находящейся в будущем относительно центрального сечения частицы:

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} dr_{\circ}, \quad (12.29)$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(x, r_{\circ}) = \frac{\chi_{r_{\circ}} N \tilde{N}_{r_{\circ}} \sqrt{|\beta_{\circ}^2 - 1|} \operatorname{sh}^3 \varphi}{4\pi r^3 \left[1 - \left(\frac{r_{\circ}}{r}\right)^2\right] \left(\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^{\Phi} \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi\right)}; \quad (12.30)$$

$$\chi_{r_0} = \begin{cases} 1 & \text{при } r_0 < r < \sqrt{(l_x - l)^2 + r_0^2} \\ & \text{(либо при } r > r_0 \text{ и } l \in (-\infty, l_x - \sqrt{r^2 - r_0^2})) \\ 0 & \text{при } r \leq r_0 \text{ или } r \geq \sqrt{(l_x - l)^2 + r_0^2} \\ & \text{(либо при } r \leq r_0 \text{ или } l \notin (-\infty, l_x - \sqrt{r^2 - r_0^2})) \end{cases}; \quad (12.31)$$

χ_{r_0} — характеристическая функция той части пространства Минковского M , которую заполняют винтовые нити радиуса r_0 (роль этой функции пояснена ниже); N — общее количество лучей, из которых состоит частица; $\tilde{N}_{r_0} dr_0 = N_{r_0}$ — общее количество винтовых нитей в каждом луче, имеющих радиусы из промежутка $[r_0, r_0 + dr_0]$, величина \tilde{N}_{r_0} определяется выражением (12.5) (в силу условия $dr_0 \ll r_0$ в расчетах было принято, что все такие нити имеют радиус r_0 ; \tilde{N}_{r_0} имеет размерность m^{-1} , так как N_{r_0} — безразмерная величина); β_0 — безразмерный положительный параметр, входящий в уравнение нити (2.3) и характеризующий шаг нити, β_0 задается первым из равенств (6.11); φ — угловая переменная, определяющая угол $i\varphi$ между осью симметрии частицы и осями тех лучей, винтовые нити которых радиуса r_0 проходят через точку x (φ может быть выражена с помощью (12.12) через параметры r и $l_x - l$, характеризующие взаимное расположение частицы и точки x); r — расстояние от точки x до оси симметрии частицы при рассматриваемом расположении частицы в пространстве M ; l_x и l — временные координаты точки x и центра частицы в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ ($l_x > l$; $T = Lin\{\mathbf{i}\}$ — ось времени; $\Gamma = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ — физическое пространство; \mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы).

При выводе формул (12.29)–(12.31) оказывается ненужным устремлять величины dr и dl_x к нулю, потому что в процессе вывода эти величины сокращаются. Тем не менее такой предельный переход неявно присутствует здесь, так как выражения (12.16), (12.17) и (12.23), использованные при выводе данных формул, получены в линейном приближении по $d\varphi$, dr и $d\psi$, что фактически означает справедливость этих выражений при $dr \rightarrow 0$ и $dl_x \rightarrow 0$ (с учетом (12.16) и (12.21)).

Функция χ_{r_0} введена для того, чтобы формулы (12.29) и (12.30) выполнялись при любом расположении точки x в будущем относительно центрального сечения частицы, а не только при нахождении

x в той части пространства M , которая занята винтовыми нитями радиуса r_0 . В записи условий, входящих в (12.31), учтены ограничения (12.13) и (12.14).

Подчеркнем, что приведенные выражения относятся к случаю, когда точка x находится в будущем относительно центрального сечения частицы (при этом имеет место неравенство $l_x > l$). Случай, когда точка x находится в прошлом относительно центрального сечения частицы, может быть проанализирован аналогичным образом. Мы не будем рассматривать этот случай, так как для дальнейшего он не имеет значения.

Выражения (12.29)–(12.31) выполняются независимо от того, испытали какие-либо лучи частицы переориентацию или нет. Это объясняется тем, что они не содержат вектор e_2 , знаком которого только и различаются уравнения нитей переориентированного и непереориентированного лучей.

Мы выделили в выражении для ε в явном виде дифференциал dr_0 для удобства интегрирования в последующем по параметру r_0 . Величину $\tilde{\varepsilon}$ будем называть, как и ε , *плотностью нитей*. Величины ε и $\tilde{\varepsilon}$ имеют размерности соответственно m^{-3} и m^{-4} .

В связи с тем, что радиус винтовых нитей r_0 принадлежит промежутку $[r_* - p_*, r_* + p_*]$, из (12.29)–(12.31) следует, что при $r \leq r_* - p_*$ будет $\chi_{r_0} = 0$, $\tilde{\varepsilon} = 0$ и $\varepsilon = 0$.

13. Собственное поле частицы

Собственное поле частицы F_s зададим способом, подобным тому, каким в статье [1] было введено собственное поле «точечной» частицы (см. разд. 1 настоящей работы).

Поставим в соответствие каждому элементу (точке) нити двухвалентный антисимметричный тензор (бивектор)

$$\mathbf{q} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}, \quad (13.1)$$

аналогичный бивектору (1.1) для случая «точечной» частицы; здесь \mathbf{q} — направляющий орт касательной к нити в данном ее элементе; \mathbf{j} — скорость данного элемента нити; \wedge — символ внешнего умножения векторов; тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между сомножителями.

Зафиксируем точку x пространства Минковского M , в которой будем вычислять собственное поле частицы F_s . Назовем ее *точкой наблюдения*. Теорема, которая будет доказана далее, утверждает, что если при некотором расположении частицы через точку x проходит винтовая нить радиуса r_0 какого-либо луча частицы, то имеются и другие лучи, винтовые нити радиуса r_0 которых тоже проходят через x . Оси всех таких лучей заполняют некоторую коническую поверхность с вершиной в центре частицы. Обозначим через ζ величину, задающую положение осей на конической поверхности (эта величина будет конкретизирована далее).

Понятно, что, благодаря движению частицы вдоль мировой линии L , через данную точку x могут проходить нити и от других расположений частицы (аналогично тому, как подобное имеет место в случае «точечной» частицы, показанной на рис. 1.1). В последующем мы ограничимся рассмотрением только таких расположений частицы, при которых через точку x проходят участки нитей, идущие в будущее по отношению к центральному сечению частицы. Это требуется для того, чтобы удовлетворить принципу причинности, согласно которому только прошлые состояния тел могут влиять на их будущие состояния, но не наоборот.

Будем обозначать символом L_x часть мировой линии частицы L , удовлетворяющую такому условию: при каждом расположении частицы с центром на L_x имеется по крайней мере одна винтовая нить радиуса r_0 , участок которой, находящийся в будущем по отношению к центральному сечению частицы, проходит через точку x ,

причем при расположениях частицы с центром вне L_x таких нитей нет (понятно, что L_x зависит от x и r_o). Критерием нахождения центра частицы на линии L_x , как следует из результатов разд. 12, является выполнение ограничения (12.13) (или (12.14)).

Собственное поле частицы F_s в точке x зададим как сумму бивекторов (13.1) для всех нитей частицы, проходящих через x ; причем сумму возьмем с весом, пропорциональным плотности нитей в окрестности x , и будем учитывать только расположения частицы с центром на L_x . В более строгой формулировке это означает следующее.

Определение. *Собственное поле частицы F_s в точке $x \in M$ есть тройной интеграл от бивектора (13.1) с весом, пропорциональным плотности нитей в окрестности x , взятый по всем расположениям частицы с центром на L_x , а также по всем значениям величины ζ и по всем значениям радиусов винтовых нитей r_o :*

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi} \int_{(r_o)} \int_{(L_x)} \int_{(\zeta)} \tilde{\varepsilon} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} d\zeta dl dr_o, \quad (13.2)$$

где a — скалярный коэффициент, значение которого будет приведено далее; $(2\pi)^{-1}$ — нормировочный множитель при интегрировании по ζ (определение величины ζ будет дано в пункте В настоящего раздела, $\zeta \in (-\pi, \pi]$); $\tilde{\varepsilon} dr_o = \varepsilon$ — плотность нитей в окрестности точки x (она задается выражениями (12.29)–(12.31), величину $\tilde{\varepsilon}$ мы условились именовать так же, как и ε , плотностью нитей); dl — дифференциал длины дуги мировой линии L ; векторы \mathbf{q} и \mathbf{j} относятся к элементам нитей, находящимся в точке x . Отметим, что F_s представляет собой двухвалентный антисимметричный тензор.

Далее в настоящем разделе мы сформулируем теорему, на которую ссылались выше, а затем рассчитаем поле $F_s(x)$ для двух вариантов движения частицы: для достаточно общего характера движения частицы при условии нахождения точки наблюдения вдали от центра частицы и для одного частного варианта движения частицы без ограничения местонахождения точки наблюдения.

Напомним, что под собственным физическим пространством частицы Γ_* мы понимаем трехмерную пространственноподобную гиперплоскость, ортогональную оси симметрии частицы и проходящую через центр частицы. Сечение частицы гиперплоскостью Γ_* мы называем центральным сечением частицы. Будем говорить, что

точка $x \in M$ находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* , если она принадлежит полупространству, которое примыкает к Γ_* со стороны будущего. Очевидно, что в этом случае ортогональная проекция точки x на ось симметрии частицы находится в будущем по отношению к центру частицы (хотя сама точка x может не быть в будущем относительно центра частицы, так как она может находиться вне светового конуса будущего с вершиной в центре частицы). В предыдущем разделе мы говорили об этой ситуации менее строго, как о нахождении точки x в будущем относительно центрального сечения частицы.

Зафиксируем какое-либо расположение частицы с центром на линии L_x . В соответствии с определением L_x в этом случае имеется винтовая нить радиуса r_0 , участок которой, идущий в будущее относительно центрального сечения частицы, проходит через x . Точка x находится при этом в будущем относительно Γ_* . Пусть \mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы при данном ее расположении. Воспользуемся, как и в разд. 12, системой отсчета $\{T, \Gamma\}$, где $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ — ось времени; $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ — координатное физическое пространство. Ось времени T неподвижна относительно пространства M и совпадает с осью симметрии частицы (при данном расположении частицы). Физическое пространство Γ движется относительно M вдоль оси времени T . Все расположения гиперплоскости Γ , отвечающие разным моментам координатного времени, параллельны между собой и ортогональны T .

Обозначим, как и ранее: l и l_x — временные координаты центра частицы и точки x в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ (l совпадает с соответствующим моментом собственного времени частицы); Γ_l и Γ_{l_x} — два положения гиперплоскости Γ , отвечающие моментам времени l и l_x , Γ_l проходит через центр частицы, Γ_{l_x} — через точку x (рис. 13.1). Из $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$ следует, что $\Gamma_l = \Gamma_*$. Центр частицы находится в точке $O = \Gamma_l \cap T$. Точка $C = \Gamma_{l_x} \cap T$ совпадает с ортогональной проекцией точки x на ось симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\} = T$. Точки O и C имеют временные координаты l и l_x соответственно. Поскольку $\Gamma_l = \Gamma_*$ и точка x находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* , то $l_x > l$. В дальнейшем будем считать выполненным сформулированное в разд. 12 допущение о континуальности множества осей лучей и множества нитей.

Теорема 13.1. *Если при некотором расположении частицы в пространстве M через точку $x \in M$, находящуюся в будущем от-*

имеют одинаковые составляющие вдоль оси симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$. Составляющие этих ортов вдоль гиперплоскости Γ_{l_x} , ортогональной к $Lin\{\mathbf{i}\}$ и проходящей через точку x , имеют началом точку C и располагаются в Γ_{l_x} вдоль всех образующих круговой конической поверхности с вершиной в C , осью Cx и углом полураствора ρ_0 , равным

$$\rho_0 = \arcsin \frac{r_0}{r} \quad \left(\rho_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (13.4)$$

Доказательство. Пусть частица и точка x расположены так, как указано в условии теоремы, то есть точка x находится в будущем относительно собственного физического пространства частицы Γ_* и имеется луч, у которого винтовая нить радиуса r_0 проходит через x . Пусть O — точка пространства M , в которой находится при этом центр частицы; A — точка пересечения оси данного луча с гиперплоскостью Γ_{l_x} , проходящей через точку x и ортогональной оси симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ (см. рис. 13.1).

Согласно теореме 12.1 сечение любого луча гиперплоскостью, ортогональной оси симметрии частицы, является поперечным сечением луча. Следовательно отрезок Ax , лежащий в сечении луча гиперплоскостью Γ_{l_x} , ортогонален оси луча OA , и поэтому его длина равна радиусу r_0 винтовой нити, проходящей через x , то есть $Ax \perp OA$ и $|Ax| = r_0$. Кроме того, $Ax \perp OC$ (ибо $Ax \subset \Gamma_{l_x}$, $OC \subset T$ и $\Gamma_{l_x} \perp T$). Из $Ax \perp OA$ и $Ax \perp OC$ вытекает $Ax \perp CA$. Отсюда заключаем, что треугольник CAx , лежащий в Γ_{l_x} , — прямоугольный. А так как в нем $|Ax| = r_0$, то на основании теоремы Пифагора получаем:

$$r_A = \sqrt{r^2 - r_0^2},$$

здесь $r_A = |CA|$; $r = |Cx|$ (это есть повторение формулы (12.11)).

Поскольку данный результат относится к любому лучу, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через точку x , то для каждого такого луча треугольник с вершинами в точках C , x и в точке пересечения оси луча с Γ_{l_x} обладает теми же свойствами. А именно, он является прямоугольным, имеет гипотенузу Cx длины r и катеты с длинами r_0 и r_A . Из этого следует, что все такие треугольники равны. А благодаря тому, что эти треугольники имеют общую гипотенузу Cx , все их третьи вершины лежат на окружности, которую «заметет» вершина A треугольника CAx , если его

вращать вокруг гипотенузы Cx (без выхода из Γ_{l_x}). Покажем, что каждая точка этой окружности является точкой пересечения с Γ_{l_x} оси луча, винтовая нить которого радиуса r_0 проходит через x .

Рассмотрим для каждой точки P данной окружности треугольник OSP (одним из них является треугольник OCA на рис. 13.1). Все эти треугольники имеют общую сторону OC , и для всех них выполняется, во-первых, $CP \perp OC$ (так как $CP \subset \Gamma_{l_x}$, $OC \subset T$ и $\Gamma_{l_x} \perp T$) и, во-вторых, $|CP| = |CA|$ (потому что окружность получена вращением треугольника CAx вокруг его стороны Cx). Отсюда вытекает, что все треугольники OSP одинаковы. А так как один из них — треугольник OCA — имеет времениподобную сторону OA (потому что она лежит на оси луча), то, следовательно, и в каждом треугольнике OSP соответствующая сторона OP является времениподобной. В силу допущения о непрерывности множества осей лучей из этого заключаем, что для любой точки P прямая, направленная вдоль стороны OP треугольника OSP , представляет собой ось некоторого луча, причем эта ось пересекает гиперплоскость Γ_{l_x} в точке P . Для всех таких лучей выполняется $|Px| = |Ax| = r_0$ (по построению окружности) и $Px \perp OP$ (по следствию к теореме 12.1, так как $Px \subset \Gamma_{l_x}$). Это означает, что для каждого такого луча точка x лежит на цилиндрической поверхности радиуса r_0 , ось которой совпадает с осью луча. Отсюда и из допущения о непрерывности множества нитей вытекает, что у каждого такого луча найдется нить радиуса r_0 , которая проходит через точку x .

Итак, мы доказали следующее. Если имеется один луч, нить которого радиуса r_0 проходит через точку x , то имеются и другие такие же лучи. Оси всех этих лучей пересекают гиперплоскость Γ_{l_x} в точках упомянутой выше окружности, причем через каждую точку окружности проходит ось какого-то из таких лучей.

На основании данного результата заключаем, что оси указанных лучей образуют в совокупности, как и утверждается в теореме, коническую поверхность с вершиной в центре частицы (ибо все они пересекаются в центре частицы). При этом каждая из осей направлена вдоль стороны OP соответствующего треугольника OSP , а ось симметрии частицы $Lin\{i\}$ направлена вдоль общей стороны OC этих треугольников. Выше было доказано, что все треугольники OSP одинаковы. Поэтому их углы при вершине O равны. Следовательно, все рассматриваемые оси наклонены по отношению к оси симметрии частицы на один и тот же угол $i\varphi$. Из свойств треугольника OCA , являющегося одним из треугольников OSP , вытекает

(благодаря $CA \perp OC$), что $\operatorname{th} \varphi = |CA|/|OC| = r_A/(l_x - l)$. Отсюда с учетом найденного выше равенства $r_A = \sqrt{r^2 - r_o^2}$ получаем требуемую зависимость (13.3) (здесь $r > r_o > 0$, поскольку r и r_o — длины соответственно гипотенузы Cx и катета Ax треугольника CAx ; $l_x > l$, так как по условию теоремы точка x находится в будущем относительно Γ_* ; из $r > r_o$, $l_x > l$ и (13.3) следует $\varphi > 0$; формула (13.3) эквивалентна формуле (12.12)).

В связи с тем, что оси всех рассматриваемых лучей наклонены по отношению к оси симметрии частицы на один и тот же угол, направляющие орты \mathbf{q}_o этих осей имеют одинаковые составляющие вдоль оси симметрии. Составляющие же ортов \mathbf{q}_o вдоль гиперплоскости Γ_x лежат на сторонах CP треугольников OCP (потому что $\mathbf{q}_o \in OP$ и CP есть ортогональная проекция отрезка OP на Γ_x). Добавим к этому, что все орты \mathbf{q}_o имеют начало в центре частицы, что точка P «пробегает» всю упомянутую выше окружность и что плоскость залегания этой окружности ортогональна прямой Cx (так как окружность образована вращением вершины A треугольника CAx вокруг его стороны Cx). Отсюда заключаем, что составляющие векторов \mathbf{q}_o вдоль гиперплоскости Γ_x имеют начало в точке C и располагаются в Γ_x вдоль всех образующих круговой конической поверхности с вершиной в точке C и осью Cx . Образующими этой конической поверхности служат отрезки CP , а направляющей — упомянутая окружность. Из свойств треугольников CPx , одинаковых для всех P и равных треугольнику CAx , следует, что угол полураствора ρ_o данной конической поверхности совпадает с углом ACx . А так как треугольник CAx — прямоугольный и в нем $|Ax| = r_o$ и $|Cx| = r$, то угол ACx и вместе с ним угол ρ_o равны $\arcsin(r_o/r)$. Значит выполняется зависимость (13.4). Из $r > r_o > 0$ вытекает, что $\rho_o \in (0, \frac{\pi}{2})$. Этим доказательство теоремы завершается. ■

А. Собственное поле частицы вдали от ее центра

Определение. Будем говорить, что точка $x \in M$ находится вдали от центра частицы, если $L_x \neq \emptyset$ и при всех расположениях частицы с центром на L_x расстояние r от точки x до оси симметрии частицы существенно превышает радиус частицы r_* ($r \gg r_*$).

Данное определение оправдано тем, что в случае прямолинейной мировой линии, совпадающей с осью симметрии частицы, r есть расстояние между x и центром частицы при расположении частицы в M , одномоментном с x .

Найдем значение собственного поля частицы F_s в точках пространства M , находящихся вдали от центра частицы (для краткости будем говорить просто о поле F_s вдали от центра частицы). Мы намереваемся сопоставить это поле с электромагнитным полем заряда, измеряемым в макроскопических опытах. В таких опытах, как известно, определяются средние значения поля по некоторым малым областям пространства. Однако эти области, хотя и малы, но имеют размеры, которые заведомо превосходят размер электрона. Принимая во внимание данный факт, а также то, что наша частица служит моделью электрона, заменим в формуле (13.2) локальное значение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ в точке x на его среднее значение по поперечному сечению луча, содержащему x (это приведет к существенному упрощению выражения для F_s). Таким образом, ниже под собственным полем частицы *вдали от ее центра* понимается тензор

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi} \int_{(r_0)} \int_{(L_x)} \int_{(S)} \tilde{\varepsilon} \frac{1}{n_* N_*} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle_x d\zeta dl dr_0, \quad (13.5)$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор интегрирования по поперечному сечению луча, введенный в разд. 6; согласно (6.2) и (6.4) $\langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle / (n_* N_*)$ есть среднее значение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ по поперечному сечению луча; индекс x при символе $\langle \dots \rangle$ означает, что интегрирование проводится по сечению луча, содержащему точку x ; n_* — количество спиралей, из которых состоит луч частицы; N_* — количество нитей в каждой спирали луча; остальные обозначения те же, что в (13.2).

В разд. 4 было показано, что $p_* \ll r_*$. Отсюда и из $r_* \ll r$, $r_0 \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ следует, что радиусы r_0 винтовых нитей частицы удовлетворяют зависимостям $r_0 \approx r_*$ и $r_0 \ll r$. Учитывая данные соотношения между r_0 , r , r_* и p_* , далее будем пренебрегать величинами порядка r_0/r и p_*/r_* в сравнении с единицей и будем заменять r_0 на r_* ; кроме того, в силу (2.8) будем заменять β_0 на β .

Среднее значение бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ по произвольному поперечному сечению луча S может быть найдено с помощью следующей цепочки равенств:

$$\frac{1}{n_* N_*} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{n_* N_*} \int_{(S)} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \sigma dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n_* N_*} \sum_{\xi=0}^{n_*-1} \int_{(S_\xi)} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \sigma dS = \frac{1}{n_* N_*} \int_{(S_0)} \left(\sum_{\xi=0}^{n_*-1} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \right) \sigma dS = \\
&= \frac{\beta}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left(\frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i}_L \pm \frac{r_* \psi}{\beta^2} \mathbf{q}_0 \wedge \frac{d\mathbf{q}_0}{dl} \mp \frac{r_*}{2} \frac{d}{dl} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right).
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Здесь первое равенство основано на определении (6.4) оператора (...). Во втором равенстве использовано представление сечения S в виде объединения непересекающихся сечений S_ξ отдельных спиралей, образующих луч (ξ — номер спирали, $\xi = 0, 1, 2, \dots, n_* - 1$). В третьем равенстве каждый из суммируемых интегралов сведен к интегралу по сечению S_0 спирали № 0, при этом учтено, что все сечения S_ξ представляют собой одинаковые круги и что плотность σ точек пересечения нитей с S одинакова вдоль всех сечений S_ξ . В четвертом равенстве применены: формулы (2.10) и (7.3) для векторов \mathbf{q} и \mathbf{j} , выражение (2.6) для угла ν , формулы (4.3) и (10.18) для сумм синусов, косинусов, их квадратов и произведений, формула (6.2) для плотности σ . Кроме того, в последнем равенстве учтен тот факт, что никакие величины, помимо угла ν , не зависят от ξ , а также произведена замена величин r_0 и β_0 на r_* и β (вследствие этой замены, данное равенство является приближенным). Отметим, что в случае переориентированного луча следует использовать для векторов \mathbf{q} и \mathbf{j} формулы (5.10) и (7.4) вместо формул (2.10) и (7.3); в этом случае в правой части цепочки равенств (13.6) изменится только знак последнего слагаемого, а именно вместо двойного знака \mp будет стоять знак \pm (потому что формулы (5.10) и (7.4) отличаются от (2.10) и (7.3) лишь знаком вектора \mathbf{e}_2).

Покажем, что можно пренебречь последним слагаемым в правой части выражения (13.6). При этом ограничимся рассмотрением ситуации, когда в каждый момент времени касательный орт \mathbf{i}_L к мировой линии L совпадает с направляющим ортом оси симметрии частицы \mathbf{i} : $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$. Это означает, что движение частицы в пространстве M происходит всегда в направлении ее оси симметрии.

Учитывая гладкость линии L , будем считать, что движение частицы описывается дифференцируемыми функциями натурального параметра l на линии L . Тогда можем записать для бивектора

$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ формулу Тейлора:

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(l + \frac{r_*}{2}) = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(l) + \frac{r_*}{2} \frac{d(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)}{dl}(l) + o(\frac{r_*}{2}).$$

Отсюда вытекает, что интересующее нас слагаемое в (13.6) — тензор $(r_*/2)d(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)/dl$ — приблизительно равняется *приращению бивектора* $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ за время $r_*/(2c)$ (ибо $l = ct_*$, где c — скорость света; l и t_* — собственное время частицы, l имеет размерность длины, t_* — размерность времени). Опыты по измерению электромагнитных полей движущихся зарядов обычно проводятся в условиях, при которых за время, равное (размер электрона)/ c , заряды не успевают заметно изменить свои скорости. В связи с этим в рамках нашей модели при описании таких опытов можно считать, что любой участок мировой линии L длины $r_*/2$ близок к прямолинейному и поэтому бивектор $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ пренебрежимо мало изменяется за время $r_*/(2c)$. Следовательно, можно считать верным неравенство

$$\left\| \frac{r_*}{2} \frac{d}{dl}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right\| \ll \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|.$$

Здесь $\| \cdot \|$ — норма тензора, определяемая для произвольного двухвалентного тензора X следующим образом:

$$\|X\| = \sqrt{|X \cdot X^T|},$$

где двоеточие — знак бискалярного умножения тензоров (порядок выполнения бискалярного умножения указан в пояснениях к формулам (4.8) и (9.9)); T — символ транспонирования тензора. В соответствии с данным определением $\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\| = \sqrt{2}$ (где вектор \mathbf{n} задается равенством (5.3), причем $\{\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ — ортонормированный базис в M , см. разд. 5).

Возьмем теперь первое слагаемое в правой части выражения (13.6) и произведем с ним следующие преобразования:

$$\frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i}_L = \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i} = \frac{1}{\text{ch } \varphi} (\text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \mathbf{n}) \wedge \mathbf{i} = \text{th } \varphi \mathbf{n} \wedge \mathbf{i},$$

здесь использованы равенство $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$ и зависимости (5.5), (6.11) (при этом в (6.11) опущена величина p_*/r_* , что дает $\beta = \text{ch } \varphi$). Отсюда находим: $\|(1/\beta)\mathbf{q}_0 \wedge \mathbf{i}_L\| = \text{th } \varphi \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\|$ (с учетом $\varphi > 0$). Основной вклад в поле F_s , как будет показано далее, вносят лучи, характеризующиеся большими значениями φ . Поскольку $\text{th } \varphi \approx 1$ при больших φ , то для таких лучей выполняется соотношение

$\|(1/\beta)\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{i}_L\| \approx \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\|$. На основании данного соотношения, а также равенства $\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}\|$ и выписанного выше неравенства получаем:

$$\left\| \frac{r_*}{2} \frac{d}{dl} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \right\| \ll \left\| \frac{1}{\beta} \mathbf{q}_o \wedge \mathbf{i}_L \right\|.$$

Это означает, что последнее слагаемое в правой части (13.6) по норме существенно меньше первого, поэтому действительно им можно пренебречь.

Опуская в (13.6) последнее слагаемое и учитывая формулу (7.5) для скорости оси луча \mathbf{j}_o , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_* N_*} \langle \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \left(\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{i}_L \pm \frac{r_* \psi}{\beta} \mathbf{q}_o \wedge \frac{d\mathbf{q}_o}{dl} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\beta^2 - 1|}} \mathbf{q}_o \wedge \mathbf{j}_o. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Данное выражение выполняется как для непереориентированного, так и для переориентированного луча, потому что в (13.6) от переориентации луча зависит только знак исключенного нами слагаемого.

На основании формул (13.5) и (13.7) находим, что

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi} \int_{(r_o)} \int_{(L_x)} \int_{(\zeta)} \frac{N \tilde{N}_{r_o} \text{sh}^3 \varphi}{4\pi r^3 \left(\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi \right)} (\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{j}_o)_x d\zeta dl dr_o, \quad (13.8)$$

здесь использовано выражение (12.30) для плотности нитей $\tilde{\varepsilon}$, причем в нем произведены следующие изменения: параметр β_o заменен на β , исключена величина $(r_o/r)^2$ как пренебрежимо малая по сравнению с единицей и учтено, что в соответствии с (12.31) $\chi_{r_o} = 1$ (так как при нахождении центра частицы на L_x выполняется ограничение (12.13)); индекс x при бивекторе $\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{j}_o$ означает, что бивектор берется в точке оси луча, которая находится в том же поперечном сечении луча, что и точка x (для оси луча, изображенной на рис. 13.1, это точка A).

В макроскопических опытах, как мы отмечали, измеряемые значения электромагнитного поля являются усредненными по областям пространства, размеры которых заведомо превосходят размер электрона. Поэтому в таких опытах местонахождение точки наблюдения может быть фиксировано лишь с погрешностью, не меньшей

размера электрона. Поскольку мы намереваемся сравнить вычисляемое нами поле F_s именно с экспериментально наблюдаемым полем, то наличие указанной погрешности позволяет при расчете поля F_s задавать пространственную локализацию элементов частицы с точностью до расстояний порядка радиуса частицы r_* .

В выражении (13.8) бивектор $\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{j}_o$ относится к элементу оси луча, который находится на расстоянии $r_o \approx r_*$ от точки наблюдения x . В связи со сказанным выше можно полагать, что данный элемент находится в самой точке x . Это означает, что оси всех учитываемых в (13.8) лучей могут считаться проходящими через x . При таком допущении подынтегральная функция в (13.8) не зависит от ζ . (Переменная ζ задает положение осей лучей на конической поверхности, проходящей вблизи x ; последняя имеет угол полураствора ρ_o , задаваемый выражением (13.4); благодаря $r_o \ll r$, этот угол может считаться равным нулю, поэтому при принятой точности измерений коническая поверхность не отличима от прямой, проходящей через x .)

Учитывая независимость подынтегральной функции от переменной ζ , вынесем эту функцию за знак интеграла по ζ . Поскольку $\zeta \in (-\pi, \pi]$, то оставшийся интеграл $\int d\zeta$ при умножении его на нормировочный множитель $(2\pi)^{-1}$ даст единицу.

В рамках рассматриваемого приближения мы пренебрегаем различиями радиусов r_o винтовых нитей, полагая все их равными радиусу частицы r_* . Вследствие этого можно считать, что в (13.8) линия L_x и все функции, за исключением \tilde{N}_{r_o} , не зависят от r_o (относительно \tilde{N}_{r_o} так считать нельзя, потому что \tilde{N}_{r_o} изменяется для разных r_o от нуля до некоторого максимального значения, см. (12.3) и (12.5)). Учитывая это, поменяем порядок интегрирования по r_o и по L_x и затем вынесем из-под знака интеграла по r_o все величины, кроме \tilde{N}_{r_o} . Оставшийся интеграл $\int \tilde{N}_{r_o} dr_o$, согласно (12.6), даст общее количество нитей луча, равное $n_* N_*$.

Формула (12.11) при пренебрежении величиной $(r_o/r)^2$ в сравнении с единицей приводит к равенству $r_A = r$. Отсюда и из (12.9), (12.10) находим:

$$Q = |OA| = \frac{r}{\text{sh } \varphi};$$

справедливость данного выражения может быть установлена также из рассмотрения треугольника OCA на рис. 13.1 (с учетом равенства $r_A = r$). Здесь Q есть расстояние от центра частицы до эле-

мента оси луча, к которому относится входящий в (13.8) бивектор $\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{j}_o$. В рамках используемого приближения, когда этот элемент считается находящимся в точке x , величина Q есть расстояние от центра частицы до x . Согласно формуле (6.6) пола псевдосферы радиуса Q с центром в центре частицы имеет площадь

$$Z(Q) = 4\pi Q^3 \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi.$$

Произведя указанные преобразования выражения (13.8) и воспользовавшись приведенными значениями величин Q и Z , получаем окончательно:

$$F_s(x) = a_* \int_{(L_x)} \frac{(\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{j}_o)_x}{Z(Q)} dl, \quad (13.9)$$

где $a_* = aNn_*N_*$ (Nn_*N_* — общее число нитей, составляющих частицу). В этом выражении величина a_* выполняет роль подгочного скалярного параметра. Отметим, что найденное значение поля F_s не зависит от переориентации лучей частицы. Это и понятно, потому что оно фактически определяется характеристиками остова частицы, который, как вытекает из содержания разд. 5, не зависит от переориентации лучей.

При используемом допущении о пренебрежимой малости величины r_o/r по сравнению с единицей равенство (13.3) приводит к следующему условию, ограничивающему возможность взаимного расположения частицы и точки x : $0 \leq r < l_x - l$ (так как $l_x > l$ и $0 \leq \text{th} \varphi < 1$ при $\varphi \geq 0$). Данное условие выполняется в том и только том случае, когда центр частицы находится внутри светового конуса прошлого точки x (ибо в этом и только в этом случае прямая Ox является времениподобной, см. рис. 13.1). Отсюда заключаем, что под L_x в (13.9) можно понимать ту часть мировой линии L частицы, которая содержится внутри светового конуса прошлого точки x . При такой трактовке линии L_x выражение (13.9) совпадает, с точностью до обозначений, с полученным в работе [1] выражением для собственного поля «точечной» частицы. Из результатов работы [1] вытекает следующее. Если движение частицы вдоль мировой линии L не сопровождается пространственным вращением

частицы, то при

$$a_* = aNn_*N_* = 4\pi e \quad (\text{в системе СГС}) \quad \text{или} \quad a_* = e/\epsilon_0 \quad (\text{в СИ}) \quad (13.10)$$

выражение (13.9), после проведения интегрирования, приводит к обычному (максвелловскому) тензору электромагнитного поля для произвольно движущегося точечного тела с электрическим зарядом e (здесь ϵ_0 — электрическая постоянная). При этом, согласно [1], основной вклад в поле F_s вносят лучи, характеризующиеся большими значениями угловой переменной φ .

Таким образом, рассматриваемая частица конечного радиуса порождает вдали от своего центра поле такое же, какое порождает «точечная» частица, и это поле совпадает с электромагнитным полем точечного заряда, рассчитываемым в классической электродинамике и измеряемым экспериментально.

Подчеркнем, что данный результат получен при использовании ряда допущений. Наиболее важными являются допущение о том, что движение частицы в пространстве M происходит вдоль ее оси симметрии ($\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$), и допущение об отсутствии пространственного вращения частицы. Кроме того, этот результат относится к случаю, когда пространственная локализация элементов частицы задана лишь с точностью до расстояний порядка радиуса частицы r_* .

В дальнейшем будем полагать, что параметр a_* принимает значение (13.10) при любых движениях частицы. Из (13.10) вытекает, что заряд частицы e пропорционален числу ее лучей N , а также общему количеству нитей Nn_*N_* .

Согласно (13.10), параметр a , входящий в исходное выражение (13.2) для собственного поля частицы F_s , имеет вид

$$a = \frac{a_*}{Nn_*N_*} = \frac{4\pi e}{Nn_*N_*} \quad (\text{в системе СГС}).$$

Отметим, что если наша частица воздействует своим полем F_s на другую такую же частицу, то для описания движения этой второй частицы нужно подставить тензор F_s на место тензора F в законы движения (9.2), (9.3) (или в более общие законы, введенные в разд. 8). Тогда правые части этих законов будут содержать произведение параметров a_1 и a_* . В соответствии с (9.6) и (13.10) имеем

$$a_1 a_* = 4\pi \frac{e^2}{m_e c^2} = 4\pi r_e,$$

здесь $r_e = e^2/(m_e c^2)$ — известная в атомной физике константа, называемая классическим радиусом электрона (название условное, величина r_e не отождествляется в физике с действительным размером электрона).

Б. Собственное поле вращающейся частицы

Проведенный анализ собственного поля F_s вдали от центра частицы продемонстрировал согласованность модели с положениями классической электродинамики. Причем эта согласованность реализуется, по крайней мере, при отсутствии пространственного вращения частицы. Теперь рассчитаем поле F_s для случая, когда такое вращение имеет место, а именно, когда движение частицы вдоль мировой линии L сопровождается ее вращением вокруг L .

Для упрощения последующих расчетов ограничимся анализом ситуации, когда мировая линия частицы прямолинейна и совпадает с осью симметрии частицы. Это означает выполнение условия

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{i} = \text{const}, \quad (13.11)$$

где \mathbf{i}_L, \mathbf{i} — направляющие орты соответственно мировой линии L и оси симметрии частицы $\text{Lin}\{\mathbf{i}\}$. В дальнейшем мы учтем как возможность вращения частицы вокруг прямой L , так и возможность переориентации лучей частицы.

Воспользуемся введенной ранее системой отсчета $\{T, \Gamma\}$ с осью времени $T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и координатным физическим пространством $\Gamma = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$. Поскольку теперь мы рассматриваем случай $L = \Gamma = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$, то $T = L$. Отсюда следует, что собственное время частицы и координатное время могут различаться лишь на постоянную величину. А так как при введении системы отсчета $\{T, \Gamma\}$ было принято, что некоторый момент координатного времени совпадает с одним из моментов собственного времени частицы, то, значит, в данном случае координатное время и собственное время частицы просто тождественны.

В дальнейшем будем полагать, как и прежде, что точка наблюдения x , ее временная координата l_x и гиперплоскость Γ_{l_x} , содержащая x , фиксированы (см. рис. 13.1). Под l будем понимать текущее значение временной координаты частицы при ее движении вдоль прямолинейной мировой линии L . Вместе с центром частицы движется проходящая через него гиперплоскость Γ_l , совпадающая с собственным физическим пространством частицы Γ_* .

Напомним, что в четырехмерном пространстве вращение тела может осуществляться вокруг точки, прямой или плоскости.

Вращение частицы вокруг мировой линии L опишем как вращение вокруг плоскости, содержащей L .

Будем полагать, что частица, двигаясь вдоль мировой линии L , одновременно вращается как целое вокруг фиксированной плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$, где \mathbf{a} — некоторый постоянный мнимоединичный вектор, ортогональный \mathbf{i} и имеющий начало в центре частицы:

$$\mathbf{a} = \text{const}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (13.12)$$

В связи с тем, что $L = Lin\{\mathbf{i}\} \subset Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ и плоскость $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ фиксирована, это движение частицы действительно является вращением вокруг мировой линии L . А так как $\mathbf{a} \in \Gamma_l$, то внутри физического пространства Γ_l такое движение частицы воспринимается как вращение вокруг оси, проходящей через центр частицы и направленной вдоль вектора \mathbf{a} . Эту ось будем называть *осью вращения* частицы. Вектор \mathbf{a} — ее направляющий орт. *Угловая скорость* такого вращения частицы может быть представлена в виде псевдовектора

$$\bar{\omega} = \Delta \omega \mathbf{a},$$

где Δ — единичный псевдоскаляр в Γ_l ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах, и $\Delta = -1$ в левоориентированных базисах); ω — скалярная величина, тоже называемая угловой скоростью вращения частицы. Далее будем считать, что $\omega = \text{const}$.

Собственное поле частицы F_s , согласно (13.2), зависит от значения векторов \mathbf{q} и \mathbf{j} в точке x . До сих пор мы выражали векторные характеристики частицы, в том числе \mathbf{q} и \mathbf{j} , через орты базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$, который является своим для каждого луча частицы. Для вычисления поля F_s нужно привести все векторы к одному базису. Построим такой базис.

Допустим, что рассматриваемая система отсчета $\{T, \Gamma\}$ — *инерциальная*. Это означает, что все положения координатного физического пространства $\Gamma = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$ не просто параллельны между собой, но являются результатом *поступательного* перемещения Γ вдоль оси времени T . Из параллельности всех положений физического пространства следует, что векторное пространство, ассоциированное с Γ , представляет собой при любом положении Γ одно и то же подпространство векторного пространства, ассоциированного с M . Поэтому все векторы, заданные в Γ при каком-то одном

его положении, фактически принадлежат и любому другому его положению (в частности, $\mathbf{a} \in \Gamma_l$ и $\mathbf{a} \in \Gamma_{l_x}$). Благодаря поступательности движения физического пространства Γ вдоль T , устанавливается такое соответствие между векторами, относящимися к разным положениям Γ , которое может быть получено путем ортогонального проецирования векторов из одного какого-либо положения Γ на все другие его положения. В дальнейшем, пользуясь этим свойством физического пространства, мы будем неоднократно переносить векторы из одного положения Γ в другое (не всегда при этом напоминая о данном свойстве).

Обозначим: $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$, где $C = \Gamma_{l_x} \cap T$ ($\mathbf{r} \in \Gamma_{l_x}$). В соответствии с обозначениями, принятыми ранее, $|\mathbf{r}| = r$. Будем считать, как и прежде, что $r > r_0 > 0$ (см. (12.8)).

Угол γ между векторами \mathbf{r} и \mathbf{a} равен

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r}\right), \quad (13.13)$$

здесь знак минус обусловлен отрицательной определенностью метрической формы в Γ ; учтено, что $\mathbf{a} \in \Gamma_{l_x}$, $|\mathbf{a}| = 1$ согласно (13.12). Исключим из рассмотрения случай $\mathbf{r} \parallel \mathbf{a}$ (без ущерба для дальнейшего). Тогда $\gamma \in (0, \pi)$.

Зададим в гиперплоскости Γ_{l_x} , проходящей через точку x , ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ с началом в точке C и ортами

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \mathbf{a}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}, \quad (13.14)$$

где \mathbf{a} — направляющий орт оси вращения частицы ($\mathbf{a} \in \Gamma_{l_x}$); \times — знак векторного умножения в Γ_{l_x} ($\sin \gamma \neq 0$, так как $\gamma \in (0, \pi)$). Легко убедиться в том, что $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \subset \Gamma_{l_x}$, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ при $i \neq j$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$. Поэтому $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — действительно ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} (рис. 13.2). Отметим, что благодаря постоянству величин \mathbf{a} , r и γ , векторы \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) не зависят от движения частицы.

Из (13.14) вытекает, что

$$\mathbf{r} = r(\sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3). \quad (13.15)$$

Векторы \mathbf{a}_i специально были выбраны такими, чтобы выполнялось равенство (13.15).

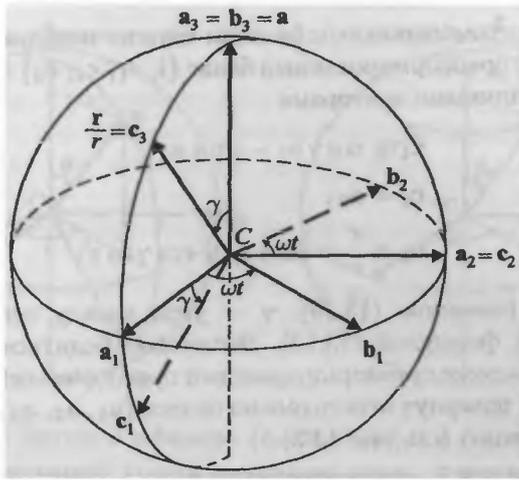


Рис. 13.2. Ортонормированные базисы $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ и $\{c_1, c_2, c_3\}$ в физическом пространстве Γ_{l_x} .

Введем в пространстве M неподвижный ортонормированный базис $\{i, a_1, a_2, a_3\}$ с началом в точке C (i — направляющий орт оси симметрии частицы; a_i — векторы, определяемые равенствами (13.14)). Назовем этот базис *абсолютным*. Именно через его орты будем выражать все векторные и тензорные величины.

Нам потребуются еще два вспомогательных базиса.

Один из них — ортонормированный базис $\{i, b_1, b_2, b_3\}$ с началом в точке C , вращающийся, как и частица, с угловой скоростью ω вокруг плоскости $Lin\{i, a\}$. Его мнимоединичные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} b_1 &= \cos(\omega t) a_1 + \sin(\omega t) a_2; \\ b_2 &= -\sin(\omega t) a_1 + \cos(\omega t) a_2; \\ b_3 &= a_3 = a, \end{aligned} \quad (13.16)$$

где $t = l/c$ — временная координата центра частицы (она совпадает в силу $T = L$ с собственным временем частицы t_* ; c — скорость света). Здесь в качестве аргумента при синусе и косинусе взято произведение ωt , а не ωl , чтобы величина ω имела обычную размерность угловой скорости. Очевидно, что $\{b_1, b_2, b_3\}$ — ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} (см. рис. 13.2).

Другим вспомогательным базисом служит неподвижный (относительно M) ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ с началом в C и мнимоединичными векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \cos \gamma \mathbf{a}_1 - \sin \gamma \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{a}_2; \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad (13.17)$$

где учтено равенство (13.15); γ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{a} , заданный формулой (13.13). Нетрудно убедиться в том, что $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ — тоже ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} . Он повернут относительно базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ вокруг вектора \mathbf{a}_2 на угол γ (см. рис. 13.2).

Величины \mathbf{q} и \mathbf{j} , определяющие поле F_s , могут быть выражены с помощью формул (2.10), (5.5) и (7.3) через векторы $\mathbf{i}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$. Разложим эти векторы по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Поскольку вектор \mathbf{i} является одним из элементов данного базиса и он ортогонален векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{n} , то фактически нужно разложить векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{n} по базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Напомним, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{n} , вообще говоря, различны для разных лучей частицы.

Формула (5.5) устанавливает, что

$$\mathbf{q}_0 = \operatorname{ch} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}, \quad (13.18)$$

где $\operatorname{ch} \varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$; векторы \mathbf{q}_0, \mathbf{i} и \mathbf{n} имеют началом центр частицы. Отсюда вытекает, что $\operatorname{ch} \varphi \mathbf{i}$ и $\operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}$ — составляющие вектора \mathbf{q}_0 соответственно вдоль оси времени $T = \operatorname{Lin}\{\mathbf{i}\}$ и вдоль физического пространства $\Gamma_l = \operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$, причем \mathbf{i} и \mathbf{n} — направляющие орты этих составляющих. Ранее упоминалось, что векторы, заданные в физическом пространстве Γ при каком-либо одном его положении, принадлежат также любому другому его положению и что соответствие между векторами, относящимися к разным положениям Γ , может быть установлено посредством ортогонального проецирования векторов из какого-либо одного положения Γ на все другие положения Γ . По этой причине можно считать, что $\operatorname{sh} \varphi \mathbf{n}$ есть составляющая вектора \mathbf{q}_0 вдоль гиперплоскости Γ_{l_x} и \mathbf{n} — ее направляющий орт с началом в точке C .

Согласно исходным положениям модели, оси лучей частицы равномерно распределены по внутренности светового конуса с вершиной в центре частицы. Поэтому концы их направляющих ортов

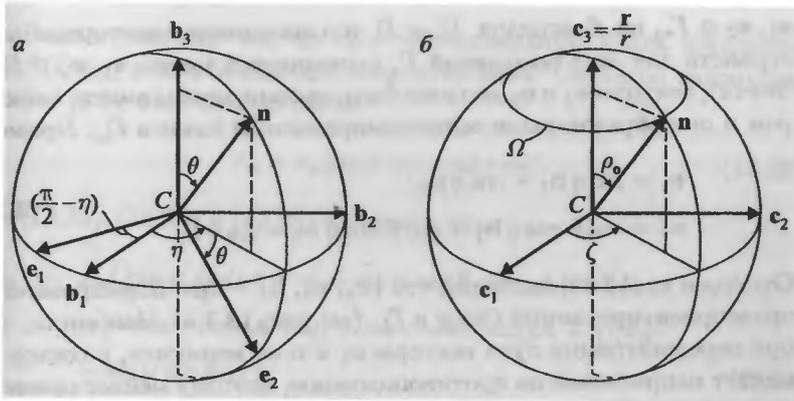


Рис. 13.3. Вектор \mathbf{n} в базисах $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ (а) и $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ (б).

При фиксированной угловой координате $\rho = \rho_0$ и координате ζ , меняющейся от $-\pi$ до π , конец вектора \mathbf{n} «пробегает» окружность Ω .

\mathbf{q}_0 равномерно распределены по единичной псевдосфере с центром в центре частицы (точнее, по той ее доле, которая принадлежит внутренности светового конуса будущего). Отсюда заключаем, что концы векторов \mathbf{n} равномерно распределены в Γ_{l_x} по единичной сфере с центром в точке C . Следовательно, вектор \mathbf{n} может быть задан как радиус-вектор точек этой сферы. Пусть θ и η — угловые координаты вектора \mathbf{n} в базисе $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ (θ — угол между \mathbf{b}_3 и \mathbf{n} , $\theta \in [0, \pi]$; η — угол между \mathbf{b}_1 и проекцией \mathbf{n} на плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, отсчитываемый от \mathbf{b}_1 и возрастающий в направлении кратчайшего поворота от \mathbf{b}_1 к \mathbf{b}_2 , $\eta \in [0, 2\pi)$) (рис. 13.3,а). Тогда можем записать:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \eta \mathbf{b}_1 + \sin \theta \sin \eta \mathbf{b}_2 + \cos \theta \mathbf{b}_3. \quad (13.19)$$

Теперь разложим по базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Эти векторы подчинены единственному условию: они должны образовывать ортонормированный базис в плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$ (эта плоскость лежит в собственном физическом пространстве частицы Γ_* и занимает для разных лучей всевозможные положения, проходящие через центр частицы, см. разд. 2). Из наличия линейной зависимости (13.18) между векторами \mathbf{i} , \mathbf{q}_0 и \mathbf{n} вытекает, что $\mathbf{n} \in \text{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$. Следовательно, $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_2$. Вместе с тем векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , как и \mathbf{n} , принадлежат Γ_{l_x} (ранее считалось, что

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \Gamma_*$, но, благодаря $\Gamma_* = \Gamma_l$ и одинаковости векторных пространств для всех положений Γ , выполняется также $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \Gamma_{l_x}$. Значит, векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 должны быть такими, чтобы вместе с вектором \mathbf{n} они образовывали ортонормированный базис в Γ_{l_x} . Примем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \sin \eta \mathbf{b}_1 - \cos \eta \mathbf{b}_2; \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \theta \cos \eta \mathbf{b}_1 + \cos \theta \sin \eta \mathbf{b}_2 - \sin \theta \mathbf{b}_3. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Отсюда и из (13.19) вытекает, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ — ортонормированный правоориентированный базис в Γ_{l_x} (см. рис. 13.3,а). Напомним, что при переориентации луча векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{n} не меняются, а вектор \mathbf{e}_2 меняет направление на противоположное, поэтому меняет ориентацию и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$. Однако для дальнейшего требуется, чтобы ориентация этого базиса была неизменной. В связи с этим будем считать, что в формуле (13.20) и в последующих формулах векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 относятся к непереориентированному состоянию луча. А при рассмотрении переориентированных лучей будем заменять вектор \mathbf{e}_2 на $-\mathbf{e}_2$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Поскольку базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ вращается относительно пространства M точно так же, как рассматриваемая частица, то движение частицы представляет собой по отношению к этому базису поступательное перемещение вдоль прямой $L = T = \text{Lin}\{\mathbf{i}\}$. Следовательно, в данном базисе угловые координаты θ и η вектора \mathbf{n} не зависят от движения частицы. Это означает, что в правых частях выражений (13.19) и (13.20) от времени l зависят только векторы самого базиса.

Подставим в равенства (13.19) и (13.20) значения векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ из (13.16). После очевидных преобразований получаем разложение векторов \mathbf{n}, \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 по абсолютному базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \sin \theta \sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2 + \cos \theta \mathbf{a}_3; \quad (13.21)$$

$$\mathbf{e}_1 = \sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 - \cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2; \quad (13.22)$$

$$\mathbf{e}_2 = \cos \theta \cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \cos \theta \sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2 - \sin \theta \mathbf{a}_3. \quad (13.23)$$

С помощью зависимостей (13.18) и (13.21) находим разложение по этому же базису вектора \mathbf{q}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \text{ch } \varphi \mathbf{i} + \text{sh } \varphi \sin \theta \cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \\ &\quad + \text{sh } \varphi \sin \theta \sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2 + \text{sh } \varphi \cos \theta \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Рассмотрим еще вектор \mathbf{r}_o — составляющую вдоль плоскости $Lin^1\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ радиуса-вектора элементов нити. Согласно формулам (2.4) и (2.5), этот вектор равен

$$\mathbf{r}_o = r_o[\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2]. \quad (13.25)$$

Из (13.22), (13.23) и (13.25) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_o = & r_o \{ [\cos \nu \sin(\omega t + \eta) + \sin \nu \cos \theta \cos(\omega t + \eta)] \mathbf{a}_1 + \\ & + [-\cos \nu \cos(\omega t + \eta) + \sin \nu \cos \theta \sin(\omega t + \eta)] \mathbf{a}_2 - \\ & - \sin \nu \sin \theta \mathbf{a}_3 \}. \end{aligned} \quad (13.26)$$

В дальнейшем нам потребуются производные векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{q}_o по времени l . Согласно принятому в начале построения модели условию, угол $i\varphi$ между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_o не меняется при движении частицы. Это означает, что φ не зависит от l . Величины θ и η , в соответствии со сказанным ранее, тоже не зависят от l . Не меняется с изменением l и абсолютный базис. Поэтому из (13.22)–(13.24) с учетом $t = l/c$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dl} = \frac{\omega}{c} [\cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2]; \quad (13.27)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dl} = \frac{\omega}{c} \cos \theta [-\sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2]; \quad (13.28)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_o}{dl} = \frac{\omega}{c} \operatorname{sh} \varphi \sin \theta [-\sin(\omega t + \eta) \mathbf{a}_1 + \cos(\omega t + \eta) \mathbf{a}_2]. \quad (13.29)$$

Формулы (13.21)–(13.29) выполняются для любых лучей частицы. Далее нас будут интересовать только те лучи, нити которых проходят через точку x . Согласно теореме 13.1, направляющие векторы \mathbf{q}_o осей таких лучей обладают следующим свойством. Их составляющие вдоль гиперплоскости Γ_{l_x} располагаются по образующим круговой конической поверхности с вершиной в точке C , осью Cx и углом полураствора ρ_o вида (13.4). Направляющими ортами этих составляющих, как отмечалось, служат векторы \mathbf{n} ; следовательно, у интересующих нас лучей векторы \mathbf{n} находятся в Γ_{l_x} на указанной конической поверхности. Воспользуемся для описания этого свойства векторов \mathbf{n} базисом $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, введенным равенствами (13.17).

Пусть вектор \mathbf{n} имеет в данном базисе угловые координаты ρ и ζ , где ρ — угол между \mathbf{c}_3 и \mathbf{n} ($\rho \in [0, \pi]$), ζ — угол между \mathbf{c}_1 и проекцией \mathbf{n} на плоскость $\text{Lin}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, отсчитываемый от \mathbf{c}_1 и возрастающий в направлении кратчайшего поворота от \mathbf{c}_1 к \mathbf{c}_2 (нам будет удобно считать, что $\zeta \in (-\pi, \pi]$). Угловая координата ζ есть та самая величина, которая фигурирует в выражении (13.2) для собственного поля частицы F_s .

В связи с тем, что $\mathbf{c}_3 = \mathbf{r}/r$ и вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$ лежит на оси упомянутой конической поверхности, для рассматриваемых векторов \mathbf{n} , располагающихся вдоль образующих этой конической поверхности, выполняется $\rho = \rho_0$ (рис. 13.3,б). Поэтому можем записать:

$$\mathbf{n} = \sin \rho_0 \cos \zeta \mathbf{c}_1 + \sin \rho_0 \sin \zeta \mathbf{c}_2 + \cos \rho_0 \mathbf{c}_3.$$

Подставляя сюда значения векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ и \mathbf{c}_3 из (13.17), получаем еще одно разложение вектора \mathbf{n} по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = & (\sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma) \mathbf{a}_1 + \sin \rho_0 \sin \zeta \mathbf{a}_2 + \\ & + (-\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \cos \gamma) \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Выражения (13.21) и (13.30), благодаря единственности разложения вектора по базису, приводят к зависимостям

$$\begin{aligned} \cos \theta = & -\sin \rho_0 \sin \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \cos \gamma; \\ \sin^2 \theta = & 1 - \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \rho_0 \sin^2 \gamma \cos^2 \zeta + \\ & + 2 \sin \rho_0 \cos \rho_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos \zeta - \cos^2 \rho_0 \cos^2 \gamma; \end{aligned} \quad (13.31)$$

$$\sin \theta \sin(\omega t + \eta) = \sin \rho_0 \sin \zeta;$$

$$\sin \theta \cos(\omega t + \eta) = \sin \rho_0 \cos \gamma \cos \zeta + \cos \rho_0 \sin \gamma,$$

здесь углы ρ_0 и γ задаются формулами (13.4) и (13.13); $\zeta \in (-\pi, \pi]$.

Вновь рассмотрим расположение частицы, при котором винтовая нить некоторого луча проходит через точку x . Пусть: O — точка, в которой находится центр частицы; \mathbf{q}_0 — направляющий орт оси этого луча; A — точка пересечения оси луча с гиперплоскостью Γ_x ; r_0 — радиус винтовой нити, проходящей через x (см. рис. 13.1). Проведем через точку x прямую, параллельную OA , до пересечения ее в точке z с гиперплоскостью Γ_l . В разд. 12 мы показали, что

четыреугольник $OAxz$ — параллелограмм, причем в нем $|Oz| = r_o$ и $Oz \perp OA$. Из $Oz \in \Gamma_l$, $\Gamma_l \perp \mathbf{i}$, $Oz \perp OA$ и $OA \in \text{Lin}\{\mathbf{q}_o\}$ следует $\vec{Oz} \perp \mathbf{i}$ и $\vec{Oz} \perp \mathbf{q}_o$, поэтому $\vec{Oz} \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$.

Радиус-вектор (относительно точки O) элемента нити, находящегося в точке x , есть вектор \vec{Ox} . На основании зависимостей $\vec{Ox} = \vec{OA} + \vec{Oz}$, $\vec{OA} \in \text{Lin}\{\mathbf{q}_o\}$ и $\vec{Oz} \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$ заключаем, что векторы \vec{OA} и \vec{Oz} являются составляющими радиуса-вектора \vec{Ox} вдоль взаимно ортогональных оси луча $\text{Lin}\{\mathbf{q}_o\}$ и плоскости $\text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_o\}$. Из уравнения нити (2.4) следует, что эти составляющие имеют вид: $\vec{OA} = \pm(r_o\psi/\beta_o)\mathbf{q}_o$ и $\vec{Oz} = \mathbf{r}_o$. Поскольку $OAxz$ — параллелограмм, то $\vec{Ax} = \vec{Oz} = \mathbf{r}_o$.

Так как $\mathbf{q}_o \in OA$, то составляющая вектора \mathbf{q}_o вдоль Γ_{l_x} лежит на CA . Направляющим ортом этой составляющей, как указывалось, является вектор \mathbf{n} , значит $\mathbf{n} \in CA$, причем \mathbf{n} направлен от C к A и $|\mathbf{n}| = 1$. Поэтому $\vec{CA} = r_A\mathbf{n}$, где $r_A = |CA|$. Согласно (12.11), $r_A = \sqrt{r^2 - r_o^2}$. Отсюда и из очевидной зависимости $\vec{Ax} = \vec{Cx} - \vec{CA}$, учитывая равенства $\vec{Ax} = \mathbf{r}_o$, $\vec{CA} = r_A\mathbf{n}$ и принятое ранее обозначение $\vec{Cx} = \mathbf{r}$, имеем

$$\mathbf{r}_o = \mathbf{r} - \sqrt{r^2 - r_o^2} \mathbf{n}, \quad (13.32)$$

это выражение определено, вследствие $r > r_o > 0$.

Подстановка в (13.32) значений векторов \mathbf{r} и \mathbf{n} из (13.15) и (13.30) дает разложение вектора \mathbf{r}_o по абсолютному базису. Сопоставление этого разложения с разложением (13.26) при использовании равенств (13.31) и вытекающих из (13.4) соотношений $\sin \rho_o = r_o/r$ и $\cos \rho_o = \sqrt{1 - (r_o/r)^2}$ приводит к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \nu &= -\cos \rho_o \sin \gamma \cos \zeta - \sin \rho_o \cos \gamma; \\ \sin \theta \cos \nu &= \sin \gamma \sin \zeta. \end{aligned} \quad (13.33)$$

В треугольнике OCA $|CA| = r_A$, $OC \perp CA$ и угол между сторонами OC и OA равен углу $i\varphi$ между векторами \mathbf{i} и \mathbf{q}_o (см. рис. 13.1). Поэтому $|\vec{OA}| = r_A/\text{sh } \varphi$. Отсюда, принимая во внимание полученные выше равенства $\vec{OA} = \pm(r_o\psi/\beta_o)\mathbf{q}_o$ и $r_A = \sqrt{r^2 - r_o^2}$, находим:

$$\pm \frac{r_o\psi}{\beta_o} = \frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{\text{sh } \varphi}, \quad (13.34)$$

здесь $\pm\psi > 0$ (так как вектор \overrightarrow{OA} сонаправлен с \mathbf{q}_o , см. пояснение к формуле (2.4)) и согласно принятым ранее условиям выполняется $r > r_o > 0$, $\beta_o > 0$, $\varphi > 0$. Напомним, что в формулах, содержащих двойные знаки, верхний знак отвечает случаю, когда в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_o}$, содержащем луч с направляющим ортом оси \mathbf{q}_o , ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o\}$ и ориентация винтовых нитей совпадают, нижний знак — когда эти ориентации противоположны.

Теперь зададим бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$. Из формул (2.10) и (7.3) для векторов \mathbf{q} и \mathbf{j} , применяя соотношения (3.6) и (13.11), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} = & \frac{1}{\sqrt{|\beta_o^2 - 1|}} \left[\mathbf{q}_o \wedge \mathbf{i} \pm \beta_o (-\sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{i} + \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{i}) \pm \right. \\ & \pm \beta_o r_o \sin \nu \left(-\cos \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} - \sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right) \pm \\ & \pm \beta_o r_o \cos \nu \left(\cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \sin \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right) + \\ & + r_o \left(\cos \nu \mathbf{q}_o \wedge \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} + \sin \nu \mathbf{q}_o \wedge \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} \right) + \\ & + r_o \psi \left(-\sin \nu \mathbf{e}_1 \wedge \frac{d\mathbf{q}_o}{dl} + \cos \nu \mathbf{e}_2 \wedge \frac{d\mathbf{q}_o}{dl} \right) \pm \\ & \left. \pm \frac{r_o \psi}{\beta_o} \mathbf{q}_o \wedge \frac{d\mathbf{q}_o}{dl} \right]. \end{aligned} \quad (13.35)$$

В случае переориентированного луча следует использовать формулы (5.10) и (7.4) вместо (2.10) и (7.3). В этом случае бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ будет иметь значение, отличающееся от (13.35) только знаком вектора \mathbf{e}_2 . Обратим внимание на то, что если при выводе выражения (13.35) не применять зависимости (3.6), то его правая часть будет содержать два дополнительных бивектора, пропорциональных $(\beta_o q \mp \sigma r_o / c)$, а если не применять (13.11), то вместо вектора \mathbf{i} будет стоять \mathbf{i}_L .

Дальнейшие преобразования выражения, описывающего бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$, состоят в следующем. Вносим в (13.35) значения векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_o$ и их производных из формул (13.22)–(13.24) и (13.27)–(13.29). Затем, используя зависимости (13.31) и (13.33), выражаем

угловые переменные θ , $\omega t + \eta$, ν через ρ_0 , γ и ζ . И, наконец, исключаем величины ρ_0 и ψ с помощью соотношений (13.4) и (13.34). В результате бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ оказывается выраженным через векторы абсолютного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, а также через фиксированные скалярные параметры r , γ , ω , c и величины, которые, вообще говоря, различны для разных нитей и лучей — радиус винтовой нити r_0 , угловые координаты φ , ζ и параметр β_0 , зависящий, согласно (6.11), от r_0 , r_* , p_* и φ .

Выражение (13.2), задающее собственное поле частицы F_s , включает в себя интеграл по некоторому участку мировой линии L , в связи с чем в него входит дифференциал длины дуги линии L . В рассматриваемом нами случае, когда $L = T$, этот дифференциал совпадает с дифференциалом временной переменной l , поэтому в данном случае интегрирование фактически ведется по временной переменной l . Выведем формулу, позволяющую перейти в (13.2) от интегрирования по l к интегрированию по угловой переменной φ .

На основании зависимости (13.3) (или (12.12)) имеем

$$l_x - l = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{th} \varphi} \quad (\text{при } r > r_0; \varphi > 0). \quad (13.36)$$

В выражении (13.2) интеграл по l является внутренним, а интеграл по r_0 — внешним, поэтому при интегрировании по l нужно считать величину r_0 постоянной. Величины l_x и r — тоже постоянные. При постоянных l_x , r и r_0 , согласно (13.36), временная координата частицы l есть функция только угловой координаты φ , и ее дифференциал равен

$$dl \Big|_{\substack{l_x \\ r_0}} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\operatorname{sh}^2 \varphi} d\varphi, \quad (13.37)$$

где справа от вертикальной черты указаны величины, считающиеся постоянными. Эта формула позволяет перейти в выражении (13.2) от интегрирования по l к интегрированию по φ .

В (13.2) интегрирование проводится по участку L_x мировой линии L . Критерием нахождения центра частицы на L_x является выполнение ограничения (12.13) (или (12.14)). Из выражения (13.36) и этого ограничения вытекает, что $\varphi \in (0, +\infty)$, поэтому интегрирование по переменной φ должно проводиться в пределах от 0 до $+\infty$.

Рассчитаем собственное поле F_s для следующих трех возможных состояний частицы, причем будем полагать, что эти состояния не меняются при движении частицы:

- а) ни один из лучей частицы не переориентирован;
- б) все лучи являются переориентированными;
- в) переориентирована половина лучей в соответствии с условием, принятым в разд. 5.

В первых двух случаях поле F_s может быть рассчитано непосредственно с помощью формулы (13.2). В третьем случае эта формула требует небольшого уточнения, так как бивектор $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ имеет в данном случае разный вид при разных значениях переменной ζ .

Условие переориентации лучей, принятое в разд. 5, заключается в следующем (мы заменим в нем вектор \mathbf{o} на \mathbf{n} , учитывая, что из правоориентированности базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ вытекает $\mathbf{n} = \mathbf{o}$).

Считается, что ровно половина лучей частицы является переориентированной, тогда как другая их половина сохраняет свою ориентацию, причем эти два множества лучей характеризуются тем, что концы их векторов \mathbf{n} находятся на противоположных полусферах единичной сферы (лежащей в физическом пространстве Γ_x и имеющей центр в точке C). Детализируем это условие.

Зададим мнимое единичный вектор $\mathbf{k} \in \Gamma_x$ с началом в точке C , который назовем *вектором переориентации*, причем будем считать, что вектор \mathbf{k} не меняется при движении частицы ($\mathbf{k} = \text{const}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$). Примем, что лучи, для которых вектор \mathbf{n} образует с \mathbf{k} угол из промежутка $[0, \pi/2)$, сохраняют ориентацию, а лучи, для которых этот угол принадлежит промежутку $(\pi/2, \pi]$, являются переориентированными. Относительно лучей, векторы \mathbf{n} которых образуют с \mathbf{k} угол $\pi/2$, мы не будем уточнять, какие из них переориентированы, а какие нет, ибо это не влияет на последующие результаты. (Такое условие переориентации лучей является частным случаем условия, принятого в разд. 10.)

Еще более упростим ситуацию. Будем полагать, что вектор переориентации \mathbf{k} совпадает с направляющим ортом оси вращения частицы \mathbf{a} : $\mathbf{k} = \mathbf{a}$. Так как $\mathbf{a} = \mathbf{a}_3$, то в этом случае границей раздела упомянутых полусфер служит плоскость, проходящая через векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 (рис. 13.4). Лучи, порождающие собственное поле частицы F_s в точке x , характеризуются тем, что их векторы \mathbf{n} наклонены по отношению к вектору \mathbf{r}/r на угол ρ_0 . Поскольку вектор \mathbf{r}/r , в свою очередь, наклонен относительно вектора \mathbf{a} на

угол γ , то, как видно из рис. 13.4, при выполнении условия

$$\frac{\pi}{2} - \rho_0 < \gamma < \frac{\pi}{2} + \rho_0 \quad (13.38)$$

концы векторов \mathbf{n} разных лучей принадлежат разным полусферам. Это означает, что при выполнении (13.38) среди лучей, порождающих поле F_s в точке x , некоторая часть оказывается переориентированной, тогда как другая часть — нет. Если же $\gamma \in (0, \pi/2 - \rho_0)$, то все лучи, создающие поле F_s в точке x , являются

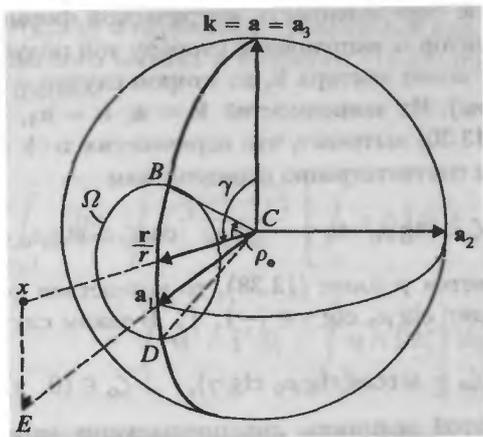


Рис. 13.4. Взаимное расположение вектора переориентации \mathbf{k} и точки наблюдения x , при котором среди лучей, порождающих поле F_s в точке x , имеются как непереориентированные, так и переориентированные лучи.

Точка наблюдения x находится на прямой, содержащей вектор \mathbf{r}/r (так как $\overrightarrow{Cx} = \mathbf{r}$); Ω — окружность на единичной сфере, вдоль которой располагаются концы векторов \mathbf{n} лучей, порождающих поле F_s в точке x (ср. с рис. 13.3,б); B и D — точки пересечения окружности Ω с плоскостью $Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$; считается, что $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — направляющий орт оси вращения частицы.

Ситуация, когда среди лучей, порождающих поле F_s в точке x , имеются и непереориентированные, и переориентированные лучи, реализуется в том и только том случае, если точки B и D принадлежат разным полусферам, разделенным плоскостью $Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, то есть если одновременно выполняются неравенства $\gamma - \rho_0 < \pi/2$ и $\gamma + \rho_0 > \pi/2$ (что эквивалентно условию (13.38)). Расстояние от точки x до плоскости $Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ есть $|xE| = r|\sin(\pi/2 - \gamma)|$, где xE — перпендикуляр к $Lin\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $r = |Cx|$.

непереориентированными. А при $\gamma \in (\pi/2 + \rho_0, \pi)$, наоборот, все такие лучи — переориентированные (здесь $\rho_0 \in (0, \pi/2)$, см. (13.4)).

Заметим, что если частица не вращается, то не имеется объективно выделенного вектора \mathbf{a} . Тогда в качестве вектора \mathbf{k} может быть принят произвольный мнимоединичный вектор из Γ_{l_x} . В таком случае удобно строить абсолютный базис, пользуясь формулами (13.13) и (13.14) с заменой в них вектора \mathbf{a} на \mathbf{k} (при этом будет, в частности, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}$ и γ — угол между \mathbf{r} и \mathbf{k}).

Согласно сформулированному условию переориентации лучей те лучи, для которых выполняется неравенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$, являются непереориентированными, а лучи, для которых $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$, оказываются переориентированными (знаки неравенств здесь учитывают отрицательную определенность метрической формы в Γ_{l_x} ; в первом случае вектор \mathbf{n} направлен в сторону той полусферы, которой принадлежит конец вектора \mathbf{k} , во втором случае — в сторону другой полусферы). Из зависимостей $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = -1$ и выражения (13.30) вытекает, что неравенства $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ эквивалентны соответственно неравенствам

$$\cos \zeta < \operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma \quad \text{и} \quad \cos \zeta > \operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma.$$

Если выполняется условие (13.38), то вследствие $\rho_0 \in (0, \pi/2)$ и $\gamma \in (0, \pi)$ будет $\operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma \in (-1, 1)$. В таком случае существует величина

$$\zeta_0 = \arccos(\operatorname{ctg} \rho_0 \operatorname{ctg} \gamma), \quad \zeta_0 \in (0, \pi). \quad (13.39)$$

С помощью этой величины два предыдущие неравенства могут быть записаны в виде

$$\cos \zeta < \cos \zeta_0 \quad \text{и} \quad \cos \zeta > \cos \zeta_0.$$

Так как $\zeta \in (-\pi, \pi]$, то отсюда заключаем, что лучи, создающие поле F_s в точке x , являются при $\zeta \in (-\pi, -\zeta_0) \cup (\zeta_0, \pi]$ непереориентированными, а при $\zeta \in (-\zeta_0, \zeta_0)$ переориентированными.

Теорема 13.2. Если выполняется условие (13.38), то точка наблюдения x находится внутри плоского слоя, имеющего срединную плоскость $\operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ и полутолщину $r_* + p_*$.

Доказательство. Расстояние от точки x до плоскости $\operatorname{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\} = \operatorname{Lin}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ равняется $r|\sin(\pi/2 - \gamma)|$ (в этом нетрудно убедиться с помощью рис. 13.4, если учесть, что $\overrightarrow{Cx} = \mathbf{r}$ и $|Cx| = r$). Поскольку условие (13.38) влечет $-\rho_0 < \pi/2 - \gamma < \rho_0$, то при его выполнении указанное расстояние лежит в промежутке $[0, r \sin \rho_0)$. А так как $\sin \rho_0 = r_0/r$ (в силу (13.4)) и $\sup r_0 = r_* + p_*$, то данное

расстояние меньше, чем $r_* + p_*$. Следовательно, при выполнении условия (13.38) точка x обязательно находится на расстоянии от плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$, меньшем $r_* + p_*$, значит, она действительно лежит внутри плоского слоя, имеющего срединную плоскость $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ и полутолщину $r_* + p_*$. ■

Преобразуем выражение (13.2), задающее собственное поле частицы F_s , применительно к случаю, когда выполняются условие переориентации лучей и условие (13.38). В этом случае определена величина $\zeta_0 \in (0, \pi)$ и согласно сделанному выше выводу лучи, создающие поле F_s в точке x , являются непереориентированными при $\zeta \in (-\pi, -\zeta_0) \cup (\zeta_0, \pi)$ и переориентированными при $\zeta \in (-\zeta_0, \zeta_0)$. На основании данного вывода и формулы (13.37) приводим выражение (13.2) к форме

$$F_s(x) = \frac{a}{2\pi} \int_{(r_0)} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \tilde{\varepsilon} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\text{sh}^2 \varphi} \left[\int_{-\pi}^{-\zeta_0} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} \mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}' d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\pi} \mathbf{q} \wedge \mathbf{j} d\zeta \right] d\varphi dr_0, \quad (13.40)$$

здесь учтено, что угловая переменная φ изменяется в пределах от 0 до $+\infty$; несобственный интеграл по φ представлен, по определению, в виде предела соответствующего интеграла, взятого по конечному промежутку; использована независимость $\tilde{\varepsilon}$ от ζ ; штрихами помечены величины, относящиеся к переориентированным лучам. Согласно сказанному ранее, бивектор $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$ имеет значение, которое отличается от правой части (13.35) только знаком вектора \mathbf{e}_2 .

Формула (13.40) получена для случая, когда соблюдаются условие переориентации лучей и условие (13.38). Первое из этих условий вместе с равенством $\mathbf{k} = \mathbf{a}$ однозначным образом разбивает множество лучей на переориентированные и непереориентированные. Второе условие значительно сужает область возможного местонахождения точки наблюдения x (см. теорему 13.2).

Вместе с тем формула (13.40) может быть применена также в некоторых случаях, когда эти условия нарушаются. Во-первых, она сохраняет силу, если ни один из лучей частицы не переориентирован. В таком случае следует положить в этой формуле чи-

сто формально $\zeta_0 = 0$, что вернет ее к виду (13.2) (с точностью до замены переменной интегрирования l на φ). Во-вторых, данная формула остается верной, если все лучи частицы являются переориентированными. Этот случай она описывает при $\zeta_0 = \pi$. При таком значении ζ_0 она вновь приобретает вид (13.2), но с заменой бивектора $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ на $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$. В обоих случаях точка наблюдения x может находиться в произвольном месте пространства M (удовлетворяющем только принятым ограничениям $r > r_0$ и $\mathbf{r} \nparallel \mathbf{a}$). В-третьих, формула (13.40) остается в силе в случае, когда условие переориентации лучей выполняется, а условие (13.38) не выполняется. Последнее означает, что точка x расположена таким образом, что соблюдается либо $\gamma \in (0, \pi/2 - \rho_0)$, либо $\gamma \in (\pi/2 + \rho_0, \pi)$. В первой из этих ситуаций все лучи, создающие поле F_s в точке x , являются непереориентированными, поэтому следует положить в (13.40) $\zeta_0 = 0$. При второй ситуации все такие лучи являются переориентированными, поэтому нужно принять, что $\zeta_0 = \pi$.

Таким образом, формула (13.40) может быть использована для расчета поля F_s при всех трех интересующих нас состояниях частицы: когда ни один из лучей частицы не переориентирован, когда все лучи переориентированы и когда переориентирована половина лучей в соответствии со сформулированным выше условием.

Подставим в формулу (13.40) значение плотности нитей $\tilde{\epsilon}$, задаваемое выражением (12.30), а также значения бивекторов $\mathbf{q} \wedge \mathbf{j}$ и $\mathbf{q}' \wedge \mathbf{j}'$, получающиеся из (13.35) посредством преобразований, о которых было сказано ранее. Затем проведем интегрирование по переменным ζ и φ . После громоздких выкладок получаем такую формулу для собственного поля частицы F_s :

$$F_s(x) = \frac{aN}{4\pi r^2} \left(\int_{(r_0)} \tilde{\chi}_{r_0} \tilde{N}_{r_0} dr_0 \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm$$

$$\pm \frac{aN}{2\pi^2 r} \left(\int_{(r_0)} \frac{\tilde{\chi}_{r_0} \tilde{N}_{r_0} \sin \zeta_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\Phi \beta_0 \operatorname{sh} \varphi d\varphi}{\int_0^\Phi \operatorname{sh}^2 \varphi d\varphi} dr_0 \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{\sin \gamma} \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \wedge \mathbf{i} + \frac{aN\omega}{4\pi cr} \left(\int_{(r_0)} \tilde{\chi}_{r_0} \tilde{N}_{r_0} dr_0 \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \\ & + \frac{aN\omega}{4\pi c} \left(\int_{(r_0)} \frac{\tilde{\chi}_{r_0} \tilde{N}_{r_0}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr_0 \right) \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (13.41) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\chi}_{r_0} = \begin{cases} 1 & \text{при } r > r_0 \\ 0 & \text{при } r \leq r_0. \end{cases} \quad (13.42)$$

В процессе вывода формулы (13.41) отношение пределов двух функций (при $\Phi \rightarrow +\infty$) заменено пределом их отношения (аналогично тому, как такая замена была произведена в разд. 6). Кроме того, с помощью вытекающих из (13.14) равенств $\mathbf{a}_2 = \sin^{-1} \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{r}/r$ и $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a} = \mathbf{k}$ исключены векторы \mathbf{a}_i абсолютного базиса ($i = 1, 2, 3$). В (13.41) обозначено: x — точка пространства Минковского M , в которой вычисляется поле F_s (точка наблюдения); a — скалярный коэффициент, входящий в определение поля F_s (13.2); N — общее количество лучей в частице; r_0 — радиус винтовых нитей; β_0 — положительный параметр, участвующий в уравнении нити (2.3) и характеризующий шаг нити; величины \tilde{N}_{r_0} , γ и ζ_0 задаются выражениями (12.5), (13.13) и (13.39); остальные обозначения приведены далее в пояснении к выражению (13.44).

Знак перед вторым слагаемым в правой части формулы (13.41) определяется следующим образом. Возьмем какой-либо луч частицы в исходном, непереориентированном состоянии. Найдем для него вектор $\mathbf{n} \in \Gamma_*$ с помощью зависимости (5.3) или (5.5). Выберем в Γ_* векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 такие, чтобы триада $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ служила правоориентированным ортонормированным базисом в Γ_* (этим свойством обладает, в частности, использованная нами триада, задаваемая выражениями (13.19) и (13.20)). С помощью выбранных векторов образуем базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$, содержащем луч (\mathbf{q}_0 — направляющий орт оси луча). Тогда, если ориентация базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{q}_0\}$ в $C_{\mathbf{q}_0}$ совпадает с ориентацией винтовых нитей луча, то перед вторым слагаемым берется

верхний знак, если эти ориентации не совпадают, то берется нижний знак. Отметим, что благодаря принятому в разд. 2 условию о согласованности ориентаций всех нитей частицы, данное правило определения знака приводит к одному и тому же результату при рассмотрении любого луча, поэтому оно является корректным.

В правой части формулы (13.41) первое слагаемое не зависит ни от переориентации лучей частицы, ни от ее вращения. Второе слагаемое связано только с переориентацией лучей. В представленном виде оно относится к случаю, когда выполняются сформулированное выше условие переориентации лучей и условие (13.38). Если условие (13.38) не выполняется, а также если ни один из лучей частицы не переориентирован или, наоборот, все лучи переориентированы, то второе слагаемое обращается в нулевой тензор (потому что в таких случаях $\zeta_o = 0$ или $\zeta_o = \pi$, из-за чего присутствующий в нем множитель $\sin \zeta_o$ оказывается равным нулю). Из этого на основании теоремы 13.2 и равенства $\mathbf{k} = \mathbf{a}$ следует, что второе слагаемое сосредоточено внутри слоя в Γ_{l_x} , имеющего срединную плоскость $Lin^1\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ и полутолщину $r_* + p_*$. Третье и четвертое слагаемые обусловлены вращением частицы вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$. При отсутствии вращения, то есть при $\omega = 0$, эти слагаемые превращаются в нулевые тензоры.

Отметим, что благодаря наличию в (13.41) функции $\tilde{\chi}_{r_o}$ не требуется, чтобы выполнялось ограничение $r > r_o$, так как при $r \leq r_o$ эта функция обращает все подынтегральные выражения в (13.41) в нули. Не требуется также выполнения ограничения $\mathbf{r} \nparallel \mathbf{a}$, потому что равенства (13.14) и $\mathbf{k} = \mathbf{a}$ влекут $\sin^{-1} \gamma \mathbf{k} \times \mathbf{r}/r = \mathbf{a}_2$, в связи с чем устремление к нулю стоящей в знаменателе функции $\sin \gamma$ не приводит к сингулярности. Поэтому формула (13.41) верна при любом местонахождении точки наблюдения x .

При выводе формулы (13.41) и предыдущих формул были использованы выражение (3.6) и равенство $\mathbf{k} = \mathbf{a}$. Если не применять (3.6), то формула (13.41) будет содержать в качестве слагаемых три дополнительных бивектора, пропорциональных $(\beta_o q \mp \omega r_o / c)$. А при $\mathbf{k} \neq \mathbf{a}$ в нее войдет с некоторым скалярным множителем дополнительный бивектор $(\mathbf{k} \times \mathbf{r}/r) \wedge (\mathbf{a} \times \mathbf{r}/r)$. При этом все приведенные слагаемые останутся без изменений.

Далее в настоящем разделе рассмотрим ситуацию, когда расстояние r от точки наблюдения x до мировой линии L превышает $r_* + p_*$. Будем говорить об этой ситуации как о нахождении точки

x вне центрального сечения частицы (потому что при расположении частицы в M , одномоментном с x , точка x оказывается при этом на удалении от центра частицы, большем радиуса центрального сечения $r_* + p_*$). Случай, когда расстояние r между точкой x и мировой линией L меньше, чем $r_* + p_*$, важен для анализа самодействия частицы; о нем пойдет речь в следующем разделе.

Итак, пусть

$$r > r_* + p_*, \quad (13.43)$$

причем при рассмотрении второго и четвертого слагаемых, входящих в правую часть (13.41), будем полагать, что $r \gg r_* + p_*$.

Вследствие данного допущения и равенства $\sup r_o = r_* + p_*$, выполняется $r > r_o$ при всех r_o , причем для второго и четвертого слагаемых выполняется $r \gg r_o$. Поэтому из (13.42) вытекает, что $\tilde{\chi}_{r_o} = 1$. В таком случае, согласно (12.6), интегралы в первом и третьем слагаемых в выражении (13.41) равны $n_* N_*$. В четвертом слагаемом, учитывая $r \gg r_o$, пренебрежем величиной r_o^2 в сравнении с r^2 . Тогда входящий в это слагаемое интеграл будет равен $n_* N_*/r$.

Теперь остановимся на втором слагаемом. Оно, как было сказано, сосредоточено внутри слоя со срединной плоскостью $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ и полутолщиной $r_* + p_*$, причем необходимым условием отличия его от нуля является выполнение ограничения (13.38). При нахождении точки x внутри слоя и при выполнении условия $r \gg r_o$, вследствие (13.4) и (13.38), будет $\gamma \approx \pi/2$ (благодаря $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, здесь под γ можно понимать угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{k}). Ограничимся расчетом второго слагаемого для случая, когда $x \in Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ и $p_* \ll r_*$. В таком случае $\gamma = \pi/2$, так как $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx} \in Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$. Значит, $\sin \gamma = 1$ и $\text{ctg} \gamma = 0$. Отсюда в силу (13.39) вытекает, что $\zeta_o = \pi/2$, поэтому $\sin \zeta_o = 1$. Из (6.12), пренебрегая величиной p_*/r_* по сравнению с единицей, имеем $\beta_o = \text{ch} \varphi$. При таком значении β_o предел во втором слагаемом равен единице. Пренебрежем в этом слагаемом, как и в четвертом, величиной r_o^2 в сравнении с r^2 . Тогда в нем интеграл по r_o , с учетом $\sin \zeta_o = 1$, тоже будет равен $n_* N_*/r$. На основании сказанного приходим к следующему результату.

Если мировая линия частицы L прямолинейна, частица при движении вдоль L вращается вокруг фиксированной плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$ с постоянной угловой скоростью ω и выполняется сформулированное ранее условие переориентации лучей, то собственное поле частицы F_s имеет вне центрального сечения частицы такой

вид:

$$F_s(x) = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \mathbf{i} \pm \frac{2e}{\pi r^2} \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \wedge \mathbf{i} + \\ + \frac{e\omega}{cr} \frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{e\omega}{cr} \mathbf{i} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (13.44)$$

где параметру $a_* = aNn_*N_*$ придано значение (13.10) ($a_* = 4\pi e$ в системе СГС). В этой формуле обозначено: e — электрический заряд частицы (мы считаем его равным заряду электрона); $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от точки x до мировой линии L ; \mathbf{r} — вектор, который ортогонален мировой линии L , имеет начало на L и конец в точке x ; \mathbf{i} — направляющий орт оси симметрии частицы, он же — направляющий орт мировой линии частицы L ; \mathbf{k} — вектор переориентации (он фигурирует в условии переориентации лучей, $\mathbf{k} = \text{const}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{i}$); \mathbf{a} — направляющий орт оси вращения частицы ($\mathbf{a} = \text{const}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{i}$); c — скорость света; \wedge — символ внешнего умножения векторов ($\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, здесь $\mathbf{x}\mathbf{y}$ — тензорное произведение векторов \mathbf{x} и \mathbf{y}); \times — символ векторного умножения в трехмерном физическом пространстве Γ ; знак второго слагаемого определяется тем же правилом, что и в (13.41).

При выводе формулы (13.44) использованы: первое из равенств (3.6) ($\beta_0 q = \pm \sigma_0/c$), условие (13.11) ($\mathbf{i}_L = \mathbf{i} = \text{const}$) и условие (13.43) ($r > r_* + p_*$, причем для второго и четвертого слагаемых принято $r \gg r_* + p_*$). Кроме того, при расчете второго слагаемого предположено, что $\mathbf{k} = \mathbf{a}$, $x \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ и $p_* \ll r_*$.

Обсудим полученный результат.

Будем интерпретировать найденный двухвалентный антисимметричный тензор F_s как тензор электромагнитного поля, порождаемого частицей. Тогда первое слагаемое в формуле (13.44) выражает закон Кулона. Действительно, в используемой инерциальной системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} , согласно (9.11), имеет вид $\mathbf{E} = F_s \cdot \mathbf{i}$. Так как $\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = 0$ и $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, то вклад первого слагаемого в \mathbf{E} , который обозначим \mathbf{E}_1 , равен

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Эта формула представляет собой обычную запись закона Кулона для точечного заряда в вакууме. Обратим внимание на то обстоятельство, что первое слагаемое не зависит ни от каких геометрических характеристик частицы (в частности, от радиуса частицы

r_* и параметра β_0 , характеризующего шаг нитей). Не зависит оно также от вращения частицы и переориентации ее лучей. Данное слагаемое имеет в точности такой вид, какой в рамках классической электродинамики имело бы электромагнитное поле точечного заряда, движущегося вдоль той же самой мировой линии.

Первое слагаемое не порождает магнитного поля. Это объясняется тем, что вследствие $L = T$ центр частицы неподвижен относительно физического пространства Γ . Если бы мы воспользовались инерциальной системой отсчета с направляющим ортом оси времени $\tau \neq i$, то в соответствии с формулами (9.11) получили бы в такой системе отсчета как электрическую, так и магнитную составляющие поля.

Второе слагаемое в формуле (13.44) обусловлено переориентацией лучей частицы. Оно сосредоточено только внутри слоя полутолщины $r_* + p_*$, окружающего плоскость $Lin^\perp\{i, k\}$. Причем здесь представлено приближенное значение этого слагаемого для случая, когда точка наблюдения x принадлежит плоскости $Lin^\perp\{i, k\}$ и удалена от мировой линии L на расстояние, существенно превосходящее $r_* + p_*$ (точное значение второго слагаемого может быть получено из (13.41)). Второе слагаемое, как и первое, дает вклад лишь в электрическую составляющую поля (в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$). Эта составляющая, лежащая в Γ_x , ортогональна как вектору k , так и вектору r .

Подчеркнем, что второе слагаемое относится только к случаю, когда переориентация лучей частицы произведена в соответствии с условием, сформулированным ранее. Если переориентировать лучи иным способом, то это слагаемое, вообще говоря, будет иметь другой вид. При нахождении точки x вне упомянутого слоя, а также при отсутствии переориентации лучей или при переориентации всех лучей второе слагаемое должно быть исключено из формулы (13.44), так как в этих случаях соответствующее слагаемое в выражении (13.41) обращается в нулевой тензор.

Третье и четвертое слагаемые связаны с вращением частицы; при $\omega = 0$ они отсутствуют. В системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ третье слагаемое дает вклад только в магнитную составляющую поля F_s , а четвертое — только в его электрическую составляющую. Оба слагаемые не зависят от переориентации лучей частицы. Четвертое слагаемое представлено здесь, как и второе, в приближенном виде, относящемся к случаю $r \gg r_* + p_*$ (его точное значение тоже может быть получено с помощью (13.41)).

Сделаем несколько общих замечаний, касающихся формулы (13.44).

Первое и второе слагаемые в этой формуле обратно пропорциональны квадрату расстояния r между мировой линией L и точкой наблюдения x , тогда как третье и четвертое слагаемые обратно пропорциональны первой степени r . Это связано с тем, что при вращении частицы вокруг L скорость элементов нити \mathbf{j} , входящая в (13.2), приобретает составляющую, пропорциональную r . Именно эта составляющая ответственна за присутствие в (13.44) третьего и четвертого слагаемых. Вместе с тем составляющие скорости \mathbf{j} , ответственные за первые два слагаемых, не зависят от r . Вследствие этого и оказывается, что первое и второе слагаемые содержат величину r в степени, на единицу меньшей, чем третье и четвертое слагаемые.

Вектор \mathbf{r} , присутствующий в формуле (13.44), соединяет точку наблюдения x с той точкой мировой линии, в которой находится центр частицы при ее расположении в пространстве M , одномоментном с x . Это создает впечатление, что источником поля F_s является именно данное расположение частицы. В действительности, конечно, это не так. Из выражения (13.2), определяющего поле F_s , непосредственно видно, что оно порождается расположениями частицы, которые находятся в прошлом относительно x . Несостоятельность отмеченного впечатления можно продемонстрировать на примере первого слагаемого в (13.44), выражающего закон Кулона. Входящий в это слагаемое бивектор $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{i}}$ не изменится, если заменить в нем вектор \mathbf{r} любым другим вектором, соединяющим точку x с мировой линией. Из этого видно, что здесь играет роль не прямая, соединяющая точку x с одномоментной с ней точкой мировой линии L , а вся плоскость, проходящая через прямую L и точку x .

Найденное значение поля F_s не зависит от угловой скорости ω собственного вращения лучей. Это объясняется использованием соотношения (3.6). Если его не применять, то в формулу (13.44) войдут три добавочных бивектора, зависящие от ω . При $\mathbf{k} \neq \mathbf{a}$ в эту формулу войдет добавочный бивектор, пропорциональный $(\mathbf{k} \times \mathbf{r}/r) \wedge (\mathbf{a} \times \mathbf{r}/r)$.

В пункте А настоящего раздела мы доказали, что при произвольном движении частицы она создает вдали от себя электромагнитное поле, совпадающее с определяемым в электродинамике. Здесь же «классическое» поле, задаваемое первым слагаемым в (13.44), оказалось дополненным еще тремя слагаемыми. Отсутствие в формулах пункта А выражений, соответствующих этим трем слагаемым, объясняется двумя причинами. Первая состоит

в том, что пространственная локализация элементов частицы задавалась там лишь с точностью до расстояний порядка r_* , сопоставимых с поперечным размером слоя-носителя второго слагаемого. Поэтому это слагаемое осталось просто «незамеченным». Вторая причина заключается в использовании допущения об отсутствии пространственного вращения частицы, а именно такое вращение и обеспечивает наличие третьего и четвертого слагаемых в (13.44).

Поскольку мы трактуем поле F_s как электромагнитное, наличие у этого поля трех составляющих, дополнительных к «классической» (максвелловской) составляющей, может быть проверено в эксперименте обычными методами. В отношении второго слагаемого в (13.44) нужно иметь в виду, что оно относится к случаю, когда выполняется условие переориентации лучей. Из результатов разд. 5 вытекает, что в этом случае частица обладает ненулевым спином. Следовательно, для обнаружения составляющей поля, описываемой вторым слагаемым, требуется, чтобы спины электронов в исследуемом теле были ориентированы таким образом, чтобы их среднее значение было отличным от нуля. Такая ситуация реализуется, в частности, в ферромагнетиках, поэтому можно высказать предположение, что второе слагаемое имеет отношение к так называемому молекулярному полю Вейсса.

В следующем разделе мы приведем экспериментальные данные, которые подтверждают наличие составляющей поля, описываемой третьим слагаемым в формулах (13.41) и (13.44).

14. Самодействие вращающейся частицы

Собственное поле F_s оказывает влияние не только на окружающие частицу объекты, но и на саму порождающую его частицу. Учтем этот эффект *самодействия* частицы при анализе ее вращения в магнитном поле.

Предварительно выразим радиус r_* частицы через другие ее характеристики.

Воспользуемся найденным в разд. 5 значением спина частицы \bar{K} . Согласно (5.15) и (5.16), модуль спина частицы равен

$$|\bar{K}| = \frac{1}{2} m |o| r_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right). \quad (14.1)$$

Это значение модуля спина является максимально возможным; оно относится к ситуации, когда половина лучей частицы подверглась переориентации в соответствии с условием, сформулированным в разд. 5.

Анализ экспериментальных данных, проведенный в разд. 11, показал, что проекция спина частицы \bar{K} на направление произвольно ориентированного внешнего магнитного поля приблизительно равна по модулю постоянной Планка \hbar (см. (11.19)). Учитывая это, примем в качестве постулата, что модуль спина частицы точно равен постоянной Планка:

$$|\bar{K}| = \hbar. \quad (14.2)$$

Из (14.1) и (14.2) находим:

$$r_* = \frac{2 \hbar}{m |o| r_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right)}. \quad (14.3)$$

Для преобразования выражения (14.3) нам потребуются зависимости (2.2), (3.6), (4.13), (4.16), (6.11), (10.32) и (10.34), которые имеют соответственно вид

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}; \quad \beta q = \pm \frac{o r_*}{c};$$

$$\alpha^{-1} = n_* \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} \right); \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{в системе СГС}); \quad (14.4)$$

$$\beta = \frac{\text{ch } \varphi}{1 - \frac{p_*}{r_*}}; \quad m = m_e; \quad q = -\frac{1}{\text{ch } \varphi}.$$

Первая из зависимостей (14.4) связывает полутолщину спирали p_* с радиусом частицы r_* и количеством спиралей в каждом луче n_* ; эта зависимость является непосредственным следствием принятой конфигурации поперечного сечения луча (см. рис. 2.2). Вторая зависимость вытекает из допущения о том, что при инерциальном движении частицы каждая винтовая нить пересекает физическое пространство частицы всегда в одной и той же его точке (во вторую зависимость входят: β — безразмерный положительный параметр, характеризующий шаг спирали; q — безразмерная величина, определяющая скорость движения луча вдоль своей оси; o — угловая скорость собственного вращения лучей; c — скорость света). Третья зависимость представляет собой определение постоянной тонкой структуры α в рамках нашей модели. Четвертая зависимость — традиционное определение постоянной тонкой структуры α (e — заряд электрона). Пятая зависимость конкретизирует значение параметра β ; она является следствием допущений о том, что все нити частицы — пространственноподобные линии и что характеристика центрального сечения частицы, выражаемая равенством (6.10), имеет конечное значение (φ — величина, определяющая угол $i\varphi$ между направляющим ортом оси луча \mathbf{q}_0 и направляющим ортом оси симметрии частицы \mathbf{i}). Шестая зависимость означает, что масса частицы m отождествляется с массой электрона m_e . Последняя, седьмая зависимость задает связь величины q , от которой зависит скорость луча, с углом $i\varphi$ между осью луча и осью симметрии частицы; при таком значении q ось луча движется в случае инерциального движения частицы в направлении, ортогональном к вектору \mathbf{i} (подробнее об этом сказано в пояснении к равенству (10.34)).

На основании второй, пятой и седьмой зависимостей имеем:

$$|o|r_* = \frac{c}{1 - \frac{p_*}{r_*}}. \quad (14.5)$$

Третья и четвертая зависимости приводят к равенству

$$1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n_*} = \frac{\hbar c}{n_* e^2}. \quad (14.6)$$

С помощью формул (14.3), (14.5) и (14.6), а также первой и шестой из зависимостей (14.4) получаем искомое выражение для радиуса частицы:

$$r_* = 2 n_* \frac{e^2}{m_e c^2} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*} \right). \quad (14.7)$$

Формула (14.7) приводит (при известном n_*) к вполне определенному численному значению радиуса частицы. Это значение радиуса мы сопоставим с экспериментальными данными, касающимися размера электрона, в следующем разделе.

Отметим, что если величина p_*/r_* пренебрежимо мала по сравнению с единицей, то формула (14.7) приобретает более простой вид:

$$r_* \approx 2 n_* \frac{e^2}{m_e c^2} \approx \frac{2 \hbar}{m_e c}, \quad (14.8)$$

здесь учтены первая из зависимостей (14.4) и равенство (14.6). Это значение радиуса частицы r_* может быть получено также посредством приравнивания (по модулю) теоретического значения (11.3) собственного магнитного момента частицы $\bar{\mu}$ и его экспериментального значения (11.16), вытекающего из результатов опыта Штерна–Герлаха.

Теперь перейдем непосредственно к описанию эффекта самодействия частицы.

Рассмотрим частицу, для которой было рассчитано собственное поле F_s в предыдущем разделе. В соответствии с условием (13.11), имеющим вид

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{i} = \text{const}, \quad (14.9)$$

мировая линия L этой частицы прямолинейна и совпадает с осью симметрии частицы $Lin\{\mathbf{i}\}$ (\mathbf{i}_L, \mathbf{i} — направляющие орты мировой линии и оси симметрии).

Будем использовать, как и ранее, инерциальную систему отсчета $\{T = Lin\{\mathbf{i}\}, \Gamma = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}\}$. Ось времени в ней, в силу (14.9), совпадает с мировой линией частицы: $T = L$. В дальнейшем под символом Γ будем понимать то положение физического пространства, при котором оно проходит через точку наблюдения x (ранее мы обозначали это положение символом Γ_x). Пусть по-прежнему: $C = \Gamma \cap T = \Gamma \cap L$ — точка пересечения мировой линии L и физического пространства Γ ; $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$ — вектор в Γ , соединяющий мировую линию L с точкой наблюдения x ; $r = |\mathbf{r}|$.

Будем считать, что вращение рассматриваемой частицы происходит вокруг фиксированной плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a} \in \Gamma$ — некоторый постоянный мнимоединичный вектор с началом в точке C , именуемый направляющим ортом оси вращения частицы.

Опыты, результаты которых мы намереваемся описать с помощью нашей модели, проводятся в условиях воздействия на исследу-

дуремые тела магнитного поля. В таких опытах, очевидно, должен проявляться эффект самодействия частицы, обусловленный добавлением к внешнему магнитному полю собственного магнитного поля частицы. Поэтому далее нас будет интересовать именно магнитная составляющая собственного поля частицы F_s .

В системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ псевдовектор напряженности собственного магнитного поля частицы \overline{H}_s , согласно (9.11), равен

$$\overline{H}_s = \frac{1}{2} F_s \cdot \cdot \varkappa, \quad (14.10)$$

где \varkappa — псевдотензор Леви-Чивита над Γ ; двоеточие — знак бискалярного умножения.

Выражение (13.41), описывающее собственное поле частицы F_s , содержит четыре слагаемых. Три из них — первое, второе и четвертое — включают в себя вектор \mathbf{i} , и поэтому не дают вклада в магнитное поле \overline{H}_s (ибо $\mathbf{i} \cdot \varkappa = \widehat{0}$, где $\widehat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор). Третье слагаемое не содержит \mathbf{i} , и именно оно определяет поле \overline{H}_s . В это слагаемое входит бивектор $(\mathbf{r}/r) \wedge (\mathbf{a} \times \mathbf{r}/r)$.

Вычислим бискалярное произведение данного бивектора на псевдотензор \varkappa .

Для этого воспользуемся ортонормированным правоориентированным базисом $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ в физическом пространстве Γ , который был введен равенствами (13.14). На основании (13.14), (13.15) и определения псевдотензора Леви-Чивита \varkappa можем записать:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \gamma \mathbf{a}_1 + \cos \gamma \mathbf{a}_3; \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{a}_1 = \sin \gamma \mathbf{a}_2;$$

$$\varkappa = \Delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1), \quad (14.11)$$

где γ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{a} , определяемый равенством (13.13); Δ — единичный псевдоскаляр в Γ ($\Delta = 1$ в правоориентированных базисах, в частности, в базисе $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, и $\Delta = -1$ в левоориентированных базисах).

С помощью зависимостей (14.11) вычисляем требуемое бискалярное произведение:

$$\left[\frac{\mathbf{r}}{r} \wedge \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \cdot \cdot \varkappa = 2 \Delta \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (14.12)$$

где применен порядок выполнения бискалярного умножения, указанный в пояснениях к формулам (4.8) и (9.9).

Из (13.41), (14.10) и (14.12) получаем:

$$\bar{H}_s(x) = \Delta \frac{aN\omega}{4\pi cr} \left(\int_{(r_o)} \tilde{\chi}_{r_o} \tilde{N}_{r_o} dr_o \right) \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right). \quad (14.13)$$

Для определения самодействия частицы нужно найти поле \bar{H}_s в точках центрального сечения частицы. Основную сложность при этом представляет вычисление интеграла в (14.13). Чтобы избежать громоздких выкладок, мы примем в последующем ряд упрощающих допущений.

Итак, зафиксируем расположение частицы в пространстве M , одномоментное с точкой наблюдения x . При таком расположении частицы ее центр находится в точке $C = \Gamma \cap L$. Рассмотрим ситуацию, когда точка наблюдения x принадлежит центральному сечению частицы. В этом случае r есть расстояние от точки x до центра частицы. Причем $r \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$, так как каждое из поперечных сечений лучей, образующих центральное сечение частицы, представляет собой совокупность кругов радиуса p_* , центры которых находятся на удалении r_* от центра частицы (см. рис. 2.2).

Винтовые нити, входящие в состав частицы, имеют радиусы r_o , принадлежащие промежутку $[r_* - p_*, r_* + p_*]$. Отсюда и из определения функции $\tilde{\chi}_{r_o}$ (13.42) вытекает, что при $r \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$ интегрирование по переменной r_o в (14.13) должно вестись в пределах от $r_* - p_*$ до r (при этом в подынтегральном выражении будет $\tilde{\chi}_{r_o} = 1$). Следовательно, при $r = r_* - p_*$ интеграл обращается в нуль, а с ростом r он монотонно возрастает (так как подынтегральная функция неотрицательна). При $r = r_* + p_*$ интеграл достигает максимального значения, которое, согласно (12.6), составляет $n_* N_*$. Отсюда заключаем, что поле \bar{H}_s , задаваемое выражением (14.13), принимает при $r = r_* - p_*$ нулевое значение, а при $r = r_* + p_*$ следующее значение, которое будем обозначать через \bar{H}_{s1} :

$$\bar{H}_{s1} = \Delta \frac{e\omega}{c(r_* + p_*)} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (14.14)$$

здесь в соответствии с (13.10) параметр $a_* = aNn_*N_*$ заменен на $4\pi e$ (в системе СГС). Заметим, что в формуле (14.14) ни одна из величин, включая орт \mathbf{r}/r , не зависит от r .

Для упрощения расчетов допустим, что внутри центрального сечения частицы поле \bar{H}_s изменяется с ростом расстояния r *линейным* образом. Поскольку при $r = r_* - p_*$ и при $r = r_* + p_*$

поле \bar{H}_s принимает, соответственно, нулевое значение и значение, равное \bar{H}_{s1} , то данное допущение означает, что

$$\bar{H}_s = \bar{H}_{s1} \frac{1}{2p_*} [r - (r_* - p_*)] \quad \text{при } r \in [r_* - p_*, r_* + p_*], \quad (14.15)$$

где величина \bar{H}_{s1} задается выражением (14.14).

Теперь рассмотрим два случая, когда точка наблюдения x не принадлежит центральному сечению частицы: один из них реализуется при $r \in [0, r_* - p_*)$, другой — при $r \in (r_* + p_*, +\infty)$ (о втором случае мы условились говорить в предыдущем разделе как о нахождении точки x вне центрального сечения частицы). Если $r \in [0, r_* - p_*)$, то, согласно (13.41) и (13.42), собственное поле частицы F_s есть нулевой тензор и, следовательно, $\bar{H}_s = \bar{0}$. При $r \in (r_* + p_*, +\infty)$ собственное поле частицы F_s задается выражением (13.44). Из (13.44), (14.10) и (14.12) следует, что в этом случае функция $\bar{H}_s(r)$ обратно пропорциональна r и что $\bar{H}_s(r) \rightarrow \bar{H}_{s1}$ при $r \rightarrow (r_* + p_*) + 0$.

На основании сказанного заключаем, что график функции $|\bar{H}_s|(r)$ (при фиксированных γ и r/r_*) имеет вид, представленный линией 1 на рис. 14.1.

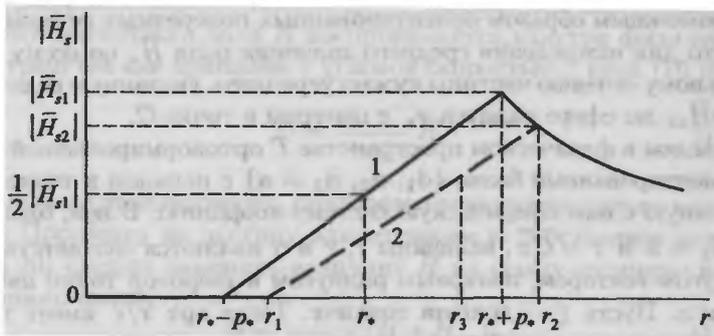


Рис. 14.1. Зависимость собственного магнитного поля \bar{H}_s вращающейся частицы от расстояния r до ее центра: 1 — без «обрезания» множества значений временной переменной l ; 2 — при таком «обрезании».

В разд. 10 эффект вращения частицы под действием магнитного поля проанализирован в предположении, что поле является однородным. При этом было учтено только внешнее магнитное поле.

Для того, чтобы учесть самодействие частицы, включим в расчеты собственное магнитное поле частицы \overline{H}_s . Причем ради упрощения вычислений будем использовать не само поле \overline{H}_s , а его среднее значение по центральному сечению частицы (как бы принимая, что внутри центрального сечения оно тоже является однородным). Найдем это среднее значение поля \overline{H}_s .

При рассматриваемом расположении частицы (одномоментном с x) центр частицы находится в точке $C = \Gamma \cap L$. Благодаря $\Gamma \ni C$ и $\Gamma = Lin^\perp\{\mathbf{i}\}$, сечение частицы гиперплоскостью Γ есть ее центральное сечение. Напомним, что центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей; каждое такое сечение представляет собой совокупность из n_* кругов радиуса r_* , которые являются сечениями спиралей, образующих луч, причем центры кругов лежат на окружности радиуса r_* с центром, совпадающим с центром частицы (см. рис. 2.2 и 4.1).

В силу допущения о линейной зависимости поля \overline{H}_s от r , среднее значение поля на каждом из кругов, составляющих поперечное сечение луча, примерно равно его значению в центре круга, то есть примерно равно $\overline{H}_s(r_*)$. Из (14.15) следует, что $\overline{H}_s(r_*) = (1/2)\overline{H}_{s1}$ (см. рис. 14.1). Так как центральное сечение частицы состоит из всевозможным образом ориентированных поперечных сечений лучей, то для нахождения среднего значения поля \overline{H}_s по всему центральному сечению частицы нужно усреднить указанную величину $(1/2)\overline{H}_{s1}$ по сфере радиуса r_* с центром в точке C .

Введем в физическом пространстве Γ ортонормированный правоориентированный базис $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 = \mathbf{a}\}$ с началом в точке C и связанную с ним сферическую систему координат. В ней, благодаря $\mathbf{d}_3 = \mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = \overrightarrow{Cx}$, величины \mathbf{r} , r и γ являются соответственно радиусом-вектором, полярным радиусом и широтой точки наблюдения x . Пусть ξ — долгота точки x . Тогда орт \mathbf{r}/r имеет такое представление в этом базисе:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \gamma \cos \xi \mathbf{d}_1 + \sin \gamma \sin \xi \mathbf{d}_2 + \cos \gamma \mathbf{a}. \quad (14.16)$$

Среднее значение поля \overline{H}_s по центральному сечению частицы, которое обозначим символом \overline{H}_{s**} , может быть найдено в соответствии со сказанным выше как среднее значение величины $(1/2)\overline{H}_{s1}$

по сфере радиуса r_* :

$$\overline{H}_{s*} = \frac{1}{4\pi r_*^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{H}_{s1} r_*^2 \sin \gamma d\gamma d\xi, \quad (14.17)$$

здесь перед интегралами стоит нормировочный множитель, знаменатель в котором равен площади сферы радиуса r_* ; $r_*^2 \sin \gamma d\gamma d\xi$ — элемент площади этой сферы во введенных сферических координатах.

С помощью зависимостей (14.14), (14.16), (14.17) и первого из равенств (14.4) находим:

$$\overline{H}_{s*} = -A \frac{e}{3cr_*} \overline{\omega}, \quad (14.18)$$

где

$$A = \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{n_*}}; \quad (14.19)$$

$\overline{\omega} = \Delta \omega \mathbf{a}$ — угловая скорость вращения частицы (см. пояснение к (13.12), $\overline{\omega} \in \Gamma$, $\overline{\omega} = \text{const}$).

В разд. 10 показано, что вращение частицы под действием однородного магнитного поля \overline{H} воспринимается изнутри физического пространства как вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вида (10.10):

$$\overline{\omega} = -\frac{e}{m_e c} \overline{H}. \quad (14.20)$$

При выводе этой формулы, повторим, было учтено только внешнее поле. Поскольку на частицу влияет также ее собственное поле, то в (14.20) следует заменить величину \overline{H} на сумму внешнего и собственного полей:

$$\overline{\omega} = -\frac{e}{m_e c} (\overline{H} + \overline{H}_{s*}). \quad (14.21)$$

Подставим в (14.21) значение величины \overline{H}_{s*} из (14.18) и воспользуемся выражением (14.7) для радиуса частицы r_* . После несложных преобразований получаем:

$$\overline{\omega} = -\frac{1}{1 - A \frac{1}{6n_*(1 - \sin \frac{\pi}{n_*})}} \frac{e}{m_e c} \overline{H}. \quad (14.22)$$

Согласно (4.14) $n_* = 137$. При таком значении n_* из (14.19) и (14.22) находим:

$$\bar{\omega} \approx -1,00122 \frac{e}{m_e c} \bar{H}. \quad (14.23)$$

Сопоставление формул (14.20), (14.23) с экспериментальной зависимостью (11.13) позволяет заключить, что учет самодействия частицы приводит к уменьшению с 0,1% до 0,006% относительной погрешности теоретического значения величины $|\bar{\omega}|$.

Покажем, каким образом можно получить еще более точное значение угловой скорости частицы.

Из теории относительности известно, что, благодаря протяженности пространства Минковского во временном направлении, каждое тело присутствует в этом пространстве сразу во всех своих временных состояниях. Другими словами, настоящее состояние тела сосуществует со всеми его прошлыми и будущими состояниями. Понятно, что для того, чтобы два ближайших друг к другу состояния тела могли быть различимы между собой, они должны быть разделены каким-то промежутком времени. Поэтому представляется целесообразным исследовать ситуацию, при которой совокупность состояний тела, отвечающих разным моментам времени, образует в пространстве Минковского не непрерывное, а дискретное множество. При этом в качестве временного промежутка Δl , разделяющего ближайшие состояния тела, естественно принять такой промежуток, который является объективно выделенным и минимальным.

Докажем, что в нашей модели в качестве такого промежутка может быть принята проекция шага спирали Ш на ось симметрии частицы, разделенная на количество спиралей n_* в одном луче:

$$\Delta l = \frac{\text{Ш ch } \varphi}{n_*}. \quad (14.24)$$

Доказательство. Действительно, фрагментом частицы, имеющим наименьший ненулевой размер, является спираль. При этом каждая из спиралей, составляющих луч частицы, обладает в направлении оси луча «толщиной», равной $\text{Ш}/n_*$ (в этом легко убедиться с помощью рис. 6.1, если учесть, что отрезки AB и $A'B'$ на рисунке параллельны оси луча). А так как ось луча составляет угол $i\varphi$ с осью симметрии частицы, то проекция этой «толщины» на ось симметрии равна как раз указанной величине Δl . На основании

Формул (2.2), (2.7) и (6.11) имеем:

$$\frac{p_*}{r_*} = \sin \frac{\pi}{n_*}; \quad \text{III} = \frac{2\pi r_*}{\beta}; \quad \beta = \frac{\text{ch } \varphi}{1 - \frac{p_*}{r_*}}.$$

С помощью этих зависимостей преобразуем выражение (14.24) к виду

$$\Delta l = \frac{2\pi r_*}{n_*} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n_*} \right). \quad (14.25)$$

Отсюда вытекает, что рассматриваемая величина Δl одинакова для всех лучей и зависит только от двух фиксированных параметров частицы r_* и n_* . Кроме того, она непосредственно связана с наименьшим (во времениподобном направлении) размером фрагмента частицы. Следовательно, эта величина в самом деле является минимальным объективно выделенным временным промежутком в настоящей модели. ■

Собственное поле частицы F_s , согласно определению (13.2), вычисляется с использованием операции интегрирования вдоль мировой линии частицы. Между тем, если расположения частицы в пространстве Минковского образуют не непрерывное, а дискретное множество, то поле F_s должно вычисляться посредством не операции интегрирования, а операции суммирования по расположениям частицы. Однако вторая операция значительно сложнее первой, поэтому мы не будем отказываться от интегрирования, а поступим следующим образом.

Будем вычислять поле F_s по-прежнему путем интегрирования, но при этом будем учитывать только те расположения частицы, которые отстоят в прошлое от рассматриваемого момента времени не менее, чем на Δl . Иначе говоря, мы продолжим считать, что расположения частицы в пространстве M переходят друг в друга непрерывным образом, но «обрежем» отвечающее им множество значений переменной интегрирования l в (13.2) на величину Δl вблизи рассматриваемого момента времени l_x . Таким образом, далее будем считать, что $l \in (-\infty, l_x - \Delta l]$ (а не $l \in (-\infty, l_x)$), как следует из ограничения (12.14) при $r = r_o$.

Благодаря такому «обрезанию», мы в какой-то мере учтем упомянутую дискретность расположений частицы, потому что это «обрезание» может быть интерпретировано как отражение того факта,

что расположение частицы, непосредственно предшествующее рассматриваемому моменту времени, находится от этого момента на конечном временном расстоянии Δl .

Отметим, что такому «обрезанию» может быть дано и иное обоснование. Дело в том, что если самодействие частицы не ограничено «обрезанием», то это означает, что каждое расположение частицы не только подвержено действию со стороны предшествующих расположений, но и само воздействует на себя. Возможно, что в реальности такое воздействие не имеет места. Исключить его и позволяет процедура «обрезания».

Указанное «обрезание», как мы сейчас покажем, приводит к изменению в формуле (14.13) пределов интегрирования по переменной r_0 .

Согласно теореме 13.1 нити частицы, проходящие через точку x , подчиняются зависимости (13.3). Преобразуем эту зависимость к виду

$$r_0 = \sqrt{r^2 - \text{th}^2 \varphi (l_x - l)^2}, \quad (14.26)$$

где l_x и l — временные координаты точки наблюдения x и центра частицы в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ (l_x — фиксированная величина, l служит переменной интегрирования в выражении (13.2)).

Собственное поле частицы F_s , как следует из (13.40), (6.11) и (12.30), зависит от гиперболических функций $\text{sh} \varphi$ и $\text{ch} \varphi$ и определяется с использованием предельного перехода при $\Phi \rightarrow +\infty$ (где Φ — верхний предел интегрирования по φ). Поэтому основной вклад в поле F_s вносят нити, которые характеризуются большими значениями угловой переменной φ . Для таких нитей, в силу $\text{th} \varphi \rightarrow 1$ при $\varphi \rightarrow +\infty$, выражение (14.26) может быть переписано в форме

$$r_0 = \sqrt{r^2 - (l_x - l)^2}. \quad (14.27)$$

При расчете поля F_s с применением процедуры «обрезания» наибольшее значение величины l равно $l_x - \Delta l$. Поэтому из (14.27) вытекает, что радиусы r_0 указанных нитей ограничены сверху величиной

$$r_{0 \max} = \sqrt{r^2 - (\Delta l)^2}. \quad (14.28)$$

Таким образом, в случае $l \leq l_x - \Delta l$ ограничение $r_0 \leq r_{0 \max}$ является необходимым условием для того, чтобы среди нитей с большими значениями φ нашлись такие, которые проходят через точку x и тем самым дают вклад в поле F_s . А так как радиусы всех нитей

удовлетворяют неравенству $r_o \geq r_* - p_*$, то для существования таких нитей должно выполняться условие $r_o \max \geq r_* - p_*$. Из этого условия и из (14.28) следует, что среди нитей с большими φ нет таких, которые проходили бы через точку x в случае $r < r_1$, где

$$r_1 = \sqrt{(r_* - p_*)^2 + (\Delta l)^2}. \quad (14.29)$$

Вместе с тем, поскольку $r_o \leq r_* + p_*$ для всех нитей, то ограничение $r_o \leq r_o \max$ заведомо выполняется при любых $r \geq r_2$, где

$$r_2 = \sqrt{(r_* + p_*)^2 + (\Delta l)^2}. \quad (14.30)$$

На основании изложенного приходим к такому выводу. При $r \in [0, r_1)$ собственное магнитное поле частицы \bar{H}_s принимает нулевое значение (так как в этом случае не имеется нитей с большими φ , которые проходили бы через точку x). При $r \in [r_1, r_2]$ интегрирование по переменной r_o в формуле (14.13), задающей поле \bar{H}_s , должно вестись в пределах от $r_* - p_*$ до $r_o \max$ (а не до r , как принималось ранее). Отсюда с учетом (14.28)–(14.30) заключаем, что при $r = r_1$ интеграл в (14.13) и вместе с ним поле \bar{H}_s имеют нулевое значение, а при $r = r_2$, когда верхний предел интегрирования по r_o есть $r_* + p_*$, интеграл в соответствии с (12.6) становится равным $n_* N_*$ и поле \bar{H}_s получает следующее значение, которое обозначим через \bar{H}_{s2} :

$$\bar{H}_{s2} = \Delta \frac{e\omega}{cr_2} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right), \quad (14.31)$$

здесь параметру $a_* = aNn_*N_*$ придано значение $4\pi e$ (как и в (14.14)). При $r \in (r_2, +\infty)$ поле \bar{H}_s может быть рассчитано по-прежнему с помощью формул (13.44), (14.10) и (14.12), поэтому при таких значениях r оно имеет тот же вид, что и без процедуры «обрезания».

Допустим, подобно тому, как делали ранее, что при $r \in [r_1, r_2]$ поле \bar{H}_s линейно изменяется с ростом r от нулевого значения при $r = r_1$ до значения \bar{H}_{s2} при $r = r_2$. Тогда имеем:

$$\bar{H}_s = \bar{H}_{s2} \frac{1}{r_2 - r_1} (r - r_1) \quad \text{при } r \in [r_1, r_2]. \quad (14.32)$$

Итак, при введении «обрезания» по временной переменной l график функции $|\bar{H}_s|(r)$ (при фиксированных γ и \mathbf{r}/r) имеет вид, который иллюстрируется линией 2 на рис. 14.1.

Вычислим среднее значение поля \overline{H}_s по центральному сечению частицы.

Первое из равенств (14.4) при $n_* = 137$ приводит к зависимости

$$\frac{p_*}{r_*} = \sin \frac{\pi}{n_*} \approx \frac{\pi}{n_*} \approx \frac{1}{44}. \quad (14.33)$$

С помощью этой зависимости и формул (14.25), (14.29) находим:

$$r_1 - (r_* - p_*) \approx 2 \left(\frac{p_*}{r_*} \right) p_* \approx \frac{1}{22} p_*. \quad (14.34)$$

Отсюда следует, что величина r_1 отличается от $r_* - p_*$ менее чем на $1/20$ часть радиуса p_* кругов, образующих поперечное сечение луча частицы.

При расчете среднего значения поля \overline{H}_s по центральному сечению частицы величина r имеет смысл расстояния от центра частицы до точек центрального сечения. Обозначим: $r_3 = r_* + (r_* - r_1)$ (на рис. 14.1 точки на оси абсцисс с координатами r_1 и r_3 равноудалены от точки с координатой r_*). Рассмотрим круги, образующие поперечное сечение луча. Их центры находятся на расстоянии r_* от центра частицы, и все круги имеют одинаковый радиус p_* . Из этого с учетом (14.34) вытекает, что площади их участков, для которых выполняется $r \in [r_* - p_*, r_1)$ или $r \in (r_3, r_* + p_*]$, составляют всего $1/170$ часть площади круга. Значит, при усреднении поля \overline{H}_s по поперечному сечению луча можно пренебречь вкладами этих участков. На остальных частях кругов, то есть при $r \in [r_1, r_3]$, функция $\overline{H}_s(r)$, по сделанному нами допущению, является линейной. Поэтому среднее значение функции $\overline{H}_s(r)$ на каждом из кругов примерно равно ее значению в центре круга, то есть примерно равно $\overline{H}_s(r_*)$. Из (14.32) имеем:

$$\overline{H}_s(r_*) = \overline{H}_{s2} \frac{r_* - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Подставим эту величину в формулу (14.17) вместо величины $(1/2)\overline{H}_{s1}$. Произведя необходимые вычисления с использованием формул (14.16), (14.25) и (14.29) – (14.31), вновь получаем для среднего значения \overline{H}_{s*} поля \overline{H}_s выражение (14.18), но теперь в нем параметр A оказывается равным

$$A = 2 \frac{r_*(r_* - r_1)}{r_2(r_2 - r_1)} \approx \frac{1 + \sin \frac{\pi}{n_*} - \sin^2 \frac{\pi}{n_*}}{1 + 4 \sin \frac{\pi}{n_*} + 6 \sin^2 \frac{\pi}{n_*}}, \quad (14.35)$$

здесь в числителе и знаменателе опущены слагаемые, содержащие малые величины $\sin(\pi/n_*)$ и π/n_* в степени выше второй (см. (14.33)).

Благодаря тому, что в данном случае величина \overline{H}_{s*} описывается тем же выражением (14.18), что и ранее, использование ее в формуле (14.21) снова приводит к такой зависимости между угловой скоростью частицы $\overline{\omega}$ и действующим на частицу внешним магнитным полем \overline{H} , которая имеет вид (14.22). Эта зависимость при $n_* = 137$ и значении параметра A , задаваемом выражением (14.35), приобретает форму

$$\overline{\omega} \approx -1,0011640 \frac{e}{m_e c} \overline{H}. \quad (14.36)$$

Из сравнения теоретической зависимости (14.36) с экспериментальной зависимостью

$$\overline{\omega} \approx -1,0011597 \frac{e}{m_e c} \overline{H} \quad (14.37)$$

вытекает, что учет самодействия частицы, дополненный «обрезанием» по временной переменной, позволяет получить значение величины $|\overline{\omega}|$ с относительной погрешностью, меньшей $5 \cdot 10^{-6}$, то есть на порядок точнее, чем без использования «обрезания».

Процедура вычисления угловой скорости $\overline{\omega}$ с еще большей точностью заключается в следующем. Нужно найти с помощью выражения (14.13) собственное магнитное поле частицы \overline{H}_s внутри центрального сечения частицы (причем без привлечения примененных выше упрощений) и затем решить уравнение движения (8.8), подставив в него найденное значение \overline{H}_s .

На этом пути может возникнуть ряд затруднений. Так, при вычислении поля \overline{H}_s потребуются использовать для величины N_{r_0} формулу (12.5). Наличие в ней характеристик частицы σ и δ , определяемых зависимостями (6.3) и (12.3), делает процедуру вычисления интеграла в (14.13) весьма трудоемкой. Кроме того, не исключено, что при расчете поля \overline{H}_s вообще следует проводить не интегрирование, а суммирование по расположениям частицы (если эти расположения образуют в пространстве Минковского не непрерывное, а дискретное множество, о чем сказано выше). В таком случае расчет поля \overline{H}_s значительно усложнится. Нужно также иметь в виду еще одно обстоятельство. Согласно результатам разд. 9 и 10,

угловая скорость частицы определяется величиной магнитного поля, которое действует в мгновенной сопутствующей частице инерциальной системе отсчета. Однако в связи с тем, что в опытах по изучению свойств электронов последние движутся относительно лабораторной системы отсчета, магнитное поле, которое фактически действует на них, отличается от поля, измеряемого в лабораторной системе отсчета. Поэтому в окончательную формулу для угловой скорости частицы должны быть введены соответствующие релятивистские поправки. Наряду с этим следует учесть также магнитное поле, порождаемое другими частицами. В связи с большим объемом вычислений, требуемых для учета перечисленных факторов, проведение этих вычислений не входит в задачу настоящего исследования.

Продемонстрированное согласие теоретических результатов с известными опытными данными свидетельствует о том, что найденное значение собственного магнитного поля частицы \bar{H}_s адекватно реальности. Остановимся на некоторых свойствах этого поля. В последующих выкладках будем пренебрегать малыми величинами порядка p_*/r_* и $1/n_*$ и не будем учитывать процедуру «обрезания».

При таких упрощениях среднее значение поля \bar{H}_s по центральному сечению частицы имеет, согласно зависимостям (14.8), (14.18), (14.19) и (14.21), следующий вид:

$$\bar{H}_{s*} \approx \frac{1}{6n_*} \bar{H} = \frac{1}{822} \bar{H} \quad \text{при } n_* = 137. \quad (14.38)$$

Отсюда заключаем, что величина \bar{H}_{s*} , обуславливающая самодействие частицы, является малой добавкой к внешнему магнитному полю \bar{H} , причем она сонаправлена с внешним полем, и поэтому усиливает действие его на частицу.

Теперь рассмотрим поведение поля \bar{H}_s в физическом пространстве Γ вне центрального сечения частицы.

На основании (13.43), (13.44), (14.10) и (14.12) имеем:

$$\bar{H}_s = \Delta \frac{e\omega}{cr} \left(\cos \gamma \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{a} \right) \quad \text{при } r > r_* + p_*. \quad (14.39)$$

Поскольку \mathbf{r}/r и \mathbf{a} — мнимоединичные векторы и γ — угол между ними (определяемый равенством (13.13)), то

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = -1; \quad \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\cos \gamma.$$

Отсюда и из (14.39) находим:

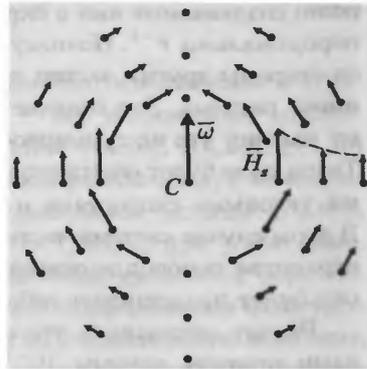
$$\begin{aligned} \overline{H}_s \cdot \mathbf{r} &= 0; & |\overline{H}_s| &= \sqrt{|\overline{H}_s \cdot \overline{H}_s|} = \frac{|e| \cdot |\omega|}{cr} \sin \gamma; \\ -(\overline{H}_s \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} &\approx \frac{e^2}{m_e c^2 r} \sin^2 \gamma \overline{H}, \end{aligned} \quad (14.40)$$

где во втором выражении учтено, что $\sin \gamma \geq 0$ (так как $\gamma \in [0, \pi]$); в третьем выражении использованы равенство $\Delta \omega \mathbf{a} = \overline{\omega}$ и зависимости (14.21) и (14.38). Величина $-(\overline{H}_s \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}$ представляет собой проекцию псевдовектора \overline{H}_s на ось вращения частицы $Lin\{\mathbf{a}\}$ (знак минус связан с отрицательной определенностью метрической формы в Γ).

Выражения (14.39) и (14.40) позволяют сделать следующие выводы относительно свойств собственного магнитного поля вращающейся частицы вне ее центрального сечения (рис. 14.2).

Рис. 14.2. Собственное магнитное поле \overline{H}_s вращающейся частицы вне центрального сечения частицы.

C — центр частицы; $\overline{\omega}$ — угловая скорость частицы; показанное взаимное направление $\overline{\omega}$ и \overline{H}_s соответствует частице с отрицательным электрическим зарядом (при положительном заряде поле \overline{H}_s имеет противоположное направление).



Поле \overline{H}_s имеет ось симметрии, совпадающую с осью вращения частицы. Оно убывает с удалением от центра частицы как r^{-1} . В каждой точке $x \in \Gamma$ псевдовектор \overline{H}_s лежит в плоскости, проходящей через эту точку и ось вращения, и направлен перпендикулярно вектору \mathbf{r} , соединяющему центр частицы с точкой x . При каждом фиксированном r поле \overline{H}_s принимает наибольшее по модулю значение при $\gamma = \pi/2$, то есть в плоскости, проходящей через центр частицы и ортогональной вектору \mathbf{a} . На оси вращения частицы поле \overline{H}_s имеет нулевое значение. Проекция псевдовектора \overline{H}_s на ось вращения частицы сонаправлена с внешним магнитным полем \overline{H} .

В заключение настоящего раздела рассмотрим магнитные свойства системы частиц.

Пусть имеется система частиц, центры которых равномерно распределены по некоторой области физического пространства. Подействуем на эту систему однородным магнитным полем \bar{H} . Тогда все частицы придут во вращение с одинаковыми угловыми скоростями. При этом каждая частица возбуждает вокруг себя некоторое магнитное поле. В итоге на каждую частицу будут действовать, помимо поля \bar{H} , ее собственное поле (которое в силу (14.38) пренебрежимо мало по сравнению с \bar{H}), а также поля, создаваемые другими частицами. Согласно сказанному выше, проекции этих полей на направление осей вращения частиц сонаправлены с внешним магнитным полем; следовательно, эти поля будут усиливать вращение частиц.

Количество частиц, центры которых находятся на расстоянии r от центра произвольной частицы системы, пропорционально r^2 , а поля, создаваемые ими в окрестности центра данной частицы, пропорциональны r^{-1} . Поэтому на каждую частицу системы действует со стороны других частиц поле тем большее, чем больший размер имеет система. Это означает, что можно образовать такую систему частиц, что их суммарное поле сравняется с внешним полем \bar{H} . Такое поле будет обеспечивать вращение всех частиц с постоянными угловыми скоростями и после выключения внешнего поля \bar{H} . В этом случае система частиц будет порождать в физическом пространстве самоподдерживающееся магнитное поле, иначе говоря, она будет представлять собой постоянный магнит.

Расчет показывает, что если среднее расстояние между частицами принять равным 10^{-10} м, то для поддержания постоянного магнитного поля оказывается достаточным, чтобы система частиц имела линейные размеры порядка 10^{-8} м. Следует подчеркнуть, что применительно к электронам данный результат может рассматриваться только как оценочный, так как он не учитывает целый ряд факторов, имеющих место в реальных телах. К ним относятся: наличие положительных зарядов, которые могут создавать магнитное поле противоположного знака, тепловое движение атомов, которое может приводить к рассогласованию направлений осей вращения зарядов, наличие у собственного поля частицы F_s не учтенных нами слагаемых, причем не только тех, которые входят в формулу (13.44), но также тех, которые связаны с орбитальным движением электронов и не были рассмотрены нами.

Отметим, что экспериментальная зависимость (14.37), с которой мы сравнивали теоретические результаты, получена в опытах, основанных на методе электронного парамагнитного резонанса. В этом методе используются атомные пучки, в которых расстояния между атомами достаточно велики. Вследствие этого, взаимное влияние электронов, относящихся к разным атомам, оказывается малым. Мало также влияние друг на друга электронов, принадлежащих одному атому, из-за малости их количества. Поэтому мы не допустили большой ошибки, не приняв во внимание при расчете вращения частицы магнитное поле, создаваемое другими частицами.

Итак, результаты настоящего раздела и разд. 9–11 приводят к следующему заключению. Если на частицу действует однородное и неизменное во времени магнитное поле, то частица вращается в пространстве Минковского вокруг фиксированной псевдоевклидовой плоскости. Изнутри трехмерного физического пространства это движение частицы воспринимается как вращение с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$, пропорциональной магнитному полю \bar{H} :

$$\bar{\omega} = -\left(\frac{g}{2}\right) \frac{e}{m_e c} \bar{H}, \quad (14.41)$$

здесь для числового коэффициента применено используемое в атомной физике обозначение $g/2$, где g — так называемый множитель Ланде, или g -фактор. Из выражений (14.20), (14.23), (14.36) и (14.41) вытекает, что в нашей модели коэффициент $g/2$ имеет такие значения: при пренебрежении самодействием частицы $g/2 = 1$, при учете самодействия частицы $g/2 \approx 1,00122$, при учете самодействия и «обрезании» множества значений временной переменной $g/2 \approx 1,0011640$. Последнее значение коэффициента отличается от его экспериментального значения на относительную величину, не превышающую $5 \cdot 10^{-6}$. Система, состоящая из рассматриваемых частиц, может создавать самоподдерживающееся магнитное поле.

15. Радиус частицы

Радиус частицы r_* , согласно (14.8), равен

$$r_* \approx 2n_* r_e \approx 7,7 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \quad (15.1)$$

где $n_* = 137$ — количество спиралей в каждом луче частицы (см. (4.14)); $r_e = e^2/(m_e c^2) \approx 2,8 \cdot 10^{-15}$ м — так называемый классический радиус электрона (это название условное, величина r_e не связывается в атомной физике с реальным размером электрона); e и m_e — заряд и масса электрона.

Результаты разд. 11 и 14 свидетельствуют о том, что рассматриваемая нами частица служит хорошей моделью электрона. Между тем численное значение радиуса частицы r_* (15.1) существенно превосходит тот верхний предел возможного размера электрона, который, как считается в физике, составляет 10^{-19} м [10]. Приведем соображение, показывающее, что эксперименты, на которых базируется заключение об ограничении размера электрона, в действительности не доказывают, что размер электрона обязательно является меньшим установленного предела.

Дело в том, что в опытах размер электрона оценивается по косвенным данным. Обычно изучается процесс «столкновения» электронов. Поскольку электроны обладают одинаковыми зарядами, между ними действуют силы отталкивания. Поэтому электроны, выпущенные навстречу друг другу, сблизившись до некоторого минимального расстояния, затем разлетаются в противоположные стороны. Увеличением начальной скорости электронов достигается уменьшение минимального расстояния между ними. Предполагается, что как только это минимальное расстояние достигнет величины, близкой к размеру электрона, взаимодействие между электронами в области их наибольшего сближения станет отличным от кулоновского. Это отличие и пытаются зарегистрировать в опытах. К настоящему времени установлено, что отличие взаимодействия от кулоновского не наблюдается при сближении электронов вплоть до расстояний порядка 10^{-19} м, на основании чего и делается заключение о том, что размер электрона не превышает данной величины.

Однако следует отметить, что если электроны являются объектами взаимопроницаемыми, как это имеет место в нашей модели,

то данный результат вовсе не устанавливает какого-либо ограничения на размер электрона. Он просто говорит о том, что электроны могут свободно, без искажений проходить сквозь друг друга, взаимодействуя по закону Кулона при любом взаимном расположении.

16. Собственная энергия частицы

Скорость \mathbf{j} свободной частицы, движущейся инерциально, задается формулой (3.2):

$$\mathbf{j} = \mathbf{i} + q\mathbf{q}_0 + r_0 \frac{o}{c} [-\sin \nu \mathbf{e}_1 + \cos \nu \mathbf{e}_2], \quad (16.1)$$

здесь первые два слагаемые описывают поступательное движение луча, а оставшееся выражение — вращение луча вокруг своей оси (вращение происходит внутри своего для каждого луча трехмерного подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$; угловая скорость вращения луча o одинакова для всех лучей и представляет собой производную угла поворота луча по собственному времени частицы t_*). При таком движении частицы ее мировая линия L прямолинейна и совпадает с осью симметрии частицы, а векторы \mathbf{i} , \mathbf{q}_0 , \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 являются постоянными (см. разд. 3). Отметим, что для каждого луча скорость поступательного и скорость вращательного движений взаимно ортогональны, так как $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\}$.

Согласно принятому в разд. 4 допущению, все спирали, из которых состоят лучи частицы, имеют одну и ту же массу m_* , равномерно распределенную по их объему с плотностью ρ .

Назовем *собственной энергией луча* E_* его кинетическую энергию относительно пространства Минковского, рассчитанную для случая, когда частица является свободной и движется инерциально:

$$E_* = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \rho c^2 |\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}| d\Omega, \quad (16.2)$$

где Ω — часть подпространства $C_{\mathbf{q}_0}$, занимаемая лучом; $d\Omega$ — элементарный объем множества Ω ; ρ — плотность; \mathbf{j} — скорость частицы, задаваемая выражением (16.1); множитель c^2 введен с целью придания безразмерной величине \mathbf{j} обычной размерности скорости (см. пояснение к формуле (3.2)).

Вычислим произведение $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$.

Согласно формулам (5.1) и (10.34) имеем:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{q}_0 = \text{ch } \varphi; \quad q = -\frac{1}{\text{ch } \varphi}; \quad (16.3)$$

напомним, что $i\varphi$ — угол между направляющим ортом оси луча \mathbf{q}_0 и направляющим ортом оси симметрии частицы \mathbf{i} (i — мнимая

единица). Векторы \mathbf{i} , \mathbf{q}_0 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 удовлетворяют зависимостям

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 1; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1; \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned}$$

Учитывая все эти равенства, на основании (16.1) находим:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -\text{th}^2 \varphi - \left(\frac{r_0 o}{c} \right)^2, \quad (16.4)$$

где первое слагаемое в правой части обусловлено поступательной составляющей скорости \mathbf{j} , а второе слагаемое — ее вращательной составляющей.

Внесем в (16.2) найденное значение величины $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ и представим собственную энергию луча E_* в виде суммы двух слагаемых:

$$E_* = E_{*\Pi} + E_{*B}, \quad (16.5)$$

здесь

$$E_{*\Pi} = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \rho c^2 \text{th}^2 \varphi d\Omega; \quad (16.6)$$

$$E_{*B} = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \rho (r_0 o)^2 d\Omega. \quad (16.7)$$

В соответствии со смыслом слагаемых, входящих в формулу (16.4), величина $E_{*\Pi}$ зависит только от поступательной составляющей скорости \mathbf{j} , а величина E_{*B} — только от ее вращательной составляющей. Поэтому будем называть величину $E_{*\Pi}$ поступательной составляющей, а величину E_{*B} вращательной составляющей собственной энергии луча. Рассмотрим их по отдельности.

В выражении (16.6) подынтегральная функция зависит только от угловой переменной φ . Последняя принимает для каждого луча фиксированное значение, поэтому функция $\text{th}^2 \varphi$ может быть вынесена за знак интеграла. Вынесем ее вместе с константой c^2 . Оставшийся интеграл от плотности ρ по объему луча Ω равен массе луча. А так как луч состоит из n_* штук одинаковых спиралей с массой m_* , то масса луча и вместе с ней интеграл равны $n_* m_*$. Следовательно, поступательная составляющая собственной энергии луча равна

$$E_{*\Pi} = \frac{1}{2} n_* m_* c^2 \text{th}^2 \varphi. \quad (16.8)$$

Теперь рассмотрим вращательную составляющую. В выражении (16.7) вынесем за знак интеграла постоянную величину o^2 и, принимая во внимание, что луч состоит из n_* одинаковых спиралей, преобразуем выражение (16.7) к виду

$$E_{*в} = \frac{1}{2} n_* o^2 \int_{(\Omega_0)} \rho r_o^2 d\Omega,$$

где Ω_0 — часть множества Ω , занимаемая одной из спиралей луча. Фигурирующий здесь интеграл совпадает с интегралом в формуле (4.4), описывающей спин луча K_* . Вычисляя этот интеграл тем же способом, что и в разд. 4, получаем для вращательной составляющей собственной энергии луча следующее выражение:

$$E_{*в} = \frac{1}{2} n_* m_* c^2 \left(\frac{or_*}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right], \quad (16.9)$$

где r_* — радиус частицы; p_* — полутолщина спирали.

Суммарную собственную энергию всех лучей частицы назовем *собственной энергией частицы* и обозначим через E_o . Энергия E_o может быть вычислена посредством интегрирования собственной энергии луча E_* по всем значениям угловых координат φ , θ и η , задающих положения осей лучей в пространстве Минковского (см. разд. 6):

$$E_o = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} E_* dZ = \frac{N}{Z} \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_* \text{sh}^2 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta d\eta, \quad (16.10)$$

здесь символ Z обозначает одновременно одну из пол единичной псевдосферы и ее площадь; dZ — элемент площади полы Z (dZ задается выражением (6.5) при $R = 1$); N — общее количество лучей, из которых состоит частица; учтено, что элемент полы Z , имеющий площадь dZ , пересекает $(N/Z)dZ$ осей лучей. Согласно (6.6) имеем:

$$Z = \int_{(Z)} dZ = 4\pi \lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \int_0^\Phi \text{sh}^2 \varphi d\varphi. \quad (16.11)$$

С помощью зависимостей (16.5) и (16.8)–(16.11) находим, что собственная энергия частицы может быть представлена, как и собственная энергия луча, в виде суммы двух слагаемых:

$$E_{\circ} = E_{\Pi} + E_{\text{В}} \quad (16.12)$$

при

$$E_{\Pi} = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} E_{*\Pi} dZ = \frac{1}{2} mc^2; \quad (16.13)$$

$$E_{\text{В}} = \int_{(Z)} \frac{N}{Z} E_{*\text{В}} dZ = \frac{1}{2} mc^2 \left(\frac{or_*}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right], \quad (16.14)$$

где $m = Nn_*m_*$ — масса частицы. Величины E_{Π} и $E_{\text{В}}$ так же, как $E_{*\Pi}$ и $E_{*\text{В}}$, зависят соответственно только от поступательной и только от вращательной составляющих скорости \mathbf{j} , поэтому будем именовать их поступательной и вращательной составляющими собственной энергии частицы.

При выводе выражений (16.13) и (16.14) отношение пределов двух функций (при $\Phi \rightarrow 0$) заменено на предел их отношения и учтено, что

$$\lim_{\Phi \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\Phi} \text{th}^2 \varphi \text{sh}^2 \varphi d\varphi / \int_0^{\Phi} \text{sh}^2 \varphi d\varphi \right] = 1.$$

Выражение (16.14), заметим, может быть получено и без помощи интегрирования: поскольку, согласно (16.9), величина $E_{*\text{В}}$ одинакова для всех лучей частицы, то вращательная составляющая $E_{\text{В}}$ собственной энергии частицы может быть найдена простым умножением правой части равенства (16.9) на общее число лучей N .

Зависимости (3.6), (6.11) и (10.34) дают

$$\left| \frac{or_*}{c} \right| = \beta |q| = \frac{1}{1 - \frac{p_*}{r_*}}. \quad (16.15)$$

Вращательная составляющая собственной энергии частицы может быть преобразована с помощью (16.15) к виду

$$E_{\text{В}} = \frac{1}{2} mc^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{p_*}{r_*}\right)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right]. \quad (16.16)$$

Из (2.2) при $n_* = 137$ вытекает, что

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*} \approx \frac{1}{44} r_*,$$

следовательно, $p_*/r_* \ll 1$. Пренебрегая в (16.16) величинами p_*/r_* и $(1/2)(p_*/r_*)^2$ по сравнению с единицей, получаем

$$E_{\text{в}} \approx \frac{1}{2} mc^2. \quad (16.17)$$

На основании выражений (16.12), (16.13) и (16.17) заключаем, что собственная энергия частицы $E_{\text{о}}$ имеет вид

$$E_{\text{о}} \approx mc^2. \quad (16.18)$$

Формула (16.18), при трактовке ее как точного равенства, совпадает с известной в теории относительности формулой для энергии покоя тела массы m . (Далее мы покажем, что равенство в этой формуле действительно может быть сделано точным.)

Таким образом, введенная нами собственная энергия частицы может быть отождествлена с энергией покоя частицы, рассматриваемой в теории относительности. Обратим внимание на то обстоятельство, что в теории относительности понятию энергии покоя не дается какого-либо механического истолкования. В нашей же модели собственная энергия частицы $E_{\text{о}}$ имеет простой смысл: это есть кинетическая энергия свободной частицы при ее инерциальном движении. Эта энергия не зависит от выбора системы отсчета, так как рассчитывается относительно пространства Минковского.

Из формул (16.12), (16.13) и (16.17) вытекает, что поступательная и вращательная составляющие движения лучей вносят равные вклады, по $(1/2)mc^2$, в собственную энергию частицы. Поясним, почему так происходит.

Поступательная составляющая $\mathbf{j}_{\text{о}}$ скорости луча задается первыми двумя слагаемыми в правой части формулы (16.1). Домножая вектор $\mathbf{j}_{\text{о}}$ на c (чтобы получить величину размерности скорости), имеем

$$c\mathbf{j}_{\text{о}} = c(\mathbf{i} + \varphi\mathbf{q}_{\text{о}}).$$

Отсюда и из зависимостей $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{q}_{\text{о}} \cdot \mathbf{q}_{\text{о}} = 1$, $\varphi > 0$ и (16.3) находим:

$$|c\mathbf{j}_{\text{о}}| = c \operatorname{th} \varphi.$$

Повторим, что $i\varphi$ есть угол между осью луча и осью симметрии частицы. В связи с тем, что φ принимает значения из бесконечно-го интервала $(0, +\infty)$ и оси лучей распределены равномерно по внутренности светового конуса, количество лучей со значениями $\varphi \in (0, \Phi]$ (для любого $\Phi > 0$) пренебрежимо мало по сравнению с количеством лучей, для которых $\varphi \in (\Phi, +\infty)$. Поэтому можно считать, что практически все лучи характеризуются большими значениями φ и, значит, для них выполняется $\text{th } \varphi \approx 1$. Отсюда и из выписанного выше равенства вытекает, что $|c\mathbf{j}_o| \approx c$. Следовательно, скорость поступательного движения практически всех элементов частицы близка по модулю к скорости света c . Значит, вклад в кинетическую энергию частицы от поступательной составляющей движения лучей, как и утверждалось, равен $(1/2)mc^2$ (с помощью интегрирования по переменным φ , θ и η мы доказали ранее, что это выражение является точным). Заметим, что данная составляющая кинетической энергии частицы имела бы такое же значение и в том случае, если бы скорость поступательного движения лучей была направлена вдоль мировой линии частицы, то есть если бы выполнялось равенство $\mathbf{j}_o = \mathbf{i}$ (при этом $q = 0$), что сразу дает $|c\mathbf{j}_o| = c$.

Вращательную составляющую движения лучей мы рассмотрели выше при условии, что величина p_*/r_* пренебрежимо мала по сравнению с единицей. При таком условии можно полагать, что радиусы r_o всех винтовых питей, образующих лучи частицы, одинаковы и равны r_* (так как $r_o \in [r_* - p_*, r_* + p_*]$). Тогда при вращении лучей вокруг своих осей с угловой скоростью o все их элементы имеют одну и ту же линейную скорость вращения, составляющую по модулю $|o|r_*$. Из (16.15) при пренебрежении величиной p_*/r_* по сравнению с единицей вытекает, что эта линейная скорость равна скорости света c . Отсюда и заключаем, что вращательная составляющая движения лучей тоже вносит в кинетическую энергию частицы вклад $(1/2)mc^2$.

Возможность разложения собственной энергии частицы на сумму поступательной и вращательной составляющих объясняется следующим. Поступательная и вращательная составляющие скорости элементов частицы, как отмечалось, взаимно ортогональны. Кроме того, обе они лежат (при $q = -1/\text{ch } \varphi$) в пространственноподобном физическом пространстве частицы. Поэтому скалярный квадрат вектора скорости равен сумме скалярных квадратов этих составляющих. А так как собственная энергия частицы пропорциональ-

на скалярному квадрату вектора скорости, то отсюда и вытекает, что вклады данных составляющих в собственную энергию частицы суммируются.

Все скорости здесь, подчеркнем, рассматриваются по отношению к пространству Минковского. Причем указанные выше скорости поступательного и вращательного движений элементов частицы, будучи выраженными в безразмерных единицах (то есть без искусственно вводимого размерного множителя c), равны по модулю единице, что косвенно подтверждает их фундаментальный в рамках данной модели характер.

Равенства (16.17) и (16.18), описывающие собственную энергию частицы E_o и ее вращательную составляющую E_b , являются приближенными. Вместе с тем эти равенства могут быть сделаны точными, если изменить соответствующим образом значение параметра β .

Действительно, примем, что

$$\beta = \frac{\text{ch } \varphi}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2}}. \quad (16.19)$$

Это выражение, вместе с (3.6) и (10.34), приводит к следующей зависимости, заменяющей (16.15):

$$\left| \frac{or_*}{c} \right| = \beta |q| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{or_*}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right] = 1. \quad (16.20)$$

Заметим, что можно было бы именно данное выражение принять в качестве исходного допущения вместо (16.19). Тогда формула (16.19) была бы его следствием (при выполнении (3.6) и (10.34)).

Из (16.12)–(16.14) и (16.20) получаем вместо приближенных равенств (16.17) и (16.18) искомые точные равенства

$$E_b = \frac{1}{2} mc^2; \quad (16.21)$$

$$E_0 = mc^2. \quad (16.22)$$

Обсудим произведенное изменение параметра β .
В разд. 6 мы придали параметру β значение (6.11):

$$\beta = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 - \frac{p_*}{r_*}}. \quad (16.23)$$

Выбор этого значения преследовал две цели: сделать так, чтобы правая часть равенства (6.10) была конечной величиной, и обеспечить пространственноподобность всех винтовых нитей, составляющих частицу. Нетрудно убедиться в том, что если параметр β имеет значение (16.19), то правая часть равенства (6.10) также является конечной величиной. Однако для того, чтобы в этом случае все нити частицы были пространственноподобными, частица должна состоять из лучей, для которых угловая координата φ превосходит определенную величину, указанную в конце разд. 6. При использовании выражения (16.19) будем считать это условие выполненным. Впрочем, оно не является принципиальным, потому что лучи с координатами φ , меньшими любого фиксированного значения, не влияют на полученные ранее результаты. (Это объясняется тем, что, как отмечалось выше, количество лучей со значениями $\varphi \in (0, \Phi]$ при любом $\Phi > 0$ пренебрежимо мало по сравнению с количеством лучей, для которых $\varphi \in (\Phi, +\infty)$.)

Обратим внимание на то обстоятельство, что выражения (16.19) и (16.23) мало различаются между собой. Поскольку $p_* = r_* \sin(\pi/n_*)$ и $n_* = 137$ (см. (2.2) и (4.14)), то эти выражения могут быть представлены соответственно в виде

$$\beta \approx 0,99987 \operatorname{ch} \varphi; \quad \beta \approx 1,02347 \operatorname{ch} \varphi.$$

В тех случаях, когда можно пренебречь величиной p_*/r_* по сравнению с единицей, оба эти выражения приводят к одному и тому же значению параметра β :

$$\beta = \operatorname{ch} \varphi.$$

При использовании для параметра β значения (16.19) вместо (16.23) изменяется множитель Ланде g . С помощью формул из

разд. 14 (преобразованных соответствующим образом) можно показать, что в этом случае величина $g/2$ равна 1,00113 при «обрезании» множества значений временной переменной и равна 1,00119 при отсутствии «обрезания». Эти значения величины $g/2$ отличаются от ее экспериментального значения 1,00116 на относительную величину $3 \cdot 10^{-5}$, что ниже той точности, которая была достигнута в разд. 14 при использовании для параметра β значения (16.23).

Таким образом, переход от значения параметра β (16.23) к значению (16.19) позволяет, с одной стороны, получить точные равенства (16.21) и (16.22) вместо приближенных (16.17) и (16.18), но, с другой стороны, приводит к менее точному значению множителя Ланде. Поэтому для решения вопроса о виде параметра β необходимо проведение дальнейших исследований.

Выведем с помощью зависимости (16.20) еще две формулы, имеющие отношение к собственной энергии частицы.

Из проведенного в разд. 11 анализа экспериментальных данных вытекает, что спин частицы \overline{K} приблизительно равен по модулю постоянной Планка \hbar . Допустим, что это равенство является точным:

$$|\overline{K}| = \hbar. \quad (16.24)$$

(Аналогичное допущение мы сделали и в разд. 14, см. (14.2).)

На основании формулы (5.15) для спина частицы \overline{K} , принимая во внимание (2.2) и равенство $m = Nn_*m_*$, получаем

$$|\overline{K}| = \frac{1}{2} mc^2 \frac{1}{|o|} \left(\frac{or_*}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right].$$

Зависимости (16.20) и (16.24) дают возможность преобразовать это выражение к виду

$$|\overline{K}| = \frac{1}{2} mc^2 \frac{1}{|o|} = \hbar. \quad (16.25)$$

Угловая скорость собственного вращения лучей o , напомним, считается одинаковой для всех лучей частицы. Пусть ν_b — частота этого вращения:

$$\nu_b = \frac{|o|}{2\pi}. \quad (16.26)$$

Из (16.25) и (16.26) следует, что

$$h\nu_b = \frac{1}{2} mc^2, \quad (16.27)$$

где $\hbar = 2\pi\hbar$ — константа, называемая, как и \hbar , постоянной Планка. В связи с тем, что наша частица моделирует электрон, приравняем ее массу m массе электрона m_e . Тогда из (16.27), пользуясь известными значениями фундаментальных констант: $\hbar \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $c \approx 3,0 \cdot 10^8$ м/с, находим, что частота собственного вращения лучей частицы равна

$$\nu_B = \frac{m_e c^2}{2\hbar} \approx 6,2 \cdot 10^{19} \text{ Гц}. \quad (16.28)$$

Формулы (16.21) и (16.27) приводят к следующему выражению для вращательной составляющей собственной энергии частицы:

$$E_B = \hbar \nu_B. \quad (16.29)$$

Выведем аналогичную формулу для поступательной составляющей собственной энергии частицы.

Согласно выражению (3.7), за время одного полного оборота лучей частица смещается вдоль мировой линии на расстояние $|dl_{2\pi}|$, равное

$$|dl_{2\pi}| = \frac{2\pi c}{|o|} = \frac{\text{Ш}}{|q|} \quad (\text{при } o \neq 0 \text{ и } q \neq 0), \quad (16.30)$$

где Ш — шаг спирали (см. (2.7)). При выполнении (10.34), когда $q = -\text{ch}^{-1}\varphi$ и поступательное движение лучей происходит в направлении, ортогональном оси симметрии частицы, из (16.30) находим: $|dl_{2\pi}| = \text{Ш}_i$, где $\text{Ш}_i = \text{Ш} \text{ch} \varphi$. Очевидно, что Ш_i есть длина отрезка, являющегося проекцией на ось симметрии частицы участка оси луча длины Ш. А так как ось симметрии свободной инерциально движущейся частицы совпадает с мировой линией частицы, то Ш_i является также длиной проекции этого участка на мировую линию частицы. Из (16.30) следует, что величина Ш_i одинакова для всех лучей частицы. Итак, частица смещается вдоль мировой линии в течение одного оборота лучей на расстояние, равное Ш_i .

Промежуток собственного времени частицы, соответствующий расстоянию $|dl_{2\pi}|$, есть

$$|dt_*| = \frac{|dl_{2\pi}|}{c}. \quad (16.31)$$

Введем величину ν_{Π} , обратную к $|dt_*|$:

$$\nu_{\Pi} = \frac{1}{|dt_*|}. \quad (16.32)$$

Зависимости (16.26) и (16.30) – (16.32) дают $\nu_{\text{п}} = \nu_{\text{в}}$. Отсюда и из (16.13), (16.21) и (16.29) следует, что поступательная составляющая собственной энергии частицы

$$E_{\text{п}} = h\nu_{\text{п}}. \quad (16.33)$$

Формулы (16.29) и (16.33) связывают вращательную и поступательную составляющие собственной энергии частицы соответственно с частотой собственного вращения лучей и с величиной, обратной времени, за которое частица проходит вдоль мировой линии расстояние, равное Ш_i . Эти формулы аналогичны широко используемым в квантовой физике формулам, описывающим энергию элементарных частиц.

Резюмируя содержание настоящего раздела, можно сказать, что энергия построенной нами частицы описывается формулами (16.22), (16.29) и (16.33), которые аналогичны формулам, хорошо известным в теории относительности и квантовой физике. При этом в нашей модели собственная энергия частицы, равная mc^2 , имеет ясный механический смысл: это есть кинетическая энергия частицы относительно пространства Минковского. Половина этой энергии связана с поступательным движением частицы вдоль мировой линии, а другая ее половина обусловлена вращением лучей частицы вокруг своих осей с частотой, составляющей, согласно (16.28), примерно $6 \cdot 10^{19}$ Гц.

17. Позитрон

Изменим у нашей частицы знак скорости \mathbf{j} на обратный. При этом будем считать, что масса частицы остается прежней. Тогда собственная энергия и модуль спина частицы, как следует из формулы (16.2) и результатов разд. 4 и 5, не претерпят изменений. Вместе с тем собственное поле частицы F_s , согласно (13.2), меняет знак, что может быть интерпретировано с учетом (13.10) как изменение знака заряда частицы. Одновременно изменится на противоположное и направление движения частицы в пространстве Минковского: она будет двигаться в направлении от будущего к прошлому. Согласно теории элементарных частиц такая, движущаяся вспять во времени частица, у которой масса и модуль спина совпадают с аналогичными характеристиками исходной частицы, а заряд имеет противоположный знак, может быть истолкована как античастица. Следовательно, наша модель описывает наряду с электроном также его античастицу — *позитрон*.

Проиллюстрируем эту ситуацию. На рис. 17.1 изображена мировая линия электрона, который дважды меняет направление своего движения во времени: вначале, до точки 1, он движется из прошлого в будущее, затем, между точками 1 и 2, — из будущего в прошлое, и, наконец, после точки 2 — вновь из прошлого в будущее. Такой вид имеет картина движения электрона в пространстве Минковского. Однако в эксперименте эта картина выглядит совершенно иначе. Поскольку мы наблюдаем все явления природы внутри трехмерного физического пространства, то, перемещаясь вместе с ним сквозь пространство Минковского из прошлого в будущее, мы наблюдаем такую последовательность событий: сначала, в момент t_1 , в точке 2 происходит рождение пары электрон–позитрон, а затем, в более поздний момент t_2 , в точке 1 этот позитрон сталкивается с каким-то другим электроном и они аннигилируют.

Подчеркнем, что наша модель естественным образом описывает изменение движения электрона от прямого направления во времени к обратному и наоборот: это достигается простым изменением знака скорости частицы. Однако, если в действительности аннигиляция и рождение электронно-позитронной пары представляют собой не кажущиеся эффекты, а реальные процессы исчезновения и возникновения элементарных частиц, то данная модель вряд ли может быть использована для описания таких процессов, потому

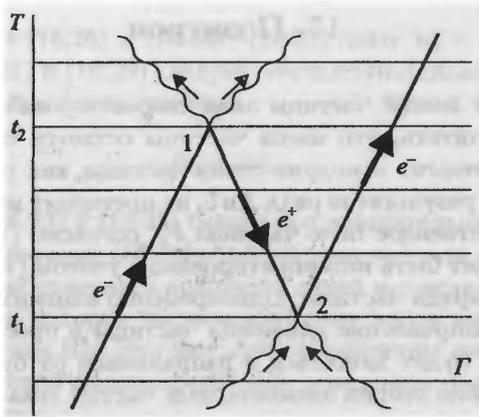


Рис. 17.1. Аннигиляция и рождение пары электрон-позитрон.

$\{T, \Gamma\}$ — лабораторная система отсчета в пространстве Минковского (T — ось времени; Γ — трехмерное физическое пространство, перемещающееся с течением времени вдоль оси T из прошлого в будущее); e^- — электрон, движущийся из прошлого в будущее; e^+ — тот же электрон, движущийся вспять во времени. Электрон в состоянии e^- имеет отрицательный заряд e , в состоянии e^+ — положительный заряд $|e|$. При рассмотрении ситуации изнутри физического пространства Γ принято трактовать электрон в состоянии e^+ как позитрон, движущийся в обычном направлении из прошлого в будущее; при такой интерпретации событие в точке 1 есть аннигиляция пары электрон-позитрон, а событие в точке 2 — рождение такой пары (волнистые линии — фотоны, несущие энергию).

что в этом случае потребовалось бы вводить в модель какие-то искусственные схемы разрушения и образования частицы. Отметим, что электромагнитное поле, которое возникает при смене направления движения частицы во времени, может быть рассчитано по той же формуле (13.2), что и поле, порождаемое частицей при любом другом характере ее движения.

18. Обсуждение

Проанализируем некоторые вопросы, связанные с построенной моделью электрона.

А. О стационарных электронных орбитах

Атомы представляют собой электронейтральные системы из протонов, нейтронов и электронов. Поскольку атомы существуют, не распадаясь, длительное время, всякая модель электрона должна допускать возможность образования стабильной системы из этих элементарных частиц. Покажем, что наша модель удовлетворяет такому условию.

Воспользуемся планетарной моделью атома, часто применяемой в атомной физике. В этой модели вся совокупность протонов и нейтронов, входящих в состав атома, представляется в виде материальной точки, именуемой ядром. Считается, что ядро неподвижно относительно некоторой инерциальной системы отсчета, а электроны или, точнее, моделирующие их геометрические объекты движутся по определенным орбитам вокруг ядра. Итак, пусть наша частица, моделирующая электрон и имеющая отрицательный заряд e , обращается вокруг ядра с положительным зарядом $|e|$.

Из электродинамики известно, что электрически заряженное тело при всяком ускоренном движении излучает электромагнитные волны. Этот процесс требует затрат энергии, следовательно, тело теряет со временем свою энергию. В соответствии с данным представлением наша частица, обращаясь вокруг ядра, должна непрерывно расходовать свою энергию. Поэтому через какое-то время она должна упасть на ядро, и тогда атом, как планетарная система, прекратит свое существование. Докажем, что наша модель допускает возможность безызлучательного ускоренного движения частицы.

В разд. 13 мы показали, что при определенных допущениях поле F_s , порождаемое частицей вдали от своего центра, совпадает с классическим (максвелловским) электромагнитным полем. Наиболее важными из примененных допущений являются допущение об отсутствии пространственного вращения частицы и допущение о том, что движение частицы в пространстве Минковского направлено вдоль оси симметрии частицы, то есть что в каждый момент

времени выполняется равенство $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$ (\mathbf{i}_L и \mathbf{i} — направляющие орты соответственно мировой линии и оси симметрии частицы). При таких допущениях, как вытекает из результатов настоящей работы и статьи [1], выражение, описывающее поле F_s , состоит из двух слагаемых. Одно из них обратно пропорционально квадрату расстояния от точки наблюдения до центра частицы, второе обратно пропорционально первой степени расстояния. Именно второе слагаемое, благодаря такой зависимости от расстояния, обуславливает излучение частицей электромагнитных волн.

Обратим внимание на еще одно различие этих слагаемых. Второе слагаемое пропорционально производной $d\mathbf{i}/dl$, тогда как первое от этой производной не зависит (l — собственное время частицы). Отсюда вытекает, что если, отказавшись от условия $\mathbf{i}_L = \mathbf{i}$, производить движение частицы таким образом, чтобы выполнялось $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$ при всех l , то второе слагаемое обратится в нуль и излучение будет отсутствовать.

Кинематические свойства нашей частицы позволяют осуществить такое движение. Для этого нужно, чтобы оси всех лучей частицы перемещались в пространстве Минковского поступательно. Тогда ось симметрии частицы тоже будет перемещаться поступательно, и поэтому тождество $d\mathbf{i}/dl \equiv \mathbf{0}$ будет выполнено. Будем называть такое движение частицы «поступательным» (кавычки употреблены по причине условности применения данного понятия к объекту, состоящему из движущихся по-разному частей).

Итак, если бы движение частицы было «поступательным», то частица, даже при наличии ускорения, не излучала бы электромагнитные волны и поэтому не расходовала свою энергию. В таком случае движение частицы вокруг ядра происходило бы по стационарной орбите, и в целом система частица-ядро, моделирующая атом, была бы стабильной (рис. 18.1).

Однако принятые нами законы движения частицы не согласуются с условием $d\mathbf{i}/dl \equiv \mathbf{0}$ (в частности, закон (8.13) напрямую связывает производную $d\mathbf{i}/dl$ с действующими внутри центрального сечения частицы полями F и F_s). Поэтому для описания стационарных электронных орбит требуется дальнейшее развитие модели.

Выскажем соображение, которое, по-видимому, позволит согласовать законы движения частицы с возможностью «поступательного» движения частицы. Допустим, что частица имеет ненулевой спин, связанный с переориентацией ее лучей (см. разд. 5). Поскольку спин частицы есть ее собственный момент количества движения,

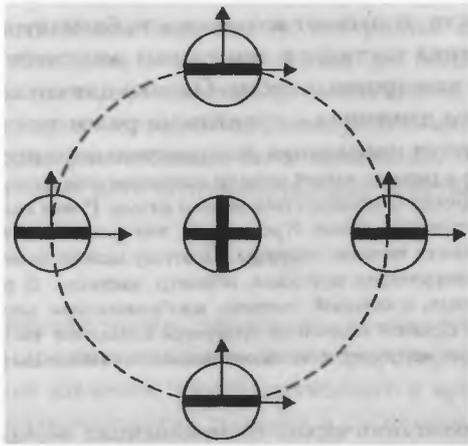


Рис. 18.1. «Поступательное» движение частицы по круговой орбите.

⊕ — положительно заряженное ядро; ⊖ — отрицательно заряженная частица (в четырех положениях). Стрелки отмечают два фиксированных направления внутри центрального сечения частицы; при «поступательном» движении частицы они перемещаются параллельно самим себе. Так выглядит движение частицы изнутри трехмерного физического пространства. В пространстве Минковского этому движению частицы соответствует винтовая мировая линия.

то такая частица может быть уподоблена гироскопу. В теории гироскопов доказывалось, что при движении гироскопа его ось вращения перемещается параллельно самой себе. Такое заключение делается при рассмотрении гироскопа в трехмерном пространстве. По аналогии можно ожидать, что в четырехмерном пространстве Минковского частица с ненулевым спином, как некий четырехмерный гироскоп, движется таким образом, что оси всех ее лучей-волчков тоже перемещаются параллельно самим себе. А это и представляет собой «поступательное» движение частицы, обеспечивающее отсутствие излучения. Сказанное позволяет предположить, что вопрос о существовании стационарных электронных орбит может быть решен на пути построения применительно к пространству Минковского аналога теории гироскопов.

Таким образом, настоящая модель, с точки зрения ее кинема-

тических свойств, допускает возможность безызлучательного ускоренного движения частицы и тем самым допускает существование стационарных электронных орбит. Однако для согласования характеристик такого движения с принятыми ранее законами движения частицы требуется проведение дополнительного исследования.

Отметим, что в рамках нашей модели возможен еще один, правда, довольно экзотический, вариант строения стабильного атома. Ранее мы показали, что радиус частицы достаточно велик. Кроме того, внутренность частицы, как видно из рис. 12.2, не занята нитями частицы. Поэтому можно поместить материальную точку, моделирующую нуклоны, в центр частицы. В результате мы получим модель атома, в которой частица, изображающая электрон, полностью охватывает ядро. В такой модели не требуется вращения частицы вокруг ядра, поэтому частица не излучает и атом оказывается стабильным.

Б. О квантовомеханических соотношениях неопределенностей

Для электронов и других элементарных частиц выполняются так называемые соотношения неопределенностей, введенные В. Гейзенбергом в 1927 г. на основе анализа экспериментальных данных:

$$\Delta x_i \Delta p_i = \frac{\hbar}{2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (18.1)$$

здесь Δx_i — минимально возможная неопределенность координаты x_i центра инерции элементарной частицы; Δp_i — минимально возможная неопределенность проекции на ось x_i импульса частицы; \hbar — постоянная Планка.

В квантовой физике считается, что соотношения неопределенностей выражают внутренние свойства материи, а не являются следствием неточности измерений. На основании такой их трактовки делается заключение о принципиальной невозможности поставить в соответствие элементарной частице строго фиксированную траекторию в физическом пространстве или, что фактически то же самое, фиксированную мировую линию в пространстве Минковского.

Однако соотношения (18.1), как доказано в работе [11], допускают и иную трактовку. В этой работе рассмотрены две материальные точки, которые характеризуются в каждый момент времени определенными значениями координат и импульсов и имеют одинаковые электрические заряды. Проанализирована ситуация, названная их «столкновением» (в кавычках), когда материальные точки в результате встречного движения оказываются на некотором минимальном расстоянии между собой (после чего они будут удаляться друг от друга).

Проведенный анализ основан на постулатах причинной механики [12, 13]. Согласно этим постулатам две взаимодействующие материальные точки в состоянии их наибольшего сближения обязательно разделены между собой сколь угодно малыми, но не равными нулю пространственным δx и временным δt расстояниями, отношение которых есть фундаментальная константа:

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \alpha c, \quad (18.2)$$

где α — постоянная тонкой структуры, c — скорость света.

В работе [11] величины δx и δt интерпретированы как среднеквадратические значения пространственного и временного расстояний между материальными точками в состоянии их наибольшего сближения. Это позволило выразить δx и δt через квантовомеханические неопределенности Δr и Δt — минимально возможные среднеквадратические отклонения пространственного и временного расстояний материальной точки от ее среднего положения (в [11] предположено, что для обеих материальных точек величины Δr и Δt одинаковы):

$$\delta x = \sqrt{2} \Delta r; \quad \delta t = \sqrt{2} \Delta t. \quad (18.3)$$

При макроскопическом описании элементарных частиц обычно предполагается (явно или неявно), что в состоянии их наибольшего сближения точками приложения действующих на них сил служит для обеих частиц одна и та же точка, пространственные и временная координаты которой являются усредненными значениями координат частиц; эта точка названа в [11] «точкой столкновения» (в кавычках, так как в действительности частицы не находятся в этой точке). Такое допущение приводит к неточностям в определении энергий и импульсов элементарных частиц. При этом неточность значения энергии равна работе, которую произвела бы сила при перемещении частицы от «точки столкновения» до точки ее истинного местонахождения. А неточность значения импульса равна добавке импульса, которую приобрела бы частица под действием данной силы за промежуток времени, отличающийся действительный момент взаимодействия от момента, соответствующего «точке столкновения».

В [11] показано, что при зарядах «сталкивающихся» материальных точек, равных e или $-e$ (где e — заряд электрона), и при

силе взаимодействия, описываемой законом Кулона, из зависимостей (18.2) и (18.3) вытекают как соотношения неопределенностей для пространственных координат и импульсов элементарных частиц (18.1), так и аналогичные соотношения неопределенностей для их энергий и временных координат.

Таким образом, положения причинной механики и результаты работы [11] приводят к выводу о том, что квантовомеханические соотношения неопределенностей могут быть истолкованы как следствие того факта, что процесс «столкновения» элементарных частиц подчиняется закону (18.2). Поэтому выполнение соотношений неопределенностей в действительности не является препятствием для того, чтобы приписывать элементарным частицам определенные значения пространственных и временных координат и характеризовать их движение с помощью фиксированных мировых линий в пространстве Минковского.

В. О реакции излучения

Важным эффектом, влияющим на движение частицы, является ее *самодействие*. Оно определяется значением собственного поля частицы F_s внутри центрального сечения частицы. Сформулированные в настоящей работе законы движения частицы позволяют рассчитать самодействие частицы при любом характере ее движения (в частности, в разд. 14 мы рассчитали самодействие частицы в случае ее пространственного вращения). В электродинамике принято называть результат воздействия на заряд его собственного электромагнитного поля реакцией излучения. Поэтому можно сказать, что положения настоящей работы дают возможность вычислить реакцию излучения для произвольно движущейся частицы.

Г. О дискретности и непрерывности характеристик частицы

В процессе построения модели мы приняли допущение о гладкости мировой линии частицы и допущение о континуальности множества осей лучей и множества нитей. Эти допущения были сделаны для того, чтобы при расчете характеристик частицы иметь возможность применять аппарат классического математического анализа. (Такой подход к построению модели аналогичен принятому в механике сплошной среды, где с такой же целью реальные

физические тела, представляющие собой дискретный набор атомов и молекул, моделируют тем или иным гладким многообразием, состоящим из континуального множества точек.)

Благодаря допущению о гладкости мировой линии, скорость частицы, ее энергия и импульс (относительно лабораторной системы отсчета) являются непрерывными функциями времени. Между тем, опыт показывает, что во многих случаях состояние электрона, как и других элементарных частиц, изменяется во времени скачкообразно. Например, в атоме переходы электронов из одного состояния в другое происходят практически мгновенно и сопровождаются выделением или поглощением определенных порций (квантов) энергии.

В нашей модели придать характеристикам частицы свойство дискретности можно следующими способами.

Можно принять, что мировая линия частицы является непрерывной кусочно-гладкой кривой. Тогда в моменты перехода частицы через угловые точки мировой линии собственное поле частицы F_s будет испытывать резкие изменения. Этот эффект может быть интерпретирован как испускание или поглощение частицей фотонов, несущих определенную энергию. Заметим, что поскольку на практике любые измерения требуют затрат времени, то измеренные в опытах физические величины всегда являются усредненными по каким-то промежуткам времени. Поэтому не исключено, что этот же эффект может быть получен и в предположении, что мировая линия является гладкой, но содержит короткие участки, характеризующиеся большой кривизной.

Еще один способ введения в модель дискретности состоит в принятии допущения, согласно которому расположения частицы в пространстве Минковского образуют не непрерывное, а дискретное множество. В этом случае мировая линия частицы будет представлять собой дискретный набор точек, и тогда при вычислении собственного поля частицы операция интегрирования вдоль мировой линии должна быть заменена операцией суммирования.

Дискретность может быть введена в модель также посредством отказа от допущения о континуальности множества осей лучей и принятии более реалистичного допущения, что это множество является конечным. Такое допущение, однако, может вызвать затруднения при вычислении собственного поля частицы, поскольку оно может привести к нарушению равномерности распределения осей лучей вблизи границы внутренности светового конуса в случае уско-

ренного движения частицы (то есть при бусте).

И, наконец, можно ввести в модель дискретность путем отказа от допущения о континуальности множества нитей и рассмотрения ситуации, когда это множество является конечным. Здесь следует отметить, что если спирали, из которых состоят в нашей модели лучи частицы, имеют в качестве прообразов в реальном мире полностью однородные объекты, то в таком случае, возможно, имеет смысл вообще исключить из рассмотрения нити и считать, что спирали представляют собой сплошные тела; в этом случае для описания их свойств может оказаться полезным аппарат обобщенных функций.

Д. О причинности и взаимодействии частиц

Принятое нами определение собственного поля частицы базируется на допущении, что это поле создают только те участки лучей, которые находятся в будущем по отношению к центральному сечению частицы. Вследствие такого допущения фактически оказываются исключенными из рассмотрения участки лучей, находящиеся в прошлом относительно центрального сечения частицы; во всяком случае, полученные выше результаты от них не зависят. По этой причине в отношении роли данных участков лучей можно занять с равным правом любую из приведенных ниже позиций.

Во-первых, можно просто игнорировать их существование, подобно тому, как в физических теориях принято игнорировать существование опережающих решений волновых уравнений. Учитывая, что в физике такое игнорирование принято обосновывать необходимостью соблюдения принципа причинности, мы тоже сослались на этот принцип, когда при определении собственного поля частицы исключили из рассмотрения указанные участки лучей.

Во-вторых, поскольку эти участки лучей все равно никак не влияют на полученные результаты, можно допустить, что они вообще отсутствуют. Тогда лучи будут состоять только из участков, которые идут в будущее от центрального сечения частицы. В этом случае можно связать с моделью определенный художественный образ. Пусть некоторая совокупность наших частиц моделирует какое-то реальное макроскопическое тело (рис. 18.2). В соответствии с условием (10.34) оси лучей частицы движутся в направлениях, ортогональных к ее оси симметрии. Поэтому по мере продвижения части-

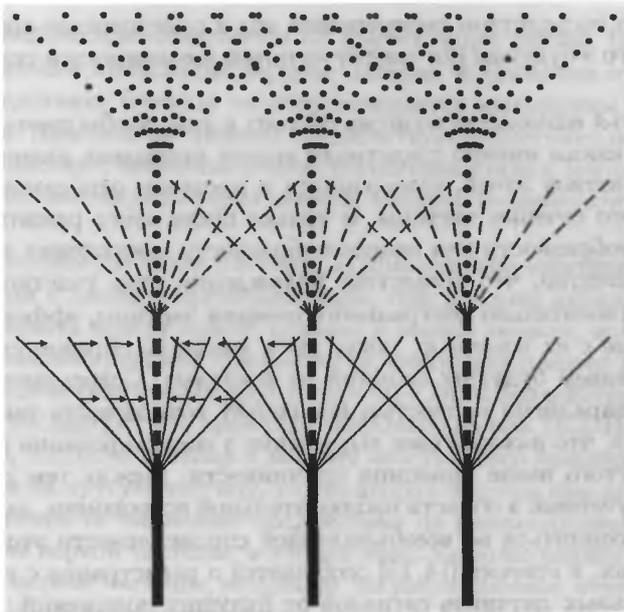


Рис. 18.2. Частицы, моделирующие макроскопическое тело в пространстве Минковского.

Тонкие сплошные линии — тело в настоящий момент времени; штриховые и пунктирные линии — тело в будущие моменты; широкие сплошные линии — остающийся в прошлом «след» данного тела; стрелки указывают направления перемещения осей лучей.

цы из прошлого в будущее элементы лучей, находящиеся впереди нее во временном направлении, подходят один за другим к центральному сечению частицы. Будем считать, что они превращаются там в мировую линию, остающуюся позади частицы, причем в реальном мире этой мировой линии соответствует некое протяженное материальное образование. В таком случае вся совокупность мировых линий рассматриваемых частиц представляет собой геометрический образ некоторого материального объекта, связанного с данным телом и находящегося в прошлом относительно него. Поскольку лучи состоят из нитей, то можно говорить о том, что этот объект как бы сплетен из нитей (точнее, из их материальных прообразов в реальном мире). Следовательно, мы можем говорить о

том, что посредством перемещения тел в пространстве-времени из прошлого в будущее Бог плетет из нитей-возможностей ткань судьбы.

Третья возможная позиция состоит в том, чтобы сначала выяснить, к каким именно следствиям может приводить наличие в модели участков лучей, находящихся в прошлом относительно центрального сечения частицы, и только после этого решать вопрос о целесообразности или нецелесообразности исключения их из модели. Понятно, что вследствие нахождения этих участков в прошлом относительно центрального сечения частицы, эффекты, описываемые с их помощью, могут быть каким-то образом связаны с воздействием будущих событий на прошлые. Современная физическая парадигма полностью исключает возможность такого воздействия, что находит свое выражение в постулировании в физике упомянутого выше принципа причинности. Между тем результаты, полученные в области наблюдательной астрономии, дают основание усомниться во всеобъемлющей справедливости этого принципа. Так, в статьях [14, 15] сообщается о регистрации с помощью специальных датчиков сигналов от будущих положений звезд, то есть от тех мест на небесной сфере, где звезды пока что отсутствуют, но куда они придут через определенные промежутки времени. В публикациях [16, 17] наличие таких сигналов подтверждено независимыми наблюдателями.

Обсудим возможность воздействия будущих событий на прошлые с методологической точки зрения.

Формулируемый в физике *принцип причинности* заключается в утверждении, что только прошлые физические события могут влиять на будущие события, но не наоборот (что с учетом положений теории относительности приводит к заключению о невозможности движения материальных тел со скоростями, превышающими скорость света в вакууме) [18]. Однако философское осмысление понятия причинности, обобщающее опыт всех естественных наук, приводит к несомненному выводу, что это понятие имеет гораздо более богатое содержание [19, 20].

Согласно философским воззрениям, *причинность* есть генетическая связь между отдельными состояниями видов и форм материи в процессах ее движения и развития. Сущностью причинности является производство причиной следствия. Причинность представляет собой внутреннюю связь между наличествующим явлением и тем, что им порождается, что еще только становится. Этим

она принципиально отличается от других форм связей. В процессе причинения происходит перенос материи и движения от причины к следствию, поэтому он сопровождается изменением и самой причины. Причина во времени предшествует следствию, но вместе с тем существует более или менее длительная стадия, когда причина и следствие сосуществуют вместе, активно воздействуя друг на друга.

Рассмотрим две наши частицы, моделирующие электроны. В соответствии с данным представлением, они должны активно взаимодействовать между собой. Однако в нашей модели, вследствие использования принципа причинности, фактически имеет место не взаимное действие частиц друг на друга, а лишь воздействие одной частицы на другую, что проиллюстрировано на рис. 18.3. Из рисунка видно, что если частица в момент собственного времени l_0 воздействует на другую частицу, то эта вторая частица при данном ее расположении не оказывает воздействия на рассматриваемое расположение первой частицы, а влияет лишь на более поздние расположения первой частицы, например, на расположение, отвечающее моменту l_1 . Ситуация еще более осложняется в том случае, если первая частица, начиная с момента l_0 , движется вспять во времени (пунктирная линия на рис. 18.3). Тогда она вообще становится не подверженной действию со стороны второй частицы, хотя сама продолжает воздействовать на нее.

Описать в нашей модели воздействие частицы-следствия на частицу-причину, очевидно, можно как раз с помощью тех участков лучей частицы-следствия, которые находятся в прошлом относительно ее центрального сечения. Однако можно сделать это и иным способом. Остановимся на нем подробнее.

В рамках нашей модели воздействие одной частицы на другую осуществляется следующим образом. Первая частица создает вокруг себя поле F_s , и оно, действуя на центральное сечение второй частицы, изменяет направление ее движения в пространстве Минковского. Но так как поле F_s в данном месте пространства определяется только теми элементами нитей первой частицы, которые находятся именно в этом месте, то фактически воздействие первой частицы на вторую оказывают только те элементы нитей первой частицы, которые при данных расположениях частиц находятся внутри центрального сечения второй частицы. Ранее мы молчаливо предполагали, что при этом сами элементы нитей первой частицы не испытывают никакого обратного воздействия со стороны вто-

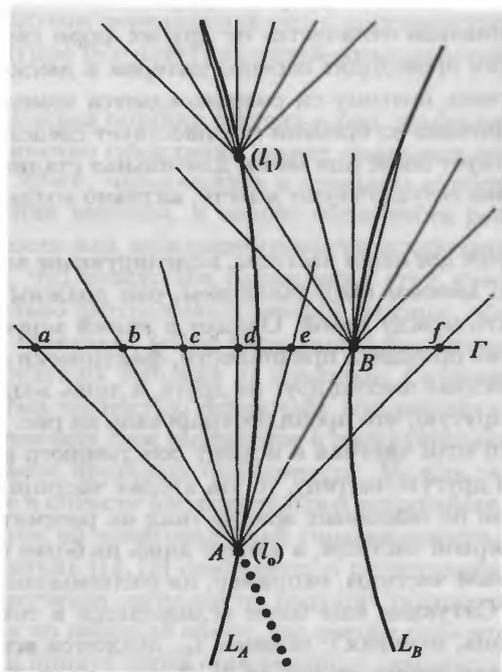


Рис. 18.3. Две частицы.

L_A и L_B — мировые линии частиц A и B ; пунктиром показан вариант мировой линии L_A , при котором частица A , начиная с момента l_0 , движется вспять во времени; прямые линии — участки лучей, идущие в будущее относительно центрального сечения частицы; Γ — физическое пространство, проходящее через центральное сечение частицы B ; a, b, c, d, e, f — точки пространства Γ , в которых воздействие частицы B на частицу A может «ощущаться» без задержки во времени.

рой частицы. Понятно, что вполне можно постулировать, что такое обратное воздействие имеет место. А это и будет означать, что частица-следствие воздействует на частицу-причину.

Обратим внимание на одно обстоятельство, которое может быть связано с таким воздействием. Допустим, что наше трехмерное физическое пространство проходит через центральное сечение частицы-следствия и нам удалось зарегистрировать акт ее воздействия на частицу-причину. Благодаря тому, что в рамках нашей модели частица является недеформируемым объектом, произведенное воздействие будет «почувствовано» сразу всеми элементами

частицы-причины. Поскольку мы способны наблюдать только те события, которые происходят внутри физического пространства, то реакцию частицы-причины на данное воздействие мы регистрируем в тех точках физического пространства, в которых его пересекают лучи этой частицы (см. рис. 18.3). Если трактовать лучи частицы как отдельные фотоны, испущенные частицей в разные стороны, то картина рассматриваемого воздействия будет представляться таким образом: произошло изменение состояния одного из испущенных частицей фотонов и это событие мгновенно изменило состояния всех других испущенных ею фотонов, даже тех, которые находились в этот момент на значительном удалении от первого фотона. Известно, что такой эффект действительно наблюдается в опытах. Он носит название эффекта Эйнштейна-Подольского-Розена [21].

Итак, если философское понятие причинности точнее отражает свойства реальных причинно-следственных связей, нежели понятие причинности, принятое в физике, то при описании взаимодействия реальных тел нужно учитывать возможность воздействия тела-следствия на тело-причину. Наша модель позволяет включить в рассмотрение такое воздействие двумя разными способами. Во-первых, можно принять, что участки лучей частицы-следствия, находящиеся в прошлом относительно ее центрального сечения, воздействуют на центральное сечение частицы-причины, и, во-вторых, можно допустить, что элементы центрального сечения частицы-следствия воздействуют на соприкасающиеся с ними элементы лучей частицы-причины.

Е. О частице в псевдоримановом пространстве-времени

В специальной теории относительности роль базисного многообразия, задающего пространственные и временные свойства мира, играет пространство Минковского. В общей теории относительности в качестве базисного многообразия выступает четырехмерное псевдориманово пространство. Оно обладает тем свойством, что все пространства, касательные к нему, являются пространствами Минковского.

Построенная в настоящей работе модель электрона опирается на положения специальной теории относительности. Аналогичная модель, очевидно, может быть построена и в рамках общей теории относительности. В такой модели осями лучей, образующими остов

частицы, будут служить пересекающиеся в одной точке — центре частицы — времениподобные геодезические.

Обсудим некоторые обстоятельства, связанные с моделированием электрона в псевдоримановом пространстве.

Одно обстоятельство состоит в следующем. При построении нашей частицы мы проводили интегрирование по всем направляющим ортам осей лучей (см. разд. 6). Эти орты имеют начало в центре частицы и концы на единичной псевдосфере. Из-за некомпактности последней одна из угловых координат, определяющих положение ортов в пространстве, принимает значения из бесконечного интервала $[0, +\infty)$. Поэтому операция интегрирования по этой координате включает в себя предельный переход к бесконечному значению верхнего предела интегрирования. В ряде формул, полученных нами, такие предельные переходы нужно было производить одновременно в числителе и знаменателе. В этих случаях мы заменяли отношение пределов двух функций на предел их отношения, что, строго говоря, не является корректным из-за бесконечного значения пределов. Избежать этого, по-видимому, можно в общей теории относительности, если использовать псевдориманово пространство конечного объема. Поскольку в этом случае (трехмерная) площадь псевдосферы тоже будет конечной, то все угловые координаты будут принимать значения только из конечных интервалов, в связи с чем применять упомянутую некорректную процедуру не потребуется.

Теперь остановимся на втором обстоятельстве. Благодаря ненулевой кривизне псевдориманова пространства, собственное поле частицы в таком пространстве будет отличаться от поля, вычисленного нами для случая пространства Минковского. Однако на расстояниях от частицы, существенно меньших радиуса кривизны пространства, это отличие, очевидно, будет весьма малым. Поэтому для таких расстояний разность собственных полей частицы в псевдоримановом пространстве и в пространстве Минковского можно интерпретировать как малую добавку к вычисленному нами полю. Если окажется, что определяемая этой добавкой сила взаимодействия двух частиц пропорциональна произведению количеств их лучей, обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами и стремится сблизить частицы, то это будет означать, что данная добавка описывает гравитационное взаимодействие между частицами. В таком случае в общей теории относительности можно будет использовать пространство с кривизной, не зависящей от рас-

пределения массы, например пространство постоянной кривизны, что существенно упростит уравнения этой теории.

Третье обстоятельство имеет научно-фантастический оттенок. Допустим, что псевдориманово пространство-время представляет собой четырехмерную сферу с выколотой точкой (наличие выколотой точки связано с топологической причиной, ибо на целой сфере нельзя задать псевдориманову метрику). Рассмотрим частицу, центр которой располагается в точке, диаметрально противоположной выколотой точке. Оси лучей частицы, как сказано ранее, являются времениподобными геодезическими. В случае сферы они представляют собой дуги больших кругов. Они расходятся от центра частицы во всех времениподобных направлениях, но на противоположной части сферы они вновь сходятся, причем предельной точкой для них служит выколотая точка (это можно пояснить на примере глобуса: меридианы, являющиеся геодезическими на его поверхности, выходят из одного полюса и сходятся в противоположном полюсе). Таким образом, все лучи частицы сходятся в малой области, окружающей выколотую точку. Предположим, что мы можем воздействовать каким-то образом на элементы лучей, находящиеся в этой области. Тогда в силу недеформируемости частицы это воздействие будет воспринято сразу всей частицей. Следовательно, из данной области пространства-времени можно управлять поведением частицы, хотя ее центр находится в диаметрально противоположной части пространства-времени.

Допустим теперь, что все геометрические объекты, моделирующие реальные тела, имеют фрагменты, находящиеся в той же малой области пространства-времени. Тогда из этой области можно управлять всеми объектами. Если такая модель верно отражает свойства реальности, то это означает, что весь материальный мир может управляться из одного центра, хотя этот центр, возможно, и находится от нас на расстоянии миллиардов световых лет. И если это действительно так, то вся Вселенная есть просто некий механизм ... Но *кто* же управляет им?

К сказанному можно добавить следующее. В рамках теории относительности, вследствие использования для описания пространственных и временных свойств мира единого пространственно-временного многообразия, имеет место сосуществование всех прошлых, настоящих и будущих расположений геометрических объектов, моделирующих материальные тела. Успехи теории относительности в описании свойств различных физических систем позволяют считать, что данное представление верно отражает свойства мира. Значит, в мире существуют прошлые, настоящие и будущие состояния всех материальных

тел. Допустим, что элементарные частицы, из которых состоят материальные тела, создают вокруг себя электромагнитные поля, которые подобно полю, порождаемому нашей частицей, пропорциональны их скоростям (см. формулу (13.2)). Рассмотрим ситуацию, когда все тела неподвижны. В таком случае поля будут отсутствовать, и поэтому обнаружить наличие тел с помощью электромагнитных датчиков невозможно. А если к тому же все элементарные частицы пронизаемы, как наша частица, то у исследователя, находящегося среди них, создается впечатление, что мир пуст. Допуская, что они еще и недеформируемы, подобно нашей частице, можно назвать всю их совокупность, заполняющую мир, твердью. При отсутствии электромагнитных полей, то есть света, эта твердь будет погружена во мрак. Теперь из центра, о котором шла речь выше, приведем все тела в движение. Тогда появятся электромагнитные поля, то есть возникнет свет.

Ж. О моделях элементарных частиц

При построении модели электрона мы воспользовались методологией, посредством которой в классической механике Ньютона строятся модели любых материальных тел. Эта методология состоит в том, что постулативным образом выбирается базисное многообразие, отражающее пространственные и временные свойства мира, и материальные тела моделируются в нем теми или иными геометрическими объектами. Нет сомнения в том, что на основе этой методологии могут быть разработаны модели и других элементарных частиц.

Опыт построения модели электрона свидетельствует о том, что на начальном этапе разработки моделей элементарных частиц целесообразно использовать в качестве их математических образов линейчатые геометрические объекты в пространстве Минковского (подобно тому как мы приняли в роли первоначального математического образа электрона «точечную» частицу, представляющую собой совокупность пересекающихся в одной точке времениподобных прямых). При этом прямые, образующие такие линейчатые объекты, могут быть, вообще говоря, не только времениподобными, но также пространственноподобными или изотропными. На следующем шаге построения моделей можно «наращивать» на этих прямых какие-то структуры подобно тому, как мы «нарастили» на лучах «точечной» частицы определенную винтообразную структуру, получив тем самым частицу конечного радиуса.

З. О физических законах и свободе воли

Известно, что современная физика не дает всеобъемлющего описания мира. Единственная имеющаяся на настоящий момент пол-

ная и внутренне непротиворечивая картина бытия дается в религии, и она гласит: «Всё от Бога, а Бог непознаваем». Вследствие отсутствия строгих доказательств, опровергающих эту концепцию, было бы крайне антинаучным отвергать ее.

Согласно религиозным воззрениям, тварный мир имеет две составляющие: так называемую проявленную — материальный мир (мир неживой или косной материи), и непроявленную — мир ангелов и духов, к которому относятся и души людей. Материальные тела, составляющие проявленный мир, характеризуются строго детерминированным поведением, то есть поведением, которое может быть описано физическими законами — математически выраженными зависимостями между параметрами тел. Именно выявление этих законов является главной задачей физики и других естественных наук (детерминированным может быть как поведение отдельных тел, так и поведение ансамблей тел, как это принимается в статистической физике и квантовой механике).

В отличие от материальных тел, жители непроявленного мира — ангелы и духи — имеют свободу воли, и поэтому их поведение не является детерминированным. Не является полностью детерминированным и поведение человека, представляющего собой соединение материального тела и наделенной свободой воли нематериальной души. Известные в настоящее время физические теории не содержат уравнений, которые позволили бы описать поведение объектов, обладающих свободой воли. Современная физическая картина мира вообще не включает в себя такие понятия, как «жизнь», «сознание», «свобода воли». Эти термины просто отсутствуют в Физической энциклопедии (из чего, конечно, не следует, что соответствующие явления не существуют).

Согласно современным физическим представлениям, материальные тела являются системами из элементарных частиц. Поэтому развитие теории элементарных частиц может многое прояснить в свойствах материальных тел. Однако, поскольку материальная и нематериальная составляющие мира находятся во взаимосвязи, а нынешняя физическая парадигма не включает в себя представление о нематериальной составляющей мира, то теория элементарных частиц, даже если она будет когда-нибудь завершена, не явится заключительным аккордом в исследовании устройства мира, как иногда считается, а станет лишь очередным шагом в выяснении свойств его материальной составляющей.

Заключение

«Лучист дворец небес,
но он из тяжких плит».
К. Д. Бальмонт [30]

Лучистая модель электрона, развитая в настоящей работе, базируется на методологии, которую впервые И. Ньютон применил при построении основ механики. Эта методология заключается в том, что материальные тела моделируются геометрическими объектами в постулативно выбираемом многообразии, отражающем пространственные и временные свойства мира.

В нашей модели роль такого многообразия выполняет вводимое в специальной теории относительности пространство Минковского — четырехмерное вещественное псевдоевклидово пространство сигнатуры (1, 3). Электрон представлен в нем геометрическим объектом, который назван *частицей* и состоит из протяженных во времениподобных направлениях трехмерных винтообразных тел — лучей.

Каждый *луч* представляет собой совокупность винтовых линий, именуемых *нитьями*, которые имеют общую времениподобную ось и группируются в 137 «толстых» винтовых линий — *спиралей*. Оси всех лучей частицы пересекаются в одной точке — *центре* частицы — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Лучи считаются недеформируемыми и взаимопроницаемыми объектами. Их движение в пространстве Минковского происходит таким образом, что в целом образуемая ими конструкция — частица — повторяет себя во все моменты времени, что позволяет говорить о недеформируемости частицы. При этом лучи вращаются вокруг своих осей с частотой около $6 \cdot 10^{19}$ Гц, что

обуславливает наличие у частицы спина. Посредством переориентации лучей спину частицы может быть придано любое направление в трехмерном физическом пространстве и любая величина от нуля до постоянной Планка \hbar .

Каждому элементу нити поставлен в соответствие бивектор из направляющего орта касательной к нити и вектора скорости элемента. Сумма таких бивекторов для всех нитей, проходящих через ближайшую окрестность некоторой точки пространства Минковского, представляет собой тензор электромагнитного поля в этой точке. Благодаря взаимопроницаемости лучей, имеет место суперпозиция электромагнитных полей, создаваемых разными частицами.

Внешняя граница частицы близка к псевдосфере в пространстве Минковского (последняя является аналогом однополостного гиперболоида в трехмерном собственно евклидовом пространстве). Поэтому частица может считаться близкой к четырехмерному (псевдо)шару. Вместе с тем частица простирается от точки пересечения осей лучей до бесконечности во всех времениподобных направлениях и объединяет в себе обычно различаемые электрический заряд и порождаемое им электромагнитное поле.

Построенная модель:

а) точно описывает максвелловское электромагнитное поле электрического заряда при произвольном его движении;

б) обеспечивает наличие у частицы собственного момента количества движения — спина, вычисляемого по обычным правилам механики, и собственного магнитного момента, связанного со спином такой же зависимостью, какой связаны в электродинамике магнитный момент и момент количества движения электрически заряженного макроскопического тела;

в) описывает результаты опытов Эйнштейна–де Хааза и Штерна–Герлаха, послужившие в свое время основанием для введения представления о наличии у электронов спина и собственного магнитного момента;

г) дает значение множителя Ланде g , которое отличается от его экспериментального значения на относительную величину $5 \cdot 10^{-6}$;

д) позволяет впервые ввести определение постоянной тонкой структуры α , независимое от других фундаментальных констант, и дает ее численное значение с относительной погрешностью $2 \cdot 10^{-7}$;

е) не приводит к расхождением, свойственным имеющимся тео-

риям электрически заряженных частиц, и не требует использования математически недопустимой процедуры перенормировки, применяемой в квантовой теории поля;

ж) придает вводимому в теории относительности понятию энергии покоя электрона (описываемой формулой $E_0 = m_e c^2$) ясный механический смысл как кинетической энергии электрона относительно пространства Минковского;

з) описывает позитрон как аналогичную электрону структуру из указанных лучей, но движущуюся в пространстве Минковского вспять во времени;

и) объясняет известный эффект Эйнштейна–Подольского–Розена;

к) позволяет ввести объективный масштаб времени в нашем мире: он задается процессом собственного вращения лучей частицы (с частотой, примерно равной $6 \cdot 10^{19}$ Гц); можно сказать, что процесс вращения лучей обуславливает темп течения времени в нашем мире; благодаря этому процессу становится возможным вести речь о времени не только как о пассивном параметре (время-параметр), но и как о явлении, связанном с определенным процессом (время-явление).

Предложенный в настоящей работе подход к построению модели электрона в пространстве Минковского может быть распространен на случай псевдориманова пространства-времени общей теории относительности и может быть применен при построении моделей других элементарных частиц.

Настоящее исследование представляет собой развитие одного из направлений причинной механики [12 – 15, 22 – 26].

Результаты исследования на разных его этапах были неоднократно обсуждены с коллегами. Их доброжелательные советы и критические замечания помогли уточнить ряд положений. Друзья и коллеги оказали также материально-техническую поддержку исследованию. Вот фамилии людей, которые способствовали выполнению данного исследования: А. Д. Александров, С. В. Антоневиц, Э. Л. Аэро, Р. Г. Баранцев, Л. Б. Гримзе, Э. А. Гурмузова, В. П. Гусев, П. А. Жилин, В. Т. Зарубайло, С. Е. Козлов, Д. Н. Козырев, К. В. Копейкин, Ю. И. Копилевич, Н. В. Кузнецов, А. П. Левич, А. Ф. Локтев, В. М. Ломовицкая, А. А. Малков, Б. З. Марголин, Н. Ф. Морозов, М. А. Нарбут, В. В. Орлов, В. Ф. Осипов, А. Н. Панов, В. Д. Родионов, К. В. Родионов, Л. Е. Румянцева, О. В. Темнов,

П. Е. Товстик, И. П. Утлинская, В. В. Фролов, В. А. Швецова,
С. А. Шейнерман, Е. А. Юнг. Большую работу по редактированию
настоящего издания выполнила Н. Д. Шихобалова. Всем им автор
выражает глубокую признательность.

Особое чувство благодарности испытывает автор по отношению
к своим учителям А. А. Вакуленко и Н. А. Козыреву. Без многолет-
него сотрудничества с ними это исследование не могло бы быть
поставлено и выполнено.

Научно-исследовательский институт математики
и механики имени академика В. И. Смирнова
Санкт-Петербургского государственного университета

СССР	—	Россия
Ленинград		Санкт-Петербург
1988 г.		2004 г.

Литература

1. *Шихобалов Л. С.* Новый взгляд на электродинамику // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1997. — Вып. 3 (№ 15). — С. 109–114. — Англ. пер.: *Shikhobalov L. S.* Electrodynamics reexamined // Saint-Petersburg University Mechanics Bulletin. — 1997.
2. *Шихобалов Л. С.* О строении физического вакуума // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1999. — Вып. 1 (№ 1). — С. 118–129.
3. *Davis M.* Applied nonstandard analysis. — N. Y.; L.: John Wiley & Sons, 1977. — Рус. пер.: *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980. — 240 с.
4. *Dwight H. B.* Tables of integrals and other mathematical data. — N. Y.: The Macmillan Company. — 1961. — Рус. пер.: *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — С. 82. — Формулы 420.3, 420.4.
5. *Физические величины: Справочник / А. П. Бабичев и др.* — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 504 с. — (Теоретическая физика; Т. 2).
7. *Шпольский Э. В.* Атомная физика. Т. 2. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 440 с.

8. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 5: Атомная и ядерная физика. Ч. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 416 с.
9. *Goldstein H.* Classical mechanics. — Cambridge: Addison-Wesley Press, 1950. — Рус. пер.: *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. — 416 с.
10. *Демельт Х.* Эксперименты с покоящейся изолированной субатомной частицей // *Успехи физических наук.* — 1990. — Т. 160, вып. 12. — С. 129–139.
11. *Shikhobalov L. S.* Quantum-mechanical uncertainty relations as a consequence of the postulates of N. A. Kozyrev's causal mechanics; forces in causal mechanics // *On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 2: The «active» properties of time according to N. A. Kozyrev.* — Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1996. — P. 109–134. — (Series on advances in mathematics for applied sciences; Vol. 39).
12. *Козырев Н. А.* Причинная или несимметричная механика в линейном приближении. — Пулково: [Б. и.], 1958. — 90 с.
13. *Козырев Н. А.* Избранные труды. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1991. — 447 с.
14. *Козырев Н. А., Насонов В. В.* О некоторых свойствах времени, обнаруженных астрономическими наблюдениями // *Проявление космических факторов на Земле и звездах.* — М.; Л.: [Б. и.], 1980. — С. 76–84. — (Проблемы исследования Вселенной; Вып. 9).
15. *Козырев Н. А.* Астрономическое доказательство реальности четырехмерной геометрии Минковского // *Проявление космических факторов на Земле и звездах.* — М.; Л.: [Б. и.], 1980. — С. 85–93. — (Проблемы исследования Вселенной; Вып. 9).
16. *Лаврентьев М. М., Еганова И. А., Медведев В. Г., Олейник В. К., Фоминых С. Ф.* О сканировании звездного неба датчиком Козырева // *Доклады Академии наук.* — 1992. — Т. 323, № 4. — С. 649–652.

17. *Акимов А. Е., Ковальчук Г. У., Медведев В. Г., Олейник В. К., Пугач А. Ф.* Предварительные результаты астрономических наблюдений неба по методике Н. А. Козырева. — Киев, 1992. — 17 с. — (Препринт / Главная астрономическая обсерватория Академии наук Украины; № ГАО-92-5Р).
18. *Физический энциклопедический словарь.* — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Причинности принципа». — С. 587–588.
19. *Философский энциклопедический словарь.* — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Причинность». — С. 531–533.
20. *Bunge M.* Causality: The place of the causal principle of modern science. — Cambridge: Harvard University Press, 1959. — Рус. пер.: *Бунге М.* Причинность: Место принципа причинности в современной науке. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 512 с.
21. *Демуцкий В. П., Половин Р. В.* Концептуальные вопросы квантовой механики // Успехи физических наук. — 1992. — Т. 162, № 10. — С. 93–180.
22. *On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 2: The «active» properties of time according to N. A. Kozyrev / Editor A. P. Levich.* — Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1996. — X + 228 p. — (Series on advances in mathematics for applied sciences; Vol. 39).
23. *Korotayev S. M.* A formal definition of causality and Kozyrev's axioms // Galilean Electrodynamics. — 1993. — Vol. 4, № 5. — P. 86–88.
24. *Galilean Electrodynamics.* — 2000. — Vol. 11. — Special Issues 1 (Spring 2000). — P. 1–20; Special Issues 2 (Fall 2000). — P. 21–40.
25. *Еганова И. А.* О природе звезд: подход Н. А. Козырева и его результаты // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции: Избранные труды Третьей сибирской конференции по математическим проблемам физики пространства-времени сложных си-

стем (ФПВ-2000), Новосибирск, 22–24 июня 2000 г. — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2001. — С. 215–276.

26. *«Причинная механика» Н. А. Козырева сегодня: pro et contra:* Сборник научных работ / Под ред. В. С. Чуракова. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2004. — 164 с.
27. *Демельт Х.* Эксперименты с покоящейся изолированной субатомной частицей // *Успехи физических наук.* — 1990. — Т. 160, вып. 12. — С. 129.
28. *Ильинъ Вл.* Матеріалізмъ и эмпириокритицизмъ. — М.: «Звено», 1909. — Гл. 5, разд. 2. — [Вл. Ильинъ — псевдоним В. И. Ульянова].
29. *Физический энциклопедический словарь.* — М.: Советская энциклопедия, 1983. — Статья «Электрон». — С. 876–877.
30. *Бальмонт К. Д.* Мировая тюрьма // Бальмонт К. Д. Избранное. — М.: Художественная литература, 1980. — С. 203.

Научное издание

Лаврентий Семёнович Шихобалов

ЛУЧИСТАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОНА

Печатается без издательского редактирования

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*

Компьютерная верстка *Ю. Ю. Тауриной*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать 29.11.2005. Формат 60 × 84¹/₁₆. Гарнитура литературная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,48. Заказ *336*

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, 6-я линия В. О., 11/21.

Тел. (812)328-96-17; факс (812)328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru

www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, 6-я линия В. О., д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

Книги Издательского дома Санкт-Петербургского государственного университета можно приобрести в магазинах Издательства по адресам:

Магазин № 1 «Vita Nova»:

Университетская наб., 7/9
Тел. 328-96-91; E-mail: vitanova@it13850.spb.edu

Филиал № 2:

Петродворец, Университетский пр., 28
Тел. 428-45-91

Филиал № 3:

В. О., 1-я линия, 26
Тел. 328-80-40

Филиал № 5:

Петродворец, Ульяновская ул., 1
(физический факультет)

Филиал № 6 «АКМЭ»:

В.О., Менделеевская линия, дом. 5
(здание исторического и философского факультетов)

Филиал № 7:

В. О., наб. Макарова, 6
(факультет психологии)

Филиал № 8:

Университетская наб., 11
(в холле филологического факультета)

В наших магазинах Вы найдете учебную и научную литературу и других издательств по всем отраслям знаний

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

предлагает учебники, учебные пособия, научную
и научно-популярную литературу по

*истории,
экономике,
психологии,
философии,
филологии,
языкознанию,
естественным и точным наукам*

студентам, преподавателям, научным сотрудникам, а
также учителям, школьникам — всем, кому интересен
мир книги.

Книги можно приобрести в магазинах Издательства,
а также через отдел реализации:

199034, С.-Петербург, 6-я линия В. О., д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru